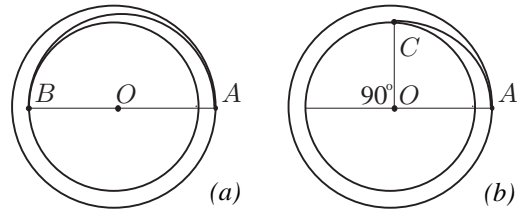


## XI Venemaa (1979)

### 1. Lend Kuule.

Kosmoselaev massiga  $M = 12$  t liigub mööda ringorbiiti ümber Kuu kõrgusel  $h = 100$  km. Selleks et minna kuundumisoriidile, lülitatakse lühikeseks ajaks sisse mootor. Düüsi väljalendavate gaaside kiirus on  $u = 10^4$  m/s. Kuu raadius on  $R_K = 1,7 \cdot 10^3$  km, vabalangemise kiirendus Kuu pinnal on  $g_K = 1,7$  m/s<sup>2</sup>.



1) Milline kogus kütust on vaja kulutada selleks, et kui punktis  $A$  lülitada korraks sisse mootor, siis laev kuunduks punktis  $B$  [joonis (a)]?

2) Teise kuundumisvariandi kohaselt antakse laevale punktis  $A$  Kuu suunaline impulss selleks, et laeva trajektoor puudutaks Kuu pinda punktis  $C$  [joonis (b)]. Kui palju kulub sellisel juhul kütust?

### 2. Kaalumine

See oli lihtne ülesanne Archimedese jõu kohta niiskes ja kuivas õhus normaalarhul.

### 3. Peegel Kuu peal

Kuu pinna optiliseks uurimiseks kasutati rubiinlaseri impulsskiirgust lainepikkusel  $\lambda = 0,69$   $\mu$ m. Laseri kiir suunati peegelteleskoobi abil kuu poole, objektiivi diameeter  $D = 2,6$  m. Kuu pinnale oli asetatud peegeldi, mis töötas valguskiirt otse tagasi suunava ideaalse peeglina diameetriga  $d = 20$  cm. Peegeldunud valgus püüti kinni selle sama teleskoobi abil ning fokuseeriti valgusandurile.

- 1) Millise täpsusega tuli suunata teleskoobi telg?
- 2) Milline osa laseri kiirgusenergiast registreeriti

anduril? Valguse hajumisega atmosfääris ja teleskoobis mitte arvestada.

3) Kas peegeldunud valgusimpulss oli nähtav ka palja silmaga? Silma tundlikkus lugeda võrdseks  $n = 100$  valguskvandiga; laseri kiirguse ühe impulsi energia oli  $E = 1$  J.

4) Hinnake, mitmekordse võidu andis peegeldi kasutamine. Kuu pind peegeldab keskmiselt  $\alpha = 10\%$  pealelangevast valgusest; peegeldunud kiirgus jaotub üle ruuminurga  $2\pi$  steradiaani.

Kuu kaugus Maast  $L = 3,8 \cdot 10^5$  km. Silmatera läbimõõduks lugeda  $d_0 = 5$  mm. Planck'i konstant  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J·s.

*Kommentaari:* Reaalsuses on hajumine atmosfääris märksa olulisem faktor, kui 2,6 meetrise diameetriga laserikiire difraktsiooniline lahkumine; Hubble'i kosmoseteleskoobi diameeter on umbes sama suur. Tema lahutusvõime on tõepoolest piiratud difraktsiooniga ning see on mitmeid kordi parem mistahes maapealsest teleskoobist

## XII Bulgaaria (1981)

### 1. Katseklaas vaakumis

Katseklaas massiga  $M$  asub vaakumis. Õhuke vahesein ("kolb") massiga  $m$  jagab algselt katseklaasi pooleks; kinnises pooles on  $n$  mooli üheaatomilist gaasi molaarmassiga  $M_0$  temperatuuril  $T$ . Vahesein lastakse vabaks ning ta lendab ilma hõõrdumiseta katseklaasist välja. Seejärel voolab välja ka gaas. Milline on katseklaasi lõppkiirus, kui alguses olid kõik asjad paigal?

Gaasi impulssi enne vaheseina eemaldumist ja gaasi temperatuuri muutust peale vaheseina eemaldumist mitte arvestada; raskusjõudu pole.

*Kommentaari:* ülesande teine pool on ebakorrektna, gaasi temperatuur muutub paratamatult. Ametlik lahendus vaatles kolvi väljalendamise järgset olukorda molekulaarkineetikat ja vaakumlähendust kasutades, kummatigi pole tekstis viidet vaakumlähenduse kasutatavusele.

### 2. Reostaat

Nominaalpingele  $U_0 = 4,5$  V mõeldud elektrilampi takistusega  $R_0 = 2$   $\Omega$  toidetakse akumulaatorilt, mille elektromotoorjõud  $\mathcal{E} = 6$  V ning sisetakistus on tühiselt väike.

1) Nominaalpinge saamiseks tahetakse kasutada reostaati, mis on ühendatakse potentsiomeetri-na. Kasutegur  $\eta$  ei tohi olla väiksem kui  $\eta_0 = 0,6$ . Millist voolu  $I_{\max}$  peaks kannatama akumulaatorit ja reostaati ühendav juhe, et ta oleks kasutatav kõigi ülaltoodud tingimust rahuldavate reostaatide puhul? Millise takistusega  $R$  reostaadid on lubatavad?

2) Milline on kasuteguri maksimaalne võimalik väärtus  $\eta_{\max}$  ja milline on sel juhul elektriskeem?

### 3. Raadiotäht mere kohal

Astronoomiaobservatooriumi raadiolainete vastuvõtja asub mere kaldal  $h = 2$  m kõrgusel mere pinnast. Raadiotäht kiirgab raadiolaineid lainepikkusega  $\lambda = 21$  cm. Tähe kerkimisel horisoni kohale registreeritakse üksteisele järgnevaid raadiokiirguse maksimume ja miinimume. Registreeritud signaal on võrdeline selle raadiokiirguse komponendi intensiivsusega, mille elektrivälja vektor võngub vee pinnaga paralleelselt.

1) Leidke need tähe nurkkõrgused, mille korral registreeritakse maksimume ja miinimume

2) Kas vahetult pärast tähe kerkimist horisoni kohale hakkab signaal kasvama või kahanema?

3) Leidke signaali intensiivsuse suhe esimeses maksimumis ja sellele järgnevas miinimumis. Elektromagnetiline peegeldumisel vee pinnalt suhtuvad langeva ja peegeldunud laine elektrivälja amplituudid  $E_i$  ja  $E_r$  vastavalt valemile

$$E_r/E_i = (n - \cos \varphi)/(n + \cos \varphi),$$

kus  $n$  on murdumisnäitaja ja  $\varphi$  on laine langemisnurk. Vee murdumisnäitaja lainepikkuse  $\lambda = 21$  cm jaoks on  $n = 9$ .

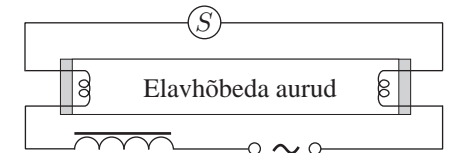
4) Kas maksimumide ja miinimumide intensiivsuste suhe tähe tõusmisel kasvab või kahaneb?

**Märkus:** Ülesande lahendamisel lugeda mere pind tasaseks.

## XIII Saksa LV (1982)

### 1. Lumineestsentslamp

Lumineestsentslamp lülitatakse vooluvõrku nii, nagu näidatud joonisel. Võrgusagedus  $\nu_0 = 50$  Hz ja pinge  $U = 228,5$  V. Voolutugevus ahelas  $I = 0,60$  A, pinge lambil  $U' = 84$  V, ballastpooli oomiline takistus  $R_d = 26,3$   $\Omega$ . Lumineestsentslampi võib vaadelda kui oomilist takistust.



1) Milline on pooli induktiivsus  $L$ ?

2) Leidke pinge ja voolu vaheline faasinihe  $\varphi$ .

3) Milline aktiivvõimsus eraldub ahelas?

4) Poolil on peale voolutugevuse piiramise täita veel üks tähtis ülesanne. Milline see on ja seletage tema toimemehanismi. *Vihje:* Starter  $S$  kujutab endast lülitit, mis sulgub lambi sisse lülitamisel, kuid avaneb peagi ning jääb lambi põlemise ajal avatuks.

5) Visandage lambi valgusvoo sõltuvus ajast (kasutades kvantitatiivse skaalaga ajatelge).

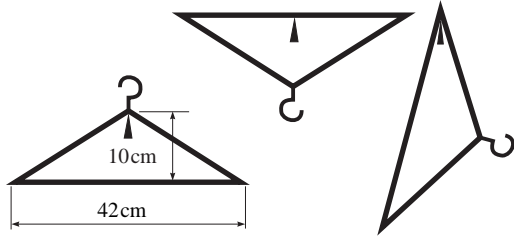
6) Miks lamp põleb kogu aeg, kuigi tema otstele rakendatud pinge muutub perioodiliselt nulliks?

7) Antud tüüpi lampides on võimalik lülitada pooliga järjestikku kondensaator mahtuvusega  $C = 4,7$   $\mu$ F. Kuidas mõjutab kondensaator lambi tööd? Milleks on ette nähtud tema järjestikku lülitamise võimalus?

8) Uurige ruumi paigutatud demonstratsioonlampi spektrit ning seletage spektrite erinevuse põhjus. *Kommentaari:* ruumis oli selline toru kujuline lamp, mille üks pool andis joonspektri, teine aga enam-vähem pideva spektri.

## 2. Riidepuu

Traadist riidepuu kõigub väikese amplituudiga joonise tasandis. Kahel esimesel juhtumil on kolmnurga pikk külj horisontaalne. Kõigil kolmel juhtumil on võnkeperioodid võrdsed. Kus asub massikese ja milline on võnkeperiood?



Jooniselt ei ole võimalik välja lugeda midagi muud peale nende mõõtmete mis on kirjas. Muuhulgas ei ole teada, milline on massijaotus traadis.

## 3. Õhupall

Vaadelgem õhupalli, mille ruumala on konstantne,  $V = 1,1 \text{ m}^3$ . Tema kesta mass  $m_0 = 0,187 \text{ kg}$ ; kesta ruumala on tühine. Pall stardib välisõhu temperatuuri  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  juures normaalrõhul  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Õhu tihedus nendel tingimustel on  $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .

1) Milline peaks olema õhupalli sees oleva kuum õhu temperatuur  $t_2$ , et pall saaks õhus vabalt hõljuda?

2) Trossiga paigal hoitava õhupalli õhk on kuumutatud temperatuurini  $t_3 = 110^\circ\text{C}$ . Leidke trossi pinget

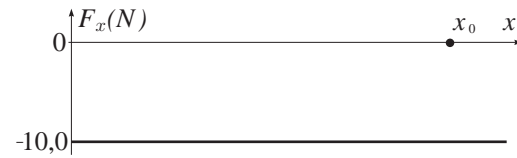
3) Pallis olev avaus seotakse kinni. Seega temas oleva õhu tihedus edaspidi ei muutu. Kui kõrgele  $h$  tõuseb pall, kui lugeda atmosfäär isotermiliseks ( $P_0$  on rõhk maapinnal)? *Kommentaari:* realsuses pole atmosfäär kunagi isotermiline ja temperatuuri langust kerkimisel ei saa ignoreerida.

4) Pall viiakse eelmises punktis leitud tasakaalulisest kõrgusest  $\Delta h = 10 \text{ m}$  kaugusele ning lastakse lahti. Kirjeldage kvalitatiivselt, kuidas ta hakkab edaspidi liikuma.

## XIV Rumeenia (1983)

### 1. Osake jõuväljas

Osake liigub piki positiivset pooltelge  $x$  jõu  $F$  mõjul. Selle jõu projektsioon  $x$ -teljele  $F_x$  sõltub koordinaadist  $x$  nii, nagu näidatud joonisel ( $F_y = F_z = 0$ ). Osakesele mõjub veel hõrdejõud, mille moodul  $F_h = 1,00 \text{ N}$ . Koordinaatide alguspunktis asub risti  $x$ -teljega absoluutselt elastne plaat. Osake alustab teekonda punktist koordinaadiga  $x_0 = 1,00 \text{ m}$  kineetilise energiaga  $E_k = 10,0 \text{ J}$ .



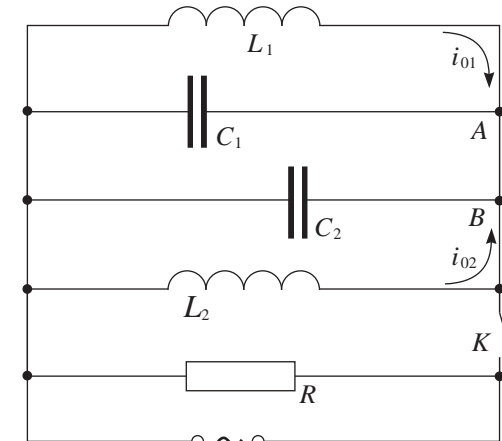
1) Avaldage summaarne teepikkus, mille osake läbib enne peatumist.

2) Näidake graafiliselt jõuväljas  $F_x$  asuva osakese potentsiaalse energia sõltuvus  $x$ -koordinaadist.

3) Esitage kvalitatiivne graafik kiiruse projektsiooni  $v_x$  sõltuvuse kohta  $x$ -koordinaadist

### 2. Resonants vooluahelas

Vahelduvvoolu ahel koosneb ideaalsetest induktioonipoolidest  $L_1 = 10 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 20 \text{ mH}$ , kondensatoritest  $C_1 = 10 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 5 \text{ nF}$  ja takis-



tist  $R = 100 \text{ k}\Omega$ . Suletud ahela puhul ei sõltu generaatori poolt tekitatud voolutugevus sagedusest (s.o. meil on tegemist konstantse amplituudiga voolu generaatoriga).

1) Leidke suhe  $\nu_M / \Delta\nu$ , kus  $\nu_M$  on sagedus, mille korral ahelas eralduv võimsus on maksimaalne ( $P = P_{\max}$ ) ja  $\Delta\nu = \nu_+ - \nu_-$ , kus  $\nu_+$  ja  $\nu_-$  on sagedused, mille korral eralduv võimsus on võrdne poolega maksimaalsest,  $P = P_{\max}/2$ .

Lüliti lahutatakse ajahetkel  $t_0$ , kui voolutugevused poolides  $L_1$  ja  $L_2$  on vastavalt  $i_{01} = 0,1 \text{ A}$  ja  $i_{02} = 0,2 \text{ A}$  (suunad on näidatud joonisel) ning kondensaatori  $C_1$  pinget  $U_0 = 40 \text{ V}$ .

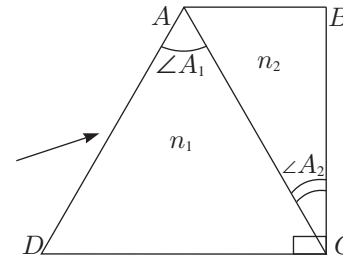
2) Leidke elektromagneetiliste vabavõnkumiste sagedus ahelas  $L_1 C_1 C_2 L_2$ ,

3) voolutugevus löigis  $AB$  ja

4) voolu võnkumiste amplituud poolis  $L_1$ . Poolide  $L_1$  ja  $L_2$  vastastikune induktioon on tühine.

### 3. Murdumine prismas

Kaks prisma nurkadega  $\angle A_1 = 60^\circ$ , ja  $\angle A_2 = 30^\circ$  on kokku kleebitud nii nagu näha joonisel. Prismade murdumisnäitajad on  $n_1 = a_1 + b_1/\lambda^2$  ja  $n_2 = a_2 + b_2/\lambda^2$ , kus  $a_1 = 1,1$ ,  $b_1 = 10^5 \text{ nm}^2$ ,  $a_2 = 1,3$ ,  $b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2$ .



1) Leida lainepikkus  $\lambda_0$ , mille puhul valgus ei murduks pinnal  $AC$ , ükskõik millise langemisnurka all kiir pinnale  $AD$  ka ei langeks. Samuti leida sellele lainepikkusele vastavad murdumisnäitajad  $n_1$  ja  $n_2$ .

2) Joonistage kiirte käik prismade süsteemis kolmel juhul,  $\lambda = \lambda_{\text{viol}} < \lambda_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$  ja  $\lambda = \lambda_{\text{pun}} > \lambda_0$  jaoks, kasutades kogu aeg ühte ja sama langemisnurka pinnale  $AD$ .

3) Leidke vähim võimalik nurk, mille võrra süsteem saab kiirt kallutada, kui lainepikkus on  $\lambda_0$ .

4) Leida lainepikkus, kui paralleelselt küljega  $DC$  sisenenud kiir väljub süsteemist samuti paralleelselt küljega  $DC$ .

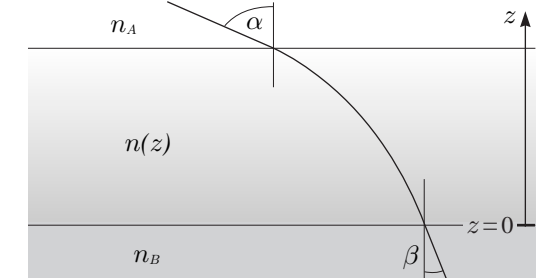
### 4. Footoni hajumine mitmelt elektronilt

Footon lainepikkusega  $\lambda_i$  hajus liikuvalt vabalt elektronilt: elektron peatus, aga footoni liikumissuund muutus  $\theta = 60^\circ$  võrra ja tema lainepikkuseks sai  $\lambda_0$ . Sama footon hajus uuesti teiselt paigalseisvalt vabalt elektronilt; hajumise tulemusena sai footoni lainepikkuseks  $\lambda_f = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ja footoni suund muutus veelkord  $\theta = 60^\circ$  võrra. Leida selle elektroni De Broglie lainepikkus, mis liikus enne esimest hajumist. Teada on järgmised suurused: Planck'i konstant  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , elektroni seisumass  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , valguse kiirus  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

## XV Rootsi (1984)

### 1. Miraaž

1) Joonisel on näidatud kiire käik läbi tasaparalleelse läbipaistva plaadi, mille murdumisnäitaja sõltub kaugusest alumisest pinnast  $z$ . Näidata, et  $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$ .



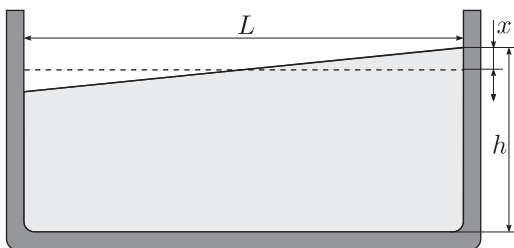
2) Oletage, et seisate tasases kõrbes. Kauguses näete te midagi veeloigu sarnast. Kui te lähenete "veele", siis liigub see nii, et kaugus teist on kogu aeg ligikaudu 250 m. Selgitage nähtust!

3) Arvutage maapinna temperatuur  $T$  eelmise punkti põhjal, kui teie silmad on 1,6 m kõrgusel

maapinnast. Teada on õhu murdumisnäitaja  $n$  väärtus temperatuuril  $T_0 = 15^\circ\text{C}$  ja normaal-se õhurõhu juures —  $n_0 = 1,000276$ . Kõrge-mal kui 1 m lugeda temperatuur konstantseks ja võrdseks  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ -ga. Õhurõhk on normaalne (0,1013 MPa). Lugada, et  $(n - 1)$  on võrdeline molekulide tihedusega gaasis.

## 2. Seišid

Mõnede järvede (tavaliselt pikkade ja kitsaste) puhul võib täheldada ebatavalist nähtust mida nimetatakse seišiks: vahetevahel hakkab vesi neis võnkuma nagu tee tassis siis, kui te kõnnite parasjagu üle toa, et viia see toa teises otsas istuva külalise ette. Selle võnkumise modelleerimiseks kasutatakse täisnurkset vanni. Veeta-seme kõrgus vannis on  $h$  ja vanni pikkus on  $L$ .

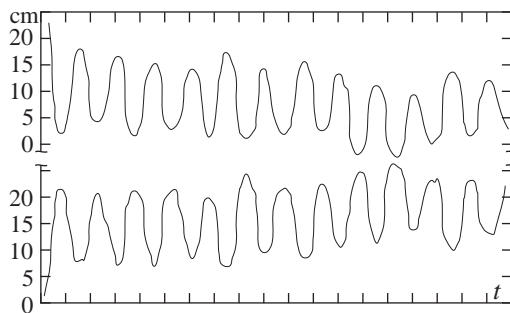


Oletame, et alghetkel on veepind horisontaali suhtes väikese nurga all kaldus. Sellisel juhul hakkab vesi võnkuma nii, et veepind jääb enam-vähem tasaseks ja muudab üksnes oma kallet. Koostage vee liikumise mudel ja leidke võnku-miste periood  $T$ . Algingimused on esitatud joo-nisel. Eeldada et  $x \ll h$ . Alltoodud tabelites on antud eksperimentaalsel teel saadud perioodid erinevate vanni pikkuste ja vee sügavuste puhul.

	$L = 479 \text{ mm}$						
$h/\text{mm}$	30	50	69	88	107	124	142
$T/\text{s}$	1,78	1,40	1,18	1,08	1,00	0,91	0,82

	$L = 143 \text{ mm}$				
$h/\text{mm}$	31	38	58	67	124
$T/\text{s}$	0,52	0,48	0,43	0,35	0,28

Võrrelge oma valemiteksperimenti tulemustega ja hinnake oma mudeli kasutatavust. Juuresole-

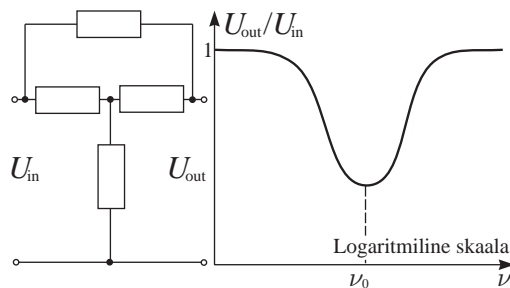


val diagrammil on esitatud veetaseme sõltuvus ajast  $t$  kahe asula jaoks, mis asuvad Rootsi jär-ve Vettern kallastel, üks järve ühes otsas, teine teises otsas. Järve pikkus on 123 m, keskmine sügavus 50 m. Milline on ajamastaap graafikul?

*Kommentaari:* tekst ei suuna optimaalsele lahendusteele, sest veepinna tasaseks lugemisest tulenev viga on suurem, kui see, mis tuleks olulist lihtsustust  $h \ll L$  kasutades.

## 3. Elektrifilter

Elektrifilter peab koosnema neljast komponen-dist, mis on ühendatud nii nagu joonisel. Voolu-allika impedantsi võib mitte arvestada, takistus väljundil lugeda lõpmatuks. Filter peab olema



selline, et väljund- ja sisendpinge suhe  $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$  sõltuks sagedusest nagu näidatud graafikul. Sa-gedusel  $\nu_0$  peavad  $U_{\text{out}}$  ja  $U_{\text{in}}$  olema samas faasis. Filtri ehitamiseks tuleb teil valida nel-i komponenti järgnevaist: kaks takistit takistu-sega  $10 \text{ k}\Omega$ , kaks kondensaatoreit mahtuvuste-ga  $10 \text{ nF}$ , kaks raudsüdamikuta pooli induktiiv-susega  $160 \text{ mH}$  (poolide aktiivtakistus on tühi-ne). Leidke sagedus  $\nu_0$  ja suhe  $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$  sellel sa-gedusel kõikvõimalike kombinatsioonide jaoks.

## XVI Jugoslaavia (1985)

### 1. Raadioamatöör

Noor kirglik raadioamatöör peab raadio teel si-det kahe tütarlapsena, kes elavad erinevates lin-nades. Tal on plaanis konstrueerida selline an-tenn, mille abil saaks rääkida neiuiga, kes elab lin-nas  $B$  nii, et side kvaliteet oleks võimalikult hea, kuid et samal ajal linnas  $A$  elav neiu ei saaks nen-de juttu pealt kuulata. Ja oleks vaja, et linnas  $A$  elava neiuiga saaks samal viisil rääkida. Anten-nide süsteem koosneb kahest vertikaalsest an-tennist, mis kiirgavad ühesuguse intensiivsusega kõikides horisontaalsuundades.

Määrake antennide vaheline kaugus  $r$ , an-tennide tasandi ja põhjasuuna vaheline nurk  $\psi_0$  ning antennide elektriliste signaalide vaheline faasi-nihe  $\Delta\varphi$ . Antennide vaheline kaugus peab olema minimaalne.

Leidke numbriline lahend sellise juhtumi jaoks, kus noormees kasutab raadiosaatjat sa-gedusel  $\nu = 27 \text{ MHz}$  ja antennide süsteem asetseb *Portoroži* linnas. Noormees uuris kaardi abil väl-ja, et põhjasuuna ning linna  $A$  (*Koper*) vaheline nurk (s.o. asimuut) on  $\psi_1 = 72^\circ$  ning linna  $B$  (*Bune*) asimuut —  $\psi_2 = 157^\circ$ .

### 2. Halli efekt

Pikas pooljuhtivast materjalist (InSb) risttahuka kujulises klotsis ( $a > b \gg c$ ) on vool  $I$  suu-natud piki külge  $a$ . Klots asub magnetväljas, mille induksioon  $\vec{B}$  on suunatud piki serva  $c$ . Voolukandjateks InSb-s on elektronid, mis liigu-vad elektriväljas  $\vec{E}$  keskmise kiirusega  $\vec{v} = u\vec{E}$  (võrdetegurit  $u$  nimetatakse elektronide liikuvu-seks). Magnetvälja puhul on vaja arvesse võtta Lorentzi jõudu ning seepärast ei ole elektrivool enam paralleelne elektriväljaga. Seda nähtust ni-metatakse Hall'i efekti.

1) Leidke elektrivälja vektori moodul ja suund klotsis.

2) Arvutage potentsiaalide vahe klotsi vastas-

tahkude vahel serva  $b$  sihis.

3) Tuletage analüütiline avaldis eelmises punktis leitud pingevahe alaliskomponendi jaoks juhul, kui voolutugevus ja magnetväli muutuvad vasta-valt seadusele

$$I = I_0 \sin \omega t, B = B_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

4) Kavandage niisugune elektriskeem, mille abil oleks võimalik kasutada eelmise punkti tulemust selleks, et mõõta elektriseadme poolt vooluvõr-gust tarvitavat aktiivvõimsust.

**Arvandmed:** InSb puhul elektronide liikuvus  $u = 7,8 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$  ja elektronide kontsentrat-sioon  $n = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ;  $I = 1 \text{ A}$ ,  $B = 0,1 \text{ T}$ ,  $b = 1,0 \text{ cm}$ ,  $c = 1 \text{ mm}$ .

### 3. Päikesesüsteemist lahkumine

Kosmilise uurimisprojekti jaoks kaalutakse järg-misi võimalusi kosmoselaeva saatmiseks väl-jaspoole Päikese süsteemi: (i) laevale antak-se selline kiirus, millest piisab vahetuks lah-kumiseks Päikese süsteemist lähtudes Maa or-biidilt; (ii) laev läheneb ühele välisplaneetidest, muudab tema raskusvälja abil liikumissuunda ja omandab seejuures kiiruse, millest piisab Päike-se süsteemist lahkumiseks. Arvutustes võib lu-geda, et laeva mõjutab ainult kas Päikese või vaadeldava planeedi raskusväli, sõltuvalt sellest, kumb on antud punktis tugevam.

1) leidke minimaalne kiirus  $v_a$  ja tema suund Maa orbitaalkiiruse suhtes, mis on vajalik projek-ti (i) realiseerimiseks!

2) Oletagem, et laev lennutati selles samas suu-nas, mille Te leidsite punkti (1) jaoks, kuid teist-suguse kiirusega. Leidke laeva kiirus Marsi orbiidiga lõikumise punktis, kirjutades avaldis nii kiiruse paralleel- kui ka ristkomponendi jaoks (Marsi orbiidi sihi suhtes). Eeldage seejuures, et Mars asub kaugel ja tema tõmmet pole vaja ar-vestada.



3) Oletagem, et laev läbis Marsi gravitatsiooni-välja. Leidke laeva minimaalne vajalik stardikiirus Maa orbiidi juures selleks, et laev saaks väljuda Päikese süsteemist peale Marsist eemaldumist! *Soovitus:* Punkti (1) põhjal teate Te laeva minimaalset kiirust ja optimaalset suunda Päikese süsteemist lahkumiseks. Siduge see kiirus laeva kiiruse komponentidega enne Marsi gravitatsioonivälja sisenemist [s.o. punktis (2) leitud avaldistega]!

4) Leidke projektis (ii) saavutatud maksimaalne kütuse kokkuhoid projektiga (i) võrreldes!

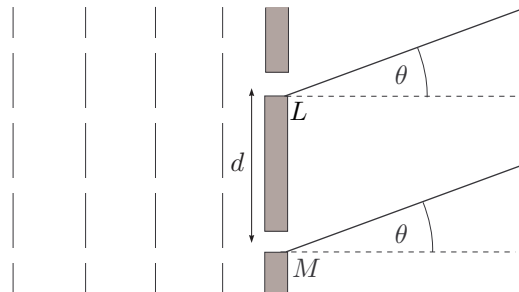
**Märkus:** Võib lugeda, et kõik planeedid tiirlevad ümber Päikese ühes tasandis ja ühes suunas mööda ringorbiite. õhu takistust, Maa pöörlemist ja Maa gravitatsiooniväljast väljumiseks vajalikku energiat mitte arvestada.

**Arvandmed:** Maa orbitaalkiirus  $v_0 = 30$  km/s, Maa ja Marsi orbiitide raadiuste suhe on  $2/3$ .

## XVII Inglismaa (1986)

### I. Difraktsioonivõre

Monokromaatilise valguse tasaline lainepikkusega  $\lambda$  ja sagedusega  $\nu$  langeb ristsuunas kahele ühesugusele kitsale pilule  $L$  ja  $M$ , mis asuvad üksteisest kaugusel  $d$  (vt joonis). Kummastki pilust normaali suhtes nurga  $\theta$  all lähtuvad valguslained on kaugusel  $x$  ja ajahetkel  $t$  määratud seosega  $y = a \cos[2\pi(\nu t - x/\lambda)]$ , kus amplituud  $a$  on mõlema pilu jaoks ühesugune. Siinjuures on eeldatud, et  $x \gg d$ .



1) Tõestage, et nende kahe laine resultantlaine

amplituudi  $A$  võib leida kui kahe sellise vektori summa mooduli, mille amplituudid on võrdsed  $a$ -ga ja mille orientatsioon tasandil on antud valguslainete faasidega. Kontrollige geomeetriliselt vektordiagrammi abil, et

$$A = 2a \cos \beta, \text{ kus } \beta = (\pi d \sin \theta) / \lambda.$$

2) Kahekordne pilu asendatakse difraktsioonivõre-ga, mis koosneb  $N$  üksteisest võrdset vahekaugusel  $d$  asuvast ühesugusest pilust. Kasutades amplituudide vektoriaalse liitmise meetodit näidake, et kõikide komponentvektorite algused ja lõpud asuvad ringjoonel raadiusega

$$R = a / (2 \sin \beta),$$

kus  $a$  on komponentvektorite moodul. Näidake, et resultantlaine amplituud on

$$a(\sin N\beta / \sin \beta)$$

ja leidke difraktsioonivõrele langenud laine ning resultantlaine vaheline faasiinihe.

3) Joonistage ühes ja samas teljestikus  $\sin N\beta$  ja  $\sin \beta$  graafikud sõltuvuses  $\beta$ -st. Eraldi graafikul näidake, kuidas sõltub resultantlaine intensiivsus parameetrist  $\beta$ .

4) Leidke peamaksimumide intensiivsus

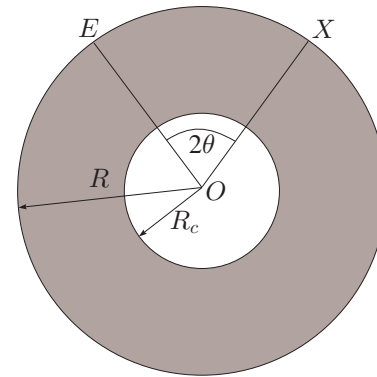
5) Näidake, et peamaksimumide arv ei saa olla suurem kui  $(2d/\lambda) + 1$ .

6) Näidake, et kaks lainet lainepikkusega  $\lambda$  ja  $\lambda + \Delta\lambda$ , kus  $\lambda \gg \Delta\lambda$ , moodustavad sellised peamaksimumid, mis asuvad üksteisest nurkaugusel  $\Delta\theta = n\Delta\lambda / (d \cos \theta)$ , kus  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Leidke see vahekaugus naatriumi spektri joonte jaoks lainepikkusega  $\lambda = 589,0$  nm ja  $\lambda + \Delta\lambda = 589,6$  nm;  $n = 1$  ja  $d = 1,2 \cdot 10^{-6}$  m.

### 2. Seismilised lained

Selle sajandi alguses pakuti välja selline Maa ehituse mudel, kus eeldati, et Maa kujutab endast kera raadiusega  $R$ , mida ümbritseb homogeenne isotroopne kõva koorik ja mille keskel on vedel tuum raadiusega  $R_c$  (vt. joonis). Seismiliste pikilainete kiirus on  $v_p$  ja ristlainete kiirus  $v_s$ .

Nende nn.  $p$ - ja  $S$ -lainete kiirused kooriku sees on igal pool ühesugused. Tuumas on pikilainete kiirus  $v_{cp}$ ; ristlained seal levida ei saa. Punktis  $E$  toimunud maavärin tekitab seismilised lained, mis levivad läbi Maa ja registreeritakse vaatleja poolt; viimane saab asetada oma mõõteriistad suvalisse maapinna punkti  $X$ . Olgu punktide  $E$  ja  $X$  vaheline nurkkaugus  $\angle EOX = 2\theta$ , kus  $O$  on Maa keskpunkt.



1) Tõestage, et lained, mis liiguvad ainult kooriku sees ning mööda sirget, jõuavad punktist  $E$  punkti  $X$  ajaga

$$t = (2R \sin \theta) / v, \text{ kui } \theta \leq \arccos(R_c/R).$$

Siinjuures tuleb  $p$ -laine jaoks võtta  $v = v_p$  ja  $S$ -laine jaoks  $v = v_s$ .

2) Kui punkti  $X$  asukoht on selline, et  $\theta > \arccos(R_c/R)$ , siis seismiline  $p$ -laine jõuab vaatlejani peale kahekordset murdumist tuuma ja kooriku eralduspinnal. Joonistage sellise seismilise laine trajektoori ja tuletage avaldis, mis seob nurka  $\theta$  nurgaga  $i$ , mille all seismiline  $p$ -laine langeb kooriku ja tuuma eralduspinnale

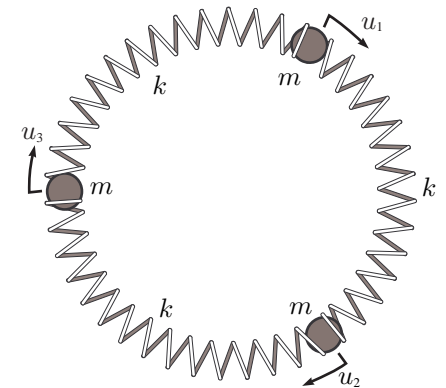
3) Kasutades eelmise punkti tulemusi ja arvandmeid  $R = 6370$  km,  $R_c = 3470$  km,  $v_p = 10,85$  km/s, joonistage kvalitatiivselt nurga  $\theta$  sõltuvuse graafik nurgast  $i$ . Kommenteerige milliseid füüsikalisi nähtusi põhjustab selline graafiku kuju Maakera eri punktides asuvate vaatlejate jaoks. Joonistage graafik, kus on kujutatud  $p$ - ja  $S$ -lainete levikuaja sõltuvus nurgast  $\theta$  vahemikus  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ .

4) Peale maavärinat teeb vaatleja kindlaks, et  $S$ -laine jõuab  $p$ -lainest 2 min 11 s võrra hiljem kohale. Kasutades eelmise punkti tulemust, leidke vaatleja ja maavärina vaheline nurk  $\angle EOX$ .

5) Punktis 4) mõõtmisi sooritanud vaatleja avastab, et mõni aeg peale  $S$ -laine saabumist jõuavad kohale veel kaks lainet, kusjuures nende vaheline ajavahemik on 6 min 37 s. Selgitage seda nähtust ja veenduge, et tulemus on kooskõlas eelmises punktis leitud nurga väärtusega.

### 3. Kuulid ja vedrud

Kolm osakest massiga  $m$  on ühendatud üksteisega vedrude abil, mille jäikus on  $k$ . Kuulid saavad liikuda ainult mööda ringjoont (vt. joonis) Algukses on süsteem tasakaalus.



1) Iga kuulikest nihutatakse veidi tasakaaluasendist kõrvale, vastavalt  $u_1$ ,  $u_2$  ja  $u_3$  võrra. Koostage kuulikeste liikumisvõrrandid. Vedrude massiga mitte arvestada.

2) Näidake, et süsteem võib sooritada harmoonilisi võnkumisi vastavalt seadusele

$$u_n = a_n \cos(\omega t) \quad (n = 1, 2 \text{ ja } 3),$$

kus  $a_n$  tähistab konstantset amplituudi ja ringsagedusel  $\omega$  on kaks lubatavat väärtust  $-\omega_0\sqrt{3}$  ja  $0$  ning  $\omega_0^2 = k/m$ .

3) Vedrude ja kuulikeste arvu eelpoolkirjeldatud süsteemis suurendatakse  $N$ -ni. Koostage liikumisvõrrand  $n$ -nda ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) kuulikese nihke jaoks. Näidake, et

$$u_n = a_s \sin(2\pi n s / N + \varphi) \cos(\omega_s t)$$

( $n = 1, 2, \dots, N$ ) on selle võrrandisüsteemi lahendiks eeldusel, et ringsagedus

$$\omega_s = 2\omega_0 \sin(s\pi/N),$$

kus  $s$  võib omada väärtusi  $1, 2, \dots, N$ ;  $\varphi$  on valine faas ja  $a_s$  — indeksist  $n$  mittesõltuv konstant. Milline on lubatavate sageduste diapason sellise ahela jaoks, mis koosneb lõpmatust arvust kuulikestest?

