Formulas for IPhO

Version: May 23, 2021

I　数学

1. Taylor 展開（アバウトに切り捨てる）：

$$F(x) = F(x_0) + \sum F^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$$

線形近似（特別な場合）：

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0)$$

$|x| \ll 1$ のときの例：

$$\sin x \approx x,\ \cos x \approx 1 - x^2/2,\ e^x \approx 1+x$$
$$\ln(1+x) \approx x,\ (1+x)^n \approx 1+nx$$

2. 摂動法：摂動のない（直接解ける）問題の解を 0 番目の近似値として求め，前の近似値に基づく次の近似値の補正を繰り返して解を求める．

3. 定数係数線形微分方程式 $ay''+by'+cy=0$ の解：

$$y = A\exp(\lambda_1 x) + B\exp(\lambda_2 x).$$

ここで $\lambda_{1,2}$ は特性方程式 $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ の異なる 2 解．もし a,b,c が実数で特性方程式の解が複素数 $\lambda_{1,2}=\gamma \pm i\omega$ ならば，

$$y = Ce^{\gamma x}\sin(\omega x+\varphi_0).$$

4. 複素数

$$z = a+bi = |z|e^{i\varphi},\ \bar{z} = a-bi = |z|e^{-i\varphi}$$
$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2+b^2,\ \varphi = \arg z = \arcsin\frac{b}{|z|}$$
$$\mathrm{Re}z = (z+\bar{z})/2,\ \mathrm{Im}z = (z-\bar{z})/2i$$
$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|,\ \arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

5. ベクトルの内積と外積は分配法則が成立する：$a(b+c)=ab+ac$.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = a_xb_x+a_yb_y+\cdots = ab\cos\varphi$$
$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = ab\sin\varphi,\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{e}_x + (a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{e}_y + \cdots$$
$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

スカラー三重積（3 つのベクトルで張られる平行四面体の体積）：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \equiv \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$$

6. 余弦定理と正弦定理：

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$a/\sin A = b/\sin B = 2R$$

7.
$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = (\tan\alpha\pm\tan\beta)/(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$$
$$\cos^2\alpha = \tfrac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},\ldots$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\left(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right),\ldots$$

8. 円周角は中心角の半分．よって，直角三角形の斜辺はその外接円の直径．もし四角形の対角の和が 180 度ならば，それは円に内接する．

9. 三角形の面積 $= \frac{1}{2}ah_a = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = abc/4R$.

10. 三角形の重心は，中線の交点で，中線を 2:1 に内分する．

11*. 幾何の問題へのベクトルアプローチ．

12. 微分：

$$(fg)' = f'g+fg',\ f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x)$$
$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$$
$$(e^x)' = e^x,\ (\ln x)' = 1/x,\ (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$$
$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$$

13. 積分：微分の公式の左辺と右辺を入れ替えたものと同じ（逆演算）．例えば，

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = x^{n+1}/(n+1).$$

置換積分の特別な場合：

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = F(ax+b)/a.$$

14. 円錐曲線：$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0=0$ で，$a_{11}=a_{22}$ ならば円，$a_{11}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)>0$ ならば楕円，$\cdots<0$ ならば双曲線，$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ ならば放物線．楕円：$l_1+l_2=2a$，$\alpha_1=\alpha_2$ [訳者注：焦点と曲線上の点を結ぶ直線と接線とのなす角]，$A=\pi ab$．双曲線：$l_1-l_2=2a$，$\alpha_1+\alpha_2=0$．放物線：$l+h=\mathrm{const.}$，$\alpha_1=\alpha_2$．

15. 数値計算．$f(x)=0$ の解を求めるニュートン法：

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

近似積分の台形規則：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2\{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\}+f(x_n)\right]$$

16. ベクトルの微分と積分：成分ごとに微分/積分する．あるいは無限に近い 2 つのベクトルの差を求めることで微分する

II　一般的な推奨事項

1. 全ての計算式の正しさを確かめる：a) 次元を調べる．b) 簡単で特別な場合を調べる（2 つの変数が等しい，1 つの変数が 0 または ∞）．c) 解の定性的な挙動の妥当性を調べる．

2. もし問題文中に驚くべき偶然の一致があれば（例えば 2 つのものが同じ），解答の鍵はそこにあるかもしれない．

3. 問題文中の推奨事項をよく読む．些細な部分に重要な情報が含まれている場合があるので，問題文の文言に注意する．かなり時間をかけても問題が解けない場合は，問題を誤解しているかもしれないので，もう一度問題文を読む．

4. 長くて時間のかかる計算は，簡略化しなければならない始めの方程式を全て書き出したのち，最後（他の全てが終わったとき）まで先送りする．

5. 絶望的に難しいと思われる問題でも，たいてい非常にシンプルな解法がある．オリンピックの問題に限って言えば，絶対に解ける．

6. 実験では，a) 測定するほどの時間が無いとしても，実験計画の概略を書く．b) 結果の正確さを高める方法を考える．c) 測定した値を全て（表として）書き出す．

