Kepleri seadused ja muu taevamehaanika

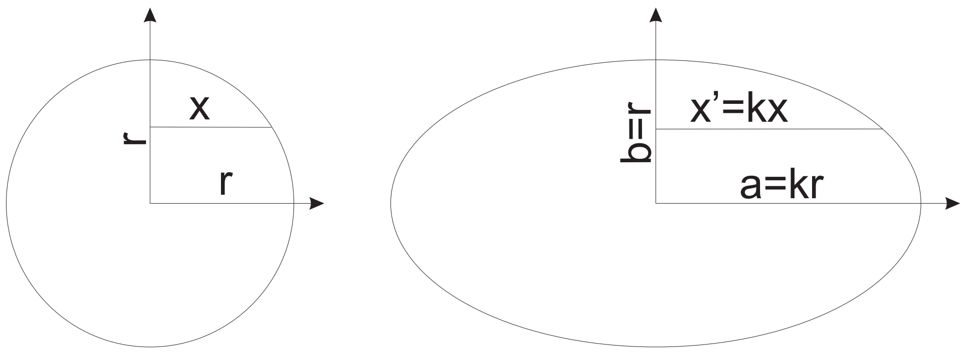
Mihkel Kree, 2006

Millest tuleb juttu?

Vaatame esmalt üle ellipsi põhiomadused ning meenutame olulisemat seoses gravitatsiooniga. Tuletame mõningase vaevaga kõik kolm Kepleri seadust, lähtudes tuntud jäävusseadustest (sic!). Vaatleme mõningaid nippe planeetidega ülesannete lahendamisel, põhiliseks vahendiks kujuneb mõistagi energia ja impulsimomendi jäävus; muuhulgas tõestame, et planeedi energia ei sõltu orbiidi kujust, vaid ainult pikemast pooltteljest. Teksti sees püstitatud ülesannete lahendused asuvad viimases peatükis.

Ellips

Ellips on venitatud ringjoon. Võtame ringjoone raadiusega $r = b$, venitame seda näiteks x-telje suunas kordajaga $k = a/b$. Oleme saanud ellipsi, mille lühem pooltelg on b ning pikem a. Ellipsi pindala on mõistagi $S = \pi ab$.



Joonis 1: Ringi venitades saame ellipsi.

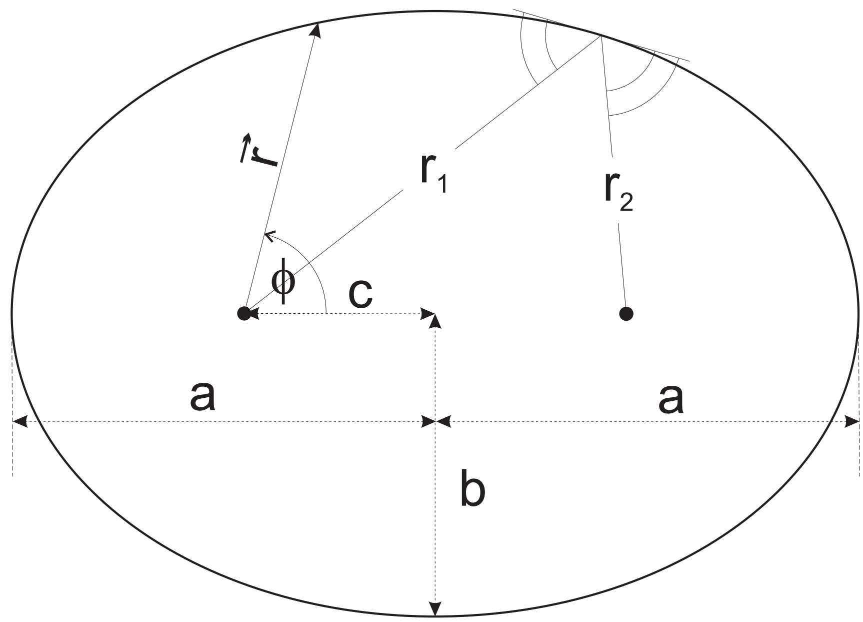
Traditsiooniliselt defineeritakse ellips kahe punkti (fookuste) ning pikema pooltelje abil: iga ellipsi punkti kauguste summa fookustesse on võrdne kahekordse pikema pooltteljega: $r_1 + r_2 = 2a$.