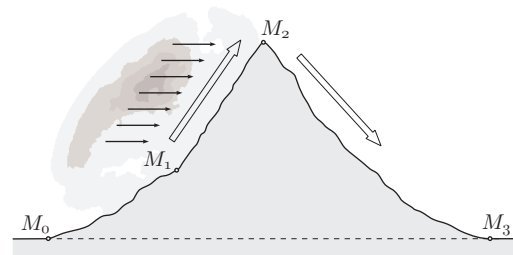
4) Leidke suhe  $u_n/u_{n+1}$  sellise juhtumi jaoks kus  $N \gg 1$  ja (i) ringsagedus on väike; (ii) ringsagedus omab maksimaalset lubatavat väärtust  $\omega = \omega_{\max}$ . Illustreerige joonise abil, kuidas paiknevad osakesed ahelas mingil ajahetkel  $t$  kummalgi juhul.

5) üks osake asendati hulga kergema osakesega,  $m' \ll m$ . Hinnake, milliseid olulisi muutatusi võib oodata ringsageduste jaotumises. Kirjeldage kvalitatiivselt sagedusspektrit sellise juhtumi jaoks, kus kerged ja rasked kuulikesed massidega  $m'$  ja  $m$  on üksteisega vaheldumisi, kasutades seejuures ära vastus eelmisele küsimusele.

## XVIII Saksa DV (1987)

### I. Vihmapilv

Üle mäeaheliku voolab adiabaatiliselt õhk, mis on niiske (vt. joonis). Meteoroloogiajaamad  $M_0$  ja  $M_3$  mõõdavad õhurõhuks  $p_0 = 100$  kPa, jaam  $M_2$  aga  $p_2 = 70$  kPa. Õhu temperatuur punktis  $M_0$  on  $t_0 = +20^\circ\text{C}$ . Õhumassi kerkides algab



rõhu  $p_0 = 84,5$  kPa juures pilvede moodustumine. Edasi kulub õhumassil mäeharjani (jaamani  $M_2$ ) jõudmiseks aega 1500 s ning lõppkokkuvõttes sadeneb igast kilogrammist õhust sademete

(vihma) näol välja  $m = 2,45$  g vett. Iga ruutmeetri kohal on sellist niisket õhku, kus toimub vee kondenseerumine kokku 2000 kg.

1) Leidke õhu temperatuur  $T_1$  pilvede alumise piiri juures.

2) Millisel kõrgusel  $h_1$  jaamast  $M_0$  asub pilvede alumine piir, kui eeldada, et õhu tihedus väheneb kõrguse kasvades lineaarselt?

3) Milline on temperatuur  $T_3$  mäe harja juures?

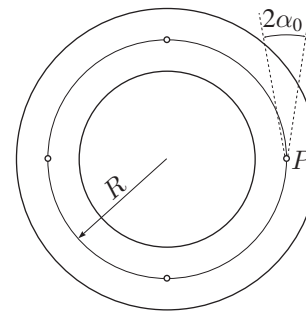
4) Milline sademetehulk pindalaühiku kohta sajab maha kolme tunni jooksul? Vastus andke veekihi paksusena millimeetrites. Kondenseerumistingimused lugeda ühesuguseks üle kogu mäenõlva, punktist  $M_1$  kuni punktini  $M_2$ .

5) Milline on õhutemperatuur teisel pool mäeahelikku jaamas  $M_3$ ? Mille poolest erineb õhu olek jaamas  $M_3$  tema olekust jaamas  $M_0$ ?

**Juhtnõore ja arvandmeid.** Õhku võib vaadelda ideaalse gaasina; veeauru mõju õhu tihedusele ja erisoojusele ning aurustumissoojuse sõltuvust temperatuurist ignoreerida. Temperatuurid leida täpsusega 1 K, pilvede alumise piiri kõrgus — 10 m, sademete hulk — 0,1 mm. Õhu erisoojus meid huvitavas temperatuurivahemikus on  $c_p = 1005$  J/(kg·K); õhu tihedus jaama  $M_0$  juures rõhul  $p_0$  ja temperatuuril  $t_0$  on  $\rho_0 = 1,189$  kg/m<sup>3</sup>; vee aurustumissoojus pilvede piirkonnas on  $q_V = 2500$  kJ/kg; adiabaatinäitaja  $\gamma = c_p/c_V = 1,4$ ; vabalangemiskiirendus  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

### 2. Elektronimp magnetväljas

Punktallikast  $P$  saab kiirendava pinge  $U_0$  toimel alguse elektronide kimp; elektronid alustavad liikumist ringikujulise (toroidaalse) pooli (toroidi) poolt tekitatud magnetväljas jõujoonte sihis (vt. joonis). Oletagem, et elektronide kimbu lahkne misnurk  $2\alpha_0$  on hästi väike ( $\alpha_0 \ll 1$ ). Punkt  $P$  asub toroidi keskraadiusel  $R$ . Magnetilise induktsiooni moodul lugeda toroidi sees konstantseks; elektronide omavahelise elektrostaatilise vastasmõjuga mitte arvestada.



1) Selleks, et elektronid saaksid liikuda piki toroidi poolt tekitatud magnetvälja jõujooni, tuleb lisada väline homogeenne magnetväli  $\vec{B}_1$ . Milline see väli peaks olema? Rehkendused tehke sellise elektroni jaoks, mis liigub piki toroidi keskraadiust  $R$ .

2) Milline peaks olema toroidi poolt tekitatud magnetväli  $B$ , et elektronide kimp fokuseeruks neljas üksteisest nurga  $\pi/2$  kaugusel asuvas punktis (vt. joonis)? **Juhtnõör:** magnetvälja jõujoonte kõverusest tingitud muutatusi elektronide trajektoris võib siinjuures mitte arvestada.

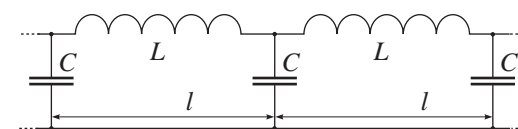
3) Kui poleks välist magnetvälja  $\vec{B}_1$ , siis väljuks elektronide kimp toroidi sisemusest toroidi tasandi suhtes ristsihilise triivi (s.o. nullist erineva keskmise kiiruse) tõttu. Mis suunas toimub triiv? Näidake, et radiaalsihiline eemaldumus raadiusest  $R$  jääb lõplikuks. **Juhtnõör:** kasutage energia ja impulsimomendi jäävust; elektronide kimbu lahkne misega mitte arvestada.

**Arvandmeid:**  $U_0 = 3$  kV,  $R = 50$  mm.

### 3. Lainetus LC-ahelas

Mööda lõpmatu pikka LC-ahelat (vt. joonis) saavad levida sinusoidaalsed pinged ja voolutugevuse lained. Seejuures on iga kahe naaber kondensaatori klemmidel olev pinged alati nihutatud ühe ja sama faasivahe  $\varphi$  võrra.

1) Leidke faasivahe  $\varphi$  sõltuvus suurustest  $L, C$  ja



võnkumiste ringsagedusest  $\omega$ .

2) Leidke, millise kiirusega levivad lained, kui ahela iga elemendi pikkus on  $l$ .

3) Milliste võnkumiste puhul ei sõltu lainete leviku kiirus peaaegu üldse ringsagedusest  $\omega$ ? Milline on see kiirus?

4) Leidke lihtne mehaaniline mudel, mis oleks kirjeldatav täpselt samade võrranditega, mis antud elektriline skeemgi. Põhjendage vastust võrrandite abil.

**Kasulikke valemeid:**

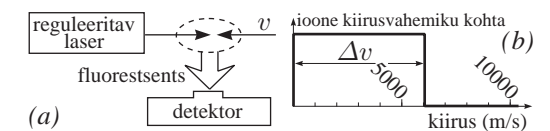
$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

## XIX Austria (1988)

### I. Kiiruse määramine Doppleri efekti abil

Footonite kiirgumis- ja neeldumisprotsessid on pöörduvad ning seetõttu võib peale footoni neeldumist aatomis toimuda tema spontaanne kiirgumine (fluorestsents). See nähtus on leidnud kasutamist osakeste detekteerimisel ja identifitseerimisel ning atomaarsete osakeste kiirusspektriskoopias.

Idealiseeritud eksperimentaalseadmes [vt. joonis (a)] liiguvad osakesed (mitmekordselt ioniseeritud ioonid) kiirusega  $v$  laserikiirele vastupidises suunas. Laseri lainepikkus  $\lambda$  on reguleeritav. Seisvate osakeste  $v = 0$  ergastamiseks sobib lainepikkus  $\lambda_0 = 600$  nm. Doppleri seadusest tulenevalt peab liikuvate osakeste ergastamiseks seadma laseri uuele lainepikkusele  $\lambda(v)$ . Ioonide kiirusspekter on koondunud vahemikku  $v_1 = 0$  kuni  $v_2 = 6000$  m/s, vt. joonis (b).



1) Millise vahemikus võib olla laseri kiirguse lainepikkus, et ergastada osakesi? Esitage neelatavate footonite arvu kvalitatiivne sõltuvus la-

seri lainepikkusest. Lähtuge seejuures mitte-relativistlikust Doppleri efekti valemist.

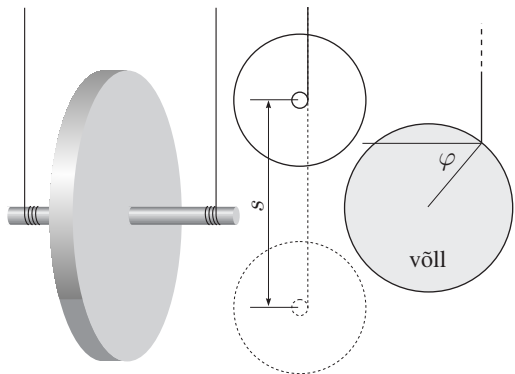
Täpsemates rehkendustes tuleks kasutada Doppleri efekti relativistlikku avaldist  $\nu' = \nu \sqrt{(1 + \frac{v}{c}) / (1 - \frac{v}{c})}$ . Hinnake mitte-relativistliku valemi kasutamises tingitud viga.

2) Ioon võib enne ergastamist kiirendada elektriväljas kasutades potentsiaalide vahet  $U$ . Leidke kiirusspektri laiuse  $\Delta v$  sõltuvus kiirendavast pingest  $U$ . Kas see laius suureneb või väheneb pinge  $U$  kasvades?

3) Uuritakse ioone, mille laengu ja massi suhe  $q/m = 4 \cdot 10^6 \text{C/kg}$  ning millel on kaks ergastamise lainepikkust  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$  ja  $\lambda_2 = \lambda_1 + 10^{-3} \text{ nm}$ . Näidake, et Doppleri efektist tingitud spektri laienemise tõttu sulavad ergastavad lainepikkusvahemikud kokku. Kas ionide kiirendamise abil oleks võimalik saavutada olukord, kus ergastavate lainepikkuste jaoks on kaks selgelt eristuvat vahemikku? Kui vastus on jaatav, siis milline peaks olema kiirendav pinge  $U$ ?

## 2. Maxwelli ketas

Homogeenne silindriline ketas, mille mass  $M = 0,40 \text{ kg}$ , raadius  $R = 0,060 \text{ m}$  ja paksus  $d = 0,010 \text{ m}$  on riputatud üles kahe ühesuguse kerge niidi abil, mis on kinnitatud ketta keset läbiva võlli külge, teine teiselt poolt kettast. Võlli raadius on  $r = 0,0030 \text{ m}$  ja tema massiga võib mitte arvestada. Ketta pööramise teel keritakse võllile  $H = 1,0 \text{ m}$  pikkune jupp



niidist. Ketas viiakse sellisesse asendisse, et niidid on pingul ja vertikaalsed. Seejärel lastakse ketas lahti ning ta hakkab niiti maha kerides allapoole vajuma, läbib kõige madalama asendi ning ronib niiti uuesti peale kerides üles tagasi. Vastake järgmistele küsimustele eeldades, et nöör on nii pikk, et kogu liikumise vältel võib lugeda ta täiesti vertikaalseks. Märkus: Võrreldes algtekstiga on soovituslikku lähendust parandanud JK.

1) Milline on ketta massikeskme kiirus sel hetkel, kui massikeskme on läbinud vahemaa  $s$  ( $s < H$ )?

2) Millise kulgliikumisenergia omandab ketas peale vahemaa  $s = 0,50 \text{ m}$  läbimist? Mitu korda erineb see pöörliikumisenergiast?

3) Milline on niitide pingelaskumise ajal?

4) Leidke ketta nurkkiiruse sõltuvus pöördenurgast  $\varphi$  (vt. joonis) selle ajavahemiku jaoks, mil kogu nöör on võllilt maha keritud. Leidke sama ajavahemiku jaoks laboratoorses ristkoordinaatistikus massikeskme koordinaatide ja kiiruse komponentide sõltuvus nurgast  $\varphi$ .

5) Niit katkeb siis, kui pingetemas saavutab väärtuse  $T_{\text{max}} = 10 \text{ N}$ . Milline on maksimaalne niidi kerimispikkus  $H_{\text{max}}$ , mille puhul niidid ketta järgneva liikumise jooksul ei katke?

## 3. Rekombineerumine gaaslahendusplasma

Kõrge temperatuuriga gaaslahendusplasma on osa  $Z$  prootoniga aatomitest ( $Z - 1$ )-kordselt ioniseeritud. Tähistagem selliseid nn. vesinikusarnaseid aatomeid sümboliga  $A^{(Z-1)+}$ .

1) Vaatleme juhtumit, mil iooni  $A^{(Z-1)+}$  ainus elektron on põhiolekus. Sellises olekus võib elektroni ja tuuma vahemaa kauguse ruudu keskvaartuse  $r_0^2$  leida kui elektroni koordinaatide määramatuste ruutude  $(\Delta x)^2$ ,  $(\Delta y)^2$  ja  $(\Delta z)^2$  summa. Analoogselt võib leida elektroni impulsi ruudu keskvaartuse  $P_0^2$  komponentide määramatuste ruutude  $(\Delta P_x)^2$ ,  $(\Delta P_y)^2$  ja  $(\Delta P_z)^2$  summana. Millist võrratust rahuldab korrutis  $P_0^2 r_0^2$ ?

2) Ioon  $A^{(Z-1)+}$  võib haarata teise elektroni ja

ise seejuures kiirata footoni. Kirjutage võrrandid, mis määravad selle kiirguse sageduse (arvutusi pole vaja läbi viia).

3) Leidke iooni  $A^{(Z-1)+}$  siseenergia lähtudes faktist, et põhiolekus omab see minimaalset võimalikku väärtust. Kasutage seejuures järgmisi lähendusi: (a) potentsiaalne energia on määratud punktis (1) leitud kaugusega  $r = r_0$ ; (b) kineetiline energia avaldage impulsi keskmise ruudu  $P_0^2$  abil kasutades ligikaudset seost  $P_0^2 r_0^2 = \hbar^2$ .

4) Leidke sama meetodi abil nn. rekombineerumisprotsessi tulemusel moodustuva osakese  $A^{(Z-2)+}$  energia põhiolekus. Tähistagu  $r_1$  ja  $r_1$  elektronide kaugusi tuumast, mis on määratud sarnaselt  $r_0$ -ga punktis (3). Elektronide omavahelise kauguse võib võtta võrdseks  $(r_1 + r_2)$ -ga ning kummagi elektroni puhul võib rakendada määramatusprintsipi:  $P_1^2 r_1^2 = P_2^2 r_2^2 = \hbar^2$ .

Soovitus: kasutage asjaolu, et kahe elektroniga iooni energia minimaalne siis, kui  $r_1 = r_2$ .

5) Milline on  $Z$  väärtus, kui rekombinatsiooni tulemusel kiirgub foton ringsagedusega  $\omega_0 = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ ? Mis iooniga on tegemist?

Märkus: vaadeldage üksnes põhiolekus iooni rekombineerumist liikumatu elektroniga.

Kommentaari: viimane küsimus pole päris korrektne, sest eelmistes punktides leitud põhioleku energia avaldis on hinnang ja mitte täpne arvutus; tema täpsus pole piisav tuumaarvu  $Z$  leidmiseks.

## XX Poola (1989)

### I. Keemine

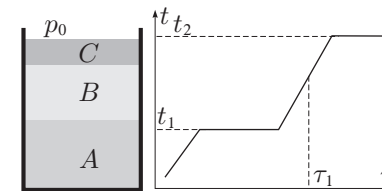
Vedelikud  $A$  ja  $B$  omavahel ei segune. Küllastunud auru rõhk  $p_i$  ( $i = A, B$ ) nende kohal vastab piisava täpsusega valemile  $\ln(p_i/p_0) = a_i/T + b_i$ , kus  $p_0$  on atmosfääri normaalarõhk,  $T$  on auru absoluutne temperatuur ning  $a_i$  ja  $b_i$  on vedeliku omadustest sõltuvad konstadid. Suhte  $p_i/p_0$ ,  $i = A, B$  tegelikud väärtused temperatuuride  $40^\circ\text{C}$  ja  $90^\circ\text{C}$

jaoks on esitatud tabelis.

$T$ ( $^\circ\text{C}$ )	$p_A/p_0$	$p_B/p_0$
40	0,248	0,07278
90	1,476	0,6918

1) Leidke vedelike  $A$  ja  $B$  keemistemperatuurid.

2) Vedelikud  $A$  ja  $B$  valati nõusse, kus nad kihistusid nii, nagu näidatud joonisel. Vedelikku



$B$  katab õhuke mitteaurustuva vedeliku  $C$  kiht, mis ei lahustu ei  $A$ -s ega  $B$ -s. Vedelike  $A$  ja  $B$  molaarmassid gaasilises olekus suhtuvad nagu  $g = M_A/M_B = 8$ . Algselt oli mõlemat vedelikku ühepalju,  $m = 100 \text{ g}$  kumbagi. Vedelikusamba kõrgus ja nede tihedus on sellised, et kõikjal anumas võib rõhu lugeda võrdseks välisrõhuga  $p_0$ . Seda segu hakatakse aeglaselt ja ühtlaselt kuumutama. Skemaatiliselt on vedeliku temperatuuri  $t$  sõltuvus ajast  $\tau$  esitatud graafikul. Leidke temperatuurid  $t_1$  ja  $t_2$  ühe kraadilise täpsusega. Millised on vedelike massid ajahetkel  $\tau_1$ ? Märkus: Eeldatakse, et vaadeldavate vedelike aurud alluvad piisava täpsusega Daltoni seadusele ning kuni küllastunud auru rõhuni võib neid lugeda ideaalseteks gaasideks.

## 2. Kolm keha

Kolm materiaalist punkti  $P_1$ ,  $P_2$  ja  $P_3$ , mis ei leba ühel sirgel ja mille massid on  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $m_3$  on üksteisega gravitatsioonilises vastasmõjus ja ei ole mõjustatud teistest kehast. Tähistagu  $\sigma$  sirget, mis läheb läbi selle süsteemi massikeset ja on risti kolmnurga  $P_1 P_2 P_3$  tasandiga. Milliseid tingimusi peavad rahuldama selle kolmnurga küljepikkused  $P_1 P_2 = a_{12}$ ,  $P_1 P_3 = a_{13}$ ,  $P_2 P_3 = a_{23}$  ja süsteemi pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ , et kolmnurga  $P_1 P_2 P_3$  kuju jääks muutumatuks, s.o. et ta pöörleks ümber telje  $\sigma$  nagu kõva keha?



### 3. Elektronmikroskoop

Uurige võimalust ehitada magnetilise juhtimisega elektronmikroskoop, mille kiirendav pinge on  $U = 511 \text{ kV}$ , ümber prootonmikroskoobiks pingega  $-U$ . Selleks vastake järgmistele küsimustele.

1) Peale kiirendamist satub elektron piirkonda, kus on liikumatute poolide  $L_1, L_2, \dots, L_n$  poolt loodud mittehomoogeenne magnetväli  $\vec{B}$ . Voolutugevused poolides on vastavalt  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . Elektron liigub selles magnetväljas mingit trajektoori  $T$  mööda. Millised peaksid olema uued voolutugevused  $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$ , et prooton mida kiirendati pingega  $-U$  liiguks täpselt sama trajektoori  $T$  mööda? *Juhtnõr:* Leidke tingimus, mille korral mõlemat trajektoori kirjeldavad võrrandid oleksid ühesugused. Võite kasutada alljärgnevat valemit ( $\vec{P}$  on osakese impulss):

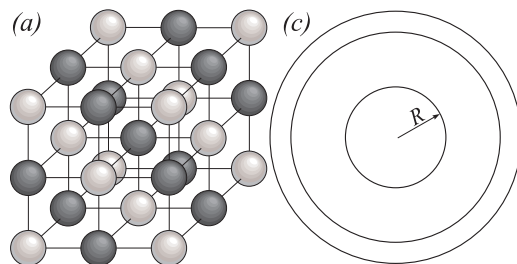
$$\vec{P} \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{P}^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dP^2}{dt}.$$

2) Mitu korda suureneb või väheneb sellise mikroskoobi lahutusvõime (s.o. kahe punkti selline minimaalne vahekaugus, mille puhul need punktid on veel eristatavad), kui elektronide kimp asendada prootonite kimpuga? Eeldada, et mikroskoobi lahutusvõime on määratud ainult matera laineliste omadustega. Enne kiirendamist lugeda elektronide ja prootonite kiirus nulliks. Osakeste enda magnetmomendi vastasmõju välise magnetväljaga mitte arvestada; osakeste liikumise tõttu genereeritava elektromagnetilise kiirguse võib samuti tähele panemata jätta. *Märkus:* Füüsikas kasutatakse sageli energia mõõtühikuna eltronvolti (eV) ja sellest tuletatud ühikuid (keV, MeV); 1 eV on selline energia, mille omandab elektron läbides potentsiaalide vahe 1V. Oma arvutustes kasutage selliseid väärtusi: elektroni seisuenergia  $E_e = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ , prootoni seisuenergia  $E_p = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$ .

### XXI Holland (1990)

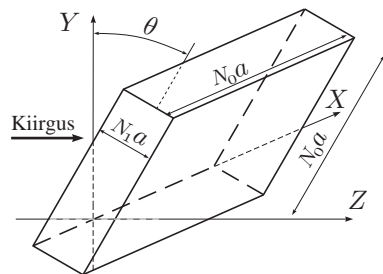
#### 1. Röntgenkiirguse difraktsioon kristallis

Uurigem röntgenkiirguse difraktsiooni täisnurksel kristallivõrel [joonis (a)]. Langegu monokromaatiline laine risti kahemõõtmelisele võrele ning kujutagu see võre endast üksteisega risti asetsevate pilude süsteemi, kus pilude vaheline kaugus on ühes sihis  $d_1$  ja teises  $-d_2$ . Olgu pilude arv ühes sihis  $N_1$  ja teises  $-N_2$ . Difraktsiooni pilti jälgitakse ekraanil, mis asub võrest kaugusel  $L \gg N_1 d_1, N_2 d_2$ .



1) Leidke peamaksimumide asukoht ja laius ekraanil (maksimumi laiuseks nimetatakse naaberminimiumide vahelist kaugust).

2) Edasi vaatleme õhukest plaati kuubilises kristallivõrest, mille mõõtmed on  $N_0 a \times N_0 a \times N_1 a$ , kus  $N_1 \ll N_0$ . Kristall on kallutatud piki  $z$ -telge langeva röntgeni kiirguse suhtes väikese nurga  $\theta$  võrra [vt. joonis (b)]. Ekraani kaugus kristallist  $L \gg N_0 a$ . Leidke maksimumide asukohad ja laiused ekraanil sõltuvuses nurgast  $\theta \ll 1$ . Millal väljendub asjaolu, et  $N_1 \ll N_0$ ?



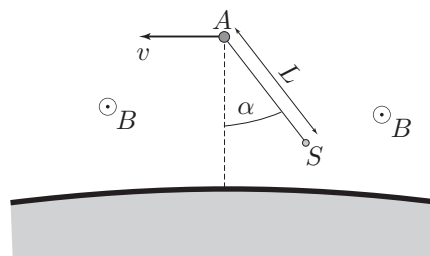
3) Difraktsioonipilti võib interpreteerida ka lähitud Braggi teooriast. Seejuures eeldatakse, et kiirgus peegeldub võre aatomi tasanditelt.

Peegeldunud kiirte interferents loobki difraktsioonipildi. Tõestage, et selline peegeldumine (nn. Braggi peegeldumine) annab maksimumide jaoks samasugused väärtused nagu leidsime punktis 2).

4) Nn. pulbri meetodi korral suunatakse kiirgus suurele hulgate pisikestele kristallikestele — pulbri koostisosadele. Röntgenikiirguse hajumisel kaaliumkloriidi pulbril moodustub fotoplaadil, mis asub kaugusel  $L = 0,1 \text{ m}$  selline kontsentriste rõngaste süsteem, nagu näidatud joonisel. Kõige väiksema rõnga raadius on  $R = 0,053 \text{ m}$ . Langeva kiirguse lainepikkus  $\lambda = 0,15 \text{ nm}$ . Kaaliumkloriidi kristallivõre on kuubiline, nagu näidatud joonisel (a). Kaaliumi ja kloori ioonid on peaaegu ühesuurused ja neid võib vaadelda kui ühesuguseid hajutavaid tsentreid. Leidke kaaliumi kahe naaberiooni vaheline kaugus.

#### 2. Eksperimendid Maa magnetosfääris

1991 a mais viidi kosmoselaev Atlantis ringorbiidile mis lebab Maa ekvatoriaaltasandis. Mingil hetkel laseb kosmoselaev välja satelliidi  $S$ , mis on kinnitatud kosmoselaeva külge jäiga varda abil. Varda pikkus on  $L$  ja mass on tühine. Olgu  $\alpha$  nurk, mille moodustab varras Maa ja Atlantise keskpunkte ühendava joonega (vt. joonis). Satelliit  $S$  asub samuti ekvatoriaaltasandis ja tema mass on hulga väiksem Atlantise massist;  $L$  on hulga väiksem orbiidi raadiusest.



1) Leidke millis(t)e  $\alpha$  väärtus(t)e korral säilitab süsteem oma asendi Maa suhtes (s.o. nurk  $\alpha$  ei muutu).

2) Uurige eelmises punktis leitud tasakaaluasendeid stabiilsuse seisukohast.

3) Kui anda sellisele süsteemile väike tõuge tema stabiilsest tasakaaluasendist, siis tekkivad võnkumised. Leidke ekvatoriaaltasandis toimuvate võngete periood.

4) Joonisel on näidatud Maa magnetväli, mis on risti pildi tasandiga. Varda orbitaalsest liikumisest tingituna tekib tema otste vahele potentsiaalide vahe. ümbritsev keskkond (magnetosfäär) kujutab endast hõrendatud ioniseeritud gaasi, mis on väga suure elektrijuhtivusega. Kontaktplaatide abil, mis asuvad Atlantise ja  $S$ -i pinnal, on varras ühendatud magnetosfääriga. Selle tulemusena tekib temas vool. Kuhu poole on suunatud see vool?

5) Tiirlemisperiood ümber Maa on  $T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$ , varda pikkus  $L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$ , Maa magnetvälja induksioon  $B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ , Atlantise mass  $M = 100 \text{ t}$ . Varda külge ühendatakse vooluallikas, mis asub Atlantise sees ja hoiab alal voolu  $I = 0,1 \text{ A}$ , mis on vastupidine esialgsuga. Kui kaua tuleb hoida seda voolu, et muuta Atlantise orbiidi kõrgust 10 meetri võrra? Lugeda, et nurk  $\alpha = 0$ . Mitte arvestada magnetosfääris toimuvate voolude mõjuga.

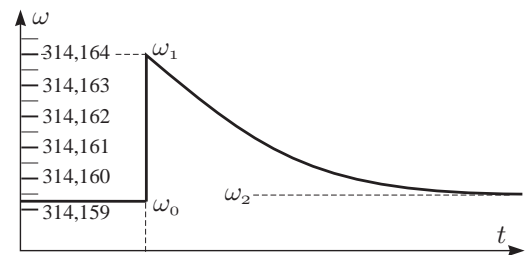
#### 3. Pöörlev neutrontäht

Millisekundilised pulsarid on sellised kiirgusallikad, mis kiirgavad väga lühikesi impulsse perioodiga ühest kuni mõne millisekundini. Kiirgus asub raadiodiapasoonis ja hea raadiolainevastuvõtjaga saab püüda üksikuid impulsse ja määrata suure täpsusega nende periood. Need radioimpulsid genereeritakse erilist tüüpi tähtede, nn. neutrontähtede pinnal. Viimased on hästi suure tihedusega tähed, mis pöörlevad kiiresti ümber oma telje. Nende mass on umbes sama suur kui Päikesel, kuid raadius on vaid mõnikümmend kilomeetrit. Kiire pöörlemise tõttu on täht veidi lapiku kujuga. Olgu  $r_p$  tähe pinna kaugus tema keskpunktist pooluse kohal ja  $r_e$  — ekvaa-

toril. Defineerigem tähe lapikuse aste järgmiselt:  $\varepsilon = (r_e - r_p)/r_p$ . Vaadelgem neutrontähte, mille mass on  $2,0 \cdot 10^{30}$  kg, keskmine raadius on  $1,0 \cdot 10^4$  m ja pöörlemisperiood on  $2,0 \cdot 10^{-2}$  s.

1) Leidke tähe lapikuse aste. Gravitatsiooni konstant on  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

2) Energia kadude tõttu tähe pöörlemiskiirus tapsipi kahaneb; seega kahaneb ka lapikus. Kuid tähte katab kõva koorik, mis ujub vedela tuuma kohal. Aeg-ajalt toimuvad koorikus väringud, mis viivad tema kuju hüppelisele muutumisele. On tehtud kindlaks, et sellise väringu ajal ja peale seda kooriku pöörlemiskiirus muutub.

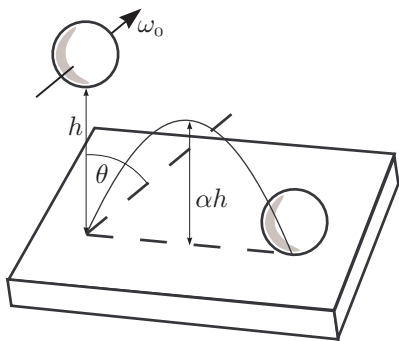


See muutus on toodud graafikul kooriku nurkkiiruse (rad/s) sõltuvusena ajast. Kasutades seda graafikut, leidke vedela tuuma raadius. Eeldada, et tuuma ja kooriku tihedused on ühesugused; tuuma kuju muutumist mitte arvestada.

## XXII Kuuba (1991)

### I. Homogeense keha pörkamine

Joonisel on kujutatud homogeenne kõvast elastest materjalist kera raadiusega  $R$ . Alghetkel on



palli massikese paigal, kuid keha pöörleb ümber horisontaaltelje nurkkiirusega  $\omega_0$ ; madalaima punkti kõrgus maapinnast on  $h$ . Pall lastakse lahti ja ta kukub gravitatsioonivälja mõjul maha, pörkub horisontaalpinnalt ning kerkib tagasi kõrgusele, mis moodustab tema esialgsest kõrgusest murdosa  $\alpha$ . Õhutakistusega mitte arvestada, palli ja pöranda deformatsioon pörke ajal lugeda tühiseks. Palli ja pöranda vaheline liughõõrdetegur on  $\mu$ , palli mass on  $m$  ja raskuskiirendus  $g$ ; kera inertsimomendi jaoks kasutage valemit  $I = 2mR^2/5$ .

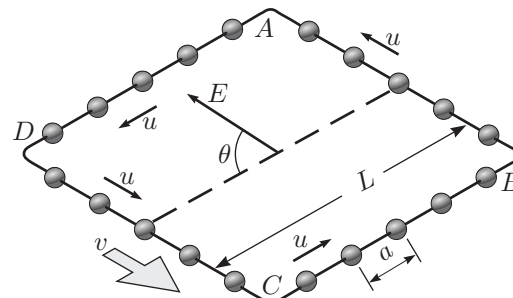
1) Tehkem eeldus, et palli pind libises pöranda suhtes kogu pörke vältel. Leidke (i) pörkesuuna ja vertikaali vaheline nurk  $\theta$ ; (ii) esimese ja teise pörke vahel läbitud horisontaalsuunaline vahemaa; (iii) eelpooltehtud eelduse kehtimiseks vajalik minimaalne  $\omega_0$  väärtus.

2) Eeldagem sedapuhku, et libisemine peatus enne pörke lõppu. Vastake eelmise punkti küsimustele (i) ja (ii).

3) Kasutades punktide 1) ja 2) tulemusi, skitseerige  $\tan \theta$  sõltuvuse graafik nurkkiirusest  $\omega_0$ .

### 2. Relativistlik ruut

Suur hulk tühiselt väikese raadiusega kuulikesi liigub mööda ruudukujulist raami, mille küljepikkus on  $L$ . Kõik kuulikesed kannavad ühesugust laengut  $q$  ja liiguvad ühesuguse kiirusega  $u$ . Raamiga seotud süsteemis on kahe naaberkuuli vaheline kaugus konstantne ja võrdne  $a$ -ga. Kuulikesed on seatud raamile nagu helmed kaelakeele, kusjuures  $L$  on hulga suurem  $a$ -st., vt. joonis. Mittejuhtivast materjalist raam kannab ühtlaselt piki traati jaotunud laengut. Traadi kogulaeng on võrdne ja vastasmärgiline kuulikeste kogulaenguga. Vaadelgem situatsiooni, kus raam liigub paralleelselt küljega  $AB$  (vt. joonis) läbi ühtlase elektrivälja. Elektrivälja tugevus on  $E$  ning ta on risti raami kiirusvektoriga, kuid moodustab nurga  $\theta$  raami tasandiga. Võttes



arvesse relativistlikud efektid, leidke järgmiste suuruste väärtused laboratoorses süsteemis, kus raam liigub kiirusega  $v$ :

1)  $a_{AB}$ ,  $a_{BC}$ ,  $a_{CD}$  ja  $a_{DA}$  — kuulikeste vahelised kaugused raami iga vastava külje peal;

2)  $Q_{AB}$ ,  $Q_{BC}$ ,  $Q_{CD}$  ja  $Q_{DA}$  — iga raami külje kogulaeng (mis kujutab endast traadi laengu ja kuulikeste laengu summat);

3) elektriliste jõudude poolt loodud pöördemoment  $M$ , mis püüab pöörata raamist ja kuulikestest moodustatud süsteemi;

4) elektrivälja ja raami ning kuulikeste süsteemi vastasmõjust tingitud energia  $W$ .

Vastused tuleb avaldada nende suuruste abil, mis on antud ülensande tingimustes.

**Märkus:** Isoleeritud objekti elektrilaeng ei sõltu süsteemist, milles mõõtmisi teostatakse. Elektromagnetilisest kiirgusest tingitud efekte mitte arvestada.

**Mõned erirelatiivsusteooria valemid.** Liikugu taustsüsteem  $S'$  kiirusega  $V$  teise taustsüsteemi  $S$  suhtes. Olgu teljed kahes süsteemis üksteisega paralleelsed ja langegu koordinaatide alguspunkt kahes süsteemis kokku ajahetkel  $t = 0$ . Olgu kiirus  $V$  suunatud piki  $x$ -telje positiivset suunda. **Relativistlik kiiruste liitmine:** kui osakese kiirus süsteemis  $S'$  on  $u'$  ja see on suunatud piki  $x$ -telge, siis tema kiirus süsteemis  $S$

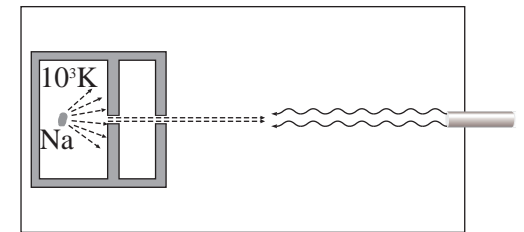
$$u = (u' + V) / [1 + u'V/c^2].$$

**Relativistlik lühenemine:** Kui ese on süsteemis  $S$  paigal ja tema sealne  $x$ -telje sihiline pikkus on  $L_0$ , siis süsteemis  $S'$  mõõdab vaatleja tema pikkuseks  $L = L_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$

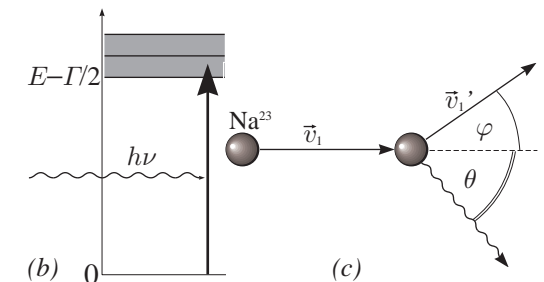
### 3. Aatomite jahutamine laseriga

Selleks, et uurida suure täpsusega isoleeritud aatomite omadusi, tuleb neid hoida uurimise ajal peaaegu liikumatutena. Hiljuti leiutati selle tarvis uus meetod, mida nimetatakse laseriga jahutamiseks. Selle illustreerimiseks on järgmine ülesanne.

Vaakumkambris valustatakse hästi kollimeeritud  $^{23}\text{Na}$  aatomite kimpu (mis on saadud aurustamise teel temperatuuril  $T = 10^3$  K) otse koaksiaalselt suunatud suure intensiivsusega laseri kiirega (vt. joonis). Laseri sagedus on valitud



selliselt, et fotonid neelduvad resonantselt aatomitel, mille kiirus on  $v_0$ . Kui valgus neeldub, ergastatakse need aatomid esimesele energianivoole, mille keskmine energia väärtus on  $E$  ja mille laius on  $\Gamma$  [joonis (b)]. Sellise protsessi puhul



aatomi kiiruse muut on  $\Delta v = v_1 - v_0$ . Kui aatom naaseb energia põhivivoole, kiirgab ta footoni, nii et ta kiirus muutub jälle,  $\Delta v' = v_1' - v_1$  võrra. Seejuures kaldub ta kõrvale nurga  $\varphi$  võrra [joonis (c)]. Niisugune neeldumise ja kiirgamise jada kordub mitmeid kordi — seni kuni aatomi kiirus on muutunud sellise kiiruse  $\Delta v$  võrra, et resonantsi tingimus



pole enam täidetud. Seejärel on vaja muuta laseri sagedust, et hoida alal resonantsi tingimust. Aatomid, mis liiguvad nüüd juba uue kiirusega, pidurdatakse jällegi. Protsess jätkub seni, kuni osade aatomite kiirus on lähenenud nullile.