III　運動学

1. 質点または剛体の並進運動の場合（積分→グラフの下の面積）：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t},\ \boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\ \left(x = \int v_x\,\mathrm{d}t\ \text{など}\right)$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2},\ \boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$$
$$t = \int v_x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int a_x^{-1}\,\mathrm{d}v_x\,,\ x = \int \frac{v_x}{a_x}\,\mathrm{d}v_x$$

もし a が定数ならば，これらの積分は簡単に求めることができて，例えば

$$x = v_0t + at^2/2 = (v^2-v_0^2)/2a.$$

2. 回転運動は，並進運動と似ていて：

$$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t\,,\ \varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t + \boldsymbol{n}v^2/R$$

3. 曲線運動は，ポイント 1 と同じだが，ベクトルは線速度，加速度，経路長に置き換える．

4. 剛体の運動：a)$v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$ ここで，$\boldsymbol{v}_A$ と $\boldsymbol{v}_B$ は剛体上の点 A と B の速度，α と β は $\boldsymbol{v}_A$ と $\boldsymbol{v}_B$ が直線 AB となす角．b) 瞬間回転中心（≠質点の軌道の曲率中心）は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に下ろした垂線の交点．又はもし $\boldsymbol{v}_A,\boldsymbol{v}_B \perp AB$ ならば，$\boldsymbol{v}_A$ と $\boldsymbol{v}_B$ の先端を結ぶ直線と AB の交点．

5. 非慣性系：

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 + \omega^2\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}_{Cor}$$

ここで，$\boldsymbol{a}_{Cor} \perp \boldsymbol{v}_1$．もし $\boldsymbol{v}_1 = 0$ なら $\boldsymbol{a}_{Cor} = 0$.

6*. 弾道問題：到達可能な範囲は

$$y \le v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$$

最適な弾道では，初速度と終速（衝突時の速度）が垂直になる．

7. 最短経路を求めるには，Fermat と Huygens の原理が使える．

8. ベクトル（速度，加速度）を求めるには，その向きと（場合によっては傾いた）ある軸への射影を求めれば充分．

IV　力学

1. 剛体の二次元的な平衡：力についての 2 つの式とトルクについての 1 つの式．1（又は 2）個の力についての式は 1（又は 2）個のトルクについての式で代用できる．トルクの方が良い場合が多く，原点を適切に選択することで「退屈な」力を消すことができる．もし 2 点のみに力がかかっているならば，（正味の）力がかかっている直線は一致する．3 点であれば，3 つの直線は 1 点で交わる．

2. 垂直抗力と摩擦力は 1 つの力に合成でき，垂直抗力に対して $\arctan\mu$ の角度で接触点に加わる．

3. 並進運動と回転運動についての Newton の第二法則：

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}\quad(\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})$$

二次元の場合には $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ は本質的にスカラーで，$M = Fl = F_tr$（l は力のうでの長さ）

4. 一般化座標．系の状態が 1 つの変数 ξ とその時間微分 $\dot{\xi}$ で表され，ポテンシャルエネルギーが $U=U(\xi)$，運動エネルギーが $K=\mu\dot{\xi}^2/2$ であるならば，$\mu\ddot{\xi} = -\,\mathrm{d}U(\xi)/\mathrm{d}\xi$．（したがって並進運動では，力はポテンシャルエネルギーの微分）

5. 系が質点 m_i で構成されているとき：

$$\boldsymbol{r}_c = \sum m_i\boldsymbol{r}_i/\sum m_j,\ \boldsymbol{P} = \sum m_i\boldsymbol{v}_i$$
$$\boldsymbol{L} = \sum m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i,\ K = \sum m_iv_i^2/2$$
$$I_z = \sum m_i(x_i^2+y_i^2) = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m\,.$$

6. 質量中心の速度が $\boldsymbol{v}_c$ であるような系（添え字 c は質量中心についての物理量であることを示す）：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_c + M_\Sigma \boldsymbol{R}_c \times \boldsymbol{v}_c,\ K = K_c + M_\Sigma v_c^2/2$$
$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_c + M_\Sigma \boldsymbol{v}_c.$$

7. Steiner の定理（平行軸の定理）も同じような形で（b は質量中心の回転軸からの距離）：

$$I = I_c + mb^2$$

8. ポイント 6 の $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{L}$ を用いて，Newton の第二法則：

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t\ ,\ \boldsymbol{M}_\Sigma = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$$

9*. ポイント 5 に加えて，質量中心を通る z 軸に対する慣性モーメントは $I_{z0} = \sum_{i,j} m_i m_j \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right]/(2M_\Sigma)$.

10. 原点に対する慣性モーメント $\theta = \sum m_i r_i^2$ は，$2\theta = I_x + I_y + I_z$ を用いることで二次元物体や等方性のある物体の I_z を計算するのに有用.