Mõnikord läheb vaja ka fookuse kaugust keskpunktist c; muuhulgas defineeritakse ellipsi ekstsentrilisus: $e = c/a < 1$. On lihtne näha, et $a^2 = b^2 + c^2$.

Mistahes ellipsi punkti tõmmatud puutuja on sama nurga all seda punkti ja kumbagi fookust ühendavate sirgetega. (Sellest "peegeldusomadusest" selgub, miks ellipsi-kujulises ruumis ühes fookuses kõneleja jutt on hästi kuulda teises fookuses.)

Et ühes ülesandes osutub vajalikuks teadmine ellipsi võrrandist, siis toome need siinkohal ära. Keskpunkti suhtes:

$$y = b\sin\phi, \quad x = a\cos\phi, \quad \text{ehk} \quad (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1.$$



Joonis 2: Joonisel on kujutatud pooltelgi, mõningaid ellipsi omadusi ning näidatud polaarkoordinaatide tähendus.

Ellipsi võrrand polaarkoordinaatides fookuse suhtes:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos^2\theta}.$$

Väli

Jõud kahe punktmassi vahel avaldub teatavasti kujul

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \tag{1}$$

Potentsiaalne energia (märk negatiivne) on töö, mida teeb gravitatsiooniväli, toomaks mingit objekti lõpmatusest antud punkti:

$$E_p = -\frac{GMm}{r}. \tag{2}$$

Muide, väljatugevus on seotud energia tuletisega $F = -\frac{dE}{dr}$. Seda on lihtne mõista ning ka antud juhu jaoks kontrollida.

Ülesanne 1. Leidke ringorbiidil raadiusega $R = R_M$ liikumise periood, kus R_M on Maa raadius.

Üks tüüp ülesandeid tegeleb mõtteliste olukordadega planeedi sisemuses. Kui massi jaotus on sfäärilise sümmeetriaga, siis antud punkti asukohast kaugemal (raadiusest) olevate massipunktide väljatugevused kompenseerivad üksteist.

Järgnevate ülesannete puhul eeldatakse konstantset tihedust.

Ülesanne 2. Leidke aeg, mis kulub Maa sisse kaevatud tsentrit läbiva tunneli kaudu "kukkumiseks" teisele poole Maakera. *Vihje:* kiirenduse sõltuvus koordinaadist peaks tulema harmoonilise ostsillaatoriga samal kujul $a = -\omega^2 x$. Võrrelge seda aega esimese kosmilise kiirusega Maa ümber tiiru tegemise ajaga. Kas tulemus oleks teine, kui see tunnel ei läbiks Maa keskpunkti?

Ülesanne 3. Tõestage, et kui planeedi sisemusse teha sfääri-kujuline õõnsus, siis selle sees on väli homogeenne.

Kepleri seadused

Esitame need lihtsuse järjekorras.

Teine Kepleri seadus. Põhjandage, et impulsimoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (koordinaatide alguspunktiks valitakse tähe asukoht) ajas ei muutu ning siduge see pindalade katmise kiirustega, nagu koolis see Kepleri seadus sõnastatakse.

Lahendus. *Kui vaatleme impulsimomenti telje suhtes, mis läbib tähe asukohta, siis impulsimoment ilmselt ei saa muutuda, kuna jõumoment puudub (jõud on suunatud tähe poole ning jõu õlg seetõttu null). Niisiis:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0, \quad \vec{L} = const.$$

Sama tulemuseni jõuaksime ka algebraliselt, kasutades korrutisest tuletise võtmise reeglit:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = 0,$$

sest kiirus ja impulss on samas sihis ning samuti raadiusvektor ja jõud. Samasihiliste vektorite vektorkorrutis on teatavasti null.

