Sissejuhatus

Enamuse füüsika ülesannete lahendamine taandub tegelikult suhteliselt väikese hulga ideede rakendamisele (öeldu kehtib ka teiste valdkondade, näiteks matemaatika kohta). Seega on vaja õppida selgeks need ideed; iga konkreetse ülesande puhul tuleks lihtsalt proovida erinevate ideede tulusust. Kogemuste kasvades selgub, et tegelikult annavad ülesanded ise harilikult vihjeid, milliseid ideid on vaja rakendada.

Allpool on püütud välja tuua põhilised kinemaatika ülesannetes kohatavad lahendusideed. Iga idee juures on ka üks või mitu illustreerivat ülesannet, mis tuleks lugejal endal lahendada; kontrolli mõttes on toodud ära ka õiged vastused. Kui ülesanne tundub olevat raske, tuleks veel kord lugeda läbi lähikonnas esitatud ideed—muid keerulisi teadmisi ei tohiks vaja minna.

Võimalust mööda ülesannete juures ära toodud nende originaalallikas.

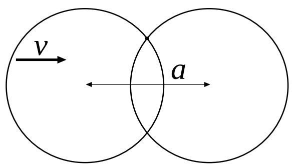
Kinemaatika

Esimene idee: tuleb valida sobivaim taustsüsteem. Selleks on vaja vaadelda protsessi järgemööda kõikides lootustandvates taustsüsteemides, s.o. niisugustes kus näiteks

- mingid kehad on paigal,
- osa kiiruse projektsioone on nullid või
- liikumine on sümmeetriline

Niisiis on head taustsüsteemid on sellised, kus mõni kiirus või kiiruse komponent (või kiirendus või kiirenduse komponent) läheb nulliks või kaks kiirust on üksteisega võrdsed. Kui soblik süsteem on leitud, võib minna tagasi laboratoorsesse süsteemi ning teisendada nüüd juba teada olevad kiirused-kiirendused vastavalt kiiruste (kiirenduste) liitmise reeglile.

Ülesanne 1 *(NSVL ol. 1982, 8. klass)*

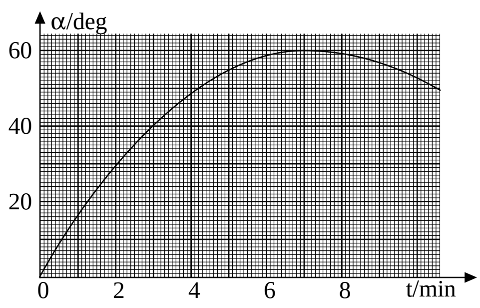


Kahest rõngast raadiusega r on üks paigal ja teine liigub kiirusega v esimese suunas. Leida rõngaste ülemise lõikepunkti liikumise kiirus sõltuvuses keskpunktide vahelisest kaugusest d!

Vastus: $u = v/2\sqrt{1-(d/2r)^2}$

Selle ülesande lahendamisel kulub ära veel **teine idee:** kiiruse või kiirenduse kohta saab kätte kõik mis vaja kui on teada tema mingi komponent ja vektori suund. Matemaatikud ütlevad selle kohta, et täisnurkne kolmnurk on määratud tema ühe nurga ja ühe küljega. Näiteks kui on teada, et kiirus on horisondi suhtes nurga α all ja tema horisontaalkomponent on w, siis kiiruse moodul on $w/\sin\alpha$ Seda ideed saab kasutada ka järgmises ülesandes:

Ülesanne 2 *(Kvant F868)*

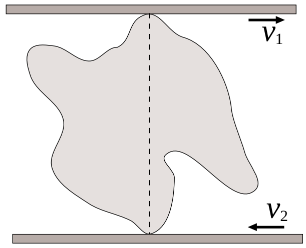


Selleks, et uurida tuule kiiruse jaotumist kõrguste järgi, kasutatakse selliseid õhupalle, mille kerkimise kiirus on kogu aeg kostantne. Sellise palli jälgimisel saadi kõrvaltoodud graafikul kujutatud kerkimisnurga sõltuvus ajast. Pall lasti õhku L = 1 km kaugusel vaatluspostist ja pall paistis tõusvat otse üles. Teades, et maapinnal oli tuule kiirus null, leidke palli kõrgus t = 7 min pärast tema starti ning tuule kiirus sellel kõrgusel.