11. 相当単振子の長さが $\tilde{l}$ である物理振子：

$$\omega^2(l) = g/(l + I_c/ml)$$
$$\omega(l) = \omega(\tilde{l} - l) = \sqrt{g/\tilde{l}},\quad \tilde{l} = l + I_c/ml$$

12. 慣性モーメントの係数：円柱 $\frac{1}{2}$，球 $\frac{2}{5}$，球殻 $\frac{2}{3}$，棒 $\frac{1}{12}$（端に対しては $\frac{1}{3}$），正方形 $\frac{1}{6}$.

13. よく使われる保存則：エネルギー（弾性衝突，摩擦なし），運動量（正味の外力なし，各方向について成立），角運動量（正味の外トルクなし，例えば，外力のうでの長さが 0（これが 2 又は 3 点のまわりに成り立てば運動量保存で代用できる））

14. 非慣性系における見かけの力：慣性力 $-m\boldsymbol{a}$，遠心力 $m\omega^2\boldsymbol{R}$，Coriolis 力 $2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}$（避けた方がよい．速度に垂直なので仕事はしない）.

15. 傾いた座標：斜面上での運動については，斜面に平行と垂直な方向に軸をとるのがよい．このとき重力加速度は x 成分と y 成分をもつ．軸は斜交することもあるが，$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y$ のとき v_x は $\boldsymbol{v}$ の x 軸への射影ではない.

16. 2 つの物体の衝突：保存されるのは，a) 全運動量，b) 全角運動量，c) 一方の物体の衝突点に関する角運動量，d) 全エネルギー（弾性衝突の場合），摩擦がある場合は，摩擦力に垂直な方向の運動エネルギーが保存される．e) 衝突中に滑りが止まったならば，接触点の最終速度は接触面上にある．f) 滑りが止まらなかったならば，一方の物体から他方に伝わる運動量は，接触面の法線と $\arctan\mu$ の角度をなす.

17. 剛体のすべての運動は（物体の各点の速度を見ると）瞬間回転中心 C まわりの回転として表せる．物体上の点 P の C からの距離は P の軌跡の曲率半径とは異なることに注意せよ.

18. 紐の張力：重さのある吊り紐では，張力の水平成分は一定で垂直成分は下にある紐の重さにより変わる．滑らかな面の上の紐による（単位長さあたりの）力は，その曲率半径と張力で決まり，$N = T/R$. 似た場合として，表面張力による圧力は $p = 2\sigma/R$. 導出には直径に沿った圧力を調べる.

19. 液体の表面は（表面張力を無視すれば）等ポテンシャル面になる．非圧縮性流体では，w をポテンシャルエネルギーの体積密度として，$p = P_0 - w$.

20. 非圧縮性流体に対する Bernoulli の法則：

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\phi = \text{const.}$$

一様な重力場では $\phi = gh$. 比熱が c_p [J/kg] である気体では，

$$\frac{1}{2}v^2 + c_pT = \text{const.}$$

21*. 直線的な流線に沿う運動量の連続性：$p + \rho v^2 = \text{const.}$

22*. 断熱不変量：振動する系の 1 周期の間のパラメータの相対的な変化が小さければ，位相空間（x-p 座標で表される）上に書かれるループの面積は非常に高い精度で保存される.

23. 安定性を調べるには，a) ポテンシャルエネルギー最小の原理，又は b) 仮想仕事の原理を用いる.

24*. 空間的に有限な運動に対する Virial 定理：a) もし $F \propto |\boldsymbol{r}|$ ならば $\langle K\rangle = \langle U\rangle$（時間平均）．b) もし $F \propto |\boldsymbol{r}|^{-2}$ ならば $2\langle K\rangle = -\langle U\rangle$.

25. Tsiolkovsky の公式（ロケット）：$\Delta v = u\ln\frac{M}{m}$

V 振動と波

1. 減衰振動：

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\ (\gamma < \omega)$$

この方程式の解は（I.3. 参照）：

$$x = x_0 e^{-\gamma t}\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - \varphi_0\right)$$

2. 連成振動の式：$\ddot{x}_i = \sum_j a_{ij}x_j$

3. N 個の連成振動の系は，すべての振動子が同じ振動数 ω_i で $x_j = x_{j0}\sin(\omega_i t + \varphi_{ij})$ のように振動するという固有モードを N 個持つ．固有振動数 ω_i も N 個持つ（一致するかもしれない，$\omega_i = \omega_j$）．一般解（$2N$ 個の積分定数 X_i, ϕ_i を持つ）は全ての固有振動の重ね合わせ：

$$x_j = \sum_i X_i x_{j0}\sin(\omega_i t + \varphi_{ij} + \phi_i)$$

4. 一般化座標 ξ（IV.4. 参照）で表され $K = \mu\dot{\xi}^2/2$ である系は，$\xi = 0$ の点で平衡．小さな振動について $U(\xi) \approx \kappa\xi^2/2$（ここで $\kappa = U''(0)$）であり $\omega^2 = \kappa/\mu$.

5. x, t での波の位相は $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$ で，$k = 2\pi/\lambda$ は波数．x, t での値は $a_0\cos\varphi = \mathrm{Re}\,a_0e^{i\varphi}$. 位相速度は $v_f = \nu\lambda = \omega/k$ で，群速度は $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$.