Esimeses lähenduses võime ignoreerida kõikide teiste aatomitega toimuvate protsessidega, peale footonite neeldumise ja kiirgamise. Peale selle võib eeldada, et laseri kiirgus on sedavõrd intensiivne, et aatomid veedavad vaid tühiselt väikese osa ajast oma energia põhiniivol.

1) Leidke laserikiirguse sagedus, mis oleks resonantsis aatomitega, mille kineetiline energia on kollimaatori läbinud aatomite keskmine. Samuti leidke kiiruse vähenemine  $\Delta v_1$  peale esimest neeldumist.

2) Punktis (1) leitud laserikiirgus on resonantsis aatomitega, mille kiirused leuvad vahemikus laiussega  $\Delta v_0$ . Leidke see laius.

3) Kui aatom kiirgab valgust, kaldub ta nurga  $\varphi$  võrra kõrvale oma esialgselt liikumissuunast. Leidke see nurk.

4) Leidke maksimaalne kiiruse vähenemine  $\Delta v$  antud laseri sageduse jaoks.

5) Milline on ligikaudne neeldumiste-kiirgamiste arv, mis on vajalik selleks, et viia aatomi kiirus tema esialgselt väärtuselt  $v_0$  faktiliselt nullini?

6) Leidke vaadeldava protsessi peale kuluv aeg  $t$  ja vahemaa  $\Delta S$ , mille aatom läbib aja  $t$  jooksul.

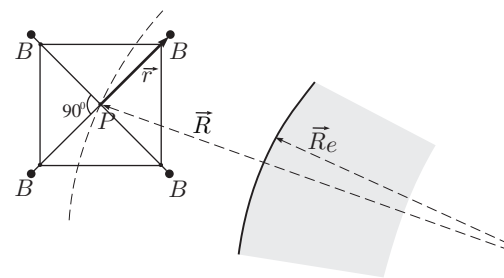
**Arvandmed:**  $E = 3,36 \cdot 10^{-19}$  J,  $\Gamma = 7,0 \cdot 10^{-27}$  J,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J·s,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K. Siin  $c$  on valguse kiirus,  $h$  — Plancki konstant ja  $m_p$  — prootoni mass.

## XXIII Soome (1992)

### I. Pöörlev tehiskaaslane

Vaatleme Maa tehiskaaslast, mis tiirleb ekvatoriaaltasandis ringorbiidil. Tehiskaaslane koosneb massita tsentraalsest kehast (punkt  $P$ ) ja neljast perifeersest kehast  $B$  massidega  $m$ , mis

on kinnitatud  $P$  külge pikkade peenikeste venimatute niitidega pikkusega  $r$ . Kõik viis keha  $P$  ja  $B$ -d asuvad ekvaatori tasandis ja pöörlevad samas tasapinnas. Neli radiaalniiti on ühendatud omavahel peenikeste niitidega nii, et nurgad radiaalniitide vahel on muutumatud ja võrdsed  $90^\circ$ -ga (vt. joonis). Viimati nimetatud niitide ülesandeks on ära hoida kehade  $B$  võnkliikumist, mis muidu muudaks liikumise analüüsi äärmiselt keerukaks. Seega pöörlevad kõik kehad  $B$  kinnistähedte süsteemis sama nurkkiirusega  $\omega$  ümber tsentraalse keha  $P$  ja niitide võrgustik käitub jäiga kehana. Teil tuleb analüüsida küsimusi üldjuhul pöörates tähelepanu kõikvõimalikele erijuhtudele ja andes numbrilised vastused küsimustele (1) ja (2).



1) Leidke jõud, millega radiaalniit mõjub kehale  $B$  kui tema ja punkti  $P$  kohavektorid  $\vec{r}$  ja  $\vec{R}$  (vt. joonis) on (i) paralleelsed ja samasuunalised; (ii) paralleelsed ja vastassuunalised; (iii) risti olevad. Need asendid vastavad ligikaudu jõudude suurimatele ja vähimatele väärtustele.

2) Kõikides kehades  $B$  asuvad radiaalniitidega ühendatud ühesugused masinad, mida käivitab Päikese energia. Iga selline masin tõmbab niiti  $B$  sisse lühikese ajavahemiku jooksul, millal niidile mõjub suurim jõud ja laseb välja tagasi lühikese ajavahemiku jooksul, millal niidile mõjub vähim jõud. Niiti tõmmatakse sisse ja lastakse välja 1% tema keskmisest pikkusest. Pikkema ajavahemiku jooksul niidi keskmine pikkus ei muutu. Milline on ühe masina keskmine (netto-)võimsus keskmistatuna üle tehiskaas-

lase ühe pöörde? Nettovõimsus on defineeritud järgmiselt: (töö, mida masin teeb niiti sisse tõmmates miinus töö, mida niit teeb masinast välja tulles) jagatud ühe pöörde ajaga.

3) Analüüsige muutusi tehiskaaslase liikumises, mis on põhjustatud masinate tööst. Uurige allpoolkirjeldatud tabelis toodud muutuste võimalikkust. Esitage vastused samas tabelis. Numbrilised vastused anda järgmise olukorra jaoks: tsentraalse keha orbiidi raadius  $R = R_e + 500$  km; Radiaalniitide keskmine pikkus  $r = 100$  km, seega on tehiskaaslase süsteemi diameeter 200 km; mass  $m = 1000$  kg; algselt pöörlevad neli keha  $B$  tähtede suhtes ümber tsentraalse keha  $P$  kiirusega 10 pööret tunnis; orbiitide ja tsentraalse keha masse ei ole vaja arvestada.

**Soovitus:** vaadeldage mõlemad võimalikke pöörlemissuundi ( $\omega > 0$  ja  $\omega < 0$ ). Täpseid lahendusi ei ole vaja esitada. Tulemused täpsusega 5% on täielikult aktsepteeritavad. Ärge võtke arvesse Kuu ja Päikese gravitatsioonilist mõju.

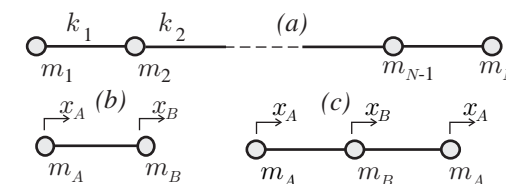
**Arvandmed:** Maa raadius ekvaatoril  $R_e = 6378$  km, Maa mass  $M_e = 9,97 \cdot 10^{24}$  kg, gravitatsioonikonstant  $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/kg·s<sup>2</sup>.

**Vastused** esitage tabelis, mille tulpadeks on “füüsikaline suurus”, “kasvab kui”, “kahaneb kui”, “ei muutu” ja “ei muutu kunagi” ning ridadeks “tehiskaaslase orbitaalkiirus”, “tehiskaaslase orbiidi raadius”, “tehiskaaslase nurkkiirus  $\omega$ ” ja “tehiskaaslase gravitatsiooniline potentsiaalne energia”. Esitage need võrduste või võrratuste kujul (või vajadusel lühifraasidena). Kas tehiskaaslane võib tõusta kõrgemale orbiidile masinate töö tulemusena? Jah (...), Ei (...). Kas tehiskaaslane võib tõusta suvalise kõrgusega orbiidile lahkudes praktiliselt Maa gravitatsioonilise mõju piirkonnast? Miks? Vastus: ...

### 2. Linearse molekuli pikiliikumine

Selles ülesandes analüüsitakse lineaarse molekuli pikiliikumist, st. liikumist molekuli telje sihis. Molekuli pöördliikumist ja paindumist ei vaadel-

da. Molekul koosneb  $N$  aatomist, mille massid on vastavalt  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Iga aatom on seotud oma lähimate naabritega keemilise sidemega. Iga sellist sidet käsitletakse Hooke'i seadusele alluva massita vedruna. Iga vedru iseloomustab tema jäikus  $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ . Selline molekul on kujutatud joonisel. Ülesande lahendamiseks on teada järgmised asjaolud: lineaarse molekuli vabad pikivõnkumised kujutavad endast võnkliikumiste (mida nimetatakse normaalvõnkumisteks ehk normaalmoodideks) superpositsiooni; normaalmoodis võnguvad kõik aatomid harmooniliselt ühesuguse sagedusega ja läbivad üheaegselt tasakaaluasendi.



1) Tähistagu  $x_i$   $i$ -nda aatomi nihet tema tasakaaluasendist. Väljendage igale aatomile mõjuv jõud  $F_i$  nihete  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ja vedrude jäikuste  $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$  funktsioonina. Milline seos kehtib jõudude  $F_1, F_2, \dots, F_N$  vahel. Kasutades seda seost, tuletage seos nihete  $x_1, x_2, \dots, x_N$  vahel ja selgitage selle seose füüsikalist sisu.

2) Analüüsige kaheaatomilise molekuli  $AB$  [joonis (b)] liikumist Olgu aatomite massid  $m_a$  ja  $m_b$  ning sideme jäikus  $k$ . Tuletage avaldised aatomitele  $A$  ja  $B$  mõjuvate jõudude jaoks. Määrake molekuli võimalikud liikumised ja neile vastavate võnkumiste sagedused, selgitage tulemust. Kuidas on võimalik, et aatomid võnguvad sama sagedusega, kuigi nende massid on erinevad?

3) Analüüsige kolmeaatomilise molekuli  $A_2B$  [joonis (c)] liikumist. Väljendage igale aatomile mõjuv taastav jõud funktsioonina aatomite nihetest. Leidke molekuli võimalikud liikumised ja määrake vastavad sagedused.

4)  $CO_2$  molekuli kahe pikivõnkumismoodi sagedused on vastavalt  $3,998 \cdot 10^{13}$  Hz ja  $7,042 \cdot$

$10^{13}$  Hz. Leidke  $C - O$  sideme jäikuse numbriline väärtus. Kui hästi kirjeldab keemiliste sidemete struktuuri jaoks kasutatud lähendus reaalse molekuli võnkliikumisi? Süsiniku aatomi suhteline aatommass on 12 ja hapniku aatomil 16. Aatommassi ühik  $m_0 = 1,660 \cdot 10^{-27}$  kg.

### 3. Tehiskaaslane päikesevalguses

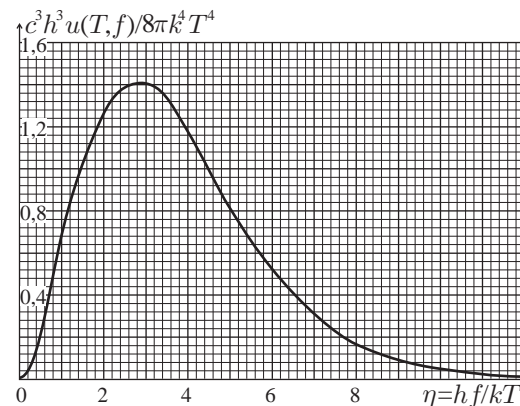
Selles ülesandes käsitletakse probleemi tehiskaaslane temperatuurist. Tehiskaaslane kere on kera läbimõõduga 1 m, mille kõikides punktides on ühesugune temperatuur. Kogu kera pind on kaetud ühesuguse kattematerjaliga. Tehiskaaslane asub kosmoses Maa läheduses, aga mitte tema varjus. Päikese pinna kui absoluutselt musta keha pinna temperatuur  $T_{\odot} = 6000$  K, Päikese raadius on  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$  m. Maa ja Päikese vaheline kaugus on  $L = 1,5 \cdot 10^{11}$  m. Tehiskaaslane kuumeneb Päikese valguses temperatuurini, kus tema kui absoluutselt musta keha kiirgus tasakaalustab neelatava päikesevalguse võimsuse. Absoluutselt musta keha pinnaühiku poolt kiirratav võimsus on antud Stefan-Boltzmanni seadusega  $P = \sigma T^4$ , kus universaalkonstant  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ . Esimeses lähenduses võib eeldada, et Päike ja tehiskaaslane neelavad kogu neile langeva elektromagnetilise kiirguse.

1) Leia avaldis tehiskaaslane temperatuuri jaoks ja hinnang selle arvulisele väärtusele. Temperatuuril  $T$  oleva absoluutselt musta keha kiirgusspekter  $u(T, f)$  on kirjeldatav Planck'i kiirguseadusega

$$u(T, f)df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^{\eta} - 1},$$

kus  $u$  on elektromagnetilise kiirguse energia tihedus sagedusintervallis  $(f, f + df)$  ja  $\eta = hf/kT$ . Konstantide väärtused on järgmised: Planck'i konstant  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J·s, valguse kiirus vaakumis  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m/s ja Boltzmanni konstant  $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$  J/K. Absoluutselt musta keha spekter, integreerituna üle kõikide sageduste ja kiirguse suundade

annab ühikulise pinna kiirguse koguvõimsuse  $P = \sigma T^4$ , s.t. ülaltoodud Stefan-Boltzmanni seaduse ( $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15c^2 h^3$ ). Lisatud joonisel on kujutatud normaliseeritud spekter  $c^3 h^3 u(T, f) / 8\pi k^4 T^4$  kui parameetri  $\eta$  funktsioon.



2) Paljudes rakendustes on vaja hoida tehiskaaslast nii külmana kui võimalik. Tehiskaaslane jahutamiseks kasutavad insenerid peegeldavat kattematerjali, mis peegeldab valgust teatud piirsagedusest suurematel sagedustel aga ei takista soojuskiirguse väljapääsu sellest sagedusest väiksematel sagedustel. Vastaku see piirsagedus  $hf/k$  väärtusele 1200 K. Hinnake, milline on nüüd tehiskaaslane temperatuur.

Soovitus: Täpset vastust ei nõuta. Seepärast ärge teostage keerukaid integreerimisi, vaid kasutage lähendusi, kus võimalik. Teda on järgmise integraali väärtus:

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta^3 d\eta}{e^{\eta} - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Funktsiooni  $\eta^3 / (e^{\eta} - 1)$  maksimum on ligikaudu väärtusel  $\eta \approx 2,82$ . Väikeste  $\eta$  väärtuste korral võib kasutada eksponentfunktsiooni reaktiivsuse kahte esimest liiget:  $e^{\eta} \approx 1 + \eta$ .

3) Tehiskaaslasel on väljaulatuvad päikesepaneelid, mis toodavad elektrienergiat. Reaalsuses moodustab elektriseadmete poolt soojuseks muundatav energia tehiskaaslane sisemuses täiendava soojusallika. Milline oleks punk-

tis (2) kirjeldatud tehiskaaslane temperatuur siis, kui seesmise soojusallika võimsus on 1 kW.

4) Tootja reklaamib spetsiaalset kattematerjali järgmiselt: “See materjal peegeldab tagasi enam kui 90% kogu pealelangevast kiirgusest (nii nähtavat kui ka infrapunast valgust), kuid kiirgab kõikidel sagedustel (nii nähtavat kui infrapunast valgust) nii nagu teeb seda absoluutselt must keha, eemaldades niiviisi palju soojust. Seega hoiab meie kattematerjal tehiskaaslane nii külmana kui võimalik.” Kas selline kattematerjal võib eksisteerida? Põhjenda vastust.

5) Millised omadused peaksid olema kattematerjalil, et temaga kaetud sfääriline keha, mis sarnaneb siinvaadeldud tehiskaaslasel, kuumeneks temperatuurini, mis ületab punktis (1) leitud väärtuse

## XXIV Ameerika (1993)

### I. Atmosfäärielekter

Elektrostaatilisest vaatepunktist võib Maa pinda vaadelda hea juhina. Ta kannab kogulaengut  $Q_0$  ja keskmist laengu pindtihedust  $\sigma_0$ .

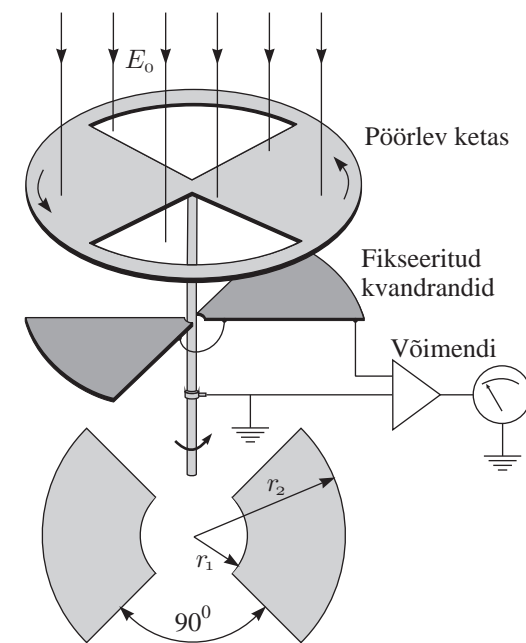
1) Ilusa ilmaga on Maa pinna läheduses allapoole suunatud elektrivälja tugevusega  $E_0$  ligikaudu 150 V/m. Leia Maa laengu pindtihedus ja Maa pinna kogulaeng.

2) Allapoole suunatud elektrivälja tugevus kahaneb kõrgusega ja on 100 m kõrgusel umbes 100 V/m. Arvuta atmosfääri 1 m<sup>3</sup> keskmine kogulaeng Maa pinna ja 100 m kõrguse vahel.

3) Punktis (2) arvatud kogulaeng tuleneb tegelikult peaaegu võrdsest arvust positiivselt ja negatiivselt ühekordselt laetud ionidest ühikruumalas ( $n_+$  ja  $n_-$ ). Maa pinna lähedal ilusa ilma korral  $n_+ \approx n_- \approx 6 \cdot 10^8$  m<sup>-3</sup>. Need ioonid liiguvad vertikaalse elektrivälja mõjul. Nende kiirus on võrdeline välja tugevusega:  $v \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot E$ , kus  $v$  ühikuks on m/s ja  $E$  ühikuks on V/m. Kui kaua võtaks aega ionide liikumine atmosfääris, et neutraliseerida pool Maa pind-

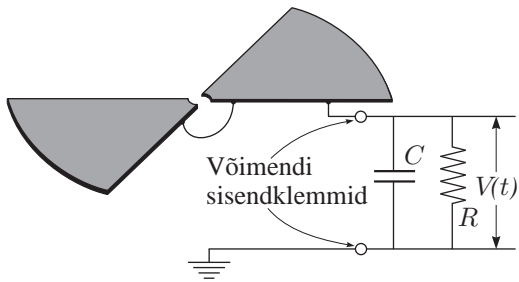
laengust, kui puuduvad muud protsessid (näiteks välg), mis seda taastavad?

4) Üks moodus atmosfääri elektrivälja ja seega ka  $\sigma_0$  mõõtmiseks on esitatud joonisel. Paar pin-



nahest isoleeritud aga omavahel ühendatud metallkvadranti asetsevad ühtlaselt pöörleva maandatud ketta all, millesse on tehtud kaks kvadrantidujulist väljalõiget. (Joonisel on ketta ja kvadrantide vahekaugus liialdatud nende asetuse näitamiseks.) Kaks korda iga täispöörde jooksul on isoleeritud kvadrandid väljale täielikult avatud ja siis (1/4 perioodi hiljem) täielikult ekraanitud. Olgu  $T$  pöörlemisperiood ja  $r_1$  ja  $r_2$  kvadrantide sisemine ja väline raadius — nii nagu näidatud joonisel. Olgu  $t = 0$  ajahetk, millal isoleeritud kvadrandid on täielikult ekraanitud. Tuletagi avaldis isoleeritud kvadrantide ülalpinna indutseeritud kogulaengu jaoks aja funktsioonina  $t = 0$  ja  $t = T/2$  vahel ja skitseerige see sõltuvus graafiliselt. [Ioonide voolu mõju atmosfääris võib antud juhul mitte arvestada.]

5) Punktis (4) kirjeldatud seade on ühendatud võimendajaga, mille sisendvooluring on ekviva-

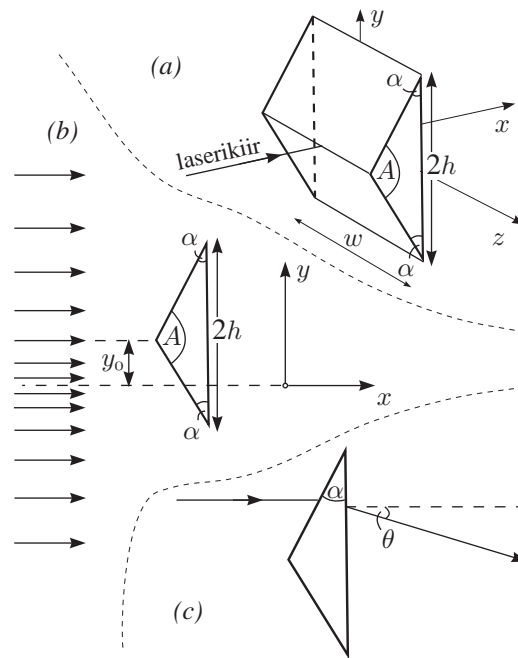


lentne paralleelselt ühendatud kondensaatoriga mahtuvusega  $C$  ja takistusega väärtusega  $R$ . (Kvadrantide süsteemi mahtuvust võib  $C$ -ga võrreldes mitte arvestada.) Skitseerige graafiliselt punktide  $M$  ja  $N$  vahelise pinge  $V$  sõltuvus aja  $t$  funktsioonina ketta ühe täispöörde jooksul vahetult pärast seda kui ketas on pandud pöörlema perioodiga  $T$  juhtudel kui (i)  $T = T_a \ll CR$ ; (ii)  $T = T_b \gg CR$ . [Oletame, et  $C$  ja  $R$  väärtused on fikseeritud ja ainult  $T$  muutub situatsioonide (i) ja (ii) vahel.] Tuletage avaldis suhte  $V_a/V_b$  ligikaudse väärtuse jaoks, kus  $V_a$  ja  $V_b$  on  $V(t)$  maksimaalväärtused vastavalt juhtudel (i) ja (ii).

6) Olgu  $E = 150 \text{ V/m}$ ,  $r_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 7 \text{ cm}$ ,  $C = 0,01 \mu\text{F}$ ,  $R = 20 \text{ M}\Omega$  ja ketta pöörlemiskiirus 50 pöört sekundis. Milline on siis  $V$  ligikaudne suurim väärtus ühe pöörde jooksul?

## 2. Laserkiire tekitatud jõudude mõju läbi- paistvale prismale

Tugeva laserkiire murdumine väikestes läbi-  
paistvates objektides võib tekitada viimastele  
mõjuvaid märkimisväärsed jõude. Tõdemaks, et  
see on nii, vaatleme väikest kolmnurkset klaasist  
prismat tipunurgaga  $A = \pi - 2\alpha$ , aluse pikkuse-  
ga  $2h$  ja laiusega  $w$ . Prisma murdumisnäitaja  
on  $n$  ja tihedus  $\rho$ . Olgu prisma asetatud  $x$ -telje  
sihis horisontaalselt levivasse laserkiirde. (Kogu  
selles ülesandes eeldatakse, et prisma ei pöörle,  
s.t. et ta alus on alati paralleelne  $yz$ -tasandiga,  
kolmnurksed tahud paralleelsed  $xy$ -tasandiga ja  
tipunurk on sihitud vastu laserkiirt nagu näidat-  
ud joonisel (a). Ümbritseva õhu murdumisnäitaja



$n_{\text{air}} = 1$ . Prisma tahud on kaetud peegeldum-  
isvastaste katetega, mis väldivad igasugused  
peegeldused. Laserkiire intensiivsus on konstantne  
tema laiuse ulatuses  $z$ -telje sihis, aga kahaneb  
lineaarselt kaugusega  $|y|$   $x$ -teljest, omades  
maksimaalselt väärtust  $I_0$  punktis  $y = 0$  ja  
kahanedes nullini  $y = \pm 4h$  korral [joonis (b)].  
[Intensiivsus on võimsus ühikulise pinna kohta,  
näiteks ühikutes  $\text{Wm}^{-2}$ .]

1) Kirjutage võrrandid, millest saab avaldada  
nurga  $\theta$  [joonis (c)]  $\alpha$  ja  $n$  kaudu kui laserkiir  
langeb prisma ülemisele tahule.

2) Avaldage  $I_0$ ,  $\theta$ ,  $h$ ,  $w$  ja  $y_0$  kaudu prismale la-  
serkiire poolt mõjuva jõu  $x$ - ja  $y$ -komponendid,  
kui prisma tipp on nihutatud  $x$ -teljest kaugu-  
sele  $y_0$  ( $|y_0| < 3h$ ). Esitage graafiliselt jõu  
horisontaal- ja vertikaalkomponentide väärtu-  
sed vertikaalnihke  $y_0$  funktsioonidena.

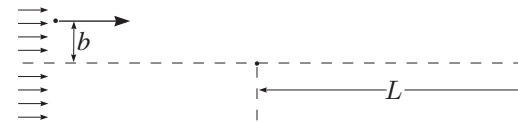
3) Olgu laserkiire laius  $z$ -telje sihis 1 mm ja pak-  
sus ( $y$ -telje sihis) 80 mm. Prismat iseloomusta-  
vad väärtused  $\alpha = 30^\circ$ ,  $h = 10 \text{ mm}$ ,  $n = 1,5$ ,  
 $w = 1 \text{ mm}$  ja  $\rho = 2,5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Millist lase-  
ri võimsust (vattides) on vaja, et tasakaalustada

prismale ( $y$ -telje sihis) mõjuvat raskusjõudu kui  
prisma tipp asetseb  $y_0 = -h/2$  ( $= -5 \text{ mm}$ ) võr-  
ra allpool laserkiire telge?

4) Kirjeldatud katset korratakse kaalutuse ting-  
imustes [prisma ja laserkiire mõõtmed on samad,  
mis punktis (3)]. Laseri võimsus  $I_0 = 10^8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .  
Milline on tekkivate võnkumiste periood, kui prisma  
nihutati kaugusele  $y = h/20$  laserkiire teljest ja  
lasti seejärel lahti?

## 3. Elektronide kimp

Kiirendav pinge  $V_0$  tekitab ühtlase paralleelse  
elektronide kimbu. Elektronid mööduvad peenike-  
sest pikast positiivselt laetud vasktraadist, mis  
on risti elektronide liikumise esialgsele sihiga (vt.  
joonis). Tähistagu  $b$  elektroni möödumiskaugust  
traadist siis, kui traat ei oleks laetud. Elektronid  
liiguvad kaugusel  $L$  ( $\gg b$ ) traadi taga asetse-  
vale ekraanile (vaatlustasandile) — vt. joonis.  
Nii kimbu laiust kui traadi pikkust võib vaadelda  
lõpmatutena sihis, mis on risti joonise tasandiga.



**Arvandmed:** traadi raadius  $r_0 = 10^{-6} \text{ m}$ ,  $b$  suu-  
rim väärtus  $b_{\text{max}} = 10^{-4} \text{ m}$ , elektrilaeng traadi  
ühikulise pikkuse kohta  $q_{\text{linear}} = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}$ ,  
kiirendav pinge  $V_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ V}$ , kaugus traadist  
vaatlusekraanini  $L = 0,3 \text{ m}$ .

**Märkus:** järgnevate küsimuste 2-4 jaoks kasu-  
tage sobivaid lähendusi, mis võimaldavad saada  
analüütilisi ja numbrilisi lahendusi.

1) Arvutage traadi poolt tekitatud elektrivälja  
tugevus  $E$ . Skitseerige  $E$  suurus funktsioonina  
kaugusest traadi teljest.

2) Kasutades klassikalist füüsikat leidke elekt-  
roni nurkkõrvalekalle. Tehke seda parameetri  $b$   
väärtustel, millistel elektron ei pörka vastu traati.  
Tähistagu  $\theta_{\text{final}}$  (väikest) nurka elektroni esialgse  
kiiruse ja kiiruse vahel, millist ta omab vaatlus-  
pinnani jõudmisel. Leidke  $\theta_{\text{final}}$ .

3) Arvutage ja skitseerige klassikalisesest füüsikast  
johtuv pörgete (s.t. intensiivsuse) jaotus ekraanil.  
4) Kvantfüüsika ennustab olulist erinevust inten-  
siivsuse jaotuses võrreldes klassikalise pildi-  
ga. Skitseerige kvantteooriast tulenev pilt ja kir-  
jeldage seda kvantitatiivselt.

## XXV Hiina (1994)

### I. Relativistlik osake

Eirrelatiivsusteoorias on seos vaba osakese ener-  
gia  $E$  ja impulsi  $p$  vahel antud valemiga

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2,$$

kus  $m_0$  on osakese seisumass. Kui sellisele osa-  
kasele mõjub konservatiivne jõud, siis tema ko-  
guenergia — kineetilise energia  $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$   
ja potentsiaalse energia summa — on jääv. Kui  
osakese energia on väga suur, võib tema seisue-  
nergiat mitte arvestada (sellist osakest kutsu-  
takse ultrarelativistlikuks). Võib juhtuda, et lü-  
hikeste ajavahemike vältel on osakese ultrarela-  
tivistlikkuse tingimus rikutud; antud ülesandes  
selliste ajavahemike uurimist ei nõuta.

1) Vaatleme väga suure energiaga osakese (mil-  
le seisuenergiat võib mitte arvestada) ühesihilist  
liikumist sellise tsentraalse tõmbejõu mõjul, mil-  
le absoluutväärtus  $f$  on konstantne kõikjal pea-  
le koordinaatide alguspunkti, kus ta võrdub nul-  
liga. Asetsegu osakene ajahetkel  $t = 0$  koor-  
dinaatide alguspunktis ja olgu tema algimpulss  
 $p_0$ . Kirjeldage graafiliselt osakese liikumist, esi-  
tades nii impulsi  $p$  sõltuvus ruumikoordinaadist  
 $x$ , kui ka koordinaadi  $x$  sõltuvus ajast  $t$ , ja seda  
vähemalt ühe liikumisperioodi jooksul. Avalda-  
ge pöördepunktide koordinaadid suuruste  $p$ , ja  $f$   
kaudu ning näidake noolte abil, mis suunas kul-  
geb protsess ( $p, x$ )-diagrammil! Kasutage vas-  
tuselehte 1 [tühi leht ( $x-t$ ) ning ( $p-x$ ) telgedega!]  
2) Meson on osakene, mis koosneb kahest kvar-  
gist. Mesoni seisumass  $M$  on võrdne kahest  
kvargist koosneva süsteemi koguenergiaga mis



on jagatud  $c^2$ -ga. Vaatleme seisva mesoni ühemoõtmelist mudelit, milles kaks kvarki liiguvad piki  $x$ -telge ja tõmbavad üksteist konstantse absoluutväärtusega jõuga. Eeldatakse, et kvargid võivad teineteist vabalt läbida. Kvarkide suureenergilise liikumise analüüsil võib nende seisumasse mitte arvestada. Ajahetkel  $t = 0$  asetsevad mõlemad kvargid punktis  $x = 0$ . Esitage graafiliselt kumbagi kvargi liikumine, nii  $(x, t)$  kui ka  $(p, x)$ -diagrammil! Avaldage pöördepunktide koordinaadid  $M$  ja  $f$  kaudu, näidake protsessi kulgemise suund  $(p, x)$ -diagrammil ning määrake kahe kvargi suurim vahekaugus! Kasutage vastuselehte 2 [leht kolme teljestikuga:  $(x_1, x_2-t)$ ,  $(p_1-x_1)$  ja  $(p_2-x_2)$ !]

3) Tähistame punktis (2) kasutatud taustsüsteemi  $S$ -ga; laboratoorne taustsüsteem  $S'$  liigub  $x$ -telje negatiivses suunas konstantse kiirusega  $V = 0,6c$ . Koordinaadid neis taustsüsteemides on valitud selliselt, et ajahetkel  $t = t' = 0$  langeb punkt  $x = 0$  taustsüsteemis  $S$  kokku punktiga  $x' = 0$  taustsüsteemis  $S'$ . Esitage kumbagi kvargi liikumine graafiliselt  $(x', t')$  diagrammil, avaldage pöördepunktide koordinaadid  $M, f$  ja  $c$  kaudu ja leidke kahe kvargi maksimaalne vahekaugus laboratoorses taustsüsteemis  $S'$ . Kasutage vastuselehte 3 [ $(x'_1, x'_2-t)$  teljestikuga!]. Osakese koordinaadid taustsüsteemides  $S$  ja  $S'$  on seotud Lorentzi teisendusega

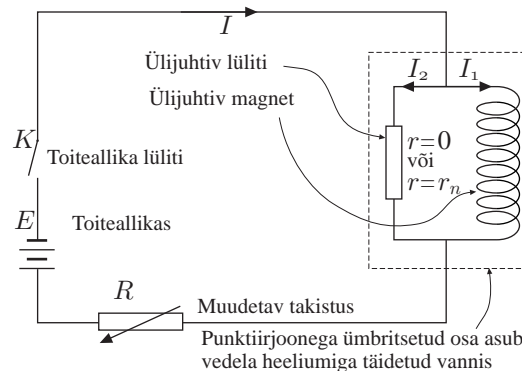
$$x' = \gamma(x + \beta ct) = \gamma(t + \beta x/c);$$

siinjuures  $\beta = V/c$  ja  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  ning  $V$  on taustsüsteemi  $S'$  kiirus taustsüsteemi  $S$  suhtes. Olgu mesoni seisuenergia  $Mc^2 = 140$  MeV ja kiirus laboratoorse taustsüsteemi  $S$  suhtes  $0,60c$ . Määrake mesoni energia  $E'$  laboratoorses taustsüsteemis.

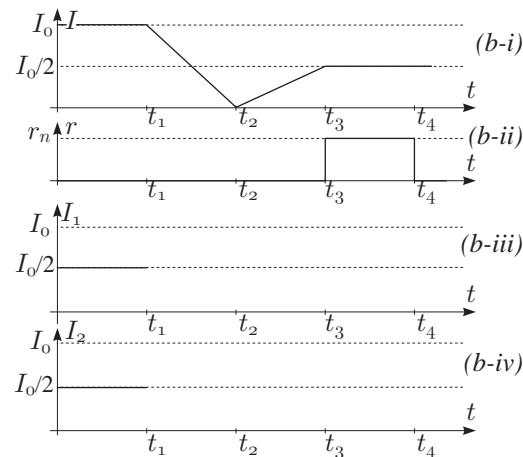
## 2. Ülijuhtiv magnet

Ülijuhtivad magnetid on laborites laialdaselt kasutusel. Tavaline ülijuhtiv magnet kujutab endast ülijuhtivast traadist solenoidi. Ülijuhtiva magneti suurepärase omadus on, et ta tekitab

tugeva magnetvälja ilma mingi energiakaota, mida võiks põhjustada Joule'iline kuumenemine: ülijuhtiva traadi elektritakistus muutub nulliks, kui magnet asetatakse üleni vedelase heeliumisse, mille temperatuur on 4,2 K. Harilikult on selline magnet varustatud spetsiaalse konstruktsiooniga ülijuhtiva lülitiga — vt. joonis (a). Lüliti takistus on kontrollitav: ülijuhtivas olekus on  $r = 0$ , normaalses olekus  $r = r_n$ . Kui takisti on ülijuhtivas olekus, võib magnetit kasutada autonoomses režiimis, kusjuures magnetis ja ülijuhtivas lülitis ringleb mittesumbuv vool. Autonoomne režiim võimaldab väga stabiilset magnetvälja alalhoidmist väga pika aja vältel, kusjuures toiteallikas on välja lülitatud. Ülijuhtiva lüliti detaile ei ole joonisel (a) esitatud. Harilikult on selleks lühike ülijuhtiva traadi tükk, mille ümber on mähitud küttekeha ja mis on vedelast heeliumist piisavalt isoleeritud. Soojenemisel ülijuhtiva traadi temperatuur tõuseb ja ta läheb üle normaaljuhtivusega olekusse. Takistuse  $r_n$  väärtus on harilikult mõned oomid, selles ülesandes võtkem selleks  $5 \Omega$ . Ülijuhtiva magneti induktiivsus sõltub tema mõõtmetest; olgu joonisel (a) kujutatud magneti induktiivsus  $10$  H. Summaarset voolutugevust  $I$  saab muuta muudetava takistusega takisti  $R$  abil.

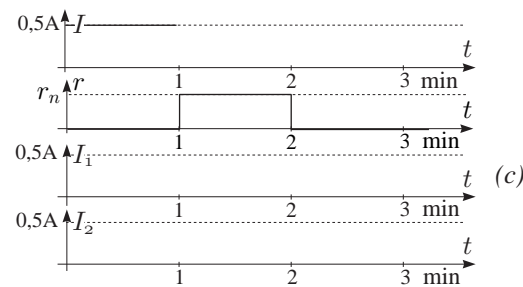


1) Oletagem, et koguvoolu  $I$  ja ülijuhtiva lüliti takistust  $r$  muudetakse sellisel viisil, et nende sõltuvus ajast vastab joonisel (b-i) ja (b-ii) kujutatule. Alghetkel olid voolud  $I_1$  ja  $I_2$ , mis kulgevad

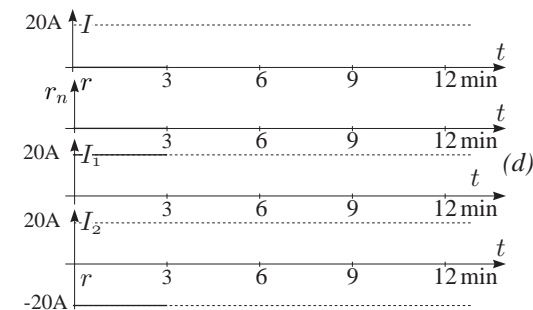


vastavalt läbi magneti ja läbi lüliti, võrdsed [joonis (b-iii) ja (b-iv)]. Kuidas muutuvad need voolud ajavahemikul  $t_1$  kuni  $t_4$ ? Vastus visandage joonistele (b-iii) ja (b-iv).

