Estonian-Finnish Olympiad - 2012

Problem 1. Asteroidi *(14 points)*

Tässä tehtävässä käsitellään hypoteettista asteroidia, jonka massa on m_a ja säde r_a ja joka liikkuu elliptisellä radalla M_s-massaisen Auringon ympäri. Oletetaan, että Maan rata on R_e-säteinen ympyrä, joka sijaitsee samassa tasossa asteroidin radan kanssa. Asteroidi ja Maa kiertävät Aurinkoa samaan suuntaan. Asteroidin lyhin etäisyys Auringosta (periheli) on $R_{\min} = \frac{1}{2}R_e$ ja pisin etäisyys (apheli) on $R_{\max} = 1.51R_e \approx 1.5R_e$ (voit käyttää likiarvoa helpottaaksesi laskujasi). Maan ratanopeus on $v_0 = 30\,\mathrm{m/s^2}$. Voit käyttää myös seuraavia numeroarvoja: Maan säde $r_e = 6400\,\mathrm{km}$, putoamiskiihtyvyys Maan pinnalla $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, Auringon kulmaläpimitta Maasta katsottuna $\alpha = 0.5°$, vuoden kesto $T_0 = 365$ days, Auringon pintalämpötila $T_s = 6000\,\mathrm{K}$, putoamiskiihtyvyys Auringon pinnalla $g_s = 275\,\mathrm{m/s^2}$, Stefan-Boltzmannin vakio $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-4}}$ ja valon nopeus $c = 3 \times 10^{10}\,\mathrm{m/s}$. Asteroidi on tietenkin pallomainen, ja sen säde on $r_a = 10\,\mathrm{m}$ ja massa $m_a = 1 \times 10^7\,\mathrm{kg}$. Aurinko ja asteroidi voidaan olettaa mustiksi kappaleiksi.

Part A. Törmäys Maahan (5 points)

i. (2 pts) Oletetaan, että asteroidimme törmää Maahan ja on jo hyvin lähellä. Sen etäisyys Maan pinnasta on $l \ll R_e$.
Mikä on asteroidin nopeus sen törmätessä maahan jos oletetaan (a) $l \gg r_e$; (b) $l \ll r_e$.

ii. (2 pts) Törmäysparametri b määritellään Maahan sidotussa koordinaatistossa etäisyytenä Maasta siihen suoraan, joka saadaan jatkamalla asteroidin kaukaista rataa suoraan. (Suora on siis asteroidin radan tangentti, kun asteroidi on kaukana maasta, etäisyydellä l, $r_e \ll l \ll R_e$.)
Määritä törmäysparametrin suurin arvo $b_{\max}$, jolla asteroidi vielä törmää Maahan.

iii. (1 pt) Oletetaan, että asteroidi on törmäämässä suoraan Maahan $N = 10$ kierroksen kuluttua. Välttääksemme törmäyksen meidän täytyy esimerkiksi muuttaa asteroidin kierrosaikaa. Kuinka monella sekunnilla meidän täytyy muuttaa asteroidin kierrosaikaa, jotta törmäys vältetään? (Oletetaan, että ratojen risteämispisteet eivät muutu.)

Part B. Vetovoiman muuttaminen (9 points)

Teoriassa on mahdollista muuttaa asteroidin rataa Auringon säteilypaineen avulla. Tarkastellaan projektin toteuttamiskelpoisuutta käytännössä. Aurinko vetää puoleensa asteroidia voimalla $F_0 = GM_s m_a/R^2$, missä G on painovoimavakio ja R on etäisyys Aurinkoon. Merkitään $GM_s = \gamma_0$, jolloin lauseke saa muodon

$$F = \gamma_0 m_a/R^2.$$

Oletetaan, että vakio γ_0 pienennetään arvoon γ_1 asteroidin ollessa perihelissä.

i. (2 pts) Mikä on uusi aphelietäisyys $R'_{\max}$ uudella painovoimavakion arvolla. Anna tulos parametrin $\kappa = (\gamma_0 - \gamma_1)/\gamma_0$ avulla.

ii. (2 pts) Kuinka paljon asteroidin kiertoaika muuttuu parametrin κ funktiona ? Oletetaan, että $\kappa \ll 1$.

iii. (4 pts) Oletetaan, että asteroidi maalataan sen ollessa perihelissä. Erikoismaali heijastaa kaiken tulevan säteilyn takaisin tulosuuntaansa. Tällainen maalaaminen muuttaa asteroidin ja Auringon välistä kokonaisvetovoimaa. Mikä on maalaamisen aiheuttama muutos efektiivisessä vetovoimassa, eli tätä vastaava parametrin κ arvo. Anna myös parametrin numeroarvo.

iv. (1 pt) Arvioi, onko asteroiditörmäyksen ehkäiseminen tällä tavoin toteutettavissa käytännössä.