6. 線形波（電磁波，小振幅の音波や水面波）の場合，どんなパルス波も正弦波の重ね合わせとして表せる．定常波は 2 つの逆向きに進む同じ波の合成：

$$e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(-kx-\omega t)} = 2e^{-i\omega t}\cos kt$$

7. 気体中の音速：

$$c_s = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)_{\text{断熱}}} = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma\overline{v^2}/3}$$

8. 弾性体中の音速は $c_s = \sqrt{E/\rho}$.

9. 浅水波（$h \ll \lambda$）の速さ：$v = \sqrt{gh}$. 弦の場合：$v = \sqrt{T/\rho_{lin}}$.

10. Doppler 効果：$\nu = \nu_0\frac{1+v_\parallel/c_s}{1-u_\parallel/c_s}$.

11. Huygens の原理：波面は段階的に構成される．過去の波面のすべての点に仮想的な波源を置く．結果は距離 $\Delta x = c_s\Delta t$ で区切られた曲線（ここで Δt は時間間隔，c_s は与えられた点の速度）．波は波面に垂直に進む.

VI 幾何光学，測光

1. Fermat の原理：点 A から B への波の経路は波の移動時間が最も短いもの.

2. Snell の法則：

$$\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = n_2/n_1 = v_1/v_2.$$

3. 屈折率が連続的に変化するならば，媒質を屈折率が n で一定のいくつかの仮想的な層に分けて Snell の法則を適用する．光線は屈折率一定の層に沿って進むこともでき，もし全反射の条件をわずかに満たせば，$n' = n/r$（r は曲率半径）

4. 屈折率が z 座標にのみ依存するならば，光子の運動量 p_x, p_y とエネルギーは保存される：

$$k_x, k_y = \text{const.},\ |\boldsymbol{k}|/n = \text{const.}$$

5. 薄いレンズの式（符号に注意する）：

$$1/a + 1/b = 1/f \equiv D$$

6. Newton の式：物体側焦点から物体までの距離を x_1，像側焦点から像までの距離を x_2 とすると，$x_1x_2 = f^2$

7. 像の位置を求める視差法：目の位置と垂直に動かしたときに，鉛筆の先が像に対してずれないような位置を探す.

8. レンズを通る光線の経路の幾何学的な描き方：a) レンズの中心を通る光線は屈折しない．b) 光軸に平行な光線は焦点を通る．c) 屈折後，初めに平行だった光線どうしは焦点面（焦点を通り光軸に垂直な平面）上で集まる．d) 平面の像は平面であり，この 2 つの平面はレンズの平面上で交わる.

9. 光束 Φ [単位：lumen (lm)] は，光のエネルギーを示し，眼の感度に応じて重み付けされる．光度 [candela (cd)] は（光源から出る）立体角あたりの光束で，$I = \Phi/\Omega$. 照度 [lux (lx)] は（面に入射する）面積あたりの光束で，$E = \Phi/S$.

10. 光束についての Gauss の定理：光度 I_i の点光源を囲む閉曲面を通って外に出る光束は，$\Phi = 4\pi\sum I_i$. 光源が 1 つで距離が r のとき $E = I/r^2$

11. 実験のヒント：紙についた油汚れが周囲の紙と同じ明るさならば，その紙は両面から同じように照らされている.

VII 波動光学

1. Huygens の原理に基づいた回折：障害物が波面を切断すると波面は小さな断片に分割され，それが仮想的な点波源となり，観測点での波の振幅はこれらの波源からの寄与の重ね合わせとなる.

2. 二重スリット（幅は $d \ll a, \lambda$）による干渉：強め合う角 $\varphi_{max} = \arcsin(n\lambda/d), n \in \mathbb{Z}$. $I \propto \cos^2(k\frac{a}{2}\sin\varphi)$, $(k = 2\pi/\lambda)$

3. 単スリット：弱め合う角：$\varphi_{min} = \arcsin(n\lambda/d)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. 中央の強め合う部分は $n = \pm 1$ の間であることに注意せよ．$I \propto \sin^2(k\frac{d}{2}\sin\varphi)/\sin\varphi$

4. 回折格子：主な強め合う角はポイント 2 と同じで，主な強め合う角の幅は d を回折格子の正味の長さとすればポイント 3 と同じ．n 番目の明線のスペクトルの分解能は，溝の総数を N 本として $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$.

5. 分光器の分解能：最短の光線と最長の光線の光学距離の差を L として，$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L}{\lambda}$.

6. プリズムの分解能：$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = a\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$

7. 理想的な望遠鏡（レンズ）で 2 点を解像するときの角度距離：$\varphi \approx 1.22\lambda/d$. この角度では，一方の点の中心が他方の点の最初の回折最小値に当たる.