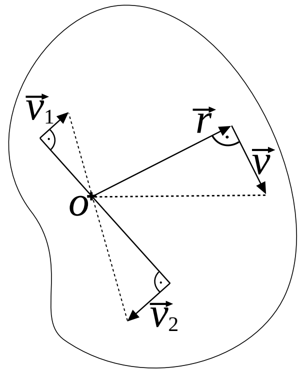
Vastus: Kerkimise kiirus 4,85 m/s; h = 2000 m; tuule kiirus u = 2,8 m/s.

Siinjuures paneme kõrvataha veel kaks ideed. **Kolmas idee**: kui ülesandes on antud graafik, siis on väga sageli kasu tema mingist puutujast ja selle tõusu arvutamisest; **neljas idee:** kui ülesandes torkab silma mingi ebatavaline kokkusattumus (antud juhul puutuja tõus küsitud ajahetkel on null), siis väga tõenäoliselt on seda asjaolu vaja kasutada

Ülesanne 3 *(VIII Venemaa ol. 1982, 8. kl.)*



Jäik kamakas on surutud kahe plaadi vahele, millest üks liigub kiirusega v_1 ja teine kiirusega v_2. Antud hetkel on kiirused horisontaalsed ning kamaka ja plaatide puutepunktid kohakuti. Märkige skemaatilisel joonisel kõik need kamaka punktid, mille kiiruse moodul võrdub v_1 või v_2-ga.
Vastus (osaline): kaarejupid



See ülesanne baseerub täienisti **ideel number viis**: kõva keha liikumist on alati võimalik esitada kui pöörlemist ümber hetkelise pöörlemiskeskme. Seejuures on pöörlemiskeset võimalik rekonstrueerida kui

- on teada kahe punkti kiiruste sihid ning need sihid ei ole paralleelsed — see on neist punktidest tõmmatud ristsirgete lõikumispunkt;
- on teada kahe punkti kiirused, kui need vektorid on paralleelsed ja seejuures risti punkte ühendava sirgega — leiame punkte ühendava sirge ja neist punktidest tõmmatud kiirusvektori otspunkte ühendava sirge lõikepunkti (vt joonis).

Kui pöörlemiskese on leitud, siis suvalise punkti kiiruse saab leida kui vektori, mis on risti pöörlemiskeskmest tõmmatud vektoriga ja moodul on võrdeline kaugusega pöörlemiskeskmest (vt. joonis).

Idee Nr. 6. Kui toimub hõõrdumisega liikumine, siis harilikult on sobivaimaks taustsüsteemiks hõõret põhjustava keskkonnaga seotud süsteem.

Ülesanne 4

Mustale horisontaalsele tahvlile, mis liigub ühtlase kiirusega, visatakse valge kriiditükk. Alghetkel oli kriidi kiirus risti tahvli liikumise suunaga. Millise kujuga jälje jätab kriit?
Vastus on hästi lihtne.

Järgmises ülesandes on vaja rakendada lisaks eelmisele veel ka **seitsmendat ideed:** lühim tee punktist tasandini on risti tasandiga. Selle võib ümber formuleerida veidi üldisemal (kuid vähem konkreetsel) kujul: mõned miinimumid ja maksimumid on leitavad ka ilma tuletisi kasutamata ning tuletisteta lahendus võib osutuda hulga lihtsamaks. Veelgi kitsapiirilisem sõnastus (antud ülesande jaoks) kõlaks nii: kui kahest vektorist üks on konstantne ja teise suund ei muutu, siis nende vektorite summa moodul on minimaalne kui nad moodustavad täisnurkse kolmnurga.

Ülesanne 5 *(Kvant F833, NSVL ol. 1983, 8.kl.)*

Transportööri lindi peale tõugatakse klots. Lint liigub kiirusega $v_0 = 1$ m/s; klotsi algkiirus $u_0 = 2$ m/s on risti lindi kiirusega. Milline on klotsi edaspidise liikumise käigus tema minimaalne kiirus maapinna suhtes? Hõõrdetegur on nii suur, et klots jääb kenasti lindi peale püsima.