Leiame pindala, mille katab raadiusvektor lõpmata väikeses ajavahemikus Δt. Tekib täisnukrne kolmnurk, mille üks kaatet on võrdne raadiusega ning teine selle vahemiku jooksul ristsuunas läbitud vahemaaga:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r v_\perp \Delta t = \frac{L}{2m} \Delta t,$$

kus kasutasime impulsimomendi definitsiooni. Nagu näha, ei sõltu see pindala orbiidi piirkonnast, vaid ajavahemikust: raadiusvektori poolt kaetud pindala on võrdeline liikumise ajaga.

Esimene Kepleri seadus. Näidake, et planeedi orbiit on ellips, teades ellipsi võrrandit polaarkoordinaatides (ümber fookuse): $r = A/(1 + e\cos\theta)$. *Vihje:* veenduge esmalt, et $\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) = GMm\frac{d\vec{e_r}}{dt}$, kus $\vec{e}_r$ on raadiusesuunaline ühikvektor.

Lahendus.*See lahendus on matemaatiliselt paras trikitamine, õpilane ei pea selle peale ise tulema, vaid suutma lihtsalt lahendust jälgida. Alustame antud vihjest, tähistades Päikese massi M, planeedi massi m ning raadise-suunalise ühikvektori $\vec{e_r}$:*

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} + \vec{v} \times \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = \vec{a} \times \vec{L} = \frac{1}{m}\vec{F} \times \vec{L} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e_r} \times \vec{L}.$$

Järgnevalt peetagu meeles, et r on raadiusvektori moodul ning $\vec{r}$ raadiusvektor ise:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \vec{v} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt},$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}) = mr^2(\vec{e}_r \times \frac{d\vec{e}_r}{dt}),$$

sest r ja $\vec{e}_r$ on paralleelsed ning vektorkorrutis kaob. Järgnevalt kasutame vektorkorrutiste skalaarkorrutisteks teisendamise reeglit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r \times \vec{L} = -GMm\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \frac{d\vec{e}_r}{dt}) =$$

$$= -GMm\vec{e}_r(\vec{e}_r\frac{d\vec{e}_r}{dt}) + GMm\frac{d\vec{e}_r}{dt}(\vec{e}_r\vec{e}_r) = GMm\frac{d\vec{e}_r}{dt},$$

sest $\vec{e}_r$ ja $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ on omavahel risti ning $\vec{e}_r$ ruut on üks. Enne diferentseerimist oli meil seega võrrand

$$\vec{v} \times \vec{L} = GMm\vec{e}_r + \vec{C}, \qquad (3)$$

kus $\vec{C}$ on konstante vektor. Tulemus (3) väärib ka meeldejätmist, kuna hiljem pöördume selle juurde tagasi seoses ühe ülesande lahendamisega. Viimaks lõpule oma tõestust, märkame, et:

$$L^2 = \vec{L}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m\vec{r}(\vec{v} \times \vec{L}) = mr(GMm + C\cos\theta),$$

kus lähtusime ümberjärjestamise seadusest $\vec{a}(\vec{b} \times c) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a})$ ning θ tähistab nurka vektorite $\vec{r}$ ja $\vec{C}$ vahel. Avaldades viimasest seosest r-i, saame:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \frac{C}{GMm}\cos\theta}.$$

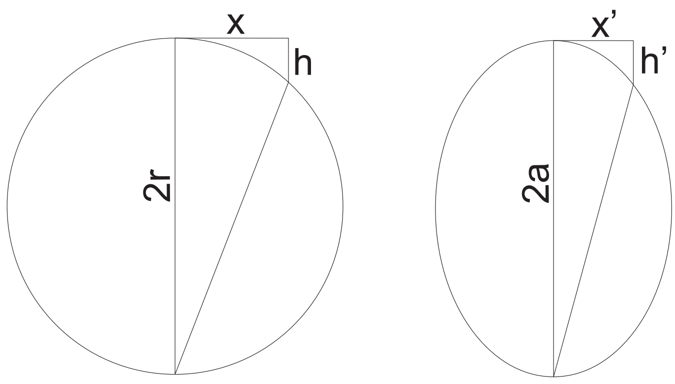
Sellega oleme näidanud, et Päikese ümber tiirlev planeet (mass on tühiselt väike võrreldes Päikese massiga) liigub mööda elliptilist orbiiti, mille fookuses asub Päike.