8. Bragg の法則：間隔が d の平行な結晶面の組は，$2d\sin\theta = n\lambda$ ならば X 線を反射する．ここで θ は結晶面と X 線がなす角（かすめ角）.

9. 光学的に高密度な誘電体媒質による反射：位相が π ずれる．半透明の薄膜では $\phi_\rightarrow + \phi_\leftarrow = \pi$. ここで $\phi_\rightarrow$ と $\phi_\leftarrow$ は反射波と透過波の位相差（矢印は入射方向を示す）

10. Fabry-Pérot 干渉計：高い反射率 r（$1 - r \ll 1$）を持つ 2 枚の平行な半透明の鏡．分解能は $\frac{\nu}{\Delta\nu} \approx \frac{2a}{\lambda(1-r)}$. 5 つの平面波（干渉計の前で左右に進む波，内部を左右に進む波，後ろを進む波）を設定して境界条件を課すことで，透過スペクトルを求められる.

11. コヒーレントな電磁波：電場をベクトル図で表し，ベクトル間の角度を位相差とする．屈折率が $n = n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$（普通 $\mu \approx 1$）であることに注意せよ．エネルギー流密度（単位面積を通過する単位時間あたりのエネルギー）：$I = cn\varepsilon_0 E^2 = \frac{c}{n\mu_0}B^2$（$E$ と B は実効値）
12. Malus の法則：直線偏光が角度 φ で偏光板を通過すると $I = I_0 \cos^2\varphi$
13. 1/4 波長版：直線偏光成分間の位相が $\pi/2$ ずれる．
14. Brewster 角：入射角が $\tan\varphi = n$ を満たすとき，反射波と屈折波が垂直になり反射波は直線偏光となる．
15. 光学素子による回折：レンズやプリズムなどを通る光の光学距離を計算する必要はなく，図形的に考える．例えば，双プリズムは二重スリットによる回折と同じ回折をする．

16*. 光ファイバー：Mach-Zehnder 干渉計は二重スリットによる干渉と，円形共振器は Fabry-Pérot 干渉計と似ている．Bragg フィルターは X 線の場合と同じように働く．シングルモードの光ファイバーでは，$\Delta n/n \approx \frac{1}{2}(\lambda/d)^2$.

VIII　電気回路

1. $V = IR,\ P = VI$

$$R_{\text{直列}} = \sum R_i,\ R^{-1}_{\text{並列}} = \sum R_i^{-1}$$

2. Kirchhoff の法則：

$$\sum_{\text{節点}} I = 0,\ \sum_{\text{閉路}} V = 0$$

3. ポイント 2 の方程式を減らすために：節点電位法．ループ電流法．等価回路（3 端子の場合 $\Rightarrow$ $\triangle$ 又は Y の形，起電力のある 2 端子の場合 $\Rightarrow$ 抵抗と電池の直列）
4. 無限につながる抵抗：無限に続く格子の隣り合う節点間で，自己相似性を使う．鏡像法の一般化された方法．
5. 交流回路：R を Z に置き換えてポイント 1〜4 を用いる．

$$Z_R = R,\ Z_C = 1/i\omega C,\ Z_L = i\omega L$$

$$\varphi = \arg Z,\ V_{\text{eff}} = |Z| I_{\text{eff}}$$

$$P = |V||I|\cos(\arg Z) = \sum I_i^2 R_i$$

6. 特性時間：$\tau_{RC} = RC$, $\tau_{LR} = L/R$. $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$．定常的な電流分布への緩和は指数関数的で $\propto e^{-t/\tau}$
7. 電気回路のエネルギー保存則：$\Delta W + Q = qV$．ここで q は電圧降下 V を通った電気量で，電源のする仕事は $A = qV_{\text{emf}}$
8. $W_C = CV^2/2,\ W_L = LI^2/2$.
9. $V_{\text{emf}} = -\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(LI)/\mathrm{d}t$, $\Phi = BS$.
10. 非線形素子：V-I グラフでの非線形曲線と Ohm/Kirchhoff の法則を表す直線との交点として図形的に解を求める．複数の交点があれば安定性を調べる．いくつかの解は普通安定でない．
11. 短時間と長時間の極限を利用する：$t_{\text{observation}} \gg \tau_{RC}$ or τ_{LR} ならば，$I_C \approx 0$（C は断線している）又は $V_L \approx 0$（L は短絡している）のような準平衡状態に達する．$t_{\text{observation}} \ll \tau_{RC}$ or τ_{LR} ならば，C の電気量の変化や L での電流の変化は小さく，$\Delta Q \ll Q$ や $\Delta I \ll I$．即ち C は短絡していて L は断線している．
12. $L \neq 0$ ならば，$I(t)$ は連続．
13. 超電導の回路について，磁束 $\Phi = \text{const.}$．特に，外部磁場が無ければ $LI = \text{const.}$
14. 相互誘導：回路 1 を通る磁束は $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$（$I_2$ は回路 2 を流れる電流）で，$L_{12} = L_{21} \equiv M$ と $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ が成立．

IX　電磁気学

1. $F = kq_1q_2/r^2,\ U = kq_1q_2/r$ で，Kepler の法則が使える（XII 参照）．
2. Gauss の法則：$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$,

$$\oint \varepsilon \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q,\ \oint \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi G M$$

3. 循環定理：

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,(=\dot{\Phi}),\ \oint \frac{\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mu} = I,\ \oint \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

4. 電流素片により生じる磁束密度：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{e}_r}{r^2}.$$

したがって電流 I が流れる円形回路の中心では $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$.