Problem 2. Kiertoprosessi *(5 points)*

Termodynaaminen ideaalikaasun kiertoprosessi koostuu kahdesta isotermistä lämpötiloissa T_1 ja T_2 sekä kahdesta näitä yhdistävästä isokoorista(Isokoorisessa prosessissa tilavuus on vakio). Laske systeemin terminen hyötysuhde.

Problem 3. Tanko *(5 points)*

Kaksi sylinterin muotoista pyöreää tankoa on kiinnitetty päällekkäin kuvan mukaisesti. Tankojen keskipisteiden välimatka on $4d$, missä d on tankojen paksuus. Tankojen väliin on kuvan mukaisesti laitettu samanpaksuinen sauva. Kitkakerroin tankojen ja sauvan välillä on $\mu = \frac{1}{2}$. Jos sauva on tarpeeksi pitkä, se pysyy tankojen välissä. Mikä on tangon minimipituus L, jolla sauva saadaan pysymään tankojen välissä kuvan mukaisesti?

Problem 4. RLC-piiri *(5 points)*

Käsitellään kuvan mukaista virtapiiriä, jossa $R_1 = 3R$, $R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, ja $L_1 = L_2 = L$. Pariston jännite on $\mathcal{E}$. Kytkin on aluksi suljettuna ja piiri tasapainotilassaan.

i. (1 pt) Mikä on volttimittarin lukema tasapainotilassa.

ii. (2 pts) Kytkin avataan. Mikä on volttimittarin lukema välittömästi kytkimen avaamisen jälkeen.

iii. (2 pts) Kuinka paljon lämpöenergiaa vapautuu kussakin vastuksessa, kun systeemi asettuu tasapainotilaansa kytkimen avaamisen jälkeen.

Problem 5. Heijastushila *(7 points)*

Määritä heijastushilan urien välimatka ja arvioi tuloksen virhe.

Välineet: heijastushila, vihreä laser($\lambda = 532\,\mathrm{nm}$),
viivoitin, teline laserille.

Problem 6. Uraanin hajoaminen *(7 points)*

Luonnonuraani sisältää 99.3% isotooppia U^{238}, joten voimme tässä tehtävässä jättää huomiotta muut uraanin isotoopit. U^{238} hajoaa oheisen taulukon mukaisesti. Taulukossa jokainen isotooppi hajoaa sen oikealla puolella olevaksi isotoopiksi. Hajoamisessa vapautuva energia megaelektronivolteissa (MeV) on annettu taulukon keskimmäisellä rivillä,$1\,\mathrm{MeV} = 1.6 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$. Alimmalla rivillä on sekunneissa mitatun puoliiintumisajan kymmenkantainen logaritmi $\log_{10} \tau_{\frac{1}{2}}$. Esimerkiksi isotoopille U^{238} annettu taulukon luku 17.15 tarkoittaa, että kyseisen isotoopin puoliintumisaika on $10^{17.15}\,\mathrm{s} \approx 1.41 \times 10^{17}\,\mathrm{s}$.

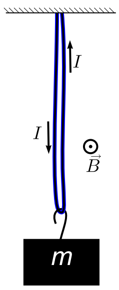
Voit myös käyttää seuraavia lukuarvoja: Avogadron luku $N_A = 6.02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, uraanin sulamispiste $T_0 = 1408\,\mathrm{K}$, uraanin tiheys $\rho = 1.89 \times 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$,uraanin lämmönjohtavuus $\kappa = 27.5\,\mathrm{W/m \cdot K}$ ja uraanin moolimassa $\mu = 0.238\,\mathrm{kg/mol}$. Voidaan olettaa, että prosessissa syntyvä radonisotooppi ei karkaa, vaan pysyy uraanikappaleen sisällä. *Huomautus:* Lämmönjohtavuus on verrannollisuuskerroin, joka kuvaa lämpövuon tiheyden $(\mathrm{W/m^2})$ ja yksikköpituuden matkalla tapahtuvan lämpötilan muutoksen dT/dx välistä riippuvuutta.

i. (2 pts) Oletetaan, että isotooppia U^{234} syntyy luonnossa vain isotoopin U^{238} hajoamisketjun osana. Mikä olisi tällöin isotoopin U^{234} osuus luonnonuraanissa?

ii. (2 pts) Määritä luonnonuraanin hajoamisen lämmöntuotto W watteina kuutiometriä kohden.

iii. (3 pts) Jos uraanipallo on riittävän suuri, sen sisäosat alkavat sulaa hajoamisessa vapautuvan lämmön vaikutuksesta. Kuinka suuri täytyy uraanipallon säteen R_0 vähintään olla, jotta se alkaisi sulaa? Pallon ulkopuolella lämpötila on $T_a = 300\,\mathrm{K}$.