Kolmas Kepleri seadus. Tuletage planeedi tiirlemise periood (tähe mass on M ning orbiidi pikem poolteg a):

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{GM}. \qquad (4)$$

Lisaülesanne: Näidake, et kaksiktähe süsteemis liiguvad tähed elliptilistel orbiitidel ümber ühise massikeskme ning leidke vastav tiirlemisperiood. (Vastus: $T^2 = \frac{(2\pi)^2(a_1+a_2)^3}{G(M_1+M_2)}$)

Lahendus. *Vaatleme esmalt, kuidas siduda kiirus ja kiirendus (ehk gravitatsioonijõud). Liikugu keha mööda ringjoont lõpmatult lühikese aja vältel nii, et nihe horisontaalsuunas (vt joonist) oleks x ning vertikaalsuunas h.*



Piirdenurkade võrdsusest saame võrdelised kolmnurgad:

$$\frac{h}{x} = \frac{x}{2r-h} \approx \frac{x}{2r}, \quad h = \frac{x^2}{2r}.$$

Toimugu see liikumine ajavahemiku Δt jooksul ning tähistades horisontaalkiiruse v-ga ja vertikaalkiirenduse $\frac{F}{m}$-ga, saame:

$$x = v\Delta t, \quad h = \frac{\frac{F}{m}(\Delta t)^2}{2}, \quad \frac{\frac{F}{m}(\Delta t)^2}{2} = \frac{v^2(\Delta t)^2}{2r}, \quad \frac{F}{m} = \frac{v^2}{r}.$$

Leidsime seega kiirenduse ringjoonelisel liikumisel. Liikugu nüüd objekt elliptilise orbiidi perigees (lähim punkt fookusele). Vastavaid nihkeid tähistavad x' ja h' (vt joonist). Kui suruksime ellipsi pikema pooltelje sihis kokku kordajaga $k = a/b$, saaksime ringi raadiusega $r = b$. Teemegi seda ning saame eelneva analoogia põhjal seose:

$$\frac{h'}{k} = \frac{x'^2}{2b}, \quad h' = \frac{x'^2 a}{2b^2}, \quad \frac{F}{m} = \frac{v^2 a}{b^2},$$

kus läksime üle kiirendusele ja kiirusele. Perigee kaugus fookusest on $a - c$, seega

$$F = \frac{GMm}{(a-c)^2}, \quad v^2 = \frac{Fb^2}{ma} = \frac{GMmb^2}{ma(a-c)^2} = \frac{GM(a^2-c^2)}{a(a-c)^2} = \frac{GM(a+c)}{a(a-c)},$$

kus lähtusime seosest $a^2 = b^2 + c^2$. Tiirlemisperioodi leidmiseks kasutame teist Kepleri seadust ehk pindalade võrselisust ajaga:

$$\frac{T}{S} = \frac{\Delta t}{\Delta S}, \quad T = \pi ab \frac{\Delta t}{\frac{(a-c)v\Delta t}{2}} = \frac{2\pi ab}{(a-c)v},$$

kus ellipsi pindala $S = \pi ab$ ning väikese pindala saime võrdhaarsest kolmnurgast alusega $v\Delta t$ ning kõrgusega $a - c$. Et meil on juba olemas avaldis v^2 jaoks, siis arvutame:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^2 b^2}{(a-c)^2 v^2} = \frac{(2\pi)^2 a^2 b^2 a(a-c)}{(a-c)^2 GM(a+c)} = \frac{(2\pi)^2 a^3 b^2}{GM(a^2-c^2)} = \frac{(2\pi)^2 a^3}{GM},$$

millega olemegi tõestanud Kepleri kolmanda seaduse (perioodi ruut on võrdeline pikema pooltelje kolmanda astmega).