5. $\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}l$.
6. Gauss の定理と循環定理より：帯電した導線について $E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}$，電流が流れる導線について $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$．帯電した面について $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，電流が流れる面について $B = \frac{\mu_0 i}{2}$．一様に帯電した球殻（又は無限に長い円筒）の内部で $E = 0$，軸に沿って表面に電流が流れる円筒の内部で $B = 0$．密度 ρ で一様に帯電，又は一様な電流 $\boldsymbol{i}$ が流れる，球（$d = 3$）/円柱（$d - 2$）/平面（$d = 1$）の内部で，

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon d}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu d}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}$$

7. 長いソレノイド：内部で $B = \mu n I$，外部で $B = 0$．磁束 $\Phi = NBS$（$n = \frac{N}{l}$）．インダクタンス $L = \Phi/I = \mu n^2 V$．短いソレノイド：$B_\parallel = \frac{\mu n I \Omega}{4\pi}$（$\Omega$ は立体角）．
8. 磁場を小型コイルや衝撃検流計で測定する：$q = \int \frac{V}{R}\,\mathrm{d}t = NS\Delta B/R$.
9. 静電場のエネルギー：

$$U = k\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\int \phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}q\,,\ \mathrm{d}q = \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V$$

10. 一様に帯電した球面や円筒面の各部分の間に働く力：帯電による力を静水圧による力に置き換える．
11. 全ての電荷が距離 r にある場合（例えば，不均一に帯電した球やリングの中心）：$\phi = kQ/r$
12. 外部電荷によって引き起こされる正味の電荷（又は電位）を求めるには，電荷を「出現」させて問題を対称的にし，重ね合わせの原理を用いる．
13. 導体は電荷や電場を遮蔽する．例えば，中空の球体の内部の電荷分布は外から見えない（あたかも Q という電荷を持った導電性の球があるように見える）．
14. 静電容量：$C = \varepsilon S/d$（平板），$4\pi\varepsilon r$（球），$2\pi\varepsilon l(\ln R/r)^{-1}$（同軸円筒）．
15. 双極子モーメント：

$$\boldsymbol{p}_e = \sum q_i \boldsymbol{r}_i = q\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{p}_\mu = I\boldsymbol{S}$$

16. 双極子のエネルギーとトルク：

$$U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{B}),\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{B})$$

17. 双極子場：$\phi = k\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r/r^2,\ E, B \propto r^{-3}$.
18. 双極子に働く力：$F = (\boldsymbol{p_e}\cdot\boldsymbol{E})'$, $F = (\boldsymbol{p_\mu}\cdot\boldsymbol{B})'$ [訳者注：ここの微分はむしろ grad である]．2 つの双極子間の相互作用：$F \propto r^{-4}$.
19. 磁気双極子としての点電荷：$p_\mu \propto \Phi \propto v_\perp^2/B$ は断熱不変量（IV.22. 参照）．
20. 鏡像法：接地された（磁石の場合は超電導の）平面が鏡の役割をする．接地された（又は孤立した）球体の場は，球体の内部にある 1 つ（又は 2 つ）の架空の電荷のつくる場として求められる．平面導波管（金属板の間のスリット）内の場は，電磁平面波の重ね合わせとして求められる．
21. 一様（電）場中の球（円柱）の分極：（$+\rho$ と $-\rho$ に一様に帯電した球（円柱）の重ね合わせで，$d \propto E$.
22. 渦電流：電流損失密度 $\approx B^2v^2/\rho$．1 回の通過で与えられる運動量：$F\tau \approx B^2a^3d/\rho$（ここで d は厚さ，a は大きさ）．
23. 超伝導体の内部や導体内部の高速プロセスでは，$B = 0$ なので $I = 0$ となる（電流は表面層を流れる．表皮効果）．
24. 一様な磁場 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ の中の電荷は，ドリフト速度 $v = E/B = F/eB$ でサイクロイドに沿って動き，一般化運動量は保存される：

$$p'_x = mv_x - qBy,\ p'_y = mv_y + qBx$$

同様に一般化角運動量も保存される：$L' = L + \frac{1}{2}qBr^2$.