Problem 7. Sähkönostin *(7 points)*



Tässä tehtävässä tarkastellaan taipuisaa eristettyä sähköjohtoa, jonka pituus on $2l$. Johdon päät on kiinnitetty kattoon. Johdon keskelle on ripustettu paino, jonka massa on m. Johto itsessään on kevyt. Johdon ympärille järjestetään vaakasuora magneettikenttä, jonka voimakkuus on B ja normaali painovoimakenttä kiihtyvyydellä g. Johdon läpi johdetaan sähkövirta I.

i. (2 pts) Luonnostele johdon muoto tässä tilanteessa.

ii. (2 pts) Kuinka paljon korkeammalle paino voidaan maksimissaan nostaa tällä tavoin johtimessa kulkevaa virtaa lisäämällä?

iii. (2 pts) Kirjoita yhtälö, josta painon nousukorkeus Δh voidaan määrittää.

iv. (1 pt) Kuinka suuri sähkövirta I_0 tarvitaan painon nostamiseen matkan $\Delta h_0 = l(1 - \frac{3}{\pi})$ verran?

Problem 8. Kimmoisa törmäys *(7 points)*

Tässä tehtävässä käsitellään kahden pallon täysin kimmoisaa törmäystä . Toisen pallon massa on M ja nopeus v. Toinen pallo on aluksi levossa, ja sen massa on $m \leq M$. Törmäys ei välttämättä ole keskeinen. Pallojen pinnat ovat liukkaat, joten pallot eivät ala pyörimään törmäyksen seurauksena.

i. (1 pt) Ilmaise pallojen liikemäärät ennen törmäystä massakeskipistekoordinaateissa.

ii. (3 pts) Määritä pallojen liikemäärien itseisarvot törmäyksen jälkeen massakeskipistekoorinaatistossa.

iii. (3 pts) Mikä on suurin mahdollinen aluksi liikkuvan pallon poikkeutuskulma α (loppu- ja alkunopeusvektorien välinen kulma)?

Problem 9. Sähköjohdot *(6 points)*

i. (2 pts) Tarkastellaan köyttä, jonka pituusmassa on σ (massa pituusyksikköä kohden), ja jota jännitetään siten, että köyden jännitysvoima on T. Näytä, että tällaisessa köydessä häiriöt (esimerkiksi silmukat) etenevät nopeudella $k\sqrt{T/\sigma}$ ja määritä verrannollisuuskerroin k.

ii. (2 pts) Tarkastellaan kahden sähköpylvään välissä roikkuvaa johtoa, kun pylväiden välimatka on L ja johdon pituusmassa σ. Johdon keskikohta roikkuu johdon päätepisteiden välisen suoran alapuolella etäisyydellä d. Määritä johdon jännitysvoima olettan, että $d \ll L$. *Vihje:* käytä momenttien tasapainoa johdon puolikkaalle.

iii. (3 pts) Määritä sähköjohdon alin mahdollinen vapaiden värähtelyjen taajuus f_0 (oletetaan, että värähtelyjen amplitudi on niin pieni, ettei johdon jännitysvoima muutu).

Problem 10. Musta laatikko *(8 points)*

Selvitä mustan laatikon sisällä oleva virtapiiri.Virtapiirissä on johdinten lisäksi kaikkiaan neljä komponenttia. Välineet: musta laatikko jossa on neljä liitintä, johdonpätkä.

U^{238}	Th^{234}	Pa^{234}	U^{234}	Th^{230}	Ra^{226}	Rn^{222}	Po^{218}	Pb^{214}	Bi^{214}	Po^{214}	Pb^{210}	Bi^{210}	Po^{210}	Pb^{206}
4.27	0.27	2.27	4.86	4.77	4.87	5.59	6.12	1.02	3.27	7.88	0.06	1.43	5.41	–
17.15	6.32	4.38	12.89	12.38	10.70	5.52	2.27	3.21	3.08	-3.78	8.85	5.64	7.08	stable