Energia

Ülesanne 4. Tuletage koguenergia (kineetiline pluss potentsiaalne) avaldis

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \tag{5}$$

Kui koguenergia on negatiivne, siis tähendab see, et objekt ei saa tähe mõjuväljast lahkuda lõpmatusse. Lõpmatult kaugel on potentsiaalne energia null ning kineetiline energia võrdne koguenergiaga, mis ilmselt ei tohi olla negatiivne. Vahel on ülesannetes tarvis anda objektile lisakiirust, et eemalduda lõpmatusse, sellistel juhtudel on lisatav kineetiline energia just selline, et koguenergia tuleks parajasti positiivne.

Ülesandeid

Ülesanne 5. Maapinnalt visatakse vertikaalselt üles mingi objekt sellise kiirusega, et see eemaldub Maast kaugusele R ning tuleb siis tagasi. Leidke objekti lennu-aeg. Maa raadius on $R_M = R$.

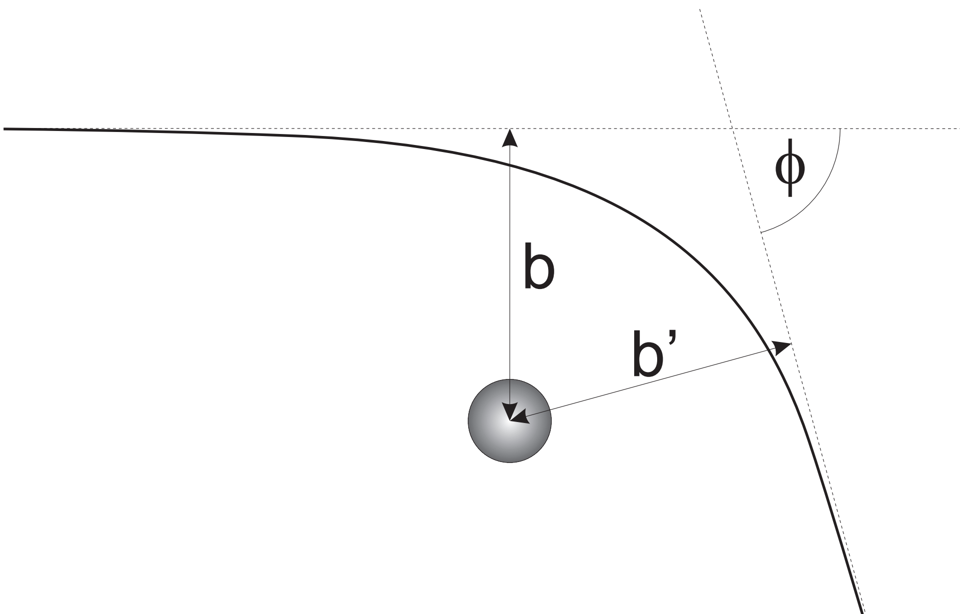
Ülesanne 6. Objekt saadetakse orbiidile kahes etapis: esmalt antakse maapinna läheduses kiirus v_1 ning apogees suurendatakse kiirust: $v_2 = v + \Delta v$ nii, et objekt on nüüd ringorbiidil raadiusega R, Maa raadius on R_M. Leida v_1 ja Δv.

Ülesanne 7. Ringorbiidil R liikuvale objektile antakse radiaalsuunaline kiirus. Kui suur peab see kiirus olema, et objekt väljuks Maa orbiidilt? Maa raadius on R_M. *Vihje.* Milline peab olema objekti koguenergia, et väljuda orbiidilt (liikuda lõpmatult kaugele)?

Ülesanne 8. Mingi tähe läheduses toimub plahvatus, kust lendab välja palju väikseid objekte, kõigi kiiruste moodulid on võrdsed v-ga. Objektid hakkavad liikuma elliptilisi orbiite mööda, mille üheks fookuseks on see täht. Kus võib aga asuda teine fookus? (Leidke teise fookuse geomeetriline koht.)

Ülesanne 9. Tudengite olümpiaad 2003. Vaadelgem tähtedevahelise gaasipilve gravitatsioonilist kokkutõmbumist. Eeldagem, et gaas tihedusega $\rho = 10^{-15} kg/m^3$ täidab ühtlaselt kerakujulise ruumiosa ning algtemperatuur on nii madal, et osakeste algkiiruse võib lugeda nulliks. Kui kaua võtab aega gaasipilve kokkutõmbumine?