25. 電磁流体発電機（a は電場の方向に沿った長さ）：

$$V_{\text{emf}} = vBa,\ r = \rho a/bc$$

26. ヒステリシス：B-H 座標（コアつきのコイルの場合は B-I 座標でも）での S 字型カーブ（ループ）．ループ面積は 1 サイクルあたりの熱エネルギー散逸密度を示す．
27. 物質中の場：$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$．ここで $\boldsymbol{P}$ は分極ベクトル（電気双極子モーメントの体積平均）．$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{J}$．ここで $\boldsymbol{J}$ は磁化の強さ（磁気双極子モーメントの体積平均である磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ に μ_0 をかけたもの）
28. 2 つの物質の界面で，E_t, $D_n (= \varepsilon E_n)$, $H_t (= B_t/\mu)$, B_n は連続．
29. エネルギー密度：$W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + B^2/\mu\right)$.
30. $\mu \gg 1$ の場合，磁力線は強磁性体に引き寄せられる（ポテンシャルホールとして作用する．ポイント 28 参照）．
31. 電流密度 $\boldsymbol{i} = ne\boldsymbol{v} = \sigma\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}/\rho$.
32. Lenz の法則：系は変化に逆らうように反応する．

X　熱力学

1. $pV = \frac{w}{M}RT$.
2. 1 モルの気体の内部エネルギー：$U = \frac{i}{2}RT$ [訳者注：単原子分子理想気体 $i = 3$，二原子分子理想気体 $i = 5$]．
3. 標準状態での 1 モルの気体の体積は 22.4 L.
4. 断熱過程：音速に比べて遅く，熱の出入りがない．$pV^\gamma = \text{const.}$（$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$）．
5. $\gamma = c_p/c_v = (i+2)/i$.
6. Boltzmann 分布：

$$\rho = \rho_0 e^{-Mgh/RT} = \rho_0 e^{-U/k_BT}$$

7. Maxwell 分布（v の速さをもつ分子の数）[訳者注：位相空間で $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ の間にある分子の数の分布であり，v の速さをもつ分子の数の分布とは異なる] $\propto e^{-mv^2/2k_BT}$
8. 大気圧：$\Delta p \ll p$ ならば $\Delta p = \rho g \Delta h$.
9. $p = \frac{1}{3}mn\overline{v^2} = nk_BT$（$n$ は数密度），$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3k_BT/m}$, $\nu = vnS$.
10. Carnot サイクル：断熱過程 2 つと等温過程 2 つ．S-T 座標を用いることにより $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ を得る．
11. ヒートポンプ：Carnot サイクルの逆．$\eta = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$.
12. エントロピー：$\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q\,/T$.
13. 熱力学第一法則：$\mathrm{d}'U = \mathrm{d}'A + \mathrm{d}'Q$
14. 熱力学第二法則：$\Delta S \geq 0$（また $\eta_{\text{real}} \leq \eta_{\text{Carnot}}$）．

15. 気体のする仕事（ポイント 10 も参照）：

$$A=\int p\,\mathrm{d}V\,,\quad \text{断熱過程: } A=\frac{i}{2}\Delta(pV)$$

16. Dalton の法則 [訳者注：理想気体のみ成立]：$p=\sum p_i$.
17. 沸騰：飽和蒸気の圧力 $p_v=p_0$．2 液の界面では $p_{v1}+p_{v2}=p_0$.
18. 熱流：$P=kS\Delta T/l$（k は熱伝導率）．直流回路に似ている（$P\leftrightarrow I,\ \Delta T\leftrightarrow V,\ k\leftrightarrow 1/\rho$）.
19. 熱容量：$Q=\int c(T)\,\mathrm{d}T$．固体では低温で $c\propto T^3$，高温で $c=3Nk_B$（Dulong-Petit の法則．ここで N は結晶中の原子数）
20. 表面張力：

$$U=S\sigma,\ F=l\sigma,\ p=2\sigma/R$$

21. Stefan-Boltzmann の法則（灰色体）：$P=\varepsilon\sigma AT^4$.
22. Wien の変位則：$\nu_{max}=Ak_BT/h\,(A\approx 2.8)$，$\lambda_{max}=hc/A'k_BT\,(A'\approx 5)$.

XI　量子力学

1. $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}\,(|\boldsymbol{p}|=h/\lambda)$，$E=\hbar\omega=h\nu$.
2. 干渉：波動光学のように.
3. 不確定性（数学の定理）：

$$\Delta p\Delta x\geq\frac{\hbar}{2},\ \Delta E\Delta t\geq\frac{\hbar}{2},\ \Delta\omega\Delta t\geq\frac{1}{2}$$

滑らかでない場合の定性的な推定には h の方が適する（$\Delta p\Delta x\approx h$ など）.

4. スペクトル：$h\nu=E_n-E_m$．スペクトル線の幅は寿命に関係し，$\Gamma\tau\approx\hbar$.
5. 振動子（例えば分子）のエネルギー準位（固有振動数 ν_0）：$E_n=(n+\frac{1}{2})h\nu_0$．多数の固有振動数の場合，$E=\sum hn_i\nu_i$.
6. トンネル効果：幅 l の障壁 Γ は，$\Gamma\tau\approx\hbar$（$\tau=l/\sqrt{\Gamma/m}$）であれば容易に透過する.
7. Bohr モデル：$E_n\propto -1/n^2$．（古典的に計算される）円軌道では，軌道の長さが波長 $\lambda=h/mv$ の整数倍.
8. Compton 効果：光子が電子から散乱されると，光子の $\Delta\lambda=\lambda_C(1-\cos\theta)$
9. 光電効果：$W+mv_{max}^2/2=h\nu$（W は仕事関数）．I-V グラフ：光電流は阻止電圧 $V=-(h\nu-W)/e$ で始まり，正方向に電圧が大きくなると緩和する.
10. Stefan-Boltzmann の法則：$P=\sigma AT^4$