Vastus : $2/\sqrt{5}$ m/s

Ülesanne 6 *(Kvant F858)*

Jalgpalluri löögi tulemusena hakkas pall lendama otse värava suunas kiirusega $v = 25$ *m/s*, nurga $\alpha = \arccos 0.8$ all horisondi suhtes. Külgtuule tõttu, mis puhus risti palli algkiirusega tugevusega u=10 m/s, kaldus pall värava tasandini jõudmise hetkeks algsihist kõrvale s=2 m võrra. Leidke aeg, mis kulus pallil värava tasandini jõudmiseks, kui värav asus L=32 m kaugusel.

Vastus: $t = \frac{s}{u} + \frac{L}{v\cos\alpha} = 1{,}8\ \mathrm{s}$

Kuivõrd on tegemist suhteliselt keerulisema ülesandega, siis kommenteerime teda veel veidikene. Esimesel hetkel võib tunduda, et mis seal ikka, $t = \frac{L}{v\cos\alpha}$, õhu hõõret me ju harilikult ei arvesta. Aga milleks on siis antud, et $s = 2$ m? Paneme tähele, et ilma õhu hõõrdeta pall ju kõrvale ei kalduks! Seega on asja iva palli pidurdumises ja vaja rakendada ideed nr 7. Seejuures on ilmselt kõige hõlpsam avaldada nihe s kahe komponendi summana, millest üks on taustsüsteemi nihe ut ja teine leitav lihtsa geomeetrilise konstruktsiooni abil. Saadud võrrandist avaldame edasi juba otsitava aja t. Niisiis rakendame me peale kuuenda veel **ideed nr 8:** sageli on targem kirjutada võrrand (või võrrandi süsteem), milles on otsitav suurus tundmatuna sees, selle asemel et hakata seda suurust otse avaldama (vahel tuleb tuua sisse ka abitundmatuid, mis pärast elimineeritakse). Lisaks paneme tähele, et kuigi pall liigub ka vertikaalsihis, on ülesanne projekteerimise teel taandatav vaid horisontaalpinnas liikumisele. Viimase soovituse võib formuleerida **ideena nr 9:** kolmemõõtmelist liikumist on raske tervikuna analüüsida, seepärast, kui vähegi võimalik, tuleks asi taandada kahele mõõtmele (tasandilisele projektsioonile, tasandiliste lõikepindade vaatlemisele).

Järgmine ülesanne illustreerib **ideed nr 10:** kui on tegemist elastse põrkega, siis on harilikult kasulik vaadelda protsessi massikeskme süsteemis. Kui seejuures hõõre puudub, siis selles süsteemis kiirusvektorid muudavad ainult oma suunda ("peegelduvad" põrketasandilt). Kui toimub hõõre, siis põrketasandiga risti olev kiiruse komponent muudab oma suuna vastupidiseks; põrketasandis lebav komponent muudab oma väärtust vastavalt hõõrde tugevusele. Samas kulub ära **hoiatus nr. 1**: kiiruste vaheline nurk sõltub taustsüsteemist, milles me sündmust vaatleme.

Ülesanne 7 *(Ven.ol. 1983, 9.kl.)*

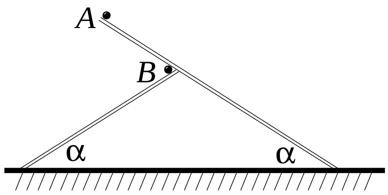
Tennise pall kukub kiirusega v_0 raske reketi peale ja põrkub sealt elastselt tagasi. Millise kiirusega v_r peab liikuma reket selleks, et pall liiguks täisnurga all oma esialgse trajektoori suhtes ning ei hakkaks pöörlema, kui ta ei teinud seda enne põrget? Millise nurga j moodustab seejuures kiirus v_r reketi tasandi normaalsihi suhtes, kui kiirusvektori v_0 jaoks on see nurk α?

Vastus: $v_r = v_0 / 2\cos\alpha$, $j = 180^0 - 2\alpha$.