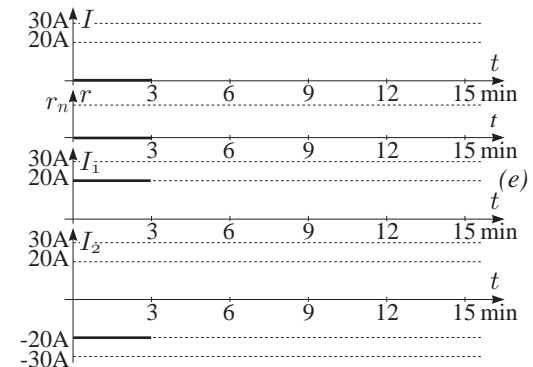
2) Oletagem, et ajahetkel  $t = 0$  lülitatakse sisse toiteallika lüliti  $K_1$  ja et sellel hetkel  $r = 0$ ,  $I_1 = 0$ ,  $R = 7,5 \Omega$  ning koguvool  $I = 0,5$  A. Edaspidi hoitakse lüliti  $K$  ühendatuna, takistust  $r$  aga muudatakse nii, nagu näidatud joonisel (c-ii). Visandage  $I, I_1$  ja  $I_2$  ajalised sõltuvused joonistele (c-i), (c-iii) ja (c-iv).



3) Ülijuhtiv lüliti talub oma normaaljuhtivas olekus üksnes sellist voolu, mis on väiksem kui 0,5 A; suurematel vooludel põleb ta läbi. Oletagem, et ülijuhtivat magnetit kasutatakse autonoomses režiimis, s.t.  $I = 0$ , ja et ajavahemiku  $t = 0$  kuni  $t = 3$  min jooksul  $I_1 = i_1$  (näiteks 20 A) ning  $I_2 = -i_1$  [vt. joonis (d)]. Oletagem, et eksperimendi peatamiseks on vaja viia magnetit läbiv vool võrdseks nulliga. Kuidas Te seda



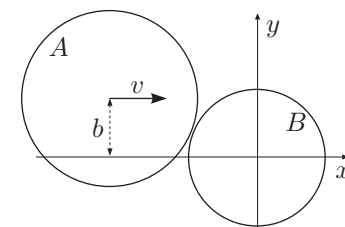
teeksite? Ilmselt kulub Teil selleks mitu erioperatsioonilist sammu. Visandage  $E, r, I_1$  ja  $I_2$  vastavad muutused joonisel (d).



4) Magnetit kasutati autonoomses režiimis konstantse voolutugevuse 20 A juures [ $t = 0$  kuni  $t = 3$  min, joonis (e)]. Kuidas Te viiksite ta üle sellisesse autonoomsesse režiimi, kus voolutugevus on 30 A? Vastus visandage joonisel (e).

## 3. Ketas pörge hõõrdumisega

Homogeenne ketas  $A$  massiga  $m$  ja raadiusega  $R_A$  liigub kulgevast kiirusega  $V$  tasasel horisontaalsel pinnal,  $x$ - $y$  tasandil,  $x$ -telje sihis, kusjuures tema kaugus  $x$ -teljest on  $b$ . Ta pörkub paigalseisva homogeenne kettaga  $B$ , millel on sama



mass ja paksus kuid mille raadius on  $R_B$  ja mis asetseb koordinaatide alguspunktis. Eeldatakse, et pörke lõpul on ketaste kokkupuutuvate punktide kiirused suunas, mis on risti nende tsentroid ühendava sirgega, võrdsed. Samuti eeldatakse, et ketaste suhtelise kiiruse absoluutväärtus sihis, mis ühendab nende keskpunkte, on sama enne ja pärast pörget.

1) Avaldage kiiruste  $x$ - ja  $y$ -komponendid pärast pörget  $V'_{Ax}$ ,  $V'_{Bx}$  ja  $V'_{By}$  suuruste  $m$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $V$  ja  $b$  kaudu!

2) Avaldage ketta  $A$  kineetiline energia  $E'_A$  ja ketta  $B$  kineetiline energia  $E'_B$  peale pörget suuruste  $m$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ , ja  $b$  kaudu!

## XXVI Austraalia (1995)

### I. Gravitatsiooniline punanihe ja tähe massi määramine

1) (3 punkti) Footon sagedusega  $f$  omab efektiivset inertset massi  $m$ , mis on määratud tema energiaga. Eeldame, et footoni gravitatsiooniline mass on võrdne ta inertse massiga. Järelikult kaotab tähe pinnalt kiiratud footon tähe gravitatsiooniväljast väljumisel energiat. Näita, et footoni sageduse nihe  $\Delta f$  tema eemaldumisel tähe pinnalt lõpmatusse on eeldusel  $\Delta f \ll f$  antud avaldisega

$$\Delta f/f \simeq -GM/Rc^2,$$

kus  $G$  on gravitatsioonikonstant,  $R$  — tähe raadius,  $c$  — valguse kiirus ja  $M$  — tähe mass. Seega on võimalik leida suurel kaugusel asuva tähe jaoks suhe  $M/R$ , kui mõõta tema spektris mingi tuntud spektrijoone punanihe.

2) (12 punkti) Mehitamata kosmoselaev on lähetatud eesmärgiga mõõta meie galaktikas asuva tähe mass  $M$  ja raadius  $R$ . Kosmoselaeva radiaalsel lähenemisel tähele jälgitakse footoneid, mis on kiiratud tähe pinnalt. Seda tehakse uurides footonite resonantset neeldumist kosmoselaeval asuvas katsekambris tekitatud  $\text{He}^+$  ionide joas. Resonantne neeldumine toimub

vaid siis, kui  $\text{He}^+$  ionidele on antud selline tähesuunaline kiirus, mis kompenseerib täpselt footonite punanihke.  $\text{He}^+$  ionide voo kiirust mõõdetakse tähe suhtes, kusjuures resonantsele neeldumisele vastav väärtus  $v = \beta c$  registreeritakse funktsioonina kaugusest  $d$  tähe lähima punktini. Eksperimentaalandmed on esitatud järgmises tabelis.

$\beta (\times 10^{-5})$	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
$d (\times 10^8 \text{ m})$	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67

Määrata kõiki tabelis toodud andmeid kasutades soovivatult graafiliselt tähe mass ja raadius. Mõõtmiste ebatäpsusest tingitud viga ei ole vaja hinnata.

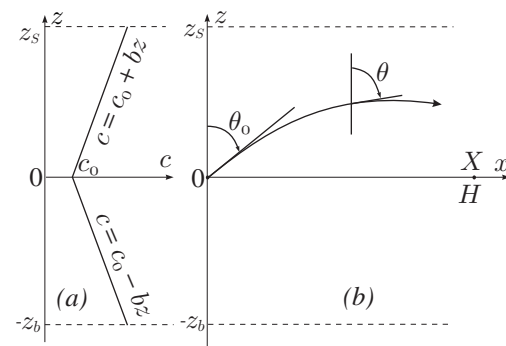
3) Määramaks suurusi  $R$  ja  $M$  kirjeldatud eksperimentidest, võetakse harilikult arvesse kiirgava aatomi tagasilöögist tingitud parandus. [Soojusliikumine põhjustab kiirgusjoonte laienemist, kuid ta ei nihuta nende maksimume. Seetõttu võime lugeda, et soojuslikud efektid ei mõjuta tulemust]. (i) (4 punkti) Olgu  $E$  energia vahe aatomi kahe energeetilise nivoo vahel siis kui aatom on paigal. Oletame, et algselt liikumatu aatom kiirgab footoni ja saab seejuures tagasilöögi. Leidke kiiratud footoni energia  $hf$  relativistlik avaldis, esitades see funktsioonina  $E$ -st ja algolekus oleva aatomi seisumassist  $m_0$ . (ii) (1 punkt) Hinnake numbriliselt tagasilöögist tingitud sageduse nihet  $(\Delta f/f)_{\text{recoil}}$  juhumi jaoks, kui on tegemist  $\text{He}^+$  ionidega. Teie vastus peaks osutama hulga väiksemaks punktis (2) leitud gravitatsioonilisest punanihkest.

**Andmed:** Valguse kiirus  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , Heiooni seisueenergia  $m_0 c^2 = 4 \cdot 938 \text{ MeV}$ , Bohri energia  $E_n = -13,6 Z^2 n^{-2} \text{ (eV)}$ , gravitatsioonikonstant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

### 2. Heli levik

*Sissejuhatus.* Heli leviku kiirus ookeanis muutub sõltuvalt sügavusest, temperatuurist ja soolususest. Järgnev joonis (a) näitab helikiiruse  $c$  sõltuvust sügavusest  $z$  juhul, kui kiirus omandab

minimaalse väärtuse  $c_0$  mingis ookeani pinna ja merepõhja vahelises punktis. Mugavuse pärast on sügavuse nullpunktiks  $z = 0$  võetud helikiiruse miinimumile vastav sügavus, seega ookeani pinnal on  $z = z_s$  ja ookeani põhjas  $z = -z_b$ . Ülalpool nivood  $z = 0$  on  $c$  antud valemiga  $c = c_0 + bz$ , allpool nivood  $z = 0$  on  $c$  antud valemiga  $c = c_0 - bz$ . Seega on mõlemal juhul helikiiruse gradiendi absoluutväärtus  $b = |dc/dz|$  ühesugune ja konstantne, s.t. ei sõltu sügavusest. Joonisel (b) on esitatud ookeani vertikaalne lõige  $z$ - $x$  tasandis, kus  $x$  on horisontaalsiht. Helikiiruse sõltuvus sügavusest  $c(z)$  on kõikjal ühesugune ning tema graafik on esitatud joonisel (a). Punktis  $z = 0$ ,  $x = 0$  asub heliallikas  $S$ . Eraldagem selle allika kiirgusest kitsa helikiire, mis väljub allikast  $S$  nurga  $\theta_0$  all, nii nagu näidatud joonisel (b). Seetõttu, et helikiirus sõltub sügavusest  $z$ , hakkab helikiir murduma ja järelikult tema kaldenurk  $\theta$  muutub piki kiire trajektoori.



1) (6 punkti) Näidake, et allikast  $S$  väljuva ja  $z$ - $x$  tasandis lebava trajektoori algusosa kujutab endast ringjoonelist kaart, mille raadius  $R$  on antud valemiga  $R = c_0/(b \sin \theta_0)$ , eeldades et  $0 < \theta_0 < \pi/2$ .

2) (3 punkti) Tuleta avaldis nurga  $\theta_0$  sellise minimaalse väärtuse jaoks, mille puhul ülemisse pooltasandisse suunatud kiir saab veel levida ilma merepinnalt peegeldumata. Vastus esita funktsioonina suurustest  $z_s$ ,  $c_0$  ja  $b$ .

3) (4 punkti) Joonisel  $b$  on kujutatud heli vastu-

võtja  $H$ , mis asub punktis koordinaatidega  $z = 0$ ,  $x = X$ . Tuleta avaldis niisuguste  $\theta_0$  väärtuste jada jaoks, mille puhul allikast  $S$  lähtuv helikiir jõuab vastuvõtjasse  $H$ . Vastus esita funktsioonina suurustest  $b$ ,  $c_0$  ja  $X$ . Eelda seejuures, et  $z_s$  ja  $z_b$  on piisavalt suured välistamiseks helikiire mere pinnalt ja põhjast peegeldumise võimalusi.

4) (2 punkti) Leia nurga  $\theta_0$  neli väikseimat väärtust, mille korral allikast  $S$  väljunud heli jõuab vastuvõtjasse  $H$  juhul kui  $X = 10\,000 \text{ m}$ ,  $c_0 = 1\,500 \text{ m/s}$ ,  $b = 0,02000 \text{ s}^{-1}$ .

5) (5 punkti) Tuleta avaldis aja jaoks, mis kulub heli levikuks allikast  $S$  vastuvõtjasse  $H$  piki kiirt, millele vastab punktis (3) tuletatud vähim nurga  $\theta_0$  väärtus. Leia selle aja numbriline väärtus, kasutades punktis (4) toodud andmeid. Arvutustes võib osutada kasulikuks järgmine valem

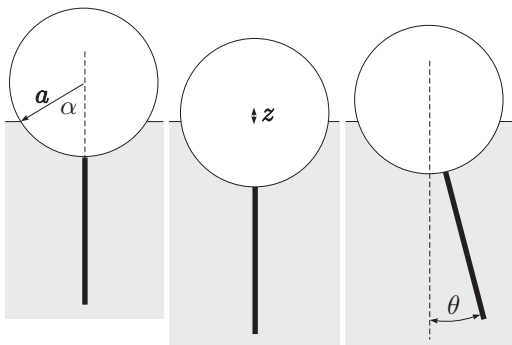
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan x$$

Leia aeg, mis kulub otse piki sirget  $z = 0$  levival helikiirel selleks, et jõuda allikast  $S$  vastuvõtjasse  $H$ . Kumb kahest kiirest jõuab esimesena vastuvõtjasse, kas see mis stardib nurga  $\theta_0 = \pi/2$  all, või see, mille lähtenurk  $\theta_0$  on võrdne väikseima-ga punktis (4) leitudest?

### 3. Silindriline poi

1) (3 punkti) Ujuvpoi koosneb kergest materjalist valmistatud silindrist ja selle külge kinnitatud homogeenest jäigast vardast. Varras on risti silindri teljega ja kinnitatud silindri keskele. Silindri raadius on  $a$  ja pikkus  $l$ , tema materjali tihedus on  $d$ . Varda mass on võrdne silindri massiga ja pikkus silindri diameetriga. Varda materjali tihedus on suurem merevee tihedusest  $\rho$ , milles poi ujub. Leia poi tasakaaluolekus tema ujumis-sügavust iseloomustav nurk  $\alpha$  (vt. joonis) tiheduste suhte  $d/\rho$  funktsioonina. Varda ruumala mitte arvestada.

2) (4 punkti) Kui poi on mingi jõu mõjul viidud alghetkeks vertikaalsihs pikkuse  $z$  võrra sügavemale oma tasakaaluasendist, siis mõjub talle resultatiivne üleslükkejõud. Vertikaalsihs mõjuva



jõu toimel hakab poi selles sihis tasakaaluasendi ümber üles-alla võnkuma. Määrata sellise vertikaalse võnkumise sagedus, avaldades ta ujumis-sügavusnurga  $\alpha$ , raskuskiirenduse  $g$  ja raadiuse  $a$  kaudu. Eeldada, et poi liikumisest tingitud vee liikumise mõju poi dünaamikale on kirjeldatav poi efektiivse massi suurenemisega  $1/3$  võrra. Võib eeldada, et  $a$  ei ole väike.

3) (8 punkti) Avaldage poi pöördvõnkumiste sagedus suuruste  $g$  ja  $a$  kaudu. Vee liikumist ja viskoossust mitte arvestada, pöördenurk lugeda väikeseks. Võite kasutada sellist lähendust, mille korral loetakse, et poi pöördvõnkumine toimub ümber silindri horisontaaltelje.

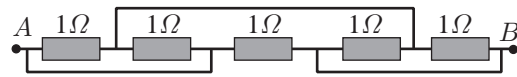
4) (5 punkti) Poi sisaldab tundlikke kiirendusandureid, mis võivad mõõta tema vertikaalsihilist ja pöörliikumist ning edastada seda teavet raadio teel kaldale. Suhteliselt rahulikus vees määrati poi vertikaalvõnkumiste perioodiks ligikaudu  $1$  s ja pöördvõnkumiste perioodiks ligikaudu  $1,5$  s. Näita selle informatsiooni põhjal, et ujumissügavusnurk  $\alpha$  on ligikaudu  $90^\circ$  ja hinda poi silindri raadius ja kogumass, kui on teada, et silindri pikkus  $l$  võrdub tema raadiusega  $a$ . [Võtke  $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ja  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .]

## XXVII Norra (1996)

### I. Varia

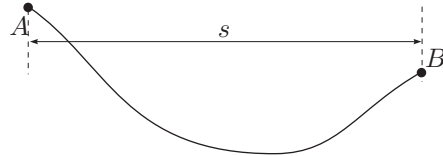
(Selle ülesande viis osa ei ole omavahel seotud)

1) (1 punkt) Viis takistit takistusega  $1\Omega$  on ühendatud nii nagu näidatud joonisel. Ühendus-



juhtmete (pidevad sirgjooned joonisel) takistust pole vaja arvestada. Määrata punktide  $A$  ja  $B$  vaheline takistus  $R$ .

2) (1,5 punkti) Suustaja alustab laskumist punktist  $A$  mäenõlval ja liigub alla pöötetuna ja pidurdamata. Hõõrdetegur on  $\mu$ . Kui suustaja peatub punktis  $B$ , on ta horisontaalsihis liikunud edasi vahemaa  $s$  võrra. Milline on punktide  $A$  ja  $B$  kõrguste vahe  $h$ ? Suustaja kiirus on väike, nii et nõlva kõverusest tingitud täiendavat rõhumisjõudu suustaja ja lume vahel pole vaja arvestada. Arvestada pole vaja ka õhuhõõret ja hõõrdeteguri sõltuvust kiirusest.



3) (2 punkti) Soojuslikult isoleeritud metallitükki soojendatakse atmosfäärirõhul elektrivoolu abil sellisel viisil, et temal eralduv elektriline võimsus on ajas konstantne ja võrdne  $P$ -ga. Selle tagajärjel kasvab metalli absoluutne temperatuur ajas seaduse

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}$$

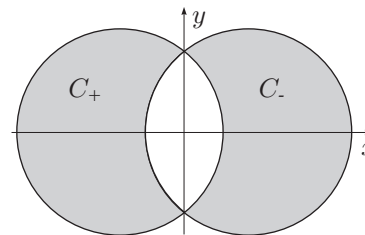
kohaselt, kus  $a$ ,  $t_0$  ja  $T_0$  on konstandid. Määrata metalli soojusmahtuvus  $C_p(T)$  (antud katsetes kasutatud temperatuurivahemiku jaoks sõltub see temperatuurist).

4) (1,5 punkti) Absoluutselt musta kuuma tasapinda hoitakse konstantsel temperatuuril  $T_h$ . Temaga on paralleelne teine absoluutselt must tasapind, mida hoitakse madalamal konstantsel temperatuuril  $T_l$ . Plaatide vahel on vaakuum. Selleks, et vähendada kiirgusest tingitud soojusvoogu soojalt tasapinnalt külmale tasapinnale kasutatakse ekraani, mis koosneb kahest üksteisega paralleelsest ja üksteisest soojuslikult isoleeritud absoluutselt mustast plaadist. See ekraan asetatakse kuuma ja külma plaadi vahele,



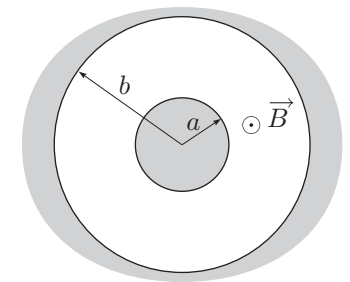
paralleelsesena nii sooja kui külma tasapinnaga. Teatud aja pärast tekib süsteemis statsionaarne olek. Millise koefitsiendi  $x$  võrra kahandab ekraan soojusvoogu külma ja sooja tasapinna vahel? Pindade lõplikest mõõtmetest tingitud ääreefekte mitte arvestada.

5) (4 punkti) Kahes väga pikas sirgjoonelises ja teineteisest isoleeritud, mitte-magnetilisest materjalist valmistatud elektrijuhis  $C_+$  ja  $C_-$  voolab elektrivool tugevusega  $I$ ; esimeses neist on voolu suund  $z$ -telje positiivses suunas, teises — negatiivses suunas. Juhtide ristlõiked (joonisel hallid alad) on piiratud  $x$ - $y$  tasandis ringjoontega, mille diameeter on  $D$  ja mille keskpunktide vahekaugus on  $D/2$ . Kummagi juhi ristlõike pindala on seega  $(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3})D^2$ . Vool kummaski juhisis on ühtlaselt jaotunud üle kogu ristlõike. Leia magnetväli  $B(x, y)$  juhtide vahele jäävas ruumiosas.



## 2. Koaksiaalne diod magnetväljas

Ruum kahe koaksiaalse silindrikujulise elektrijuhis vahel on õhust tühjaks pumbatud. Sisemise silindri raadius on  $a$ , välise silindri sisemine raadius on  $b$ , nii nagu näidatud joonisel. Välise silindrile, mida nimetatakse anoodiks, võib anda seesmise silindri suhtes positiivse potentsiaali  $V$ . Silindritevahelises ruumis on staatiline homogeenne magnetväli  $\vec{B}$ , mis on paralleelne silindrite teljega. Silindritele indutseeritud laenguid



pole vaja arvestada. Uurigem selliste elektronide liikumist (elektroni seisumass on  $m$  ja laeng  $-e$ ), mis eralduvad sisemise silindri pinnalt.

1) (1 punkt) Vaadeldagem esmalt juhtu, mil potentsiaal  $V$  on olemas, kuid  $\vec{B} = 0$ . Elektron vabaneb seesmise silindri pinnalt tühise algkiirusega. Määrata elektroni kiirus  $v$  anoodile jõudmise hetkel. Anda vastused nii mitterelativistliku kui ka relativistliku juhu jaoks. Selle ülesande ülejäänud osades on piisav mitterelativistlik käsitlus.

2) (2 punkti) Edasi vaadeldagem juhtu, mil  $V = 0$ , kuid on olemas homogeenne magnetväli  $\vec{B}$ . Olgu elektroni algkiirus sisemise silindri pinnal radiaalsuunaline ja võrdne  $\vec{v}_0$ -ga. Kui magnetväli on tugevam teatud kriitilisest väärtusest  $B_c$ , siis elektron ei jõua anoodile. Skitseeri elektroni trajektor juhul, kui  $B$  on veidi suurem  $B_c$ -st. Leia avaldis  $B_c$  jaoks.

Edaspidi eeldame, et on olemas nii potentsiaal  $V$  kui ka homogeenne magnetväli  $\vec{B}$ .

3) (3 punkti) Magnetvälja poolt antakse elektronile nullist erinev pöördimpulss  $L$ , mis on arvatud silindri telje suhtes. Leia avaldis pöördimpulsi muutumise kiiruse  $dL/dt$  jaoks. Näita, et sellest avaldisest järeldub, et kombinatsioon

$$L - keBr^2$$

on elektroni liikumise jooksul jääv suurus;  $r$  tähistab elektroni kaugus silindri teljest ja  $k$  on teatud dimensioonita arv. Leidke  $k$  väärtus.

4) (1 punkt) Vaatleme sellise elektroni liikumist, mis vabaneb seesmise silindri pinnalt tühiselt väikese algkiirusega ja mis ei jõua anoodile, vaid pöördub tagasi peale maksimaalset eemaldumist kauguseni  $r_m$  silindri teljest. Avalda elektroni



kiirus  $v$  selles punktis, kus ta kaugus silindri teljest on kõige suurem, kauguse  $r_m$  kaudu.

5) (1 punkt) Magnetvälja võib kasutada anoodile jõudvatest elektronidest põhjustatud voolu reguleerimiseks. Kui  $B$  on suurem teatud kriitilisest väärtusest  $B_c$ , siis elektron, mis stardib sise-mise silindri pinnalt tühiselt väikese algkiirusega, ei jõua anoodile. Leidke  $B_c$  väärtus.

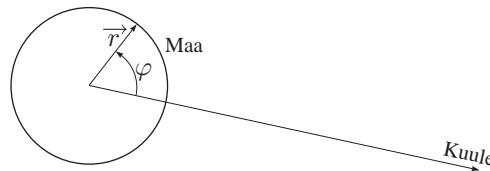
6) (2 punkti) Kui elektronid vabanevad seesmise silindri pinnalt viimase kuumutamise tagajärjel, siis üldjuhul on neil seesmise silindri pinnal nullist erinev algkiirus. Olgu  $v_B$  algkiiruse  $\vec{B}$ -sihiline komponent,  $v_r$  — raadiuse sihiline komponent ja  $v_\varphi$  — asimitaalne (st. raadiuse ja  $\vec{B}$ -ga ortogonaalne) komponent. Leidke magnetvälja kriitiline (anoodile jõudmise mõttes) väärtus  $B_c$  ka selle situatsiooni jaoks.

### 3. Tõusud ja mõõnad

Selles ülesandes uurime me tõusu ja mõõna kõrgust Maa-pealse avaookeanis lihtsustatud mudeli abil. Probleemi lihtsustamiseks teeme järgmised eeldused: (i) loeme, et Maa ja Kuu moodustavad isoleeritud süsteemi; (ii) Maa ja Kuu vaheline kaugus on konstantne; (iii) Maa on täielikult kaetud ookeaniga; (iv) dünaamilisi efekte, mis on tingitud vee liikumisest ja Maa pöörlemisest ümber oma telje võib mitte arvestata; (v) Maa gravitatsioonilise tõmbejõu jaoks võib kasutada samasugust avaldist nagu siis, kui kogu Maa mass oleks koondunud Maa keskpunkti. Antud on järgmised arvandmed: Maa mass:  $M = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg; Kuu mass:  $M_m = 7,3 \cdot 10^{22}$  kg; Maa raadius:  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m; kaugus Maa ja Kuu keskpunktide vahel:  $L = 3,84 \cdot 10^8$  m; gravitatsioonikonstant:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>kg<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>.

1) (2 punkti) Kuu ja Maa tiirlevad nurkkiirusega  $\omega$  ümber nende ühise massikeskme  $C$ . Kui kaugel on  $C$  Maa keskpunktist? (Tähista see kaugus tähega  $l$ ). Leia  $\omega$  numbriline väärtus.

Kasutame nüüd taustsüsteemi, mis pöörleb



koos Maa keskpunkti ja Kuuga punkti  $C$  ümber. Sellest taustsüsteemist vaadelduna on Maad katva vee pinna kuju ajas muutumatu. Tasandi  $P$  puhul, mis läbib punkti  $C$  ja on risti pöörlemisteljega, võib Maad katva vee pinnal oleva punkt-massi asukohta kirjeldada polaarkoordinaatide  $r$  ja  $\varphi$  abil, nii nagu näidatud joonisel;  $r$  tähistab kaugust Maa keskpunktist. Uurigem Maad katva vee pinna kuju  $r(\varphi) = R + h(\varphi)$  tasandis  $P$ .

2) (3 punkti) Vaatleme punkt-massi massiga  $m$  vee pinnal tasandis  $P$ . Meie taustsüsteemis mõjuvad talle tsentrifugaaljõud ning Kuu ja Maa gravitatsioonijõud. Esita avaldis neist kolmest jõust põhjustatud potentsiaalse energia jaoks. Märkus: Iga jõud  $F(r)$ , mis on radiaalne mingi koordinaatide alguspunkti suhtes, on esitatav sfääriliselt sümmeetrilise potentsiaalse energia  $V(r)$  tuletsena:  $F(r) = -V'(r)$

3) (5 punkti) Leia loodetest tingitud vee pinna kerkimuse  $h(\varphi)$  jaoks ligikaudne avaldis, kasutades seejuures antud suurusi  $M$ ,  $M_m$ , jne. Kui suur on selle mudeli põhjal tõusu ja mõõna kõrguste vahe meetrites? Märkus: Võib kasutada ligikaudset võrdust  $(1 + a^2 - 2a \cos \theta)^{-1/2} \approx 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2}a^2(\cos^2 \theta - 1)$ , mis kehtib kui  $a$  on hulga väiksem ühest. Kasuta oma lahenduses lihtsustavaid lähendusi kus iganes kohane.

### XXVIII Kanada (1997)

#### I. Võrdelisusseadused

1) (1,5 punkti) Väike mass ripub massitu ideaalse vedru otsas ja võngub üles-alla omavõnkesagedusega  $f$ . Vedru lõigatakse täpselt poole lühemaks ja sinna otsa riputatakse sama mass. Milline on uus omavõnkesagedus  $f'$ ?

2) (2 punkti) Vesiniku aatomi raadius tema põhi-

olekus on  $a_0 = 0,0529$  nm (see on nn. Bohri raadius). Milline on müüon-vesiniku aatomi raadius  $a'$  (see on niisugune aatom, kus tema elektron on asendatud samasugust laengut kandva kuid 207 korda raskema müüoniga)? Arvutustes võite lugeda, et prootoni mass on hulga suurem nii elektroni kui ka müüoni massist.

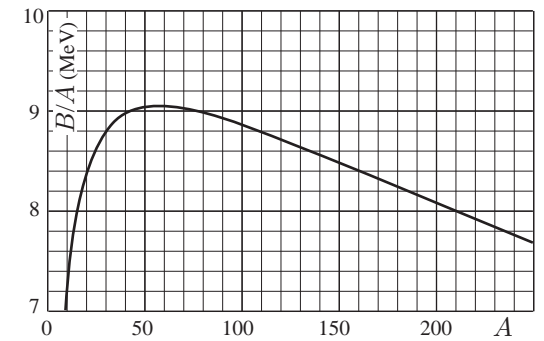
3) (2 punkti) Keskmine temperatuur Maa pinnal on  $T = 287$  K. Milliseks võiks kujuneda keskmine temperatuur siis, kui Maa ja Päikese vahelist kaugust vähendataks 1% võrra?

4) (2 punkti) Ühel heal päeval oli õhk absoluutselt kuiv ja õhu tihedus oli seejuures  $\rho = 1,2500$  kg/m<sup>3</sup>. Järgmisel päeval oli õhus juba ka niiskust ning õhu massist moodustas vee mass 2%. Rõhk ja temperatuur olid seejuures samad, mis eelmiselgi päeval. Milline oli õhu uus tihedus? Kuiva õhu keskmine molaarmass on 28,8 (g/mol), veeauru jaoks on see 18 (g/mol). Eeldada, et tegemist on ideaalsete gaasidega.

5) (2,5 punkti) Teatud marki helikopteri õhus hõljumiseks on vaja, et tema mootori tekitatud mehaaniline võimsus oleks  $P$ . Sellest helikopteri tehakse absoluutselt täpne kuid kõikides lineaarmõõtetes kaks korda vähendatud mudel. Millist võimsust  $P'$  peaks tekitama sellise mudeli mootor, et mudel saaks õhus hõljuda?

#### 2. Tuumade massid ja stabiilsus

Selles ülesandes on kõik energiad on toodud megaelektronvoltides (MeV). Seost 1 MeV = 1,6 · 10<sup>-13</sup> J pole ülesande lahendamiseks tegelikult vajagi teada. Sellise tuuma mass  $M$ , mis sisaldab  $Z$  prootonit ja  $N$  neutronit (seega tema massiarv  $A = N + Z$ ) võrdub vastava arvu vabade nukleonite (prootonite ja neutronite) masside summaga, millest on lahutatud seoseenergia  $B/c^2$ :  $Mc^2 = Zmpc^2 + Nmnc^2 - B$ . Graafikul on esitatud suhte  $B/A$  maksimaalse (fikseeritud  $A$  jaoks) väärtuse sõltuvus  $A$ -st. Üldiselt on nii, et mida suurem on selle suhte väärtus seda stabiilsem on tuum.



1) (3 punkti) Teatud massiarvust  $A$  suuremate  $A$  väärtuste puhul on tuuma seoseenergia alati piisavalt väike võimaldamaks alfa-osakeste ( $A = 4$ ) kiirgumist. Väärtustel  $A > 100$  võib ülaltoodud graafiku aproksimeerida lineaarfunktsiooniga; hinda  $A_\alpha$  väärtust kasutades seda lineaarset lähendust. Eelda seejuures järgmist: (a) Nii algne tuum kui ka lõpp-produktiks olev tuum on esitatud eelpooltoodud graafikul. (b) Alfa-osakese seoseenergia  $B_\alpha = 25,0$  MeV (seda väärtust ei ole võimalik välja lugeda graafikult!).

2)  $Z$  prootonit ja  $N$  neutronit ( $A = N + Z$ ) sisaldava aatomituuma seoseenergia on antud pool-empiriilise valemiga

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta,$$

kus liidetava  $\delta$  väärtus on võrdne:  $+a_p A^{-3/4}$  — tuumade jaoks, kus  $N$  ja  $Z$  on paaritud arvud;  $0$  — tuumade jaoks kus üks arvudest  $N$  ja  $Z$  on paaris, teine paaritu;  $-a_p A^{-3/4}$  — tuumade jaoks, kus  $N$  ja  $Z$  on paarisarvud. Koefitsientide väärtused eelnevates valemites on järgmised:  $a_v = 15,8$  MeV,  $a_s = 16,8$  MeV,  $a_c = 0,72$  MeV,  $a_a = 23,5$  MeV,  $a_p = 33,5$  MeV.

(i) (2 punkti) Tuleta avaldis prootonite arvu  $Z_{\max}$  jaoks sellises tuumas, milles antud  $A$  korral on seoseenergia suurim. Selle (ja ainult selle!) ülesande juures ära arvesta  $\delta$ -liikme mõju.

(ii) (2 punkti) Milline on  $Z$  väärtus sellises tuumas, mille massiarv  $A = 200$  ja suhe  $B/A$  on maksimaalne? Arvesta siin  $\delta$ -liikme mõju.

(iii) (3 punkti) Vaatleme vastustelehe tabelis

toodud kolme tuuma, mille massiarv  $A = 128$ . Määra, millised tuumad on energeetiliselt stabiilsed ja milliste koguenergia on piisav lagunemiseks allpooltoodud protsesside kaudu. Täida tabeli lahtrid järgmiste tähistega: energeetiliselt lubatud protsesside puhul:  $\checkmark$ ; protsesside puhul, mis pole energeetiliselt lubatud: 0. Vaatle siirdeid ainult tabelis toodud kolme tuuma vahel. Arvesta järgmisi lagunemisprotsesse: (a)  $\beta^-$ -lagunemine, tuumast kiirgub elektron; (b)  $\beta^+$ -lagunemine, tuumast kiirgub positron; (c)  $\beta^- \beta^-$ -lagunemine, tuumast kiirgub samaaegselt kaks elektroni; (d) elektroni haare, aatomi elektronkatte elektron haaratakse tuuma poolt. Elektroni (ja positroni) seisuenergia  $m_e c^2 = 0,51 \text{ MeV}$ , protonil  $m_p c^2 = 938,27 \text{ MeV}$ , neutronil  $m_n c^2 = 939,57 \text{ MeV}$ .

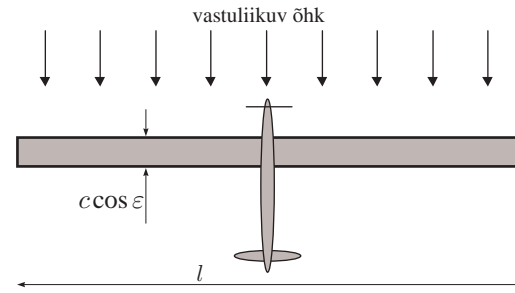
Vastustelehe tabeli read:  $^{128}_{53}\text{I}$ ,  $^{128}_{54}\text{Xe}$  ja  $^{128}_{55}\text{Cs}$ ; tabeli tulbad:  $\beta^-$ -lagunemine,  $\beta^+$ -lagunemine, elektroni haare ja  $\beta^- \beta^-$ -lagunemine.

### 3. Päikeseenergiaal töötav lennuk

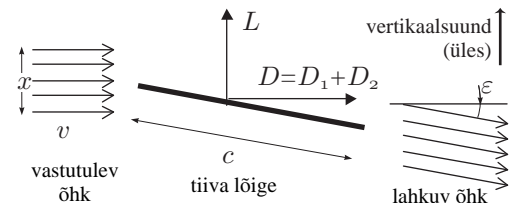
Me soovime konstrueerida lennuki, mis püsiks õhus kasutades ainult päikeseenergiat. Efektiivseim on selline konstruktsioon, kus lennuki tiiva ülemine pind on tervikuna kaetud päikeseptareidega. Ptareid toodavad elektrienergiat, mille abil lennuki mootor paneb pöörlema propelleri.

Vaatleme lennuki tiibu ristkülikukujulise tasapinnana, mille pikkus (tiibade siruulatus) on  $l$  ja laius  $c$ ; seega on tiiva pindala  $S = cl$  ja tiiva pikkuse-laiuse suhe  $A = l/c$ . Tiibade toimet õhuvoolule võib kujutada järgmise ligikaudse mudeli abil: mõjutatud saab õhukiht paksusega  $x$  ja laiusega  $l$ , mis muudab tiiva toimet oma liikumissuunda väikese nurga  $\varepsilon$  võrra, õhu kiirus muutub seejuures väga vähe. Lennuki juhtsüsteemid võimaldavad muuta nurka  $\varepsilon$  ning saavutada lennu jaoks sobivaim väärtus. See lihtne mudel kirjeldab tegelikust üsna hästi, kui võtta  $x = \pi l/4$ ; tehkemgi siis arvutustes vastav asendus. Lennuki kogumass on  $M$  ja ta

lendab horisontaalselt, kiirus ümbritseva õhu suhtes on  $\vec{v}$ . Järgnevates arvutustes arvesta ainult kirjeldatud õhu liikumist ümber tiiva. Propelleri mõju õhuvoolule mitte arvestada.



Lennuki pealtvaade (lennukiga seotud taustsüsteemis).



Tiiva kõrvaltvaade (lennukiga seotud taustsüsteemis).

1) (3 punkti) Vaatleme tiiva juurest mööduva õhu impulsi muutust eeldusel, et ta kiiruse absoluutväärtus ei muutu (kuigi tegelikult ta seda teeb). Tuleta valemid vertikaalse tõstejõu  $L$  ja horisontaalse takistusjõu  $D_1$  jaoks suuruste  $v$ ,  $\varepsilon$ , õhu tiheduse  $\rho$  ja tiiva mõõtmete kaudu. Võite eeldada, et õhuvool on kõikjal ja lati paralleelne eelpooltoodud kõrvaltvaate joonise tasandiga.