Ülesanne 10. Lõpmatusest läheneb tähele mingi objekt ning eemaldub seejärel taas lõpmatusse. Lõpmatult kaugel olles on kiirusvektori poolt moodustatd sirge kaugus tähest b (vt joonist), pärast eemaldumist on sama parameeter b' (milline on seos nende vahel?). Leidke avaldis kõrvalekalde-nurga ϕ jaoks. *Vihje.* Avaldis (3) võib osututda kasulikuks.



Veel ülesandeid

Nii Eesti kui ka rahvusvahelistel olümpiaadidel on vahel ette tulnud teemasse puutuvaid ülesandeid, loetlen mõned (lühendid: EFO - Eesti olümpiaadid, ES - Eesti-Soome võistlused, RFO - rahvusvahelised olümpiaadid):

- EFO 2001, 8. ülesanne
- ES 2005, 3. ülesanne
- ES 2004, 2. ülesanne
- RFO 2005, 1. ülesanne
- RFO 2001, 2. ülesanne
- RFO 1999, 3. ülesanne
- RFO 1996, 3. ülesanne

Lingid ka:

- EFO ülesanded ja lahendused: http://www.ttkool.ut.ee/phys
- ES ülesanded ja lahendused: http://www.cs.ioc.ee/~kalda/ipho/E_S.html
- RFO ülesanded: http://www.cs.ioc.ee/~kalda/ipho/iphok6ik.pdf

Lahendused

Lahendus 1. Liikumaks ringorbiidil, peab kiirenduse andma gravitatsioonijõud:

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad a = \frac{GM}{R^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Tiirlemise periood on aga ringi läbimiseks kulunud aeg:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Lahendus 2. Lahendamine ülesande üldjuhul, kus tunneli kaugus Maa keskpunktist on b. Asetsegu objekt mingil hektel punktis x (kaugus tunneli keskpunktist), mille kaugus Maa tsentrist on r (vt joonist). Objektile avaldab gravitatsioonijõudu massiosa, mis jääb mõttelise sfääri sisse, mille raadius on r:

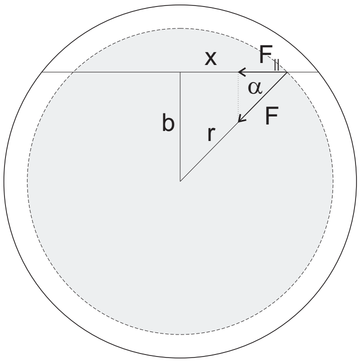
$$F = -\frac{GM'm}{r^2}, \quad \text{kus} \quad M' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Meid huvitab aga tunneli-sihilne jõu komponent:

$$F_{||} = F\cos\alpha = F\frac{x}{r} = -\frac{GM'mx}{r^3} = -G\frac{4}{3}\pi\rho m x.$$

Asendades viimasesse seosesse tiheduse Maa massi M ja raadiuse R kaudu, jõuame liikumisvõrrandini:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad a = -\frac{GM}{R^3}x.$$



Ilmselt rahuldab võrrandit harmooniline võnkumine:

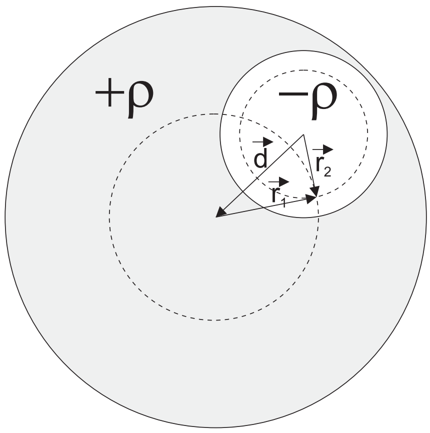
$$x = \cos(\omega t), \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x, \quad \text{seega}$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Nagu näha, langeb vastus kokku ülsandes 1 saadud tulemuseda. Väärib märkimist, et tunnelis liikumise aeg ei sõltu tunneli pikkusest (asukohast).