Üks (ja kindel) meetod selle ülesande lahendamiseks on rakendada **ideed nr. 11:** kirjutada avaldised välja komponentide kujul. Seejuures on alati oluline, milline teljestik valida. mõnikord võib kõige kasulikumaks osutuda isegi selline koordinaatteljestik, mille teljed ei ole üksteise suhtes täisnurga all. Antud juhul on loomulik kasuta teljestikku, mille üks telg (olgu see x) on risti reketi tasapinnaga ning teine (y)—paralleelne. Vastavalt **hoiatusele nr 2** loeme hoolikalt teksti ning paneme tähele, et seal on kaks tingimust: peale selle, et vektorid peavad olema risti, on veel nõue, et pall ei hakkaks pöörlema. Viimasest asjaolust ei tohiks olla keeruline järeldada, et $v_{0y} = v_{ry}$. Idee nr 10 abil leiame, et $v_{0x}' = -v_{0x} + 2v_{rx}$ (massikeskme süsteemis $\tilde{v}_{0x} = -\tilde{v}_{0x}'$; toodud võrduse saame, kui läheme tagasi laboratoorsesse süsteemi). Edasi jääb üle ainult kirjutada välja **1. tähelepanek matemaatikast**: kaks vektorit on risti, kui nende skalaarkorrutis on 0 ning avaldada saadud võrrandist v_{rx}; Pythagorese teoreemist leiame vektori mooduli.

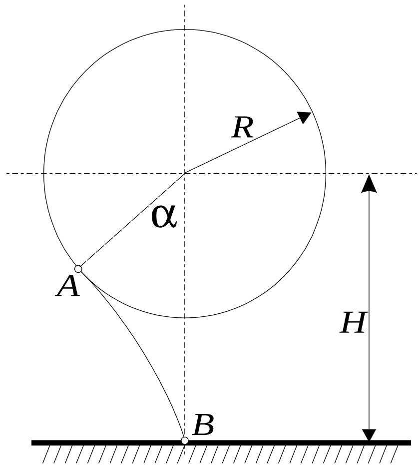
Lihtsa kujuga vastus viitab sellele, et samale tulemusele saaks ehk jõuda ka kergemal teel. Kuid sageli on nii, et lühikest lahendust on raskem leida kui pikka. Vastavalt eelpooltood võrdustele $\vec{v}_0 + \vec{v}_0' = 2\vec{v}_r$; selle täisnurkse vektorite kolmnurgaga võrdse kolmnurga $|\vec{v}_0 - \vec{v}_0'| = |2\vec{v}_r|$ üks nurk on α, sest tema hüpotenuus on risti reketi tasandiga ($v_{0y} - v_{0y}' = 0$).

Mõnikord on kasulik minna mitteinertsiaalsesse taustsüsteemi —**idee nr. 12**. Seejuures kiirusi liidetakse nii nagu ikka, kiirendustega aga on lood veidi keerulisemad. Ainult kulgevalt ja kiirendusega liikuvas taustsüsteemis on veidi lihtsam. Siis kehtib kiirenduste jaoks samasugune reegel nagu kiirustegi jaoks, $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_0$ ($\vec{a}_0$ on taussüsteemi kiirendus). Üsna sageli lihtsustuvad asjad oluliselt, kui minna vabalt langevasse või mingi kiirendusega liikuva kehaga seotud taustsüsteemi. Selle tõestuseks olgu järgmine ülesanne (meenutage ideid 7-8!).



Ülesanne 8 *(Kvant F878)*
Kaks siledat renni asuvad ühes ja samas vertikaaltasandis ning moodustavad horisondiga nurga α (vt. joon.). Punktidest A ja B lastakse ühel ja samal hetkel lahti kaks kuulikest, mis hakkavad renne mööda alla libisema. Esimesel kuulikesel, mis startis punktist A kulus maapinnale jõudmiseks aega t_1-jagu; teisel kuulikesel oli laskumise aeg võrdne t_2-ga. Millisel ajahetkel oli kuulikeste vaheline kaugus kõige väiksem?

Vastus: $t = \sqrt{(t_1^2 - t_2^2)/2}$



Ülesanne 9 *(Kvant F843)* :
Ratas raadiusega R asub kõrgusel H maapinnast ja pöörleb nurkkiirusega Ω. Ratta küljest eraldub mingis punktis A veetilk ja kukub maha punktis B, mis asub otse ratta telje kohal (vt. joonis). Leidke tilga kukkumise aeg ja punkti A asukoht (s.o. nurk α).