2) (3 punkti) Tegelikult on olemas ka täiendav horisontaalne takistusjõud  $D_2$ , mis on tingitud õhu hõõrdumisest tiiva vastu. Selle tulemusel õhu liikumine aeglustub pisut, kiiruse muutus  $\Delta v \ll 1\% v$  väärtusest) on antud valemiga:  $\Delta v/v = f/a$ . Selles valemis  $f$  ei sõltu  $\varepsilon$ -st. Leia avaldis (suuruste  $M$ ,  $f$ ,  $A$ ,  $S$ ,  $\rho$  ja raskuskiirenduse  $g$  kaudu) sellise lennukiiruse  $v_0$  jaoks, mille puhul konstantse lennukiiruse ja kõrguse hoidmiseks vajalik võimsus on minimaalne. Oma arvutustes ära arvesta  $\Delta v$  ja  $\varepsilon^2$  võrreldes kõrgemat järku väikesi suurusi. Muuhulgas võib kasutada

järgmist väikeste nurkade puhul kehtivat lähendust:  $1 - \cos \varepsilon \approx \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon$ .

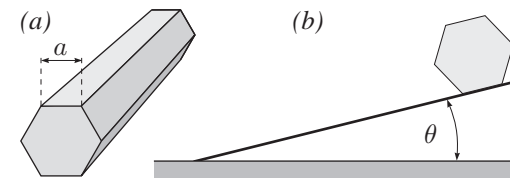
3) (2 punkti) Visanda vastuselehel graafikuna lennuki võimsuse  $P$  sõltuvus lennukiirusest  $v$ . Näita ära takistusjõu kahest eri komponendist tingitud panused. Avalda suuruste  $M$ ,  $f$ ,  $A$ ,  $S$ ,  $\rho$  ja  $g$  kaudu minimaalne võimsus  $P_{\min}$ .

4) (2 punkti) Olgu päikeseptareidelt saadav energia nii suur, et elektrimootorid ja propellerid suudavad arendada mehaanilist võimsust  $I = 10$  vatti tiiva pinna ühe ruutmeetri kohta. Arvuta sellisel eeldusel maksimaalselt võimalik tiiva koormatus  $Mg/S$  ( $\text{N/m}^2$ ) ja vastav lennukiirus  $v_0$  ( $\text{m/s}$ ). Kasuta järgmisi arvuväärtusi  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ ,  $f = 0,004$ ,  $A = 10$ .

## XXIX Island (1998)

### I. Heksagonaalse prisma veeremine

Vaatleme pikka, jäigast materjalist, korrapäraselt heksagonaalset prisma, nagu seda on kujult näiteks tavaline pliats [joonis (a)]. Prisma mass  $M$  on ühtlaselt jaotunud üle kogu prisma ruumala. Prisma ristlõikeks oleva korrapärase kuusnurga külje pikkus on  $a$ . Taolise heksagonaalse prisma inertsimoment prisma pikitelje suhtes on  $I = 5Ma^2/12$ . Prisma inertsimoment tema teljega paralleelse serva suhtes on  $I = 17Ma^2/12$ .



1) (3,5 punkti) Heksagonaalne prisma on algselt paigal kaldpinnal, mis moodustab väikese nurga  $\theta$  horisondiga nii, et prisma telg on horisontaalne [joonis (b)]. Eeldame, et prisma tahud on nõrgalt nõgusad, s.o. prisma puudutab kaldpinda ainult oma servadega. Selle nõgususe mõju inertsimomendile võib mitte arvestada. Prisma viiakse tasakaalust välja ja ta hakkab veerema ebaühtlaselt

mööda kaldpinda alla. Eeldame, et hõõrdumine hoiab ära igasuguse libisemise ja prisma ei kaota korraiski kontakti kaldpinnaga. Prisma nurkkiirus vahetult enne seda, kui tema mingi serv astub kontakti kaldpinnaga, on  $\omega_i$  ja vahetult peale seda  $\omega_f$ . Näita, et kehtib seos  $\omega_f = s\omega_i$  ja kirjuta koefitsiendi  $s$  väärtus vastuste lehele.

2) (1 punkt) Prisma kineetiline energia vahetult enne ja pärast ülalkirjeldatud kontakti teket on vastavalt  $K_i$  ja  $K_f$ . Näita, et kehtib seos  $K_f = rK_i$  ja kirjuta teguri  $r$  väärtus vastuste lehele.

3) (1,5 punkti) Selleks, et ka järgmine serv saaks puutuda kokku kaldpinnaga, peab  $K_i$  olema suurem minimaalsest väärtusest  $K_{i,\min}$ , mille võib esitada valemiga  $K_{i,\min} = \delta Mga$ , kus  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  on raskuskiirendus. Leia koefitsient  $\delta$  kaldenurga  $\theta$  ja koefitsiendi  $r$  kaudu. Kirjuta vastus vastuste lehele. (Kasuta sümbolit  $r$  ja mitte tema avaldist).

4) (2 punkti) Kui eelmise osa tingimus on rahuldatud siis, kineetiline energia  $K_i$  hakkab prisma alla veeremise käigus lähenema teatud piirväärtusele  $K_{i,0}$ . Eeldusel, et see piirväärtus eksisteerib näita, et  $K_{i,0}$  võib esitada kujul  $K_{i,0} = \kappa Mga$  ja kirjuta koefitsient  $\kappa$  avaldatuna  $\theta$  ja  $r$ -i kaudu vastuste lehele.

5) (2 punkti) Arvuta täpsusega  $0,1^\circ$  minimaalne kaldenurk  $\theta_0$ , millise korral kord alanud prisma ebaühtlane veeremine enam ei peatu. Kirjuta numbriline vastus vastuste lehele.

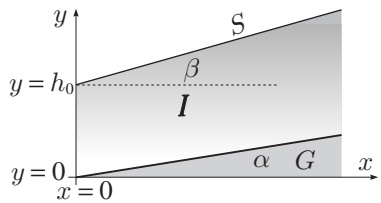
### 2. Vesi jäämütsi all

Jäämüts on paks jääkiht (kuni mõne kilomeetri paksune), mis lasub tema all asuval pinnasel ja mille horisontaalne ulatus on sadu kilomeetreid. Selles ülesandes vaatleme jää sulamist ja vee käitumist mõõdukalt külma jäämütsi all (s.o. jäämütsi all, mis on sulamistemperatuuri juures). Võime eeldada, et sellistel tingimustel põhjustab jääkiht rõhu muutusi nii nagu viskoosne vedelik, aga deformeerub nagu habras keha, kusjuures deformatsioonid toimuvad peamiselt ver-

tikaalsihs. Ülesande lahendamiseks on kasutada järgmised andmed: vee tihedus:  $\rho_w = 1,000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; jää tihedus:  $\rho_i = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; jää erisoojus:  $c_i = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ; jää sulamissoojus:  $L_i = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ ; kaljude ja magma tihedus:  $\rho_r = 2,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; kaljude ja magma erisoojus:  $c_r = 700 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ; kaljude ja magma sulamissoojus:  $L_r = 4,2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ ; keskmine maa pinda läbiva väljapoole suunatud soojusvoo tihedus  $J_Q = 0,06 \text{ W/m}^2$  jää sulamistemperatuur  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  (konstantne).

1) (0,5 punkti) Vaatleme paksu jäämütsi Maa sisemusest tuleva soojusvoo tingimustes. Kasutades tabeli andmeid arvuta igal aastal sulava jääkihi paksus  $d$ .

2) (3,5 punkti) Vaatleme nüüd jäämütsi ülemist pinda. Olgu pinnase kaldenurk jäämütsi all  $\alpha$ .



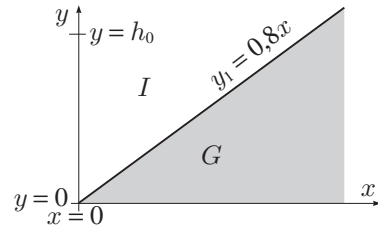
Joonis (a). S: jäämütsi ülapind, G: pinnas, I: jäämüts.

Jäämütsi ülemine pind moodustab horisontaaltasandiga nurga  $\beta$  nagu näidatud joonisel (a). Jää vertikaalne paksus punkti  $x = 0$  juures on  $h_0$ . Seega võib jäämütsi ülemist ja alumist pinda kirjeldada võrranditega

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = x \tan \beta + h_0.$$

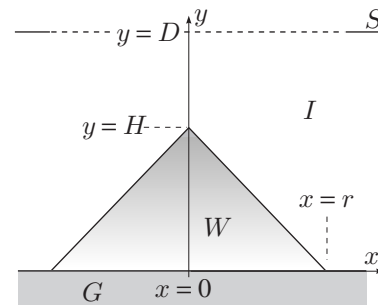
Tuleta avaldis rõhu  $p$  jaoks jäämütsi all funktsioonina horisontaalsest koordinaadist  $x$  ja kirjuta see vastuste lehele. Formuleeri matemaatiline tingimus  $\beta$  ja  $\alpha$  vahel, nii et vesi, mis on õhukese kihina jäämütsi ja pinnase vahel, ei voolaks kummaski suunas. Näita, et see tingimus on esitatav kujul  $\tan \beta = s \tan \alpha$ . Leia koefitsiendi  $s$  väärtus ja kirjuta saadud tingimus sümbolkujul vastuste lehele. Joon  $y_1 = 0,8x$  joonisel (b) näitab maapinda jäämütsi all. Jää kihi vertikaalne paksus  $h_0$  punkti  $x = 0$  juures on 2 km. Eelda-

ge, et jää ja pinnase vahelises kihis olev vesi on hüdrostaatilises tasakaalus. Joonista graafilisele vastuste lehele sirge  $y_1$  ja lisa sirge  $y_2$ , mis kujutab jää ülapinda antud tasakaalu jaoks. Tähistajoonisel mõlemad sirged.



Joonis (b). Sellise mõõdukalt külma jäämütsi ristlõige, mis lelab kaldus tasapinnal ja mille aluses veekihi on tasakaal.

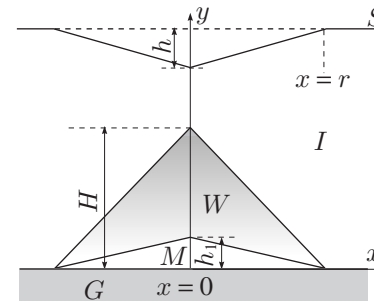
3) (1 punkt) Horisontaalsel pinnasel asetseva suure läbimõõduga jäämütsi põhjas moodustus jää äkilise sulamise tagajärjel veekoonus kõrgusega  $H = 1,0 \text{ km}$  ja raadiusega  $r = 1,0 \text{ km}$ . Jääkihi esialgne paksus oli  $D = 2,0 \text{ km}$ . Eelda, et koonuse kohale allesjäänud jää kohaldub all toimunud muutustele ainult vertikaalse liikumise tulemusel. Anna vastuste lehel analüütiline valem, mis kirjeldab jäämütsi pinda pärast seda, kui oli tekkinud veekoonus ja saavutatud hüdrostaatiline tasakaal. Kujuta vastuste lehel [joonisel (c)] see pind ka graafiliselt.



Joonis (c). Jäämütsi põhjas asuva veekoonuse telge läbiv vertikaallõige. W tähistab vett.

4) (5 punkti) Rahvusvaheline teadlaste rühm oli iga-aastaselt uurinud mõõdukalt külma jäämütsi Antarktikas. Uuritav piirkond oli lai tasan-dik jääkihi paksusega 2000 m, aga hiljuti avastati

seal sügav kraatri taoline nõgu, mis kujutas alas-pidi tipuga koonust sügavusega  $h = 100 \text{ m}$  ja raadiusega  $r = 500 \text{ m}$  (joon. d).



Joonis (d). Koonilise lohü tsentraalne vertikaallõige mõõdukalt külmas jäämütsis. M tähistab magmat. Pangem tähele, et joonise proportsioonid EI OLE õiged.

Arutanud asja jõudsid nad järeldusele, et ilmselt oli jäämütsi all toimunud pisike vulkaaniline purske. Väike kogus magmat (sulanud kaljut) oli tunginud läbi pinnase jäämütsi alla, tahkestunud ja jahtudes sulatanud ära teatud koguse jääd. Püüame hinnata sissetunginud magma kogust ja leida, mis sai sulanud veest. Eeldame, et jää liikus ainult vertikaalselt. Samuti eeldame, et magma oli täielikult sulanud ja ta algtemperatuur oli  $1200^\circ\text{C}$ . Lihtsustuseks eeldame, et sissetunginud magma moodustas ringikujulise põhjaga koonuse, mis on jääpinna poolt moodustatud koonilise lohuga vertikaalsihs täpselt kohakuti. Magma väljapurskumise aeg oli lühike võrreldes soojusvahetuseks kuluva ajaga. Eeldage, et soojusvoog oli põhiliselt vertikaalne, nii et jää ära sulanud osa oli igal ajahetkel piiratud koonilise pinnaga, mis asus magma purskekeskme kohal.

Neil eeldustel toimub jää sulamine kahes jär-gus. Alul pole magma pinnal moodustuv vesi hüdrostaatilises tasakaalus ja seetõttu voolab eemale. Võib lugeda, et ära voolava vee temperatuur on  $0^\circ\text{C}$ . Hiljem saabub hüdrostaatiline tasakaal ja sulamisvesi ei voola enam ära, vaid koguneb sissetunginud magma kohale.

Teil tuleb leida selle hetke jaoks, mil on saa-

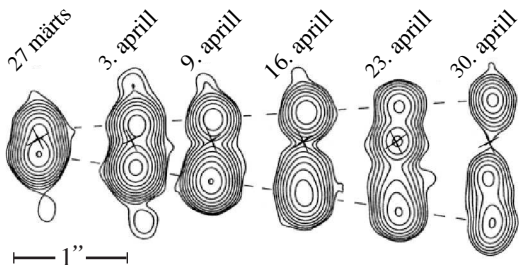
bunud soojuslik tasakaal, järgmised suurused (vastused kirjutage vastuste lehele): (i) Jäämütsi all moodustunud veekoonuse kõrgus  $H$  jäämütsi esialgse põhja suhtes; (ii) sissetunginud magma kõrgus  $h_1$ ; (iii) kogu sulamisvee mass  $m_{\text{tot}}$  ja ära voolanud vee mass  $m$ . Joonistage vastuste lehele õigetes proportsioonides sisse tunginud magma ja paigale jäänud vee kontuurid. Kasutage sama koordinaatide süsteemi, mis joonisel d.

### 3. Kas kiiremini kui valgus?

Selles ülesandes analüüsitakse ja interpreteeritakse raadiokiirguse mõõtmise tulemusi, mis on saadud 1994. aastal meie galaktikas asuva liitallika jaoks. Vastuvõtja oli häälestatud laiaribalisele raadiokiirgusele lainepikkustel mõni sentimeeter. Joonisel (a) on toodud rida erinevatel aegadel registreeritud allika kujutisi. Kontuurid joonisel vastavad konstantsele raadiokiirguse intensiivsusele sarnaselt samakõrgusjoontele geograafilisel kaardil. Joonisel jälgitavaid maksimume interpreteeritakse kui kahte objekti, mis eemalduvad ühisest keskpunktist, mis on joonistel kujutatud ristikesega. (See keskpunkt on ruumis liikumatu ja on samuti tugeva raadiokiirguse allikas, kuid teises lainepikkuste diapsoonis). Erinevatel päevadel saadud pildid on kõik mõõdetud samal kellaajal. Joonise all on maataabina ära toodud ühele kaaresekundile vastav lõik ( $1'' = 1/3600^\circ$ ). Joonise keskel asetseva ristiga tähistatud astronoomilise objekti kaugus meist on hinnangute järgi  $R = 12,5 \text{ kpc}$ . [Märkus:  $1 \text{ kpc}$  (kiloparsek) =  $3,09 \cdot 10^{19} \text{ m}$ .] Valguse kiirus  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Vea arutamist selle ülesande lahendamisel ei nõuta.

1) (2 punkti) Tähistagu  $\theta_1(t)$  ja  $\theta_2(t)$  kahe liikva raadiokiirgusallika nurkkaugusi ühisest keskpunktist, nii nagu seda näeb Maa pealne vaataja; alaindeksid 1 ja 2 vastavad vasakpoolsele ja parempoolsele objektile ja  $t$  on mõõtmise aeg. Tähistagu  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  vastavate nurkkauguste muutumise kiirusi ning  $v'_{1,\perp}$  ja  $v'_{2,\perp}$  nende



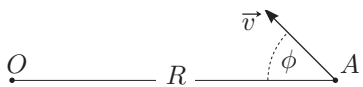


Joonis (a). Meie galaktikas asuva allika raadiokiirgus.

allikate vastavaid näivaid (vaatesuuna suhtes) ristsuunalisi joonkiirusi (kõik jällegi Maa pealse vaataja jaoks).

Kasutades joonist (a) koosta graafik, mida saad edasi kasutada  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  numbriliste väärtuste leidmiseks millikaaresekundites päeva kohta (mas/d). Määra samuti suuruste  $v'_{1,\perp}$  ja  $v'_{2,\perp}$  numbrilised väärtused ja kirjuta kõik vastused vastuste lehele (mõned tulemused võivad olla paradoksaalsed!).

2) (3 punkti) Selleks, et lahendada punktis (1) tekkinud paradoksi, vaatleme valgusallikat, mis liigub kiirusega  $\vec{v}$  nurga  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) all vaatleja  $O$  suunas tõmmatud vektori suhtes [joonis (b)]. Allika kiiruse võib kirjutada kujul  $v = \beta c$ , kus  $c$  on valguse kiirus. Vaatleja kaugus allikast (vaatlejaga seotud süsteemis) on  $R$ . Tähistame allika nurkkiiruse, nagu seda näeb vaatleja,  $\omega$ -ga ja näiva (vaatesuuna suhtes) ristsihilise kiiruse  $v'_{1,\perp}$ -ga. Avalda  $\omega$  ja  $v'_{1,\perp}$  suuruste  $\beta$ ,  $R$  ja  $\phi$  kaudu ning kirjuta vastus vastuste lehele.



Joonis (b). Vaatleja asub punktis  $O$  ja allika esialgne asukoht on  $A$ . Allika kiiruse vektor on  $\vec{v}$ .

3) (1 punkt) Oletame, et kaks liikuvat objekti, millest oli juttu sissejuhatuses ja osas (1), liiguvad teineteisele vastassuunas võrdsete kiirustega  $v = \beta c$ . Osas (2) saadud tulemused võimaldavad nüüd arvutada  $\beta$  ja  $\phi$  nurkkiiruste  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  ning kauguse  $R$  kaudu [ $\phi$  on osas (b) defineeritud nurk vasakpoolse objekti jaoks ja vastab see-

ga alaindeksile "1" osa (1) juures]. Tuleta valemid  $\beta$  ja  $\phi$  jaoks tuntud suuruste kaudu ja määra nende arvulised väärtused, kasutades osa (1) andmeid. Kirjuta vastused vastuste lehe vastavatesse lahtritesse.

4) (2 punkti) Vaadeldes, nagu osas (2), ühe keha situatsiooni, leia tingimused, milliste korral näiv ristsihiline kiirus  $v'_{\perp}$  on suurem valguse kiirusest  $c$ . Esita see tingimus kujul  $\beta > f(\phi)$  ja anna funktsiooni  $f$  analüütiline kuju vastuste lehel. Joonista graafilisele vastuste lehele ( $\beta$ ,  $\phi$ )-tasandis füüsikalisele mõttekate väärtuste piirkond. Näita viirutuse abil, millises osas sellest piirkonnast kehtib tingimus  $v'_{\perp} > c$ .

5) (1 punkt) Kasuta ka siin punktis (2) vaadeldud ühe keha situatsiooni ja leia avaldis näiva ristsihilise kiiruse  $v'_{\perp}$  maksimaalse väärtuse  $(v'_{\perp})_{\max}$  jaoks etteantud  $\beta$  korral ning kirjuta tulemus vastuste lehe vastavasse lahtrisse. Pane tähele, et see kiirus kasvab tõkestamatult kui  $\beta \rightarrow 1$ .

6) (1 punkt) Sissejuhatuses toodud kauguse  $R$  hinnang ei ole väga usaldusväärne. Teadlased on seetõttu hakanud juurdlema parema ja otsesema meetodi üle  $R$ -i määramiseks. Üks võimalikest ideedest selleks on järgmine. Eeldame, et me suudame mõõta ja identifitseerida kahe ülalkirjeldatud vastassuundades liikuva objekti poolt kiiratud lainepikkusi  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ , mis on nihutatud Doppleri efekti tõttu ja mille väärtus paigalseisva allika puhul oleks  $\lambda_0$ . Lähtudes valemist relativistliku Doppleri efekti jaoks  $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$  ja eeldades (nagu eelnevaski), et kahe objekti kiiruste absoluutväärtused on võrdsed, näita, et tundmatu  $\beta = v/c$  saab avaldada  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  kaudu järgmiselt:

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha \lambda_0^2 / (\lambda_1 + \lambda_2)^2}.$$

Kirjutage koefitsiendi  $\alpha$  numbriline väärtus vastuste lehe vastavasse lahtrisse. Te võite märgata, et soovitatud lainepikkuste mõõtmised annaksid praktikas uue hinnangu kaugusele.

## XXX Itaalia (1999)

### Füüsikalised konstandid ja üldandmed

Lisaks üksikute ülesannete tekstis antud arvulistele andmetele, võib osutada vajalikuks mõnede üldandmete ja füüsikaliste konstantide teadmise. Need leiate alljärgnevast nimestikust. Väärtused on toodud enamasti parima teadaoleva täpsusega. Teie esitage oma vastused aga iga ülesande jaoks kohase tüvenumbrite arvuga.

Valguse kiirus vaakumis:  $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Vaak. magn. läbit.:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$

Vaak. diel. läbit.:  $\epsilon_0 = 8,8541878 \text{ pF}\cdot\text{m}^{-1}$

Gravit. konst.:  $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$

Univ. gaasikonstant:  $R = 8,314510 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$

Boltzmanni konst.:  $k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Stefan-Boltzm. konst.:  $\sigma = 56,703 \text{ nW}/(\text{m}^2\cdot\text{K}^4)$

Prootoni laeng:  $e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Elektroni mass:  $m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Plancki konstant:  $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

Celsiuse skaala nullpunkt:  $T_K = 273,15 \text{ K}$

Päikese mass:  $M_S = 1,991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Maa mass:  $M_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Maa keskmine raadius:  $r_E = 6,373 \text{ Mm}$

Maa orb. pikem pooltelg:  $R_E = 1,4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Sideerilise päeva kestus:  $d_S = 86,16406 \text{ ks}$

Aasta kestus:  $y = 31,558150 \text{ Ms}$

Vabalangemiskiirenduse standardväärtus Maa pinnal:  $g = 9,80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Atmosfääri standardrõhk:  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Nähtava valguse murdumistegur õhu jaoks normaalrõhu ja  $15^\circ\text{C}$  juures:  $n_{\text{air}} = 1,000277$

Päikese kiirguse intensiivsus:  $S = 1355 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$

Jupiteri mass:  $M = 1,901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Jupiteri ekvatoriaalne raadius:  $R_B = 69,8 \text{ Mm}$

Jupiteri orb. keskm. raadius:  $R_J = 7,783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Jupiteri päeva kestus:  $d_J = 35,6 \text{ ks}$

Jupiteri aasta kestus:  $y_J = 374,32 \text{ Ms}$

$\pi \approx 3,14159265$

### I. Kiirguse neeldumine gaasis

Silindriline anum, mille telg on vertikaalne, sisaldab termodünaamilises tasakaalus olevat molekulaarset gaasi. Silindri ülemiseks põhjaks on silindris vabalt liikuv klaasplaat. Me eeldame, et puudub gaasi leke ja hõõrdumine klaasplaadi ja silindri seina vahel on piisav võnkumiste summutamiseks kuid ei põhjusta arvestamisväärset energiakadu. Algselt on gaas ümbritseva keskkonna temperatuuril. Gaasi võib heas lähendus-ees vaadelda ideaalsena. Eeldame, et silindri sei-

nad (alused kaasa arvatud) on väga halva soojusjuhtivuse ja väga väikese soojusmahtuvusega. Seetõttu on soojusvahetus gaasi ja keskkonna vahel väga aeglane ja seda pole ülesande lahendamisel vaja arvestada.

Läbi klaasplaadi suunatakse silindrisse konstantse intensiivsusega laserkiirgus, mis läbib kadudeta õhku ja klaasplaati kuid neeldub täielikult silindris olevas gaasis. Laserkiirguse neeldumise tõttu lähevad molekulid ergastatud seisundisse. Sellest seisundist lähevad molekulid infrapunast kiirgust kiirates kiiresti tagasi põhiseisundisse. Infrapunast kiirgust neelavad omakorda teised molekulid; silindri seinad (klaasplaat kaasa arvatud) peegeldavad aga selle täielikult tagasi. Laserkiirguse energia muundub seega väga lühikese ajaga soojusliikumise energiaks (molekulaarne kaos) ja säilib sellisena gaasis piisavalt kaua. Sellise kiiritamise tagajärjel kerkib klaasplaat ülespoole. Mõne aja pärast lülitame me laseri välja ja mõõdame selle nihke.

1) (2 punkti) Kasutades küsimustiku järel toodud andmeid ja vajadusel ka andmeid füüsikaliste konstantide tabelist, leidke gaasi temperatuur ja rõhk pärast kiiritamist.

2) (1 punkt) Leidke kiiritamise tagajärjel gaasi poolt tehtud mehaaniline töö.

3) (2 punkti) Leidke protsessi käigus neeldunud kiirgusenergia.

4) (1,5 punkti) Leidke laseri kiirgusvõimsus ning sellele vastav footonite arv (ja seega elementaarsete neeldumisaktide arv) ajaühikus.

5) (1 punkt) Leidke optilise energia klaasplaadi mehhaaniliseks potentsiaalseks energiaks konverteerimise protsessi kasutegur.

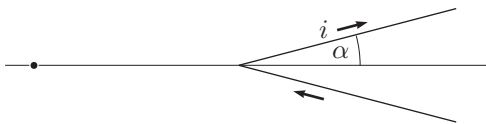
Seejärel pööratakse silindri telge aeglaselt  $90^\circ$  võrra viies ta horisontaalseks. Soojusvahetust gaasi ja anuma vahel pole vaja arvestada.

6) (2,5 punkti) Kas gaasi rõhk ja/või temperatuur muutub sellise pööramise tagajärjel ja kui, siis millised on nende suuruste uued väärtused.

**Andmed:** õhurõhk toas  $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ ; ruumi temperatuur:  $T_0 = 20,0^\circ\text{C}$ ; silindri sisemine diameeter:  $2r = 100 \text{ mm}$ ; klaasplaadi mass:  $m = 800 \text{ g}$ ; silindris asuva gaasi kogus:  $n = 0,100 \text{ mol}$ ; ühe mooli gaasi soojusmahtuvus konstantse ruumala juures:  $c_V = 20,8 \text{ J}/(\text{mol}\times\text{K})$ ; laseri kiirguse lainepikkus:  $l = 514 \text{ nm}$ ; kiiritamise kestus:  $\Delta t = 10,0 \text{ s}$ ; liikuva klaasplaadi nihe peale kiiritusprotsessi lõppu:  $\Delta s = 30,0 \text{ mm}$ .

## 2. V-kujulise juhi magnetväli

Ampère'i magnetnähtuste käsitluse edukuse üheks esimeseks näiteks oli vooluga juhtide magnetilise induktiooni  $\vec{B}$  arvutamine, vastanduvalt varasematele oletustele, mis olid algselt tehtud Biot'ja Savart'i poolt.



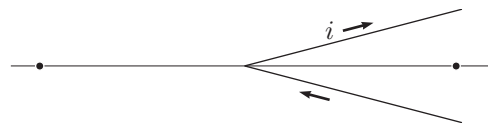
Antud probleemi huvitavaks erijuhuks on lõpmata pikk peenike juhe, milles voolab alalisvool  $i$  ja mis on painutatud V-tähe kujuliseks ning koosneb seega kahest poolsirgest, mille vaheline poolnurk on  $\alpha$  (vt. joonis). Ampère'i käsitluse järgi on magnetvälja induksioon  $B$  punktis  $P$ , mis asub "V" teljel ja selle tipust kaugusel  $d$ , võrdeline teguriga  $\tan \frac{\alpha}{2}$ . Ampère'i tulemused kaasati hiljem Maxwelli üldisesse elektromagnetismi teooriasse ja leidsid üldist kinnitust.

Kasutades kaasaegseid teadmisi elektromagnetismist,

1) (1 punkt) Leidke välja  $\vec{B}$  suund punktis  $P$ .

2) (1,5 punkti) Võttes teadmiseks, et magnetiline induksioon on võrdeline teguriga  $\tan \frac{\alpha}{2}$ , leidke võrdetegur  $k$  valemis  $|B(P)| = k \tan \frac{\alpha}{2}$ .

3) (2 punkti) Leidke samuti induksioon  $\vec{B}$  punktis  $P^*$ , mis on sümmeetriline "V" tipu suhtes, st. asetseb "V" teljel, samal kaugusel  $d$  tipust, aga "V" haarade vahel (vt. joonis).



4) (2,5 p.) Magnetvälja mõõtmiseks asetame me punkti  $P$  väikese magnetnõela, mille inertsimoment on  $I$  ja magnetmoment  $\vec{\mu}$ , see võngub fikseeritud keskpunkti ümber tasandis, mis sisaldab  $\vec{B}$  sihti. Arvutage nõela väikeste võnkumiste periood funktsioonina induksioonist  $B$ .

Biot ja Savart väitsid, et samadel tingimustel on magnetväli punktis  $P$  esitatav (kaasaegsetes tähistustes) valemiga  $B(P) = i\mu_0\alpha/\pi^2d$ , kus  $\mu_0$  on vaakuumi magnetiline läbitavus. Samuti püüdsid nad teha katse abil kindlaks, kumb teooria (Ampère või Biot-Savart'i oma) on õige, mõõtes magnetnõela võnkeperioodi sõltuvust nurgast  $\alpha$ . Mõnede  $\alpha$  väärtuste jaoks on need erinevused aga liiga väikesed, et olla lihtsalt mõõdetavad.

5) (3 punkti) Kui selleks, et eristada eksperimentaalselt kahte erinevat teoreetilist tulemust magnetnõela võnkeperioodi jaoks punktis  $P$ , peab perioodide erinevus ole vähemalt 10%, st.  $T_1 > 1,10T_2$  ( $T_1$  on Ampère'i ja  $T_2$  Biot-Savart'i tulemus), siis millises vahemikus (ligikaudu) tuleb valida nurk  $\alpha$ , et selline eksperimentaalne eristamine oleks võimalik?

**Soovitus** Sõltuvalt valitud lahendusteest, võib kasulikuks osutuda järgmine trigonomeetria seos:  $\tan \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha / (1 + \cos \alpha)$ .

## 3. Kosmosesond Jupiteri juures

Selles ülesandes vaatleme me meetodit mida kasutatakse tihti kosmosesondide kiirendamiseks. Kui sond möödub oma lennul mingist planeedist, võib ta tunduvalt suurendada oma kiirust ja muuta oluliselt lennusuunda, seejuures omandab ta väga väikese osa planeedi orbitaalliikumise energiast. Me analüüsime seda efekti Jupiteri lähedalt mööduva kosmosesondi korral

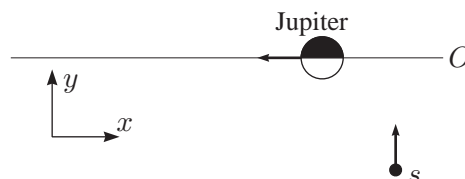
Planeet Jupiter tiirleb Päikese ümber ellipti-

lisel orbiidil mida võib lähendada ringiga, mille raadius on  $R$ . Füüsikalise olukorra analüüsi alustage järgmiselt:

1) (1,5 punkti) Leidke planeedi kiirus  $V$ , millega ta liigub oma orbiidil ümber Päikese

2) (1 punkt) Leidke sondi niisugune kaugus Jupiterist, mille puhul Päikese gravitatsiooniline külgetõmme tasakaalustab Jupiteri külgetõmbe (sond asub Jupiteri ja Päikest ühendaval sirgel).

Kosmosesond massiga  $m = 825 \text{ kg}$  lendab Jupiteri lähistel. Käsitluse lihtsustamiseks eeldame, et kosmosesondi trajektoor lebab täielikult Jupiteri orbiidi tasandis. Seega ei käsitla me olulist juhtu, kus sond tõugatakse välja Jupiteri orbiidi tasandist. Me uurime ainult seda, mis juhtub ruumiosas, kus Jupiteri külgetõmme on oluliselt suurem kõigist teistest gravitatsioonilistest jõududest. Päikese masskeskmega seotud taustsüsteemis on kosmosesondi esialgne kiirus  $v_0 = 1,00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$  ja see on suunatud  $y$ -telje positiivses suunas, Jupiteri kiirus samas taustsüsteemis on suunatud  $x$ -telje negatiivses sihis (vt. joonis). "Esialgseks kiiruseks" nimetame me kosmosesondi kiirust planeetidevahelises



Vaade Päikesega seotud taustsüsteemis.  $O$  tähistab Jupiteri orbiiti,  $s$  kosmosesondi.

ruumis veel kaugel Jupiterist kuid siiski juba seal, kus Päikese külgetõmme on oluliselt väiksem Jupiteri omast. Oletame, et sond viibib Jupiteri läheduses piisavalt vähe aega, mistõttu pole vaja vaja arvestada Jupiteri orbitaalkiiruse suuna muutust. Oletame samuti, et sond möödub Jupiteri "tagant", st. siis, kui nende  $y$ -koordinaadid on võrdsed, on sondi  $x$ -koordinaat suurem Jupiteri omast.

3) (2 punkti) Leidke sondi liikumise suund (st.

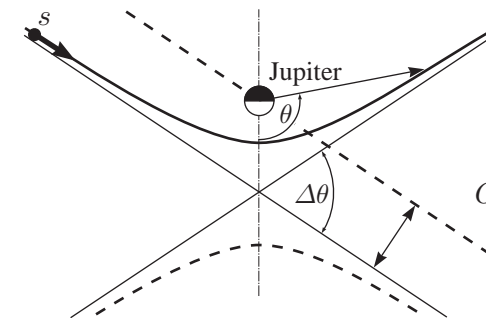
nurk  $\varphi$  tema liikumise suuna ja  $x$ -telje vahel) ja tema kiirus  $v'$  Jupiteriga seotud taustsüsteemis ajal mil ta on Jupiterist veel kaugel.

4) (1 punkt) Leidke sondi mehhaaniline koguenergia  $E$  Jupiteri taustsüsteemis, võttes, nagu harilikult, potentsiaalse energia nullnivooks tema väärtuse väga suurel kaugusel — antud juhul olgu selleks nii kaugel punkt, kus sond liigub gravitatsiooniliste jõudude väiksuse tõttu peaaegu ilma kiirenduseta.

Sondi trajektoor Jupiteri taustsüsteemis on hüperbool; mille võrrand polaarkoordinaadistiku su on

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right), \quad (1)$$

kus  $b$  on kaugus Jupiteri keskpunkti ja trajektoori ühe asümptoodi vahel (seda nimetatakse sihtparameetriks),  $E$  on sondi mehhaaniline koguenergia,  $G$  on gravitatsioonikonstant,  $M$  on Jupiteri mass,  $r$  ja  $\theta$  on polaarkoordinaadid (radiaalkaugus ja polaarnurk). Joonis 2 kujutab võrrandiga kirjeldatud hüperbooli, joonisel on toodud ka



asümptoodid ja polaarkoordinaadid. Pange tähele, et kasutatava koordinaadistiku null-punkt asub hüperbooli "külgetõmbavas" fookuses. Sondi trajektoor on "külgetõmbuv" hüperbool (pidev jäme kõver).

5) (2 punkti) Kasutades võrrandit (1), mis kirjeldab sondi trajektoori, leia summaarne nurkkõrvalekalle  $\Delta\theta$  Jupiteri taustsüsteemis (nagu näidatud joonisel 2) ja esita see funktsioonina algkiirusest  $v'$  ja sihtparameetrist  $b$ .

6) (2 punkti) Oletame, et sond ei tohi mööduda Jupiteri keskpunktist lähemalt kui kolme Jupiteri raadiuse kauguselt. Leidke sellisel juhul minimaalne võimalik sihtparameeter ja maksimaalne võimalik kõrvalekaldenurk  $\Delta\theta$ .

7) (1 punkt) Leidke avaldis sondi lõppkiiruse  $v''$  jaoks Päikesega seotud taustsüsteemis funktsioonina ainult Jupiteri kiirusest  $V$ , sondi algkiirusest  $v_0$  ja nurgast  $\Delta\theta$ .

8) (0,5 punkti) Kasutades eelmist avaldist leidke lõppkiiruse numbriline väärtus Päikesega seotud taustsüsteemis juhul, kui kõrvalekaldenurga väärtus on maksimaalselt võimalik.

**Soovitus** Sõltuvalt valitud lahendusteest võivad kasulikuks osutuda järgmised valemid:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

## XXXI Inglismaa (2000)

### I. Varia

1) Kõiehüppaja on kinnitatud pika ja elastse kõie ühe otsa külge Kõie teine ots on kinnitatud kõrge silla külge. Hüppaja astub üle silla serva ja kukub paigalseisust alla jõe poole. Ta ei kuku vette. Hüppaja mass on  $m$ , venitamata kõie pikkus on  $L$ , kõie jõukonstant (jõud, mis põhjustab 1-meetrise pikendamise) on  $k$ , raskuskiirendus on  $g$ . Võite eeldada, et (a) hüppajat võib vaadelda punktmassina  $m$ , mis on kinnitatud kõie otsa külge; (b) võrreldes  $m$ -ga on kõie mass tühine; (c) kõis allub Hooke'i seadusele; (d) õhutakistus võib mitte arvestada. Leidke avaldised järgmiste suuruste jaoks: (i) vahemaa  $y$ , mille hüppaja läbib enne esmaskordset hetkelist seisma jäämist; (ii) hüppaja maksimaalne kiirus  $v$  selle langemise jooksul; (iii) aeg  $t$ , mis kulub hüppe algusest esmakordse seisma jääamiseni.