Lahendus 3. Tühimikku saame ette kujutada kui suure kera (tihedus ρ) ja negatiivse tihetusega ($-\rho$) väiksema kera superpositsiooni. Antud punktis mõjub kaks kiirendust (vt joonist):

$$\vec{a}_1 = -GM_1\frac{\vec{r}_1}{|r_1|^3} \quad \text{ning} \quad \vec{a}_2 = -GM_2\frac{\vec{r}_2}{|r_2|^3}.$$



Paneme tähele, et nimetajasse tekkis kolmas aste, kuna lugejas on vektor. Esimese kiirenduse annab mõttelise sfääri r_1 sisse jääv mass ning teise kiirenduse (ühtlasi tõukejõu) annab sfääri r_2 sisse jääv negatiivne mass:

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3\rho, \quad M_2 = -\frac{4}{3}\pi r_2^3\rho, \quad \text{summaarne kiirendus:}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = G\frac{4}{3}\pi\rho(-\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \frac{4}{3}G\pi\rho\vec{d}.$$

Nagu näha, on kiirendus igas tühimiku punktis sama ning suunatud sfääride keskpunkte ühendava sirge sihis.

Lahendus 4. Ilmselt koguenergia liikumise vältel ei muutu (liikumise jooksul muist potentsiaalset energiat läheb üle kineetiliseks ning vastupidi). Kirjutame energia avaldised apogees ja perigees:

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1}, \quad E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}.$$

Peame silmas impulsimomendi jäävust (või Kepleri teist seadust: $r_1 v_1 = r_2 v_2$. Korrutame esimest võrrandit r_1^2-ga ning teist r_2^2-ga ning lahutame need võrrandid teineteisest, lisaks peame veel silmas, et $r_1 = a - c$ ning $r_2 = a + c$:

$$E(r_1^2 - r_2^2) = -GMm(r_1 - r_2), \quad E = -GMm\frac{r_1 - r_2}{r_1^2 - r_2^2} = -\frac{GMm}{r_1 + r_2} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Lahendus 5. Objekti lennutrajektoor asetseb lõpmatult kitsal ellipsil pikema poolteljega R. Ellipsi fookus asub ühtlasi perigee läheduses. Orbiidil liikumise periood sõltub pikemast pooltelјest (Kepleri kolmas seadus), mis antud juhul langeb kokku vastusega ülesandest 1. Teisalt, raadiusvektori poolt kaetud pindala on võrdeline liikumise ajaga. Antud ülesandes katab raadiusvektor pindala, mis moodustub poolest ellipsi pindalast ja võrdhaarsest kolmnurgast (alus $2b$ ning kõrgus a):

$$\frac{\tau}{S'} = \frac{T_0}{S_0}, \quad \text{kus} \quad S_0 = \pi ab \quad \text{ja} \quad S' = \frac{1}{2}\pi ab + ba.$$

Liikumise ajaks saame seega

$$\tau = \frac{\frac{1}{2}\pi + 1}{\pi} T_0.$$

Lahendus 6. Esialgu liigub objekt poole ellipsi jagu, mille kahekordne pikem pooltelg (perigeest apogeeni) on ilmselt $R + R_M$. Teades koguenergiat (valem 5) ning potentsiaalset energiat, saame kineetilisest energiast kiiruse perigees (stardis):

$$E = -\frac{GMm}{R_M + R}, \quad E_k = E - E_p = GMm(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R_M + R}), \quad v = \sqrt{\frac{2GMR}{R_M(R + R_M)}}.$$

Leidmaks kiiruse jurdekasvu, leiame analoogiliselt kiiruse apogees ning rinorbiidil (pikem pooltelg R):

$$v_a = \sqrt{\frac{2GMR_M}{R(R + R_M)}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad \Delta v = v_2 - v_a.$$

Lahendus 7. Ilmselt on ringorbiidil liikuval kehal raadiusega risti olev kiirus ning potentsiaalne energia:

$$v_\perp = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \text{ja} \quad E_p = -\frac{GMm}{R}.$$