Vastus: $t = \sqrt{2gx}$ ja $\alpha = \arccos[R/(H-x)]$, kus

$$x = H + \frac{(\Omega R)^2}{g} - \sqrt{\frac{(\Omega R)^4}{g^2} + \frac{2H(\Omega R)^2}{g} + R^2}$$

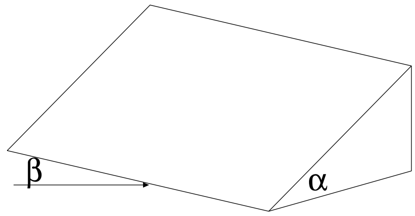
Selle ülesande lahendamiseks kulub lisaks eelmisele ära veel üks **idee (13)**, mis on sedapuhku mittestandartne, s.o. teisi selliseid ülesandeid, kus seda saaks rakendada, peaaegu et ei olegi. Õigemini, selleks et ideed rakendada mujal, oleks vaja ta formuleerida hästi üldisel kujul, umbes nii: kui muidu ülesannet ei oska lahendada, katsetage mõtteliste, abistavate osakeste sisse toomisega. Konkreetsemalt antud ülesande jaoks: kujutage, et samal hetkel antud piisaga eraldus igast pöörleva ratta punktist samuti piisake. On selge, et vabalt langevas taustsüsteemis moodustab selline piiskade parv igal ajahetkel ringjoone, kusjuures ei tohiks olla kuigi raske avaldada selle ringi raadiuse sõltuvus ajast. See piisk, mis esimesena puudutab maapinda, ongi meid huvitav piisk. Puute tingimust kirjeldavast võrrandist (ringjoone alumise punkti kõrgus saab võrdseks nulliga) saame avaldada aja (idee nr 8).

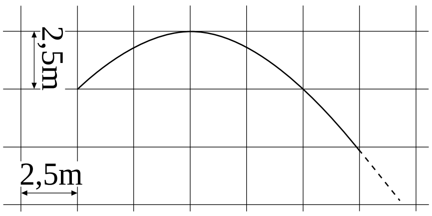
Idee nr 14: Kui on tegemist elastsete põrgetega (või põrgetega ilma hõõrdumiseta) tasapinnalt, siis harilikult osutub, et liikumine tasapinnas ja sellega ristuvas sihis on üksteisest sõltumatud. Sellisel juhul on tõhusaks meetodiks nende erisihiliste liikumiste eraldi vaatlemine. Seejuures kui pind on kaldu, siis tuleb ka teljestik kaldu ning raskuskiirendus omab kumbagi telje sihis nullist erinevat komponenti, s.o. mõlema telje sihis toimub kiirendusega liikumine

Ülesanne 10
Elastne kuulike lastakse lahti kaldpinna kohal (kaldenurk α) kaugusel d kaldpinnast. Milline on esimese ja teise põrkepunkti vaheline kaugus? Põrked toimuvad ilma hõõrdeta.
Vastus: $8d \tan a$

Ülesanne 11 *(NSVLol. 1981, 8.kl.)*
Litter libiseb jäise kaldpinna peale, mille kaldenurk on α. Kaldpinna serva ja litri algkiiruse

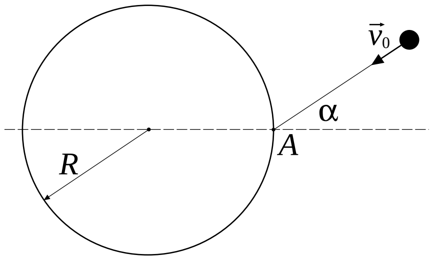
v_0 = 10 m/s vaheline nurk on $\beta = 60^0$. Litter jättis kaldpinnale sellise jälje, nagu toodud joonisel (seal on kujutatud vaid osa trajektoorist). Leidke nurk α eeldusel, et hõõrdumisega võib mitte arvestada ja et kaldpinnale libisemine oli sujuv.
Vastus: $\beta = \arcsin 0{,}5 = 30^0$





Selle ülesande juures tuleb kasutada veel **ideed nr 15**: kui jõud on risti liikumissuunaga (pinna rõhumisjõud libisemisel mööda kõverat pinda, nööri pinge keha liikumisel jäigalt kinnitaud venimatu nööri otsas, magnetväljas laengule mõjuv jõud), siis kiiruse vektor ainult pöördub, tema moodul ei muutu. Ja samuti **idee nr 16**: otsige telgi, mille sihis jõud on null!