2) Soojusmasin töötab kasutades kahte keha temperatuuridel  $T_A$  ja  $T_B$  ( $T_A > T_B$ ), millel on võrdsed massid  $m$  ja võrdsed ning temperatuurid sõltumatud erisoojused  $s$ . Kehad on kons-

tantsel rõhul ja neis ei toimu faasiüleminekuid. (i) Tuletage avaldis kehade  $A$  ja  $B$  lõpptemperatuuri  $T_0$  jaoks juhul kui soojusmasin teeb maksimaalse teoreetiliselt võimaliku hulga mehhaanilist tööd (tooge ära ka tuletuskäik). (ii) Tuletage avaldis selle maksimaalse töö jaoks. (iii) Soojusmasin kasutab kahte veemahutit ruumalaga  $2,50 \text{ m}^3$ . Ühe mahuti temperatuur on  $350 \text{ K}$  teisel  $300 \text{ K}$ . Arvutage saadava mehhaanilise energia maksimumhulk.

**Andmed:** Vee erisoojus on  $4,19 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ; Vee tihedus on  $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

3) Eeldagem, et Maa moodustumise ajal sisaldas teatud maak vaid isotoope  $^{238}\text{U}$  ja  $^{235}\text{U}$ , kuid mitte nende laguprodukte. Siis saab  $^{238}\text{U}$  ja  $^{235}\text{U}$  lagunemist kasutada Maa vanuse  $T$  määramiseks. (i) Isotoobi  $^{238}\text{U}$  poolestusaeg on  $4,50 \cdot 10^9$  aastat. Uraani lagunemisele järgnevas lagunemiste ahelas on vaheproduktide poolestusajad lühikesed ja esimeses lähenduses võib neid mitte arvestada. Lagunemiste seeria lõpeb plii stabiilse isotoobiga  $^{206}\text{Pb}$ . Tuletage avaldis aja  $t$  jooksul radioaktiivse lagunemise tulemusel tekkinud  $^{206}\text{Pb}$  aatomite arvu  $^{206}n$  jaoks, kui tuntud suurusteks on  $^{238}\text{U}$  aatomite praegune arv  $^{238}N$  ning  $^{238}\text{U}$  poolestusaeg. (Ajaühikuna on mugav kasutada  $10^9$  aastat.) (ii) Täpselt samal moel laguneb  $^{235}\text{U}$ , mille poolestusaeg on  $0,710 \cdot 10^9$  aastat, lühiealiste laguproduktide kaudu plii stabiilseks isotoobiks  $^{207}\text{Pb}$ . Kirjutage vastuste lehele avaldis  $^{207}n$  jaoks aja  $t$ ,  $^{235}N$  ja  $^{238}\text{U}$  poolestusaja kaudu.

(iii) Uraani- ja pliiimaagi segu analüüsiti masspektromeetriga. Kolme plii isotoobi  $^{204}\text{Pb}$ ,  $^{206}\text{Pb}$  ja  $^{207}\text{Pb}$  aatomite suhtearvudeks saadi vastavalt  $1,00 : 29,6 : 22,6$ . Isotoopi  $^{204}\text{Pb}$  kasutatakse võrdluseks, sest ta ei osale radioaktiivses lagunemises. Uraanivaba pliiimaagi puhul saadi suhtearvudeks vastavalt  $1,00 : 17,9 : 15,5$ . Teades, et suhe  $^{238}N : ^{235}N$  on  $137 : 1$ , tuletage võrrand, mis sisaldab suurust  $T$ . (iv) Oletagem, et vanus  $T$  on uraani mõlema isotoobi poolestusajast hul-

ga suurem. Kasutades seda lihtsustust, leidke  $T$  ligikaudne väärtus. (v) Leitud ligikaudne väärtus pole pikemast poolestusajast kaugeltki mitte hulga suurem. Ometigi võib seda kasutada aja  $T$  hulga täpsema väärtuse leidmiseks. Niisiis, leidke Maa vanus 2%-lise täpsusega.

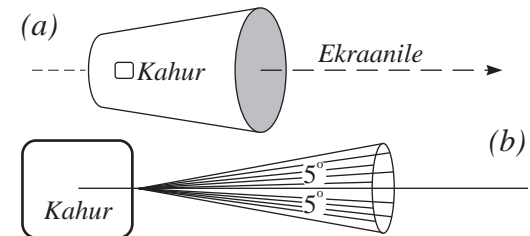
4) Laeng  $Q$  asub vaakuumis ning on jaotunud ühtlaselt üle kerakujulise ruumiosa raadiusega  $R$ . (i) Tuletage valem elektrivälja tugevuse jaoks kauguse  $r$  funktsioonina sfääri keskpunktist juhtumite  $r \leq R$  ja  $r > R$  jaoks. (ii) Leidke avaldis selle laengujaotusega seotud elektrostaatilise energia jaoks.

5) Ringikujuline peenest vasktraadist rõngas pöörleb vertikaalse diameetri ümber Maa magnetväljas. Magnetilise induksiooni suurus on  $44,5 \mu\text{T}$  ja selle suund moodustab horisontaaltasandiga nurga  $64^\circ$  (suunatud "Maa sisse"). Vase tihedus on  $8,90 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ja eritakistus on  $1,70 \cdot 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$ . Leidke, millise aja jooksul kaaneb rõnga nurkkiirus kaks korda. Eeldada, et see aeg on pöörlemis- perioodist hulga pikem.

Võib eeldada, et hõõrdeefektid tugesed ja õhutakistus on tühised. Samuti võib mitte arvestada eneseinduktsiooni efekte (kuigi tegelikult nad polegi tühised).

## 2. Elektroni laengu ja massi suhte leidmine

1) Katoodkiirte toru (KKT), mis koosneb elektronkahurist ja ekraanist, on asetatud konstantsele ja homogeenesse magnetvälja induksiooniga  $\vec{B}$  nii, et magnetväli on paralleelne elektronkahuri teljega nagu näidatud joonisel (a).



Elektronikimp saab alguse elektronkahuri anoodilt; ta on suunatud piki kahuri telge, kuid

hajuvalt kuni  $5^\circ$  telje suhtes, nagu näidatud joonisel (b). Üldjuhul tekib ekraanile hajunud laik, aga magnetvälja mõnede väärtuste korral saadakse teravalt fokuseeritud täpp.

Vaatleme elektroni, mis liigub elektronkahurist lahkudes esialgu telje suhtes nurga  $\beta$  all ( $0 \leq \beta \leq 5^\circ$ ). Vaadeldes tema liikumise teljega paralleelset ja ristsuunalist komponenti, tuletage avaldis elektroni laengu ja massi suhte jaoks järgmiste suuruste kaudu:

väiksem magnetväli, mille korral on saadav teravalt fokuseeritud täpp, elektronkahuris elektrone kiirendav pinge  $V$  (on teada, et  $V < 2 \text{ kV}$ ), kaugus  $D$  anoodi ja ekraani vahel.

2) Vaatleme eelmisest erinevat meetodit elektroni laengu ja massi suhte määramiseks. Katseskeem on esitatud joonisel (c) külgsuunas ja pealtvaates, kusjuures magnetvälja suunda tähistab  $\vec{B}$ . Selles homogeenesse magnetväljas  $\vec{B}$  asetsevad kaks ringikujulist (raadiusega  $\rho$ ) messingplaati, mille vahel on väga väike vahemaa  $t$ . Plaatide vahel hoitakse potentsiaalide vahet  $V$ . Plaadid on omavahel paralleelsed ja koaksiaalsed aga nende keskpunkte ühendav telg on risti magnetväljaga. Plaatidega koaksiaalse silindri (raadius  $\rho + s$ ) sisepinda katab fotofilm. Teisisõnu, film on plaatide servast radiaalselt kaugusel  $s$ . Kogu seade asetseb vaakumis. Pange tähele, et  $t$  on palju väiksem nii  $s$ -ist kui ka  $\rho$ -st.

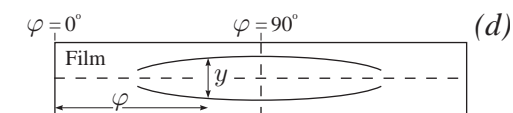
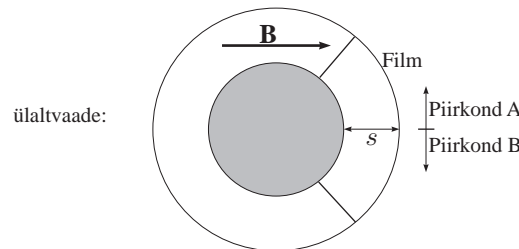
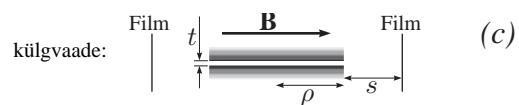
$\beta$ -osakeste punktallikas, mis kiirgab osakesi ühtlaselt kõigis suundades teatud kiiruste vahemikus, asetseb plaatide keskpunktide vahel. Sama filmi on eksponeeritud kolmes erinevas olukorras: **esma**lt  $B = 0$  ja  $V = 0$ ; **teis**eks  $B = B_0$  ja  $V = V_0$ , ning **kolmand**aks  $B = -B_0$ , ja  $V = -V_0$ , kus  $V_0$  and  $B_0$  on positiivsed konstandid. Pange tähele, et ülemine plaat on positiivselt laetud, kui  $V > 0$  ja negatiivselt laetud, kui  $V < 0$  ning magnetvälja suund ühtib joonisel (c) näidatuga, kui  $B > 0$  (on vastassuunaline, kui  $B < 0$ ). Selles osas võite eeldada, et pilu plaatide vahel on tühiselt väike.



Joonisel (c) on tähtedega  $A$  ja  $B$  tähistatud filmi kaks erinevat piirkonda. Pärast eksponeerimist ja ilmutamist on üks nendest piirkondadest visandatud joonisel (d). Millisest piirkonnast on see tükk võetud (kirjutage vastuste lehele kas  $A$  või  $B$ )? Põhjendage oma vastust näidates elektronile mõjuvate jõudude suunad.

3) Eksponeeritud ja ilmutatud filmi visand on toodud joonisel (d). Mikroskoobi all on mõõdetud kahe välimise kiiritusjälje vahemaa. See vahemaa ( $y$ ) on kujutatud ka joonisel (d) ühe konkreetse nurga jaoks. Tulemused on toodud ka järgmises tabelis, kus nurk  $\varphi$  on määratud joonisel (c) kui nurk magnetvälja suuna ja plaatide keskpunkti vaadeldava filmipunktiga ühendava sirglõigu vahel.

$\varphi/\text{deg}$	90	60	50	40	30	23
$y/\text{mm}$	17,4	12,7	9,7	6,4	3,3	Jälje lõpp



Süsteemi iseloomustavad järgmised numbrilised väärtused:  $B_0 = 6,91 \text{ mT}$ ;  $V_0 = 580 \text{ V}$ ;  $t = 0,80 \text{ mm}$ ;  $s = 41,0 \text{ mm}$ . Lisaks sellele on teada, et valguse kiirus vaakumis on  $3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  ja elektroni seisumass on  $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Leidke antud katses täheldatud  $\beta$ -osakeste maksimaalne kineetiline energia (eV-des).

4) Kasutades punkti (3) tulemusi leidke elektroni laengu ja seisumassi suhte väärtus. See tuleb

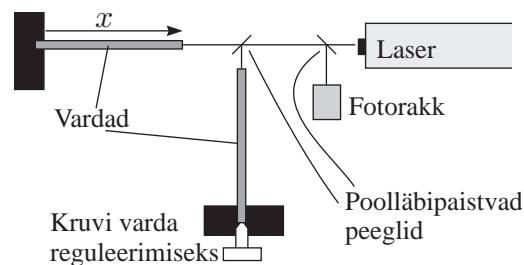
leida graafiliselt, kasutades selleks antud paberit.

Pange tähele, et saadud tulemus ei pruugi olla kooskõlas üldtunnustatud väärtusega süsteemaatilise katsevea tõttu.

### 3. Gravitatsioonilained ja gravitatsiooni mõju valgusele

**Osa A.** Selles osas tegeldakse astronoomiliste sündmuste poolt genereeritud gravitatsioonilainete detekteerimisega. On teada, et kauge supernoova plahvatus võib tekitada Maa lähedal gravitatsioonivälja tugevuse (s.o. raskuskiirenduse) fluktuatsioone ligikaudu  $10^{-19} \text{ N/kg}$ .

Gravitatsioonilainete detektori mudel [vaata joonis] koosneb kahest metallvardast, kumbki 1 m pikk, mis on teineteise suhtes ristasendis. Kummagi varda üks ots on poleeritud ja optiliselt sile ning teine ots järgalt kinnitatud. Ühe varda asend on seatud nii, et fotoraku [vt. joonis] poolt registreeritav signaal oleks minimaalne.



Piesoelektrilise seadmega antakse varrastele lühike ja järsu frondiga impulss. Selle tulemuseks hakkavad varraste vabad otsad võnkuma pikisuunas sel viisil, et otsa nihe

$$\Delta x_t = a \cdot e^{-\mu t} \cos(\omega t + \varphi),$$

kus  $a$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  ja  $\varphi$  on konstandid.

1) Määrake  $\mu$  väärtus, kui 50 s jooksul kahaneb võnkumise amplituud 20% võrra.

2) Teades, et laine kiirus  $v = \sqrt{E/\rho}$ , määrata  $\omega$  vähim võimalik väärtus eeldusel, et vardad on tehtud alumiiniumist, mille tihedus  $\rho$  on  $2700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ja Young'i moodul  $E$  on  $7,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

3) On võimatu valmistada vardaid täpselt sama pikkusega, mistõttu fotoraku signaal tuikleb sagedusega  $0,005 \text{ Hz}$ . Milline on varraste pikkuste erinevus?

4) Tuletage algebraline avaldis varda pikkuse muutuse  $\Delta l$  jaoks gravitatsioonivälja  $g$  muutuse  $\Delta g$ , varda pikkuse  $l$  ja varda materjali iseloomustavate konstantide kaudu.

5) Laser genereerib monokromaatset valgust lainepikkusega  $656 \text{ nm}$ . Kui minimaalne detekteeritav interferentsiiniimumi nihe on  $10^{-4}$  osa lainepikkusest, milline on siis  $l$ -i minimaalne väärtus, et selline süsteem oleks võimeline detekteerima  $g$  muutusi suuruses  $10^{-19} \text{ N/kg}$ .

**Osa B.** Selles osas tegeldakse gravitatsioonivälja mõjuga valguse levimisele vaakumis.

6) Päikese (mass  $M$ , raadius  $R$ ) pinnalt kiiratud foton omab punanihet. Eeldades footoni massi vastavust footoni energiale ja rakendades Newtoni gravitatsiooniteooriat näidake, et efektiivne (mõõdetud) footoni sagedus lõpmatu kaugel Päikesest on muutunud  $(1 - GM/Rc^2)$  korda.

7) Footoni sageduse kahanemine on ekvivalentne tema võnkeperioodi kasvuga - teisisõnu, kasutades footonit etalonkellana, vastab see aja aeglustumisele Päikese pinnal. Saab näidata, et aja aeglustumisele kaasneb alati ka ühikpikkuse kahanemine sama arv korda. Me uurime nüüd mõju, mida see avaldab valguse levikule Päikese lähedal. Defineerime esmalt efektiivse murdmisnäitaja  $n_r$  kaugusel  $r$  Päikese keskmest. Olgu  $n_r = c/c'_r$ , kus  $c$  on valguse kiirus, mõõdetuna Päikese gravitatsioonilisest mõjust kaugel ( $r \rightarrow \infty$ ) ja  $c'_r$  on valguse kiirus kaugusel  $r$  Päikese keskmest. Näidake, et väikese  $GM/rc^2$  korral võib  $n_r$  esitada ligikaudu kujul

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

kus  $\alpha$  on konstant, mis tuleb Teil määrata.

8) Kasutades viimast valemit  $n_r$  jaoks, leidke valguskiire kõrvalekaldenurk radiaanides, kui ta möödub Päikese keskmest Päikese raadiuse kau-

gusel.

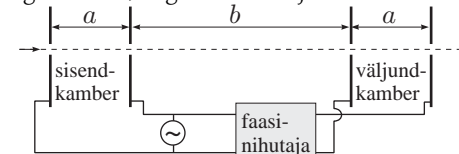
**Andmed:** Päikese mass  $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ; Päikese raadius  $R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$ ; valguse kiirus,  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ; gravitatsioonikonstant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ . Teil võib vaja minna ka järgmist integraali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

## XXXII Türgi (2001)

### I. Varia

1) **Klüstron.** Klüstronid on niisugused seadmed, mida kasutatakse väga kõrge sagedusega signaalide võimendamiseks. Klüstroni põhielementideks on kaks identset paralleelsete plaatide paari (kambrid), mis asuvad üksteisest kaugusel  $b$  nii, nagu näidatud joonisel.



Elektronide kimp algkiirusega  $v_0$  läheb läbi terve süsteemi, läbides plaatidesse tehtud pisikesed augud. Võimendatav kõrgesageduslik pinge rakendatakse mõlemale plaatipaarile. Faasinihutaja tekitab kahe plaatipaari pingete vahel mõningase faasinihke. Niisiis tekitatakse mõlemas kambris horisontaalne vahelduv elektriväli. Elektrone, mis saavad sisendkambris ajal, kui elektriväli on suunatud vasakult paremale aeglustatakse ja vastupidi. Selle tulemusel toimub teatud kaugusel sisendkambrist elektronide kuhjumine. Kui väljundkamber on paigutatud sellisesse kuhjumispunkti, neelab kambris olev elektriväli elektronikiire energiat juhul kui tema faas on sobivalt valitud. Olgu rakendatud vahelduvpinge ajaline käik ristkülikukujuline, perioodiga  $T = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ , st. pinge muutub väärtuste  $V = \pm 0,5 \text{ V}$  vahel (lugegem, et ka selle signaali puhul vastab perioodile  $T$  faasinihke  $2\pi$ ). Elektroni algkiirus on  $v_0 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

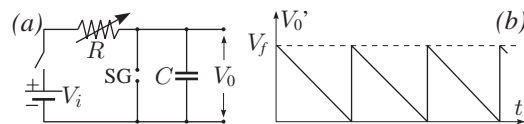
ning tema laengu ja massi suhe  $e/m = 1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ . Vahemaa  $a$  on nii pisike, et kambrites viibimise aega võib mitte arvestada. Säilitades arvutustes neli numbrikohta, arvutage: **a)** kaugus  $b$ , kus toimub elektronide maksimaalne kuhjumine. [1,5p] **b)** faasinihe, mille peab tekitama faasinihutaja, tagamaks seadme eelpoolkirjeldatud funktsionaalsus. [1,0 p]

**2) Molekulide vahekaugus** Olgu  $d_L$  ja  $d_V$  vee molekulide keskmised vahekaugused vedelikus ja aurfaasis, vastavalt. Eeldame, et temperatuur mõlemas faasis on  $100^\circ\text{C}$ , nad asuvad atmosfäärirõhul ja veeaur käitub ideaalse gaasina. Kasutades järgmisi andmeid, arvutage suhe  $d_V/d_L$ . Vee molaarmass:  $M = 1,8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$ ; atmosfäärirõhk:  $P_a = 1,0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ; Avogadro arv:  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ; gaasikonstant:  $R = 8,3 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ ; vee tihedus vedelas olekus:  $r_L = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  [2,5p].

### 3) lihtne saehammassignaali generaator

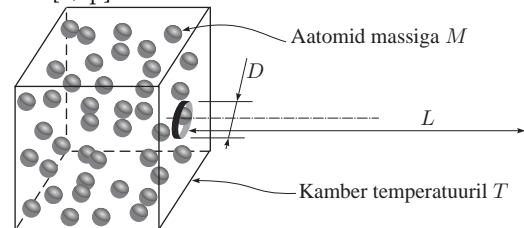
Saehambakujulise ajalise käiguga pinge  $V_0$  võib saada kondensaatoril  $C$  joonisel  $a$  kujutatud skeemis.  $R$  on muudetav takistus,  $V_i$  on ideaalne patarei ja  $SG$  on sädevahemik, mis koosneb kahest muudetava vahekaugusega elektroodist. Kui pinge elektroodide vahel ületab kindla süütepinge  $V_f$ , toimub elektroodide vahel õhus läbilöök, sädevahemik lühistub ja jääb lühistatuks seni, kuni pinge sädevahemikul on muutunud väga väikeseks. **a)** Joonistage pinge  $V_0$  sõltuvus ajast  $t$  pärast lüliti sulgemist. [0,5p] **b)** Milline tingimus peab olema rahuldatud selleks, et saehamba pinge  $V_0$  sõltuks ajast peaaegu lineaarselt? [0,2p] **c)** Eeldades, et see tingimus on rahuldatud, tuletage lihtsustatud valem pinge muutumise perioodi  $T$  jaoks. [0,4p] **d)** Mida tuleb muuta ( $R$  ja/või  $SG$ ) selleks, et muutuks ainult pinge periood? [0,2p] **e)** Mida tuleb varieerida ( $R$  ja/või  $SG$ ) selleks, et muuta ainult pinge amplituudi? [0,2p] **f)** Teile on antud täiendav muudetava pingega alalispinge allikas. Kasutades joonise  $a$  komponente ja seda täiendavat

pingeallikat koosta uus skeem, millelt (näita, millistelt klemmidelt!) oleks võimalik saada joonisel  $b$  kujutatud ajalise sõltuvusega pinge. [1,0p]



*Kommentaari:* võimalikke skeeme on tegelikult mitu. Naljakas seik: võistkonna juhendajatel kulus moderatsioonil pool tundi töestamiseks, et Jaanus Sepa skeem töötab õieti; kohale kogunenud kuuele türklastele jäigi asi veidi segaseks, kuid et nad midagi vastu väita ka enam ei osanud, sai Jaanus oma punktid kätte.

**4) Aatomite kimp** Aatomite kimp saadakse kuumutatades aatomeid joonisel kujutatud kambri temperatuurini  $T$  ja lastes kambri seinas oleva väikese augu kaudu välja lennata ainult neil aatomitel, mis liiguvad augu telje sihis. Augu diameeter  $D$  on aatomi mõõtmega samas suurusjärgus. Hinnake kimbu läbimõõtu pärast seda, kui ta on horisontaalsuunas (piki kimbu telge) läbinud teepikkuse  $L$ . Aatomite mass on  $M$ . [2,5p]



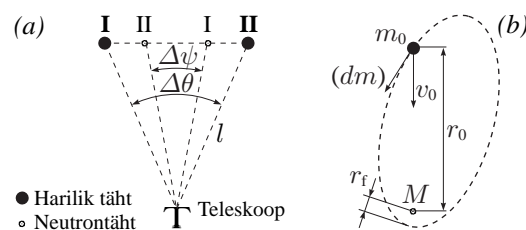
## 2. Kaksitähe süsteem

**1)** On hästi teada, et enamik tähti moodustab kaksiksüsteeme. Üks rühm selliseid kaksiksüsteeme koosneb harilikust tähest massiga  $m_0$  ja raadiusega  $R$  ning massiivsemast kompaktselt neutrontähest massiga  $M$ , mis tiirlevad ringorbiidil teineteise ümber. Kõikjal alljärgnevas võite Maa liikumist mitte arvestada. Taolise kaksiksüsteemi teleskoopvaatlused andsid järgmist informatsiooni: **(i)** hariliku tähe maksimaalne nurknihe on  $\Delta\theta$ , neutrontähel on see

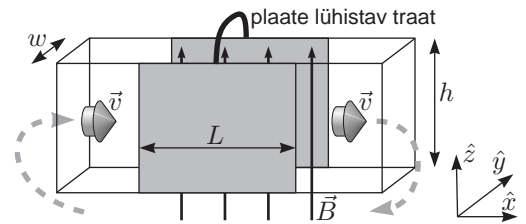
$\Delta\varphi$  (vt. joonis  $a$ ); **(ii)** aeg, mis kulub jõudmiseks ühest äärmisest asendist teise on  $t$ ; **(iii)** hariliku tähe kiirgusarakteristikud näitavad, et tema pinnatemperatuur on  $T$  ja tema kiirgusenergia, mis Maa juures läbib ajaühikus pinnauhik on  $P$ ; **(iv)** kaltsiumi kiirgusjoone lainepikkus selles kiirguses  $\lambda_0$  erineb  $\Delta\lambda$  võrra oma normaalset väärtusest ning selle erinevuse ainupõhjus on hariliku tähe gravitatsiooniväli. (Selles arvutuses võib footonit vaadelda osakesena, mis omab efektiivset massi  $h/c\lambda$ ).

Leida valem selle tähesüsteemi kauguse  $l$  jaoks Maakerast, kasutades vaid ülalnimetatud vaatlusandmeid ja universaalkonstante. [7p]

**2)** Eeldame, et  $M \gg m_0$ , nii et harilik täht liigub neutrontähe ümber ringorbiidil raadiusega  $r_0$ . Hakaku harilikust tähest neutrontähe suunas välja paiskuma gaasiosakesi (joonisel tähisega  $dm$ ) kiirusega  $v_0$  hariliku tähe suhtes (vaata joonist  $b$ ). Eeldades, et neutrontäht on antud situatsioonis domineeriv raskusjõu allikas ja jättes arvestamata hariliku tähe orbitaalliikumise muutused, leidke gaasiosakeste väikseim lähenemiskaugus  $r_f$  (näidatud joonisel  $b$ ). [3p]



## 3. Magnetohüdrodünaamiline generaator



Horisontaalne ristkülikukujulise ristlõikega rõngassesuletud (so. paremast otsast väljuv vedelik suunatakse vasakust otsast sisse tagasi) plastik-

toru laiusega  $w$  ja kõrgusega  $h$  on täidetud elavhõbedaga, mille eritakistus on  $\rho$ . Turbiini abil on torus tekitatud ülerõhk  $P$ , mis paneb elavhõbeda liikuma konstantse kiirusega  $v_0$ . Teatud toru lõigul, mille pikkus on  $L$ , on toru kaks vertikaalset vastasseina tehtud vasest.

Realse vedeliku liikumine on väga keeruline. Olukorra lihtsustamiseks eeldame järgmist: **(i)** kuigi vedelik on viskoosne, on tema liikumise kiirus sama kogu toru ristlõike ulatuses. **(ii)** vedeliku kiirus on alati võrdeline temale mõjuva summaarse välisjõuga. **(iii)** vedelik on kokkusurumatu. Vasest vertikaalseinad on väljastpoolt elektriliselt lühistatud ja (ainult) sellele torulõigule rakendatakse homogeenne vertikaalne magnetväli  $\vec{B}$ . Selline seade on kujutatud ülalasuval joonisel, kus on kujutatud ka koordinaattelgede sihilised ühikvektorid  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ , mida tuleb kasutada lahenduses.

**1)** Leidke jõud, mis mõjub vedelikule tänu magnetvälja olemasolule, väljendades selle suuruste  $L$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $w$ ,  $r$  ja vedeliku uue ( $B$  sisselülitamise järgse) kiiruse  $v$  kaudu. [2,0p]

**2)** Tuletage valem vedeliku uue kiiruse  $v$  jaoks suuruste  $v_0$ ,  $P$ ,  $L$ ,  $B$  ja  $r$  kaudu pärast magnetvälja sisselülitamist. [3,0p]

**3)** Tuletage valem turbiini lisavõimsuse jaoks, mida on vaja rakendada, et tõsta kiirus selle esialgse väärtuseni  $v_0$ . Kopeerige tulemus vastuste lehele. [2,0p]

*Kommentaari:* Küsimus pole üheselt tõlgendtav: kas lisavõimsus võrreldes olukorraga, kus  $(a)$  polnud magnetvälja või  $(b)$  oli magnetväli, kuid kiirus oli soovitud väiksem? Ebaõnnestunud sõnastuses on teatud määral süüdi ka juhendajad, kuid paraku kubises ülesande algversioon veelti tõsisematest vigadest ning seetõttu oli teksti arutamise aegu nii allakirjutanu kui ka kõigi teiste tähelepanu võrdlemisi killustunud .... Korraldajatepoolne valik oli  $(a)$ , kuid näiteks Alar Ainla valis (ja lahendas edukalt mõneti keerulisema) variandi  $(b)$ .

**4)** Nüüd lülitatakse magnetväli välja ja elavhõbe asendatakse kiirusega  $v_0$  voolava veega. Elektro-

magnetlaine sagedusega  $f$  levib torus teepikkusel  $L$  voolu suunas. Vee murdumisnäitaja on  $n$  ja  $v_0 \ll c$ . Tuletage avaldis selle panuse jaoks, mille annab vee liikumine elektromagnetlaine faaside erinevusse lõigu  $L$  algus- ja lõpppunkti vahel. Kooperige tulemus vastuste lehele. [3,0p]

### XXXIII Indoneesia — Bali (2002)

#### 1. Pinnase sondeerimise radar

Pinnase sondeerimise radarit (PR) kasutatakse maa-aluste pinnalähedaste objektide tuvastamiseks. PR suunab elektromagnetlaine pinnasesse ja püüab detektoriga kinni selle laine peegeldused pinnases asuvatelt objektidelt. Nii laineid kiirgav antenn kui ka peegeldusi püüdev detektor on vahetult maapinnal (kontaktis pinnasega) ning võib lugeda, et nad asuvad ühes ja samas punktis.

$z$ -telje suunas leviv lineaarselt polariseeritud elektromagnetlaine on kirjeldatud valemiga

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

kus  $E$  on elektriväli,  $E_0$  konstant,  $\omega$  — laine ringsagedus,  $\alpha$  — sumbuvuskoefitsient ning  $\beta$  — lainearv. Avaldised viimase kahe suuruse jaoks on järgmised:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\varepsilon_0^2\omega^2}} - 1 \right)}, \quad (2)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\varepsilon_0^2\omega^2}} + 1 \right)},$$

kus  $\mu$  ja  $\varepsilon$  on pinnase magnetiline ja dielektriline läbitavus ning  $\sigma$  — tema erielektrijuhtivus.

Harilikult kasutatakse PR-des muudetava sagedusega (10 MHz - 1000 MHz) elektromagnetlained. Sageduse muutmine võimaldab häälesta objektivastussügavust ja lahutusvõimet.

Lugegem, et PR ei suuda peegeldunud signaali enam märgata, kui peegeldava objekti juures on pealelangeva laine amplituud jõudnud väheneda (võrreldes algväärtusega) enam kui  $e$  korda (on väiksem kui  $\approx 37\%$  algväärtusest).

PR-i lahutusvõime on antud minimaalse kaugusena kahe sellise objekti vahel, mida on veel võimalik eristada. Lugegem, et objektid on eristatavad, kui neilt peegeldunud lainete faaside vahe on suurem või võrdne kui  $180^\circ$ .

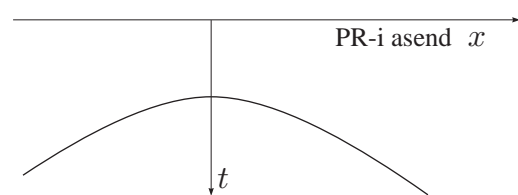
Arvutustes kasutage väärtusi  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m ja  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m.

1) Oletagem, et tegemist on mitte-magnetilise pinnaga ( $\mu = 1$ ) ning antud pinna ja kasutatavate sageduste jaoks on rahuldatud tingimus  $\sigma^2/\varepsilon^2\varepsilon_0^2\omega^2 \ll 1$ . Tuletage levimiskiiruse  $v$  valem  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  ja  $\varepsilon$  kaudu, kasutades valemid (1) ja (2). [1,0 p.]

2) Leidke maksimaalne sügavus, mille juures saab objekte veel tuvastada, kui pinna erielektrijuhtivus on 1,0 mS/m ning  $\varepsilon = 9$  eeldades, et  $\sigma^2 \ll \varepsilon^2\varepsilon_0^2\omega^2$  ja lugedes lained tasalaineteks. (elektrijuhtivusühik S = ohm<sup>-1</sup>;  $\mu = 1$ ) [2,0 p.]

3) Vaatleme kahte juhtivat pulka, mis on paigutatud pinnase sisse ning asetsevad horisontaalselt ja on ühesugusel sügavusel 4 meetrit paralleelset üksteisega. On teada, et pinna erijuhtivus on 1,0 mS/m ja  $\varepsilon = 9$ . Mõõtmised PR-iga tehakse sellises maapinna punktis, mis on otse ühe pulga kohal. PR-i mõõtmised lugeda tühiselt väikseks. Detektor on nüüd nii tundlik, et lainete sfäärilisusest tingitud intensiivsuse vähenemine enam ei sega. Leidke minimaalne sagedus, mis võimaldab eristada pulki, kui pulkade vahekaugus on 50 cm. Eeldada, et  $\sigma^2 \ll \varepsilon^2\varepsilon_0^2\omega^2$ . [3,5 p.]

4) Pulk on asetatud sügavusele  $d$  sama pinnase sisse. Vaatleme mõõtmisi, mis on tehtud liigutades PR-i maapinnal mööda joont, mille siht on



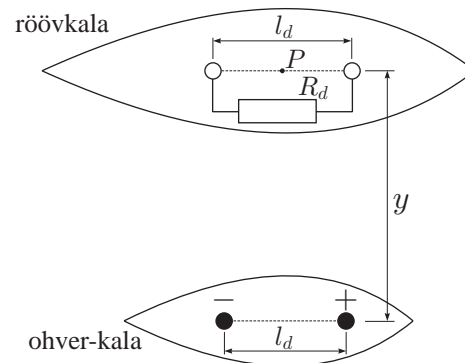
Signaali levikuaega  $t$  graafik funktsioonina PR-i asendist  $x$ . Minimaalne levikuaeg  $t_{\min} = 100$  ns.

risti pulgaga. Mõõtmiste tulemus on antud pildil. Avaldage signaali levikuaeg  $t$  funktsioonina  $x$ -st ja leidke pulga sügavus  $d$ . [3,5 p.]

#### 2. Elektrisignaali abil orienteerumine

Mõned merekalad suudavad leida meres neist kaugel olevaid teisi kalu tänu elektrilistele vooludele, mida need teised kalad tekitavad (hingamise vms. lihaste kontrakteerumist tingivate protsesside juures). Niisugused röövkalad kasutavad elektrilisi signaale ohvri asukoha määramiseks (leides need üles isegi liiva seest).

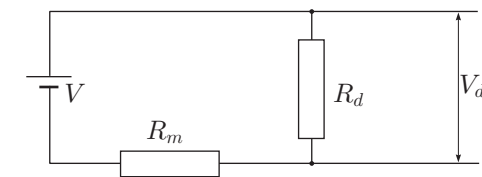
Sellist voolu genereerimise ja detekteerimise füüsikalist mehhanismi võib mudeleerida nii, nagu illustreeritud joonisel (a). Ohver-kala poolt genereeritud vool voolab kahe juhtiva sfääri vahel, mis asuvad ohvri kehas ning mille potentsiaalid on erinevad. Sfääride keskpunktide vaheline kaugus on  $l_s$ ; sfäärid on ühesuguse raadiusega  $r_s$ , mis on palju väiksem kui  $l_s$ . Merevee eritakistus on  $\rho$ . Oletagem, et ohvri keha eritakistus on võrdne ümbritseva merevee omaga: seega moodustab ohvri keha ja merevesi ühtse (elektrilises mõttes eralduspinnata) keskkonna.



Joonis (a): Mudel, mis kirjeldab ohvrist tuleva elektrienergia detekteerimist.

Röövkalal toimivat mehhanismi, mis detekteerib ohvri poolt tulevat elektrienegiati, võib mudeleerida analoogselt: detektoriks on kaks sfääri, mis asuvad röövkala kehas. Need sfäärid on kontaktis ümbritsevate kudedega, mis oma-

vat jällegi mereveega võrdset erijuhtivust, kuid lisaks harilikele kudedele ühendab neid sfääre veel detekteeriv element. Sfääride keskpunkte ühendav joon on paralleelne analoogilise joonega ohvris. Sfääride keskpunktide vaheline kaugus on  $l_d$ . Mõlema sfääri raadius on  $r_d$ , mis on palju väiksem kui  $l_d$ . Sellise detektori keskpunkt asub allika (s.o. ohvri) keskpunktist kaugusel  $y$ , samal vertikaalteljel. Niisiis on detektori telg paralleelne elektriväljaga, mille tekitab ohver detektori (s.o. kiskja) juures, vt. joonis (a). Nii  $l_s$  kui ka  $l_d$  on palju väiksem, kui  $y$ . Seepärast võib lugeda, et ohvri tekitatud elektrivälja tugevus piki detektori sfääride keskpunkte ühendavat joont on konstantne. Niisiis moodustub suletud vooluahel, kuhu on ühendatud ohver, merevesi ning röövkala. Selgub, et detekteerivas elemendis voolavate voolude kirjeldamiseks võib kasutada joonisel (b) toodud elektriskeemi. Joonisel kasutatud tähistused on järgmised:  $V$  on pingeline röövkala sfääride vahel, kui puuduks detekteeriv element;  $R_m$  — nende sfääride vaheline, ümbritsevast mereveest tingitud takistus (takistus, kui puuduks detekteeriv element);  $V_d$  — ohvri poolt detektori sfääride vahele indutseeritav pingeline;  $R_d$  on detekteeriva elemendi takistus.



Joonis (b): ohvrit, merevett ja röövkala kirjeldav ekvivalentne skeem.

1) Leidke voolutiheduse vektor  $\vec{j}$  kaugusel  $r$  voolu punktallikast, kui keskkond on lõpmatu ja punktallika koguvool on  $I_s$ . [1,5 p.]

2) Olgu antud koguvool  $I_s$ , mis voolab ühelt ohvri kehas asuvalt sfäärilt teisele. Kasutades seadust  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ , leidke elektrivälja tugevus detekteerivate (s.o. röövkala) sfääride vahelises punktis  $P$  [2,0 p.]