Lisatav raadiuse-suunaline kiiruskomponent peab olema selline, et koguenergia oleks mittenegatiivne:

$$\frac{m(v_\perp^2 + v_\parallel^2)}{2} \geq \frac{GMm}{R}, \quad \text{ehk} \quad v_\parallel \geq \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Lahendus 8. Siin tuleb lihtsalt teada ellipsi omadusi ja seda, et koguenergia, mis kõikidel tükkidel on sama, sõltub ellipsi pikemast pooltelјest, mis seega tuleb kõikide jaoks sama. Lisaks teame, et kauguste summa fookusteni igast ellipsi punktist on võrdne kahekordse pikema poolteljega. Iga kiirusvektori jaoks täpse fookuse asukoha saab leida peegeldumise omadusest (vt ellipsi omaduste peatükk). Lühidalt: vastuseks on üks konkreetne ringjoon.

Lahendus 9. Igale massiosakesele mõjuv jõud on tingitud temast sissepoole jäävatest osakestest, kusjuures nende hulk protsessi jooksul ei muutu. Seega liiguvad osakesed poole ellipsikujulisest trajektoorist, kusjuures tõmbav mass sõltub stardikaugusest. Startigu osake kauguselt x (pikem pooltelg $a = x/2$), talle mõjuv mass, mille võime lugeda tsentris asuvaks, on:

$$M = \frac{4}{3}\pi x^3 \rho,$$

ning pool elliptilisest perioodist:

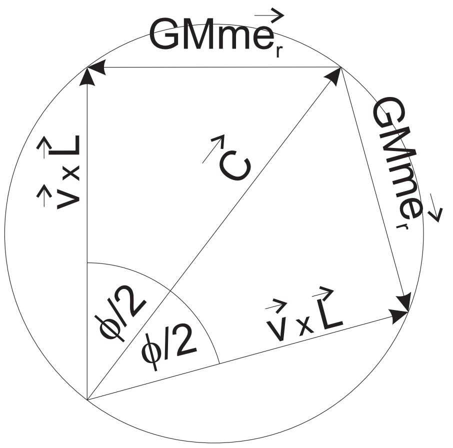
$$\tau = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2\pi)^2 a^3}{GM}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho}},$$

mis mõistagi ei sõltu stardipunktist, arvuline vastus tuleks 67000 aastat.

Lahendus 10. Alustuseks märkame, et kiirus enne ja pärast möödumist peab olema lõpmatuses sama. Kui valime impulsimomendi telje suhtes, mis läbib tähe asukohta, siis see protsessi jooksul ei muuti (jõu õlg on null). Impulsimomendi jäävusest järeldub ilmselt, et $b = b'$. Impulsimoment kui vektor ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) on suunatud joonise sisse (veendu!). Vaatleme nüüd hetki, kus objekt on lõpmatuses (enne ja pärast möödumist) ning lähtume tulemusest (3):

$$\vec{v} \times \vec{L} = GMm\vec{e}_r + \vec{C}$$

Suurus $\vec{v} \times \vec{L}$ on suunatud tähest eemale, olles risti asümptootilise sirgega, ning $\vec{e}_r$ on paralleelne asümptootilise sirgega, olles suunatud objekti poole. (Miks?) Need kolm vektorit moodustavad seega täisnurkse kolmnurga, kusjuures $\vec{C}$ on mõlemal juhul sama. Olukorda võime kujutada geomeetriliselt, nagu näidatud joonisel.



Edasi peame arvutama kõrvalekalde-nurga ϕ, kuid eelnevalt on lihtne leida $\phi/2$ täisnurksest kolmnugast:

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{GMm}{vL} = \frac{GM}{v^2 b}, \quad \tan\phi = \frac{\tan\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\phi}{2}}{1 - \tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{\frac{2GM}{v^2 b}}{1 - (\frac{GM}{v^2 b})^2},$$

seega saame vastuseks

$$\phi = \arctan\left(\frac{2GMv^2 b}{v^4 b^2 - G^2 M^2}\right).$$