XII　Kepler の法則

1. $F=GMm/r^2$，$U=-GMm/r$.
2. Kepler の第一法則（2 質点の重力相互作用）：それぞれの軌道は，系の質量中心に焦点を持つ楕円，双曲線，放物線になる．これは Runge-Lenz ベクトルから得られる（ポイント 9）.
3. Kepler の第二法則（角運動量の保存）：中心力が働く場にある質点について，その位置ベクトルは単位時間に一定の面積を描く.
4. Kepler の第三法則：r^{-2} に比例する力が働く場で楕円軌道を描く複数の質点について，周期は長半径の $\frac{3}{2}$ 乗に比例する：

$$T_1^2/T_2^2=a_1^3/a_2^3$$

5. 重力場中で楕円軌道を描く質点の全エネルギー（$K+U$）：

$$E=-GMm/2a$$

6. 楕円率が $\varepsilon=d/a\ll 1$ の場合，軌道は焦点をずらした円形をしていると考えられる.
7. 楕円の性質：$l_1+l_2=2a$（l_1 と l_2 は焦点までの距離）．$\alpha_1=\alpha_2$（一方の焦点から出た光は他方の焦点に反射する）．$S=\pi ab$.
8. 円とその円の中心に焦点をもつ楕円は長軸の部分でのみ接する.

9*. Runge-Lenz ベクトル（楕円率ベクトル）[訳者注：このベクトルはむしろ離心率と関係する．そこでここでは離心率ベクトルとして知られるベクトルを代わりに記す．これは焦点から近日点に向かう向きで，大きさが離心率 e に一致する．]：

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}}{GMm}-\boldsymbol{e}_r=\mathrm{const.}$$

XIII　相対性理論

1. Lorentz 変換（Minkowski 幾何学の 4 次元時空の回転）（慣性系間の速度が $\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{e}_x$）：$\beta=V/c$，$\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$ として，

$$ct'=\gamma(ct-\beta x),\ x'=\gamma(x-\beta ct),\ y'=y$$

$$E'/c=\gamma(E/c-\beta p_x),\ p_x'=\gamma(p_x-\beta E/c),\ p_y'=p_y$$

ここで，

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}=mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\cdots$$

$$p_x=\frac{mv_x}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}},\ etc.$$

2. 4 元ベクトルの長さ（スカラー量であり Lorentz 変換で不変）：

$$s^2=(ct)^2-x^2-y^2-z^2$$

$$(mc)^2=(E/c)^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2$$

3. 速度の加算：

$$v_x=\frac{v_x'+V}{1+v_x'V/c^2},\ v_y=\frac{v_y'}{\gamma(1+v_x'V/c^2)}$$

4. Doppler 効果：

$$\nu=\gamma(1+\beta\cos\theta)\nu_0$$

5. Minkowski 空間は，時間が虚数（$t\to ict$）であれば Euclid 空間にすることができる．回転角 φ に対して，$\tan\varphi=v/ic$ となり，$\sin\varphi$，$\cos\varphi$ を $\tan\varphi$ で表して Euclid 幾何学の公式を適用する（Lorentz 変換）.
6. 長さの縮み：$l'=l_0/\gamma$.
7. 時間の遅れ：$t'=t_0\gamma$.
8. 同時刻の相対性：$\Delta t=-\gamma v\Delta x/c^2$.
9. $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$（$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m\boldsymbol{v})$）（ここでの $\gamma=1/\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}$）
10. 超相対論的極限：$v\approx c$，$p\approx mc$，$\sqrt{1-(v/c)^2}\approx\sqrt{2(1-v/c)}$.

11*. 電場と磁場の Lorentz 変換：$\boldsymbol{E}'_\parallel=\boldsymbol{E}_\parallel$，$\boldsymbol{B}'_\parallel=\boldsymbol{B}_\parallel$，

$$\boldsymbol{E}'_\perp/c=\gamma\left(\boldsymbol{E}_\perp/c+\boldsymbol{v}/c\times\boldsymbol{B}_\perp\right),$$

$$\boldsymbol{B}'_\perp=\gamma\left(\boldsymbol{B}_\perp-\boldsymbol{v}/c\times\boldsymbol{E}_\perp/c\right)$$

「*」は発展内容.

訂正/提案 ⇒ kalda@ioc.ee
著者：Jaan Kalda
訳者：楠元康生（@lagu_ran）

和訳に当たって，使用文字の変更（ベクトルの表記法の変更を含む）を行った部分があり，誤りであると思われる数式については正しく改めたものを載せている．また，「XIII 章 相対性理論」は誤解の少ない学習のためにいくつかの内容の変更を行っている.