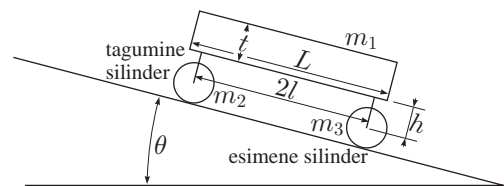
3) Leidke, milline on pingeline  $V_s$  ohvris asuvate sfääride vahel, kui nende sfääride vaheline koguvool on endiselt  $I_s$  [1,5 p]. Leidke ohvris asuva kahe sfääri vaheline takistus  $R_s$  [0,5 p] ning voolulallikapaari võimsus  $P_s$ . [0,5 p].

4) Leidke suurused  $R_m$  [0,5 p] ja  $V_d$  [1,0 p] jooniselt (b) (vt. ka selgitusi sissejuhatavas osas). Arvutage detekteerival elemendil eralduv võimsus  $P_d$ . [0,5 p].

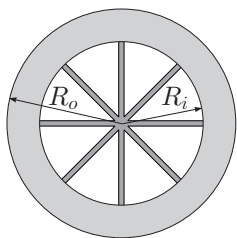
5) Leidke detekteeriva elemendi optimaalne takistus  $R_d$ , mille puhul temal eralduv võimsus on maksimaalne [1,5 p] ning leidke see maksimaalne võimsus [0,5 p].

**Lisaülesanne (JK):** tõestage, et skeem jooniselt (b) kirjeldab detekteeriva elemendi voolu õieti.

### 3. Vanker kaldteel.



Joonisel on toodud vankri lihtsustatud mudel. Vankril on kaks silindrilist ratast (tagumine ja esimene), kumbki massiga  $M$  ( $m_2 = m_3 = M$ ). Mõlemad rattad koosnevad silindrilisest kestast välise raadiusega  $R_o$  ja sisemise raadiusega  $R_i = 0.8R_o$  ning kaheksast kodarast üldmassiga  $0.2M$  (vt. alumine joonis). Silindreid kinnitavate detailide mass lugeda tühiseks. Vanker asub teel, mille kaldenurk on  $\theta$  (vt. ülemine joonis) ning liigub gravitatsiooni- ja hõõrdejõu mõjul allapoole. Esimene ja tagumine silinder paiknevad sõiduki suhtes sümmeetriliselt.



Silindrite ja tee vaheline seisuhõõrdetegur on  $\mu_s$  ja liughõõrdetegur —  $\mu_k$ . Vankri risttahuka kujulise kere mass on  $5M$ , pikkus —  $L$  ja paksus —  $t$ . Esimese ja tagumise silindri vaheline kaugus on  $2l$ , silindri telje ja vankri kere alumise osa vaheline kaugus on  $h$ . Eeldagem, et pöörlemisest tingitud hõõre silindri ning tema telje vahel on tühiselt väike.

1) Arvutage, milline on silindri inertsimoment telje suhtes [1,5 p].

2) Joonistage kõik jõud, mis mõjuvad sõiduki osadele: kehale, esimesele ja tagumisele silindrile. Kirjutage liikumisvõrrandid iga sõiduki osajaoks. [2,5 p].

3) Vanker hakkab liikuma paigalseisust gravitatsiooni mõjul. Nimetage kõrvõimalikud süsteemi liikumise variandid ja leidke neile liikumistele vastavad kiirused [4,0 p]. Loomulikult eeldas täislahendus iga liikumise esinemistingimuse leidmist. Ümber kukkumise mainimise ja uurimise eest aga punkte ei antud, selles osas oli küsimuse tekst puudulik.

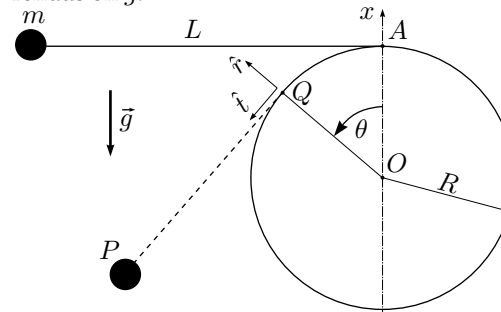
4) Oletame, et vanker liikus paigalseisust vahemaa  $d$  nii, et mõlemad rattad veeresid libisemata. Sel hetkel omandasid hõõrdetegurid mõnevõrra väiksemad väärtused  $\mu'_s$  ja  $\mu'_k$ , mistõttu mõlemad silindrid hakkasid libisema. Leidke nii vankri joonkiirus kui ka kummagi ratta nurkkiirused hetkel, kui vanker oli jõudnud kaugusele  $s$  punktist, kus ta alustas oma liikumist. Vankri mõõtmed on palju väiksemad, kui  $d$  ja  $s$  [2,0 p].

### XXXIV Taivan— Taipei (2003)

#### 1. Langeva raskuse abil kiigutamine

Jäik silindriline varras raadiusega  $R$  on kinnitatud horisontaalselt maapinna kohale. Niit, mille massi pole vaja arvestada ja mille pikkus on  $L$  ( $L > 2\pi R$ ), on kinnitatud varda kõrgeima punkti  $A$  külge (Joonis 1a). Niidi vaba otsa külge on kinnitatud keha massiga  $m$ . Hoides niiti pingul tõstetakse keha samale kõrgusel kui punkt  $A$  ja lastakse siis algkiirusega lahti. Niidi venimist po-

le vaja arvestada. Eeldame, et keha võib vaadelda punktina ja et ta liigub ainult varda teljega risti olevas tasandis. Sellest lähtuvalt nimetatakse edasises seda keha ka osakeseks. Raskuskiirendus on  $\vec{g}$ .



Olgu  $O$  koordinaatsüsteemi alguspunkt. Kui osake asub punktis  $P$ , siis niidi siht ühtib silindri pinna puutuva sihiga punktis  $Q$ . Lõigu  $QP$  pikkus on  $s$ . Silindri pinna puutuva ja raadiuse sihilised ühikvektorid punktis  $Q$  on vastavalt  $\hat{t}$  ja  $\hat{r}$ . Raadiuse  $OQ$  nurk-kõrvalekallet  $\theta$ , mida mõõdetakse vastupäeva vertikaalsest  $x$ -teljest (lõigust  $OA$ ), loetakse positiivseks.

Kui  $\theta = 0$ , siis on pikkus  $s$  võrdne niidi kogupikkusega  $L$  ja osakese gravitatsiooniline potentsiaalne energia  $U$  loetakse nulliks. Kui osake liigub, tähistame suuruste  $\theta$  ja  $s$  muutumise kiirusi vastavalt  $\dot{\theta}$  ja  $\dot{s}$ .

Kõiki neid kiirusi, mille taustsüsteemi pole eraldi antud, mõõdetakse paigalseisva (punktiga  $O$  seotud) süsteemi suhtes.

**Osa A.** Osas A on osakese liikumisel niit pingul. Kasutades ülaldefinieeritud suurusi (st  $s$ ,  $\theta$ ,  $\dot{s}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $g$ ,  $\hat{t}$  ja  $\hat{r}$ ), leidke:

- 1) Seos suuruste  $\dot{\theta}$  ja  $\dot{s}$  vahel. [0,5 punkti]
- 2) Punkti  $Q$  kiirus  $\vec{v}_Q$  punktiga  $O$  seotud süsteemis. [0,5 punkti]
- 3) Punktis  $P$  asuva osakese kiirus  $\vec{v}'$  punktiga  $Q$  seotud süsteemis. [0,7 punkti]
- 4) Punktis  $P$  asuva osakese kiirus  $\vec{v}$  punktiga  $O$  seotud süsteemis. [0,7 punkti]
- 5) Punktis  $P$  asuva osakese kiirenduse  $\hat{t}$ -sihiline

komponent punktiga  $O$  seotud süsteemis. [0,7 punkti]

6) Punktis  $P$  asuva osakese gravitatsiooniline potentsiaalne energia  $U$ . [0,5 punkti]

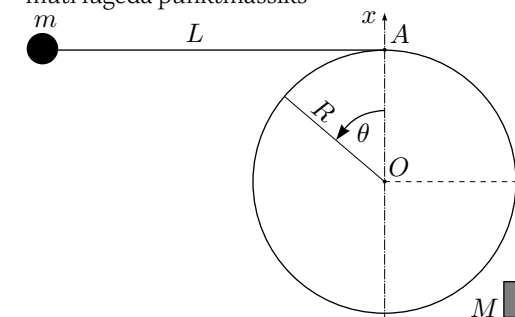
7) Osakese kiirus  $v_m$  tema trajektoori madalaimas punktis. [0,7 punkti]

**Osa B.** Osas B on suuruste  $L$  ja  $R$  suhte väärtus  $\frac{L}{R} = \frac{9}{8}\pi + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3,534 + 3,352 = 6,886$ .

8) Milline on osakese kiirus  $v_s$  siis, kui punktide  $Q$  ja  $P$  vahelise niidi pikkus on omandanud minimaalse väärtuse, kuid niit pole veel lõtvunud (st niidilõik on sirge)? Vastus andke suuruste  $g$  ja  $R$  kaudu. [2,4 punkti]

9) Milline on osakese kiirus  $v_H$  siis, kui ta on jõudnud kiikuda oma lähteasendi suhtes teisele poole varrast ning asub parajasti oma edasise trajektoori kõrgeimas punktis  $H$ ? Vastus andke suuruste  $g$  ja  $R$  kaudu. [1,9 punkti]

**Osa C.** Osas C ei ole niit (mille ühes otsas on osake massiga  $m$ ) enam kinnitatud varda külge, vaid niidi teises otsas ripub raskem koormis massiga  $M$  ning niit ise on tõmmatud üle varda nii, nagu näidatud jooniselt 1b. Rippuva koormise võib samuti lugeda punktiks



Alghetkel hoitakse osakest massiga  $m$  punkti  $A$  kõrgusel ja niiti pingul; niidi horisontaalse osa pikkus on  $L$ . Seejärel süsteem vabastatakse: osake hakkab kiikuma ja raskus allapoole vajuma. Võib eeldada, et liikumise käigus niidi vertikaaltasand ei muutu ja osake kiigub langevast raskusest mööda ilma vastasmõjuta.

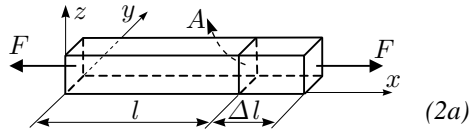
Liughõõret varda ja niidi vahel võib lugeda

tühiselt väikeseks. Paigalseisuhõõre aga on nii suur, et niipea kui koormise kiirus (seega ka niidi libisemiskiirus) on vähenenud nullini, jääb koormis kogu edasiseks vaatlusaluseks ajaks liikumatult paigale (paigalseisuhõõre ei takista siiski vabastamisjärgset libisema hakkamist).

**10)** Olgu teada see vahemaa  $D$ , mille läbib koormis vabastamisjärgselt kuni peatumiseni. Eeldagem, et  $(L - D) \gg R$ . Selleks, et osake saaks järgnevalt vardale ringi peale teha (st saavutada  $\theta = 2\pi$ ) nii, et varrast mitte-puudutavad niidi osad oleksid kogu aeg sirged, peab suhe  $\alpha = D/L$  olema väiksem teatavast kriitilisest väärtusest  $\alpha_c$ . Leidke suuruse  $\alpha_c$  ligikaudne väärtus (jättes arvestamata kõik need liikmed, mille suurusjärk on  $R/L$  või mis on veelgi väiksemad). Vastus andke suhte  $M/m$  kaudu. [3,4 punkti]

## 2. Piesoelektrilisest kristallist resonator

Vaadelgem ühtlast varrast, mille deformeerimata pikkus on  $l$  ja ristlõike pindala  $A$  (Joonis 2a).



Varda pikkus muutub  $\Delta l$  võrra, kui ta otstele on rakendatud võrdsed ja vastassuunalised pinnanormaalisisilised jõud  $F$ . Varda otsatahkudele mõjuv *mehhaaniline pinge*  $T$  on defineeritud kui  $F/A$ . Varda *pikkuse suhtelist muutust*  $\Delta l/l$  nimetatakse *deformatsiooniks*  $S$ . Pinge ja deformatsiooni kaudu avaldub Hook'i seadus kujul

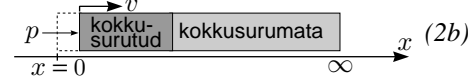
$$T = YS \quad \text{või} \quad F/A = Y\Delta l/l,$$

kus  $Y$  on varda materjali *Youngi moodul*. Pange tähele, et survepinge korral  $F < 0$  ja varda pikkus kahaneb ( $\delta l < 0$ ). Selline pinge  $T$  on seega negatiivne ja seotud vardas otstahkudele mõjuva rõhuga  $p$ :  $T = -p$ . Ühtlase varda korral, mille tihedus on  $\rho$ , on pikilainete levikiirus (st heli kiirus) piki varrast antud valemiga

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (1)$$

Sumbumist ja dissipatsiooni pole järgmiste küsimuste vastamisel vaja arvestada.

**Osa A:** Mehhaanilised omadused. Ühtlase pool lõpmatu varda ( $x = 0$  kuni  $\infty$ , vt joonis 2b) tihedus on  $\rho$ . Algselt on varras liikumatu ja pingevaba. Liikuv kolb avaldab varda vasakule otsale ( $x = 0$ ) väga väikese aja  $\Delta t$  jooksul väga väikest rõhku  $p$ , tekitades vardas kiirusega  $u$  paremale leviva rõhulaine.

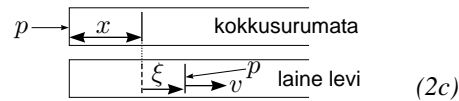


**1)** Kui kolb hoiab aja  $\Delta t$  jooksul varda vasakut otsa liikumas konstantse kiirusega  $v$  (Joonis 2b), millised on siis deformatsioon  $S$  ja rõhk  $p$  varda vasakul otsapinnal aja  $\Delta t$  jooksul? Vastused tuleb anda ainult suuruste  $\rho$ ,  $u$ , ja  $v$  kaudu. [1,6 punkti]

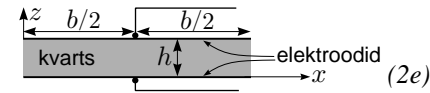
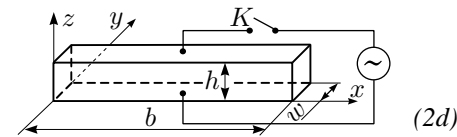
**2)** Vaadelgem piki varrast ( $x$ -sihis) levivat pikilainet. Olgu  $\xi(x, t)$  selliste vardaosakeste nihe ajahetkel  $t$ , mis deformeerimata vardas asuvad koordinaadi  $x$  juures (Joonis 2c). Eeldame, et

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

kus  $\xi_0$  ja  $k$  on konstandid. Määrake vardaosakeste kiirus  $v(x, t)$ , varda deformatsioon  $S(x, t)$ , ja rõhk vardas  $p(x, t)$  suuruste  $x$  ja  $t$  funktsioonina. [2,4 punkti]



**Osa B:** Elektromehhaanilised omadused (sealhulgas piesoeffekt). Vaadelgem kvartskristallist plaati pikkusega  $b$ , paksusega  $h$ , ja laiusega  $w$  (Joonis 2d).  $x$ - ja  $z$ -telg on valitud vastavalt plaadi pikkuse ja paksuse sihis. Õhukeste metallkateega on plaadi ülemisele ja alumisele pinnale tekitatud elektroodid. Elektroodide külge on plaadi keskele joodetud elektrijuhtmed, mis on ühtlasi ka plaadile mehhaanilisteks tugedeks (Joonis 2e) ja mis hoiavad plaadi keskohta jäävaid plaadiosakesi liikumatuna.



Vaadeldava kvartskristalli tihedus  $\rho$  on  $2,65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  ja Young'i moodul  $Y$  on  $7,87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ . Plaadi pikkus  $b$  on  $1,00 \text{ cm}$  ja laius  $w$  ning paksus  $h$  on sellised, et  $h \ll w$  ja  $w \ll b$ . Kui lüliti  $K$  (Joonis 2d) on avatud, siis eeldame, et kvartsplaadis eksisteerivad vaid  $x$ -sihilised seisulained (*pikivõnkumiste moodid*). Seisulaine jaoks sagedusega  $f = \omega/2\pi$  võib nihke  $\xi(x, t)$  esitada aja  $t$  ja koordinaadi  $x$  kaudu järgmise avaldisega

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b)$$

kus  $\xi_0$  on positiivne konstant ja koordinaadist  $x$  sõltuv funktsioon  $g(x)$  omab kuju

$$g(x) = B_1 \sin k(x - \frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x - \frac{b}{2}). \quad (2)$$

Funktsiooni  $g(x)$  maksimumväärtus on üks ja  $k = \omega/u$ . Pidage meeles, et elektroodide keskpunktid on liikumatud ja plaadi vasak ja parem otsatahk on vabad ja seega on mehhaaniline pinge (rõhk) nendel null.

**3)** Määrata valemis (2) suurused  $B_1$  ja  $B_2$  uuritava seisulaine jaoks kvartsplaadis. [1,2 punkti]

**4)** Millised on uuritavate seisulainete kaks väikseimat sagedust, mis antud kvartsplaadis võivad eksisteerida? [1,2 punkti]

*Piesoelektriline efekt on kvartskristalli spetsiifiline omadus. Kristalli kokkusurumine või venitus põhjustab elektrilise pingete tekke kristalli vastastahkude vahel ja vastupidi: kristallile rakendatud väline pinge põhjustab kristalli pikinemise või kokkutõmbumise sõltuvalt pingepolaarsusest. Mehhaanilised ja elektrilised võnkumised kvartskristallis on seega omavahel seotud ja neid saab panna kogu kristalli ulatuses resoneeruma. Olgu juhul, kui kvartsplaadile mõjub  $z$ -telje sihis elektrivälja  $E$ , laengute pindtihedused*

ülemisel ja alumisel elektroodil vastavalt  $-\sigma$  ja  $+\sigma$ . Tähistagu  $S$  ja  $T$  vastavalt plaadi  $x$ -telje sihilist deformatsiooni ja pinget. Siis on piesoelektriline efekt kvartskristallis kirjeldatav järgmise võrrandsüsteemiga:

$$S = Y^{-1}T + d_p E \quad (3)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E, \quad (4)$$

kus  $Y^{-1} = 1,27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$  on *elastsuskoeffitsient* (st Young'i mooduli pöördväärtus) konstantse elektriväljas ja  $\varepsilon_T = 4,06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$  on *dielektriline läbitavus* konstantse mehhaanilise pingekorral ning  $d_p = 2,25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$  on *piesoelektriline koeffitsient*.

Olgu nüüd lüliti  $K$  joonisel 2d suletud. Elektroodide vahel on siis vahelduvpinge  $V(t) = V_m \cos \omega t$  ja kvartsplaadis sees on homogeenne  $z$ -telje sihiline elektrivälja  $E(t) = V(t)/h$ . Stationaarse režiimi saavutamisel moodustub plaadis selline  $x$ -telje sihiline seisulaine ringsagedusega  $\omega$ , mille puhul plaadiosakesed on  $x$ -sihilises võnkumises.

Kui elektrivälja on homogeenne, siis on seisulaine lainepikkus  $\lambda$  ja sagedus  $f$  plaadis ikkagi seotud võrdusega  $\lambda = u/f$ , kus  $u$  on antudendiselt seosega (1). Aga nagu nähtub võrrandist (3), võrdus  $T = YS$  enam ei kehti, kuigi mehhaanilise pingete ja deformatsiooni definitsioonid on samad. Plaadi otsapinnad on vabad (pinge  $T$  neil on null).

**5)** Arvestades võrrandeid (3) ja (4) saab näidata, et laengu pindtihedus alumisel elektroodil omab  $x$  ja  $t$  funktsioonina kuju

$$\sigma(x, t) = [D_1 \cos k(x - \frac{b}{2}) + D_2]V(t)h^{-1},$$

kus  $k = \omega/u$ . Leida avaldised  $D_1$  ja  $D_2$  jaoks. [2,2 punkti]

**6)** Alumise elektroodi kogulaeng  $Q(t)$  on seotud pingega  $V(t)$  järgmiselt:

$$Q(t) = [1 + \alpha^2 (\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1)]C_0 V(t).$$

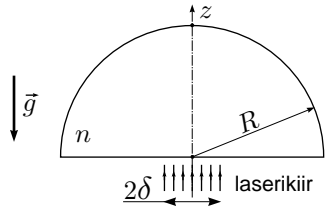
Leida avaldis suuruse  $C_0$  jaoks ja avaldis ning numbriline väärtus suurusele  $\alpha^2$ . [1,4 punkti]

### 3. Mitmesugust

**Osa A:** *neutriino mass ja neutroni lagunemine.* Vaba neutron massiga  $m_n$  laguneb paigalseisust laboratoorses taustsüsteemis kolmeks mitteinterakteeruvaks osakeseks: prootoniks, elektroniks ja antineutriinoks. Prootoni seisumass on  $m_p$ , antineutriino seisumass  $m_v$  on nullist erinev aga palju väiksem elektroni seisumassist  $m_e$ . Valguse kiirust vaakumis tähistab  $c$ . Mõõdetud masside väärtused on järgmised:  $m_n = 939,56563 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_p = 938,27231 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_e = 0,5109907 \text{ MeV}/c^2$ . Järgnevas vaadeldakse kõiki energiad ja kiirusi laboratoorses taustsüsteemis. Olgu  $E$  lagunemisel tekkiva elektroni koguenergia.

1) Leida  $E$  maksimaalne võimalik väärtus  $E_{\max}$  ja antineutriino kiirus  $v_m$  juhul, kui  $E = E_{\max}$ . Mõlemad vastused tuleb anda osakeste seisumasside ja valguse kiiruse kaudu. Teades, et  $m_v < 7,3 \text{ eV}/c^2$ , arvutada  $E_{\max}$  ja suhe  $v_m/c$  kolme tüvinumbri täpsusega. [4,0 punkti]

**Osa B:** *hõljutamine valguse abil.*



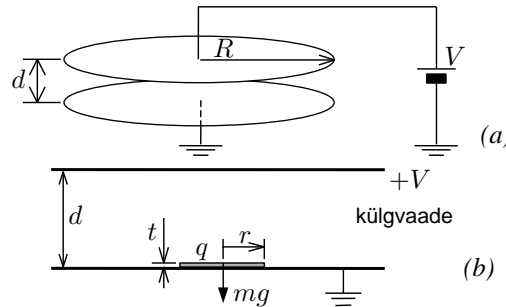
Läbipaistvast klaasist murdumisnäitajaga  $n$  poolkera raadius on  $R$  ja mass  $m$ . Paralleelse monokromaatne ruumiliselt homogeenne laserikiir langeb risti poolkera tasapinnalisele osale selle keskosas (vt joonis). Raskuskiirendus on suunatud vertikaalselt allapoole. Laserikiire ringikujulise ristlõike raadius  $\delta$  on palju väiksem kui  $R$ . Nii klaasist poolkera kui laserikiir on telg-sümmeetrilised  $z$ -telje suhtes. Klaasist poolkera ei neela pealelangevat valgust. Tema pinnad on kaetud läbipaistvast materjalist õhukese kihiga, mille tõttu peegeldumine kiire sisenemisel ja väljumisel poolkerast on tühine. Optiline teepikkus

mittepeegeldavas pinnakattes on samuti tühine. 2) Mitte arvestades suurusega  $(\delta/R)^3$  võrdelisi ja veel kõrgemat järku väikeseid liikmeid, leida laseri võimsus, mis on vajalik klaasist poolkera raskuse tasakaalustamiseks (hõljutamiseks). [4,0 punkti] Vihje:  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ , kui  $\theta$  on palju väiksem ühest.

### XXXV Korea — Pohang (2004)

#### 1. Ping-pongiv takisti

Tasaparalleelse kondensaatori plaadid on ringikujulised raadiusega  $R$  ning paiknevad teineteisest kaugusel  $d$ , kus  $d \ll R$  [joonis (a)]. Alumine plaat on maandatud ning ülemine ühendatud konstantse pingega  $V$ . Seejärel paigutatakse alumisele plaadile (keskele) väike ketas massiga  $m$ , raadiusega  $r$  ( $\ll R, d$ ) ning paksusega  $t$  ( $\ll r$ ) [joonis (b)]. Eeldada, et: plaatide vaheline ruum on vaakum dielektrilise läbitavusega  $\epsilon_0$ ; plaadid ja ketas on valmistatud ideaalsest juhust; elektrostaatiliste ääreefektidega pole vaja arvestada. Vooluringi induktiivsust ja relativistlikke efekte pole vaja arvestada. Elektriliste kujutiste mõju kettakese liikumisel mitte arvestada.



1) [1,2 punkti] Arvutada kaugusel  $d$  asuvate plaatide vaheline elektrostaatiline jõud  $F_p$  enne väikese ketta lisamist [joonis (a)].

2) [0,8 punkti] Kui kettake asetatakse alumisele plaadile [joonis (b)], siis temale kogunev laeng  $q$  sõltub pingest  $V$  vastavalt seadusele  $q = \chi V$ . Avaldada tegur  $\chi$  suuruste  $r, d$  ja  $\epsilon_0$  kaudu.

3) [0,5 punkti] Plaadid paiknevad risti homo-

geense gravitatsioonivälja vektoriga  $g$ . Algselt paigal seisva ketta plaadilt kergitamiseks on tarvis suurendada pinget üle lävipinge  $V_{\text{th}}$ . Avaldada  $V_{\text{th}}$  suuruste  $m, g, d$  ja  $\chi$  kaudu.

4) [2,3 punkti] Kui  $V > V_{\text{th}}$ , hakkab ketas plaatide vahel üles-alla liikuma. (Eeldada, et ketas liigub vaid vertikaalsuunas ilma loperdamiseta.) Ketta ja plaadi vaheline pörge on mitteelastne; seejuures on suhe  $\eta \equiv v_{\text{after}}/v_{\text{before}}$  konstantne,  $V_{\text{before}}$  ja  $V_{\text{after}}$  tähistavad ketta kiirusi vahetult enne ja pärast pörget. Kondensaatori plaadid on jäigalt fikseeritud. Ketta pörkejärgsed kiirused (alumiselt plaadilt) hakkavad koonduma stabiliseerunud väärtuseni  $v_s$ , mille sõltuvus pingest  $V$  omab kuju  $v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$ . Avaldada tegurid  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruste  $m, g, \chi, d$  ja  $\eta$  kaudu. Eeldada, et pörke hetkel puudutavad kõik ketta pinnapunktid plaati ühtlaselt ja üheaegselt, nii et igal pörkel toimub hetkeliselt täielik laengu vahetus.

5) [2,2 punkti] Eeldagem, et ketta pörkejärgsed kiirused on saavutanud stabiliseerunud väärtuse ning et  $qV \gg mgd$ . Siis avaldub kondensaatori ühelt plaadilt teiele voolava elektrivoolu (üle aja) keskmine tugevus kujul  $I = \gamma V^2$ . Avaldada koefitsient  $\gamma$  suuruste  $m, \chi, d$  ja  $\eta$  kaudu.

6) [3 punkti] Nüüd hakatakse pinget  $V$  väga aeglaselt vähendama; teatud kriitilise pingeni  $V_c$  jõudes lakkab laengute vool plaadilt plaadile. Leida  $V_c$  ja sellele vastav voolutugevus  $I_c$  suuruste  $m, g, \chi, d$  ja  $\eta$  kaudu. Võrreldes kriitilist pinget  $V_c$  punktis 3 leitud ülestõusmise lävipingega  $V_{\text{th}}$ , teha hinnanguline  $I - V$  graafik, kui esmalt suurendatakse pinget väärtuselt väärtuseni  $3V_{\text{th}}$  ning seejärel vähendatakse nullini.

#### 2. Tõusev õhupall

Kummist õhupall, mis on täidetud heeliumiga, tõuseb üles taevasse, kus rõhk ja temperatuur kahanevad kõrguse kasvades. Edaspidi eeldagem, et õhupall jääb alati sfäärikujuliseks sõltumata koormisest ja et koormise ruumala on tühiselt väike. Samuti eeldada, et heeliumi tempera-

tuur õhupalli sees on alati võrdne välisõhu temperatuuriga. Kõiki gaase vaadelda ideaalsetena. Gaasi univeraalkonstant on  $R = 8,31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$  ning heeliumi ja õhu molaarmassid on vastavalt  $M_H = 4,00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  ja  $M_A = 28,9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ . Gravitatsioonikiirendus on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

1) [1,5 punkti] Olgu välise õhu rõhk  $P$  ja temperatuur  $T$ . Palli pinna pingete tõttu on rõhk õhupalli sees alati kõrgem välisest rõhust. Õhupallis on  $n$  mooli heeliumi ning rõhk  $P + \Delta P$ . Leida õhupallile mõjuv üleslükkejõud  $F_B$  sõltuvalt suurustest  $P$  ja  $\Delta P$ .

2) [2 punkti] Ühel suvepäeval Koreas oli õhutemperatuur  $T$  sõltuvalt kõrgusest  $z$  (mõõdetuna merepinnast)  $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ , kus  $z_0 = 49 \text{ km}$  ja  $T_0 = 303 \text{ K}$ . Valem kehtib piirkonnas  $0 < z < 15 \text{ km}$ . Õhurõhk ja -tihedus merepinna olid vastavalt  $P_0 = 1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$  ja  $\rho_0 = 1,16 \text{ kg/m}^3$ . Selgub, et antud kõrgusvahemiku jaoks kehtib seos  $P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta$ .

Avaldage astmenäitaja  $\eta$  suuruste  $z_0, \rho_0, P_0$  ja  $g$  kaudu ning leidke selle numbriline väärtus kahe tüvenumbri täpsusega. Eeldada, et gravitatsiooniline kiirendus on kõrgusest sõltumatu konstant.

[Osa B] Kui sfäärikujulist kummist õhupalli (mille raadius venitamata olekus on  $r_0$ ) pumbata suuremaks, raadiuseni  $r$  ( $\geq r_0$ ), siis omandab palli kest venitamise tõttu teatava (potentsiaalset) elastsusenergia. Lihtsustatud õhupallimudeli põhjal on võimalik avaldada elastsusenergia õhutemperatuuri  $T$  kaudu järgmisel kujul (mida võite oma arvutustes kasutada):

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3), \quad (1)$$

kus täispuhumistegur  $\lambda \equiv r/r_0$  ( $\geq 1$ ) ja kummi omadustest sõltuva konstandi  $\kappa$  ühikuks on  $\text{mol/m}^2$ .

3) [2 punkti] Avaldada ülerõhk  $\Delta P$  võrrandis (1) sisalduvate parameetrite kaudu ning skitseerida graafik funtsioonina tegurist  $\lambda = r/r_0$ .



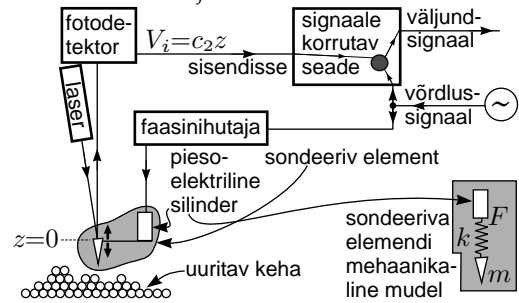
4) [1,5 punkti] Konstandi  $\kappa$  väärtuse on võimalik määrata palli pumpamiseks kulunud gaasi hulga järgi.  $T_0 = 303\text{ K}$  ja  $P_0 = 1,0\text{ atm}$  juures mittevenitatud ( $\lambda = 1$ ) õhupall sisaldab  $n_0 = 12,5$  mooli heeliumi. On tarvis  $n = 3,6 = 45$  mooli gaasi, et pumbata õhupall seisundini  $n = 1,5$  samade  $T_0$  ja  $P_0$  korral. Avaldada suuruste  $n, n_0$  ja  $\lambda$  kaudu ning arvutada kahe tüvenumbri täpsusega õhupalli kesta iseloomustav parameeter  $a$ , mis on defineeritud suhtena  $a = \kappa/\kappa_0$ , kus  $\kappa_0 = r_0 P_0 / 4\pi R T_0$ .

[Osa C] Õhupall valmistatakse ette punktis 4 kirjeldatud viisil (pumbatud kuni olekuni  $\lambda = 1,5$ , kasutades  $n = 3,6 = 45$  mooli heeliumi tingimustel  $T_0 = 303\text{ K}$  ja  $P_0 = 1,0\text{ atm}$ ). Gaasi, õhupalli materjali ja koormise kogumass on  $M_T = 1,12\text{ kg}$ . Õhupall hakkab tõusma merepinnalt.

5) [3 punkti] Õhupall peatub lõpuks kõrgusel  $z_f$ , kus üleslükkejõu taskaalustab raskusjõud. Arvutada  $z_f$  ja täispuhumistegur  $\lambda_f$  selle kõrguse puhul kahe tüvenumbri täpsusega. Eeldada, et palli tõusmise jooksul ei ole ei külgtriivi ega gaasi lekkimist.

### 3. Atomaarne teravikmikroskoop

Atomaarsed teravikmikroskoobid (ATM-id) on võimsad vahendid nanoteaduses. ATM-i sondeeriva elemendi liikumist on võimalik kindlaks teha fotodetektoriga, jälgides peegeldunud laserkiirt (joonis). Sondeeriv element saab liikuda vaid verikaalselt ja selle nihet  $z$  funktsioonina



ajast  $t$  saab kirjeldada võrrandiga:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (2)$$

kus  $m$  on sondeeriva elemendi mass,  $k = m\omega_0^2$  on sondeeriva elemendi vedrukonstant,  $b$  on väike sumbumiskoeffitsient, mis rahuldab tingimust  $\omega_0 \gg b/m > 0$  ja  $F$  on piesoelektrikust silindri tekitatud väline jõud.

1) [1,5 punkti] Kui  $F = F_0 \sin \omega t$ , siis võrrandit (1) rahuldab lahend  $z(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$ , kus  $A > 0$  ja  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Leida avaldis amplituudi  $A$  ja suuruse  $\tan \varphi$  jaoks sõltuvalt suurustest  $F_0, m, \omega, \omega_0$  ja  $b$ . Leida amplituud  $A$  ja faas  $\varphi$  resonantsi sagedusel  $\omega = \omega_0$ .

2) [1 punkt] Signaale korrutav seade (joonisel) korrutab sisendsignaali läbi võrdlussignaali  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  ning annab välja korrutamisel saadud signaali alaliskomponendi. Eeldada, et sisendsignaali on kujul  $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \varphi_i)$ . Siinjuures on  $V_{R0}, V_{i0}, \omega_i$  ja  $\varphi_i$  kõik positiivsed etteantud konstandid. Leida, millist tingimust peab rahuldama sisendsignaali ringsagedus  $\omega (> 0)$ , et väljundiks oleks nullist erinev signaal. Leida avaldis alalisvoolulise väljundsignaali jaoks sellel sagedusel.

3) [1,5 punkti] Läbides faasinihutaja, muutub võrdlussignaali pinge  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  pingeks  $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ . Kui pinge  $V'_R$  rakendada piesoelektrilisele silindrile, siis avaldab see sondeerivale elemendile jõudu  $F = c_1 V'_R$ . Edasi teisendab fotodetektor sondeeriva elemendi nihke  $z$  pingeks  $V_i = c_2 z$ . Suurused  $c_1$  ja  $c_2$  on (ette antud) konstandid. Leida avaldis (väljundisse jõudva) alaliskomponendi pinge jaoks eeldusel, et  $\omega = \omega_0$ .

4) [2 punkti] Sondeeriva elemendi massi väike muut  $\Delta m$  põhjustab resonantssageduse muutuse  $\Delta \omega_0$  võrra. Kui võrdlussignaali sageduseks jääb esialgne resonantssagedus  $\omega_0$ , siis nihkub võnkumisfaas  $\varphi$  suuruse  $\Delta \varphi$  võrra. Leida niisugune massi muut  $\Delta m$ , mis vastab faasinihkele  $\Delta \varphi = \pi/1800$  (tüüpiline täpsus faasi mõõt-

mistel). Sondeeriva elemendi füüsikalised parameetrid on  $m = 1,0 \times 10^{-12}\text{ kg}$ ,  $k = 1,0\text{ N/m}$  ja  $b/m = 1,0 \times 10^3\text{ s}^{-1}$ . Kasutada lähendusi  $(1+x)^a \approx 1+ax$  ja  $\tan(\frac{\pi}{2} + x) \approx -1/x$ , kui  $|x| \ll 1$ .

[Osa B] Edaspidi vaatleme juhtu, kus lisaks piesoelektrikust silindri tekitatud jõule (mida on vaadeldud osas A) mõjub sondeerivale elemendile ka uuritava keha poolt tekitatud jõud (vt joonis).

5) [1,5 punkti] Eeldades, et lisandunud jõud  $f(h)$  sõltub vaid vertikaalkaugusest  $h$  sondeeriva elemendi ja proovi pinna vahel, on võimalik leida tasakaalupunkt  $h_0$ . Positsiooni  $h = h_0$  lähedal  $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ , kus  $c_3$  on  $h$ -st sõltumatu konstant. Avaldada uus resonantssagedus  $\omega'_0$  suuruste  $\omega_0, m$  ja  $c_3$  kaudu.

6) [2,5 punkti] Pinda skaneerides liigutatakse proovi (uuritavat keha) horisontaalselt. Sondeeriv element, mille ots kannab laengut  $Q = 6e$ , kohtab ruumis lokaliseeritud (paigalpäisvat) elektroni laenguga  $q = e$  mingil kaugusel proovi pinna all. Skaneerides pinda elektroni läheduses, on maksimaalne resonantssageduse muutus  $\Delta \omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$ ; see on palju väiksem kui  $\omega_0$ . Avalda kaugus  $d_0$  sondeerivast elemendist elektronini siis, kui täheldatakse maksimaalset sagedusnihet  $\Delta \omega_0$ , suuruste  $m, q, Q, \omega_0, \Delta \omega_0$  ja Coulombi konstandi  $k_e$  kaudu. Arvutada nanomeetrites ( $1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$ ) nihke  $\Delta \omega_0 = 20\text{ s}^{-1}$  jaoks. Sondeeriva elemendi füüsikalised parameetrid on  $m = 1,0 \times 10^{-12}\text{ kg}$  ja  $k = 1,0\text{ N/m}$ . Polariseerimisefektidega mitte arvestada (nii sondeeriva elemendi tipu kui ka elektroni juures).  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$  ja  $e = -1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$ .

### XXXVI Hispaania — Salamanca (2005)

#### 1. Õnnetus tehiskaaslasega

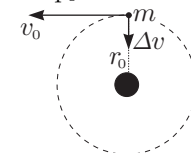
Tavalisim tehiskaaslase orbiidi muutmise manööver seisneb tema kiiruse muutmises liiku-

mise sihis, näiteks kiirendamises tõusmiseks kõrgemale orbiidile või aeglustamises, et alustada sisenemist atmosfääri. Selles ülesandes tegeme me orbiidi muutustega, mis leiavad aset siis, kui reaktiivmootori tõuge leiab aset orbiidi raadiuse sihis.

Numbrilisteks arvutusteks kasutage järgmisi väärtusi: Maa raadius  $R_T = 6,37 \cdot 10^6\text{ m}$ , raskuskiirendus Maa pinnal  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ , päeva pikkus  $T_0 = 24,0\text{ h}$ .

Vaatleme geostatsionaarset sidesatelliiti (tema tiirlemisperiood on  $T_0$ ), mille mass on  $m$  ja mis tiirleb ekvaatori tasandis asuval ringorbiidil raadiusega  $r_0$ . Taolistel satelliitidel on nn "apogee mootor", mis annab lõpporbiidile jõudmiseks vajaliku tangentsiaalse (kiiruse sihilise) tõuke.

- 1) Arvutage  $r_0$  numbriline väärtus [0,3 p].
- 2) Avaldage kiirus  $v_0$  suuruste  $g, R_T$  ja  $r_0$  kaudu. Arvutage selle numbriline väärtus [0,4 p].
- 3) Avaldage tehiskaaslase impulssmoment  $L_0$  ja mehhaaniline koguenergia suuruste  $v_0, m, g$  ja  $R_T$  kaudu [0,4+0,4 p].



Kui satelliit oli viidud kirjeldatud geostatsionaarsele orbiidile (vt joonis), nihutatud soovitud maapinnapunkti kohale ja valmis täitma oma funktsioone, käivitati maapealse kontrollkeskuse eksituse tõttu uuesti apogee mootor. Tehiskaaslasele antud reaktiivtõuge juhtus olema suunatud Maa poole, st orbiidi raadiuse sihis, ja vaatamata juhtimiskeskuse kiirele reaktsioonile, kes mootori ruttu välja lülitas, omandas satelliit soovimatu kiiruskomponendi  $\Delta v$ ; selle suhtelist tugevust iseloomustab tõukeparameeter  $\beta = \Delta v/v_0$ . Mootori töötamise aeg on alati palju lühem kõikidest orbitaalliikumist iseloomustavatest aegadest, seega võib tema toimet lugeda hetkeliseks.

[Osa B] Olgu  $\beta < 1$ .

4) Määrake uue orbiidi parameetrid *semi-latus-rectum*  $l$  ja ekstsentrilisus  $\varepsilon$  (nende definitsioonid jms on antud allpool, peatükis “Näpunäide”), avaldades vastused suuruste  $r_0$  ja  $\beta$  kaudu [0,4+0,5 p].

5) Leidke nurk  $\alpha$  uue orbiidi pikema (pool)telje ja tehiskaaslase raadiusvektori vahel punktis, kus toimus õnnetu mootorikäivitus [1,0 p].

6) Avaldage uue orbiidi perigee (vähim kaugus Maa keskpunktini)  $r_{\min}$  ja apogee (suurim kaugus Maa keskpunktini)  $r_{\max}$  suuruste  $r_0$  ja  $\beta$  kaudu ning arvutage nende numbrilised väärtused  $\beta = \frac{1}{4}$  jaoks [1,2 p].

7) Avaldage tehiskaaslase tiirlemisperiood  $T$  uuel orbiidil suuruste  $T_0$  ja  $\beta$  kaudu ning arvutage selle numbriline väärtus  $\beta = \frac{1}{4}$  korral [0,7 p].

[Osa C]

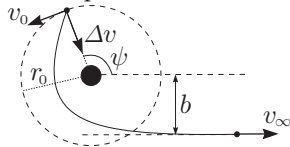
8) Leidke tõukeparameetri  $\beta$  minimaalne väärtus  $\beta_{\text{esc}}$ , mille korral satelliit pääseb Maa gravitatsiooniväljast [0,5 p].

9) Määrake tehiskaaslase vähim kaugus  $r'_{\min}$  Maa keskpunktist taolisel paotrajektoril, avaldades see suuruse  $r_0$  kaudu [1,0 p].

[Osa D] Olgu  $\beta > \beta_{\text{esc}}$ .

10) Leidke tehiskaaslase jääkkiirus lõpmatuses,  $v_{\infty}$ , avaldades see suuruste  $v_0$  ja  $\beta$  kaudu [1,0 p].

11) Avaldage “põrkeparameeter”  $b$  tehiskaaslase asümptootilise paosihi jaoks (vt joon) suuruste  $r_0$  ja  $\beta$  kaudu [1,0 p].



12) Avaldage asümptootilist paosihti iseloomustav nurk  $\phi$  suuruse  $\beta$  kaudu. Arvutage selle numbriline väärtus  $\beta = \frac{2}{3}\beta_{\text{esc}}$  korral [1,2 p].

**Näpunäide.** Kaugusest pöördruutsõltuvusega tsentraalsete jõudude mõjul liikuvate kehade trajektorid on ellipsid, paraboolid või hüperboolid.

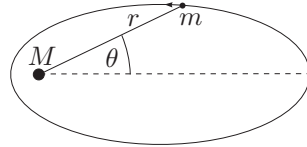
Lähenduses  $m \ll M$  asub tõmbav mass  $M$  ühes fookuses. Valides koordinaatide alguspunktiks selle fookuse, saab kõigi nende kõverate võrrandi polaarkoordinaatides kirjutada üldkuul (vt joon)

$$r(\theta) = l/(1 - \varepsilon \cos \theta),$$

kus  $l$  on positiivne konstant, nn *semi-latus-rectum* ja  $\varepsilon$ . on kõvera ekstsentrilisus. Liikumiskonstantide kaudu avalduvad need suurused järgmiselt:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \text{ ja } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}},$$

kus  $G$  on gravitatsioonikonstant,  $L$  on orbiidil liikuva keha impulssmoment koordinaatide alguspunkti suhtes ja  $E$  on ta mehaaniline energia (potentsiaalse energia nullpunkt on lõpmatuses).



Võimalikud on järgmised situatsioonid:

- Kui  $0 \leq \varepsilon < 1$ , siis kõver on ellips ( $\varepsilon = 0$  puhul ring).
- Kui  $\varepsilon = 1$ , siis kõver on parabool.
- Kui  $\varepsilon > 1$ , siis kõver on hüperbool.

## 2. Elektriliste suuruste absoluutmõõtmised

XIX sajandi teaduslikud ja tehnilised saavutused sünnitasid terava vajaduse elektriliste suuruste üldtunnustatud standardite järele. Arvati, et uued absoluutsed ühikud peaksid põhinema vaid pikkuse, massi ja aja standarditel, mis viidi sisse pärast Prantsuse revolutsiooni. Aastatel 1861 kuni 1912 toimusid intensiivsed eksperimentaaluuringud taoliste standardite väljatöötamiseks. Järgnevas käsitleme kolme taolist eksperimenti. Kõikide hindepallid on näidatud sulgudes iga küsimuse alguses.

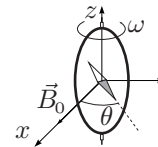
**Oomi määramine (Kelvin).** Ringikujuline suletud kontuuriga pool raadiusega  $a$  sisaldab  $N$  keerdu kogutakistusega  $R$ . Pool pöör-

leb konstantse nurkkiirusega  $\omega$  vertikaalse diametri ümber horisontaalses magnetväljas induksiooniga  $\vec{B}_0 = B_0\vec{i}$ , kus  $\vec{i}$  on  $x$ -telje suunaline ühikvektor.

1) Leidke poolis indutseeritud elektromotoorse jõu  $\mathcal{E}$  hetkväärtus ja keskmine võimsus  $\langle P \rangle$ , mis on vajalik hoidmaks pooli pöörlemas. Pooli eneseinduktiivsusega mitte arvestada. [0,5+1,0 p]

*Märkus:* Suuruse  $X$  keskvaartus perioodilises süsteemis perioodiga  $T$  on antud integraaliga  $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ . Mõned järgmistest integraalidest võivad olla kasulikud:  $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0$ ,  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$ , ja hiljem  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ .

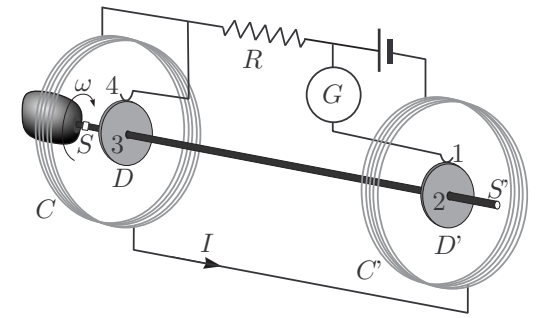
Väike magnetnõel on asetatud pooli tsentrisse, nagu näidatud joonisel. Nõel saab vabalt pöörelda  $Z$ -telje ümber horisontaalses tasandis, aga ta ei suuda järgida pooli kiiret pöörlemist.



2) Kui magnetnõel on saavutanud tasakaalulise asendi, siis tema ja vektori  $\vec{B}_0$  vahele moodustub väike nurk  $\theta$ . Avaldage takistus  $R$  selle nurga ja teiste katseseadme parameetrite kaudu [2,0 p].

Lord Kelvin kasutas seda meetodit 1860tel aastatel oomi standardina. Et mitte kasutada pöörlevat pooli, leiutas Lorentz alternatiivse meetodi, mida kasutasid Lord Rayleigh ja Ms. Sidgwick ja mida me käsitleme järgmises osas.

**Oomi määramine (Rayleigh, Sidgwick).** Katseseade on kujutatud joonisel. See koosneb kahest identsest metallkettast  $D$  ja  $D'$  raadiusega  $b$ , mis on monteeritud elektrijuhist teljele  $SS'$ . Mootor paneb telje koos ketastega pöörlema nurkkiirusega  $\omega$ , mida saab muuta vastavalt vajadusele. Kettad asuvad kahe identse pooli  $C$  ja  $C'$  keskpunktides (kumbki pool on raadiusega  $a$  ja sisaldab  $N$  keerdu). Poolid on ühendatud nii, et vool läbib ühte päri- ja teist vastupäeva. Seadet kasutatakse  $R$  määramiseks.



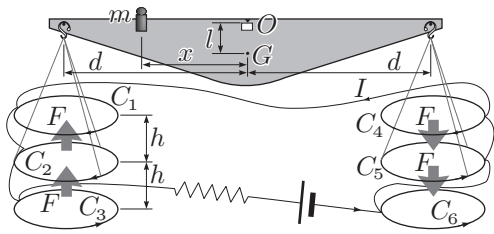
3) Vool  $I$  tekitab pooli  $C$  ja  $C'$  läbides magnetvälja, mille võib lugeda kummagi ketta  $D$  ja  $D'$  piirkonnas homogeenseks (sest  $a \gg b$ ), kusjuures induksiooni  $B$  võib võtta võrdseks magnetilise induksiooniga ketaste tsentris. Arvutage elektromotoorse jõud  $\mathcal{E}$ , mis indutseeritakse ketaste servade 1 ja 4 vahel, eeldades, et poolide vahekaugus on palju suurem poolide läbimõõdust. [2,0 p]

Kettad on ühendatud vooluringi oma servade 1 ja 4 kaudu harjaskontaktidega. Galvanomeeter  $G$  mõõdab voolu ahelas 1-2-3-4.

4) Takistuse  $R$  määramiseks seatakse süsteemi parameetrid selliseks, et vool läbi galvanomeetri  $G$  on null. Avaldage  $R$  katseseadme parameetrite kaudu. [0,5 p]

## Ampri määramine

Jõud kahe juhi vahel, mis on põhjustatud neid läbivast voolust, annab võimaluse voolutugevuse absoluutseks mõõtmiseks. “Voolukaal”, mille konstrueeris Lord Kelvin 1882 aastal, kasutab seda meetodit. Katseseade sisaldab kuut ühekeerulist pooli  $C_1 \dots C_6$ , mille raadius on  $a$  ja mis on ühendatud järjestikku. Nagu näidatud joonisel, asetsevad liikumatud poolid  $C_1, C_3, C_4$  ja  $C_6$  kahes tasandis, mille vahekaugus  $2h$  on väike. Poolid  $C_2$  ja  $C_5$  on kinnitatud kangkaalu õlgade (pikkus  $d$ ) külge ja on tasakaaluolekus võrdsetel kaugustel tasanditest, milles asuvad liikumatud poolid.



Vool  $I$  voolab läbi erinevate poolide niivisi, et poolile  $C_2$  mõjuv magnetjõud on suunatud üles, samal ajal kui poolile  $C_5$  mõjuv jõud on suunatud all. Kui kontuuris voolab vool  $I$ , siis tuleb kaalude tasakaalustamiseks asetada kaalu ühele õlale, kaugusele  $x$  toetuspunkti  $O$ , koormis massiga  $m$ .

5) Arvutage poolile  $C_2$  pooli  $C_1$  poolt avaldatav magnetiline jõud  $F$ . Võite lugeda, et ühikulisele juhi pikkusele mõjuv jõud on samasugune, kui kahe pika paralleelse vastava-kauguselise sirgvoolu ühikulisele pikkusele mõjuv jõud. [1,0 p]

6) Voolu  $I$  mõõdetakse tasakaalus olevate kaalude korral. Esitage voolu  $I$  suurus katseseadme parameetrite kaudu. Katseseadme mõõtmel on sellised, et pole vaja arvestada vasakul ja paremal asetsevate poolide vastastikust mõju. [1,0 p]

Olgu  $M$  kaalude mass (ilma koormise  $m$  ja rippuvate osade massita),  $G$  — massikeskme asukoht ja  $l$  — kaugus  $OG$ .

7) Kaalude tasakaal on stabiilne poolide  $C_2$  ja  $C_5$  väikeste vertikaalhävete ( $\delta z$  ja  $-\delta z$ , vastavalt) suhtes. Leidke maksimaalne  $\delta z$  väärtus  $\delta z_{\max}$ , mille korral kaalud pärast vabastamist jõuavad tagasi tasakaalu. [2,0 p] Eeldage, et poolide tsentrid jäävad ligikaudu samale vertikaaljoonele. Kasutage lähendusi  $\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2$  või  $\frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$  kui  $\beta \ll 1$ , ja  $\sin \theta \approx \tan \theta$  väikese  $\theta$  korral.

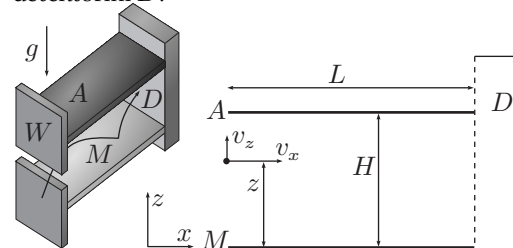
### 3. Neutronid gravitatsiooniväljas

Tavapärases klassikalises maailmas on maapinnalt pörkuv ideaalselt elastne pall näide "igiliikumisest". Pall on löksustatud: ta ei saa minna maapinnast allpoole ega kõrgemale oma lennutee pöördepunktidest. Ta jääb sellisesse liikumise

olekusse igaveseks, pöördudes ikka ja jälle allapoole tagasi oma trajektoori kõrgematest punktidest ja pörkudes maapinnalt. Vaid õhutakistus ja mitteelastsed pörked võivad sellise liikumise summutada — edasises neid ei arvestata.

Rühm teadlasi Laue-Langevini Instituudist Grenoblis teatas 2002 aastal katsetulemustest neutronite käitumise kohta Maa gravitatsiooniväljas [V. V. Nesvizhevsky et al, Nature, 415 (2002) 297]. Katses langesid (joonisel) paremale liikuvad neutronid Maa raskusväljas neutronite peegli toimiva kristalli horisontaalse pinna poole, kust nad pörkusid elastselt ikka ja jälle tagasi oma esialgse kõrguseni.

Eksperimentiseade on skitseeritud joonisel. See koosneb avast  $W$ , neutronite peeglist  $M$  (kõrgusel  $z = 0$ ), neutronite neelajast  $A$  (kõrgusel  $z = H$  ja pikkusega  $L$ ) ja neutronite detektorist  $D$ . Neutronid liiguvad kanalis plaatide  $A$  ja  $M$  vahel; kiiruse horisontaalne komponent  $v_x$  on seejuures konstantne. Kõik neutronid, mis jõuavad pinnani  $A$  neelatakse ja kõrvaldatakse sellega eksperimendist. Neutronid, mis jõuavad pinnani  $M$ , pörkuvad sellelt elastselt. Detektor  $D$  mõõdab neutronite voo intensiivsust  $N(H)$ , st neutronite koguarvu, mis jõuavad ajaühikus detektorini  $D$ .



Erinevate vertikaalkiirustega  $v_z$  neutronid sisenavad kanalis;  $v_z$  väärtus on jaotunud ühtlaselt üle laia (positiivseid ja negatiivseid väärtust katva) vahemiku. Olles kanalis, liiguvad neutronid alloleva peegli ja ülalasuva neelaja vahel.

1) Arvutage klassikalise mehaanika abil vertikaalkiiruse  $v_z(z)$  selliste väärtuste vahemik, mille korral kõrgusel  $z$  kanalis sisenavad neutro-

nid jõuavad detektorini  $D$ . Eeldage, et  $L$  on palju suurem kõigist ülesandes esinevatest pikkustest. [1,5 p]

2) Arvutage klassikaliselt kanali minimaalne pikkus  $L_c$ , mille korral neelatakse (sõltumata sisenemiskõrgusest  $z$ ) kõik need neutronid, mille vertikaalkiirus jääb väljapoole eelmises punktis leitud vahemikku. Kasutage väärtusi  $v_x = 10 \text{ ms}^{-1}$  ja  $H = 50 \text{ } \mu\text{m}$ . [1,5 p]

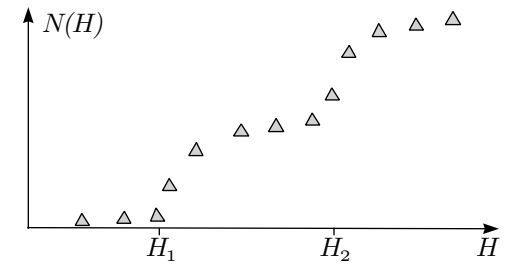
On ootuspärane, et detektor  $D$  poolt mõõdetav neutronite voo intensiivsus  $N(H)$  sõltub sujuvalt kõrgusest  $H$ .

3) Arvutage klassikaline intensiivsus  $N_c(H)$ , eeldades, et kõikvõimalikud vertikaalkiiruse  $v_z$  ja algkõrguse  $z$  väärtused, millega neutronid sisenavad kanalis on võrdtõenäolised. Andke vastus jaotustiheduse  $\rho$  abil: see on kanalis ajaühikus sisenevate selliste neutronite arv, mille vertikaalkiirus  $v_z$  jääb ühikulisesse kiirusvahemikku ja sisenemiskõrgus  $z$  jääb ühikulisesse kõrgusvahemikku. [2,5 p]

Grenoble'i uurimiserühma poolt saadud tulemused lähevad lahku probleemi eelneval klassikalisel käsitlusel saadud ennustustest, näidates selle asemel, et  $N(H)$  kasvab järsult, kui  $H$  ületab teatud kriitilisi väärtusi,  $H_1, H_2 \dots$  (vt joonist). Teisisõnu, eksperiment näitas, et peegilt pörkuvate neutronite vertikaalne liikumine on kvantiseeritud. Kasutades sama terminoloogiat, mida Bohr ja Sommerfeld kasutasid vesiniku aatomi energianivoode saamiseks, võib selle asjaolu sõnastada järgmiselt: "Neutronite mõju  $S$  vertikaalsihis on Plancki konstandi  $h$  täisarvkorndne". Mõju  $S$  on antud valemiga

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

(Bohr-Sommerfeldi kvanttingimus), kus  $p_z$  on klassikaliselt arvatud impulsi vertikaalne komponent ja integraal on võetud üle kogu pörketsükli. Ainult selliste  $S$  väärtustega neutronid saavad kanalis levida.



4) Arvutage Bohr-Sommerfeldi kvanttingimust rahuldavate (klassikaliste) trajektoorie maksimumkõrgused  $H_n$  ja neile vastavad vertikaalliikumisega seotud energianivoode  $E_n$ . Esitage numbrilised väärtused  $H_1$  (ühikutes  $\mu\text{m}$ ) ja  $E_1$  (ühikutes eV) jaoks. [2,5 p]

Neutronite jaotustihedus  $\rho$  on kanali alguses ühtlane, aga muutub astmeliseks nende levikul pikas kanalis detektorini  $D$  (vt joonis). Vaadeldes hetkeks hästi pikka kanalit, kusjuures  $H < H_2$ . Klassikaliselt läbivad taolise kanali kõik neutronid energiatega vahemikus, mida käsitleti punktis 1; kvantmehaaniliselt saavad seda teha vaid neutronid energiaga  $E_1$ . Heisenbergi ajaenergia määramatuse printsiibist tulenevalt selgub, et sellise kvalitatiiivse muutuse jälgimiseks peab lennuaeg kanalis olema piisavalt pikk. Tõepoolest, vertikaalliikumise energia määramatus muutub oluliseks, kui kanali pikkus on väike. See nähtus põhjustab energianivoode laienemist.

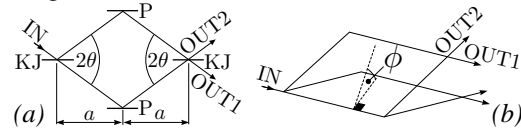
5) Hinnake minimaalset lennuaega kanalis  $t_q$  ja kanali minimaalset pikkust  $L_q$ , mis on vajalikud selleks, et jälgida detektor  $D$  poolt mõõdetava neutronite voo esimest järsku intensiivsuse kasvu (joonisel). Võtke  $v_x = 10 \text{ ms}^{-1}$ . [2,0 p]

Arvandmed: Plancki konstant  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ; Valguse kiirus vaakumis  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ; elementaarlaeng  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; neutroni mass  $M = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ; raskuskiirendus maapinnal  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Vajadusel kasutage valemit:  $\int \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$ .



I. Gravitatsioon neutronite interferomeetris

**Füüsikaline situatsioon.** Selles ülesandes vaatleme kuulsat Collela, Overhauseri ja Werner neutronite interferomeetria katset, lihtsustame aga reaalselt katseseadme skeemi seevõrra, et eeldame, et kiirejagajad ja peeglid on ideaalsed. Katses uuritakse raskusjõu mõju neutronite de Broglie lainetele.



Optilisele interferomeetrile sarnaneva katseseadme skeem on lihtsustatult esitatud Joonisel 1a. Neutronid sisenevad interferomeetrise sisendkanali kaudu ja võivad liikuda kahte kujutatud teed mööda. Neutroneid saab detekteerida kahes väljundkanalis, 1 ja 2. Neutronite trajektoorid interferomeetris piiravad rombikujulist ala; alljärgnevas võite arvestada, et selle rombi tüüpiline pindala on mõni cm<sup>2</sup>.

Neutronite de Broglie lainete tüüpiliseks lainepikkuseks võite alljärgnevas lugeda 10<sup>-10</sup> m; need lained interfereeruvad interferomeetris selliselt, et siis, kui interferomeetri tasand on horisontaalne, väljuvad kõik neutronid kanali 1 kaudu. Kui aga interferomeetrit pöörata siseneva neutroniire kui telje ümber nurga phi võrra (Joonis 1b), võib täheldada nurgast sõltuvat neutronite ümberjaotumist kanalite 1 ja 2 vahel.

**Geomeetria.** phi = 0° korral on interferomeetri tasand horisontaalne, phi = 90° korral vertikaalne, väljundkanalid asuvad siis kõrgemal pöördeteljest.

1) (1,0) Kui suur on rombikujulise ala pindala A, mida piiravad kaks neutronite trajektoori interferomeetris?

2) (1,0) Milline on väljundkanali 1 kõrgus H sellest horisontaaltasandist, milles asub pöörde-

telg (sisendkiir)?

Esitage A ja H suuruste a, theta ja phi kaudu.

**Optiline teepikkus.** Selles ülesandes on optiline teepikkus N<sub>opt</sub> (dimensioonita suurus) defineeritud kui geomeetrilise teepikkuse ja lainepikkuse lambda suhe. Kui lambda muutub piki optilist teed, leitakse optiline teepikkus integreerides suurus lambda<sup>-1</sup> mööda optilist teed.

3) (3,0) Kui suur on optiliste teepikkuste vahe delta N<sub>opt</sub> interferomeetris kahe väljundisse 1 viiva teekonna vahel siis, kui interferomeetrit on pööratud nurga phi võrra? Esitage oma vastus suuruste a, theta ja phi ning neutroni massi M, sisenevate neutronite de Broglie lainepikkuse lambda<sub>0</sub>, raskuskiirenduse g ja Planck'i konstandi h kaudu.

4) (1,0) Tuues sisse ruumalaparameetri

$$V = h^2/gM^2,$$

esitage delta N<sub>opt</sub> ainult suuruste A, V, phi ja lambda<sub>0</sub> kaudu. Leidke V väärtus, kui M = 1,675 · 10<sup>-27</sup> kg, g = 9,800 ms<sup>-2</sup> ja h = 6,626 · 10<sup>-34</sup> Js.

5) (2,0) Kui palju intensiivsuse täistsükleid — kõrgest intensiivsusest madala intensiivsuseni ja tagasi kõrgeni — on jälgitavad väljundkanalis 1, kui phi kasvab väärtusest phi = -90° väärtuseni phi = 90°?

**Eksperimentaalandmed.** Reaalses eksperimendis, kus a = 3,600 cm ja theta = 22,10°, jälgiti 19,00 intensiivsuse täistsükli.

6) (1,0) Kui suur oli lambda<sub>0</sub> selles eksperimendis?

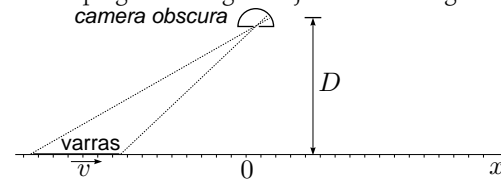
7) (1,0) Teises sama tüüpi eksperimendis, kus kasutati neutroneid lainepikkusega lambda = 0,2000 nm, jälgiti 30,00 intensiivsuse täistsükli. Kui suur oli pindala A?

Vihje: Kui alpha x << 1, võib suuruse (1 + x)<sup>alpha</sup> asendada suurusega 1 + alpha x.

2. Liikuva varda pildistamine

**Füüsikaline situatsioon.** Camera obscura ("nõelaaugukaamera") abil, mille ava ("nõelauk") asub koordinaadi väärtusel x = 0 ja kaugusel D x-teljelt, pildistatakse teljel asuvat varrast: "nõelauk" avatakse väga lühikeseks ajava-

hemikuks, vt joonis. Nii, nagu joonisel näidatud, on x-teljele kantud võrdsete vahemaade tagant märgid, mille kujutiste abil määratakse fotodelt varda näiv pikkus. Paigalpüsinud varda foto põhjal määrati ta pikkuseks L. Järgnevas aga ei ole varras paigal vaid liigub telje sihis kiirusega v.



**Põhiseosed.** Kaameraga tehtud fotol on näha varda lühike lõik koordinaadi väärtusel x̃.

1) (0,6) Milline on selle lõigu tegelik asukoht x sel hetkel, mil foto tehti? Esitage oma vastus suuruste x̃, D, L, v ja valguse kiiruse c = 3,00 · 10<sup>8</sup> ms<sup>-1</sup> kaudu. Kasutage suurusi beta = v/c ja gamma = (1 - beta<sup>2</sup>)<sup>-1/2</sup>, kui need aitavad vastust lihtsamalt esitada.

2) (0,9) Leidke ka vastav pöördseos, st esitage x̃ suuruste x, D, L, v ja c kaudu.

**Märkus:** Tegelik asukoha defineerisime ülal asukohana taustsüsteemis, kus kaamera on paigal.

**Varda näiv pikkus.** Kaamera teeb pildi hetkel, kui varda keskpunkti tegelik asukoht on x<sub>0</sub>.

3) (1,5) Esitage varda näiv pikkus sellel fotol ülaltoodud suuruste kaudu.

4) (1,5) Kuidas varda näiv pikkus muutub ajas (kasvab, kahaneb, alul kasvab ning hiljem kahaneb jne)?

**Sümmeetriline pilt.** Ühel camera obscura tehtud pildil on näha, et varda mõlemad otsad paiknevad kaamera avast sümmeetriliselt võrdse kaugusel.

5) (0,8) Määrake varda näiv pikkus sellel pildil.

6) (1,0) Milline oli varda keskpunkti tegelik asukoht hetkel, kui see pilt tehti?

7) (1,2) Kui kaugel näib pildil varda keskpunkt olevat varda esiosast?

**Väga varased ja väga hilised pildid.** Came-

ra obscura tegi ühe pildi väga vara, kui varras oli veel kaamerast kaugel ja lähenes sellele ning teise väga hilja, kui varras oli juba kaugel ja eemaldus kaamerast. Ühel neist fotodest on varda näiv pikkus 1,00 m, teisel 3,00 m. 8) (0,5) Milline pikkus on näha millisel fotol?

9) (1,0) Määrake kiirus v.

10) (0,6) Määrake varda pikkus L paigalolekus.

11) (0,4) Leidke varda näiv pikkus sümmeetrilisel pildil.

3. Mitmesugust

See ülesanne koosneb viiest sõltumatust osast. Igas neis soovitakse vaid suurusjärguliselt hinnanguid, mitte täpseid arvulisi vastuseid.

**Digikaamera.** Vaatleme digikaamerat ruudukujulise CCD detektorkiibiga, mille külje pikkus on L = 35 mm ja ruudukujuliste pikslite arv N<sub>p</sub> = 5 Mpix (1 Mpix = 106 pikslit). Kaamerale on objektiiv fookuskaugusega f = 38 mm, millele on kantud numbrite järjestus (2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22). Need numbrid vastavad nn F-arvule, mida tähistatakse F# ja mis on määratud kui objektiivi fookuskauguse f ja tema ava (diafragmaerimata osa) läbimõõdu D suhe, F# = f/D.

1) (1,0) Leidke kaamera optikast tingitud, ideaalis saavutatav piirang ruumilisele lahutusele kiibil, delta x<sub>min</sub>. Esitage oma tulemus lainepikkuse lambda ja F-arvu F# kaudu ja leidke vastav parim arvuline väärtus lambda = 500 nm korral.

2) (0,5) Leidke CCD kiibi vajalik pikslite arv N (ühikutes Mpix), mis oleks vajalik sellise parima ruumilise lahutuse ära kasutamiseks.

3) (0,5) Mõnikord püüavad fotograafid pildistada võimalikult väikese objektiivi ava juures. Oletagem, et meil on kaamera, mille pikslite arv N = 16 Mpix ja mille kiibi mõõtmed ning fookuskaugus on sellised, nagu eelpool toodud. Milline F# väärtus tuleks sel juhul valida, et optika ei piiraks seejuures kujutise kvaliteeti?

4) (0,5) Teades, et inimese silma ligikaudne

nurklahutus  $\phi = 2$  arcsec ja et tüüpiline printer trükib lahutusega vähemasti 300 dpi (punkti tolli kohta), milline on minimaalne kaugus  $z$ , millisel võib hoida trükitud lehte, et Te ei näeks veel üksikuid eraldiseisvaid punkte.

**Andmed:** 1 toll = 25,4 mm; 1 arcsec =  $2,91 \cdot 10^{-4}$  rad.

**Kõvakskeedetud muna.** Otse külmikust võetud muna temperatuuril  $T_0 = 4^\circ\text{C}$  asetatakse potti, milles hoitakse vett keevana temperatuuril  $T_1$ .

5) (0,5) Kui suur energia  $U$  on vajalik kerakujulise muna üleni kalgendamiseks?

6) (0,5) Kui suur on soojavoog  $J$  munasse?

7) (0,5) Kui suur on munasse kanduv soojusvõimsus  $P$ ?

8) (0,5) Kui palju kulub aega muna kõvakskeetmiseks?

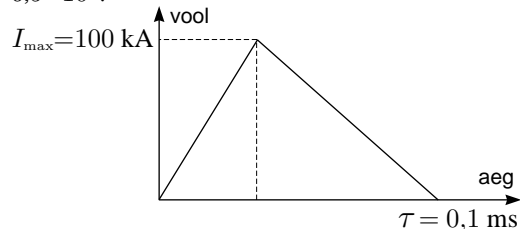
**Vihje.** Võite kasutada *Fourier seadust* lihtsustatud kujul,  $J = \kappa \Delta T / \Delta r$ , kus  $\Delta T$  on temperatuuride erinevus, mis on seotud ülesande karakterse ruumimõõtmega  $\Delta r$ . Soojavoo  $J$  ühikuks on  $\text{Wm}^{-2}$ .

**Andmed:** muna tihedus:  $\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , muna erisoojus:  $C = 4,2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$ , muna raadius:  $R = 2,5 \text{ cm}$  albumiini (munavalge) kalgendumistemperatuur:  $T_c = 65^\circ\text{C}$ , soojusülekanne tegur:  $\kappa = 0,64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$  (loetakse samaks nii vedela, kui ka kalgendunud albumiini korral).

**Välg.** Järgnev on välgu ülilihtsustatud mudel. Välg on põhjustatud staatilise elektrilaengu kogunemisest pilvedes. Selle tulemusena laadub pilve alumine osa harilikult positiivselt ja ülaosa negatiivselt ning maapind pilve all negatiivselt. Kui kaasneva elektrivälja tugevus ületab õhu läbilöögiks vajalik väärtuse, järgneb elektrilahendus — see ongi välg.

Vastake järgnevatele küsimustele, kasutades joonisel toodud lihtsustatud voolukõverat aja funktsioonina ja järgmisi andmeid: kaugus pilve alakihist maani:  $h = 1 \text{ km}$ ; elektrivälja tugevus, millisel toimub läbilöök niiskes õhus:  $E_0 =$

$300 \text{ kV m}^{-1}$ ; keskmine välgulöövide arv Maakeral aastas:  $32 \cdot 10^6$ ; Inimeste koguarv Maakeral:  $6,5 \cdot 10^9$ .



Välgu ajal pilve alakihist maapinnale voolava elektrivoolu lihtsustatud ajaline sõltuvus.

9) (0,5) Milline kogulaeng  $Q$  kandub üle ühe välgulöögiga?

10) (0,5) Milline on keskmine voolutugevus  $I$  pilve ja maa vahel välgulöögi ajal?

11) (1,0) Kujutlegem, et kõikides äikesetormides aasta jooksul vabaneva välguenergia saab kokku koguda ja inimeste vahel võrdset ära jagada. Kui kaua saaksite oma energiaosast hoida põlevana 100 W elektripirni?

**Kapillaarsed veresooned.** Käsitlegem verd kokkusurumatu viskoosse vedelikuna, mille tihedus  $\mu$  on lähedane vee tihedusle ja dünaamiline viskoossus  $\eta = 4,5 \text{ gm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Modelleerime veresoone sirgete silindriliste torudena raadiusega  $r$  ja pikkusega  $L$  ning kirjeldame vere voolamist Poiseuille' seadusega,  $\Delta p = RD$ , mis on elektrinähtustest tuntud Ohmi seduse analoogiks vedelike dünaamikas. Siinjuures  $\Delta p$  on rõhkude vahe veresoone alguse ja lõpu vahel, ruumkiirus  $D = Sv$  on veresoone ristõiget  $S$  ajaühikus läbiva vere ruumala ning  $v$  on vere kiirus soones. Hüdrauliline takistus  $R$  on antud valemiga  $R = 8\eta L / \pi r^4$ .

Puhkava inimese korral pumpab süda verd (läbi enese) ruumkiirusega  $D = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ . Vastake järgmistele küsimustele eeldusel, et kõik kapillaarsed veresooned on ühendatud paralleelselt, neist igähe raadius on  $r = 4 \mu\text{m}$  ja pikkus  $L = 1 \text{ mm}$  ning rõhkude vahe nende alguse ja lõpu vahel on  $\Delta p = 1 \text{ kPa}$ .

12) (1,0) Mitu kapillaarset veresoont on inimkehas?

13) (0,5) Kui suur on vere voolukiirus  $v$  kapillaarsetes veresoontes?

**Pilvelõhkuja** 1000 m kõrguse pilvelõhkuja ümber maapinnal on välistemperatuur  $T_{\text{bot}} = 30^\circ\text{C}$ . Ülesanne on hinnata välisõhu temperatuuri pilvelõhkuja tipus. Vaadeldagem selleks õhukest õhukihti (võite õhu lugeda ideaalseks lämmastikgaasiks adiabaadi teguriga  $\gamma = 7/5$ ), mis tõuseb aeglaselt kõrgusele  $z$ , kus rõhk on madalam ja eeldage, et see kiht paisub adiabaatiliselt, nii et ta temperatuur langeb välisõhu temperatuurini.

14) (0,5) Kuidas on temperatuuri suhteline muutus  $dT/T$  seotud rõhu suhtelise muutusega  $dp/p$ ?

15) (0,5) Esitage rõhu muutus  $dp$  kõrguse muutuse  $dz$  kaudu.

16) (1,0) Milline on välisõhu temperatuur pilvelõhkuja tipus?

**Andmed:** Boltzmanni konstant:  $k = 1,38 \text{ CE}$  10-23 J K-1 lämmastiku molekuli mass:  $m = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  raskuskiirendus:  $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$ .

Tõlkinud J. Kalda (kalda@ioc.ee, 6204174, 6522025, 56214406), J. Kikas, M. Kree ja M. Säkki