Ülesanne 12 *(NSVLol. 1981, 8.kl.)*
Väike pall liigub kiirusega v_0 mööda siledat horisontaal-pinda ja kukub punktis A silindrilisse vertikaalsesse kaevu, mille sügavus on H ja raadius R ning hakkab seal absoluutselt elastselt põrkuma vastu seina ja horisontaalset siledat põhja. Kiirusvektori ja läbi punkti A tõmmatud kaevu diameetri vaheline nurk on α. Milline R, H, v_0 ja α vaheline tingimus peaks olema rahuldatud, et pall saaks uuesti kaevust välja tulla? Palli pöörlemist mitte arvestada.



Vastus: $n\sqrt{2H/g}\,v_0 = mR\cos\alpha$, kus n ja m on täisarvud.

Idee nr 17: mõnikord on kasu isegi väga keerulist liikumist sooritavast taustsüsteemist, selle illustratsiooniks olgu järgnev kilpkonna-lugu.

Ülesanne 13
Kolm kilpkonna asuvad alghetkel võrdkülgse kolmnurga tippudes 1m kaugusel üksteisest. Nad liiguvad kontsantse kiirusega 10 cm/s sel moel, et esimene hoiab kogu aeg kurssi teise suunas, teine — kolmanda suunas ja kolmas —esimese suunas. Millise ajavahemiku pärast nad kohtuvad?
Vastus: 6,7 sekundi pärast

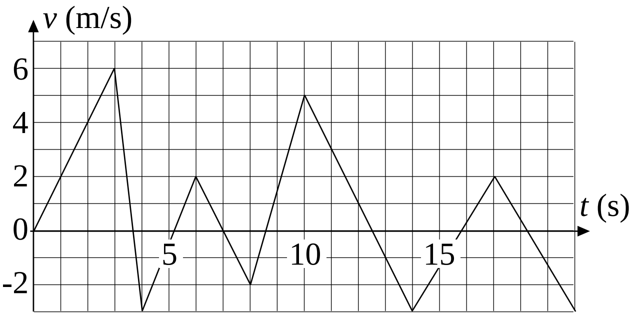
Siin on kaks lahendusvarianti: esiteks, võib minna koos konnadega pöörlevasse taustsüsteemi. Teiseks (**idee 18**), vahel on targem arvutada mitte füüsilisi kiirusi, vaid mingite vahemaade, kahe pikkuse suhte vms. muutumise kiirust. Projekteerigem igal ajahetkel kahe kilpkonna kiirused neid ühendava telje peale — sel viisil saab leida kahe konna vahelise kauguse vähenemise kiiruse.

Ülesanne 14
Sipelgas liigub mööda kummpaela kiirusega 1 cm/s. Kummpaela üks ots (see kus sipelgas startis) on kinnitatud seina külge, teist tõmmatakse kiirusega 1 m/s. Kas ja millal jõuab sipelgas paela teise otsa kui kummpaela algpikkus oli 1m?
Vastus: (e^{100}-1) sekundi pärast

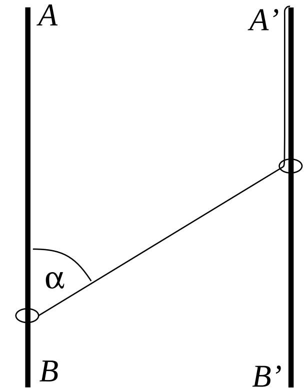
Märkus: see ülesanne nõuab lihtsa integraali võtmist, $\int \frac{dx}{ax+b} = a^{-1}\ln(ax+b) + C$

Idee nr 19: Sageli on kasu graafikute aluste pindalade arvutamisest. Nii näiteks on teepikkus *v*-*t*-graafiku (kiirus-aeg) alune pindala, kiirus *a*-*t* alune jne. Veidi keerulisem näide: teepikkus on ka sellise graafiku alune pindala, kus vertikaalteljele on kantud kiiruse ja kiirenduse suhe, horisontaalteljele aga kiirus. Tõesti, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$, seega $s = \int ds = \int \frac{v}{a} dv$. (Mõnikord pole graafikute joonistamine küll hädatarvilik, kuid aitab protsessi visuaalselt ette kujutada. Selline visualiseerimine tuleb alati asjale kasuks, kergendab lahenduse leidmist ja vähendab eksimise võimalust.)

Ülesanne 15
Osake stardib koordinaatide alguspunktist; tema kiiruse sõltuvus ajast on toodud graafikul. Milline on tema maksimaalne eemaldumus 0-punktist?
Vastus: 18,75 m

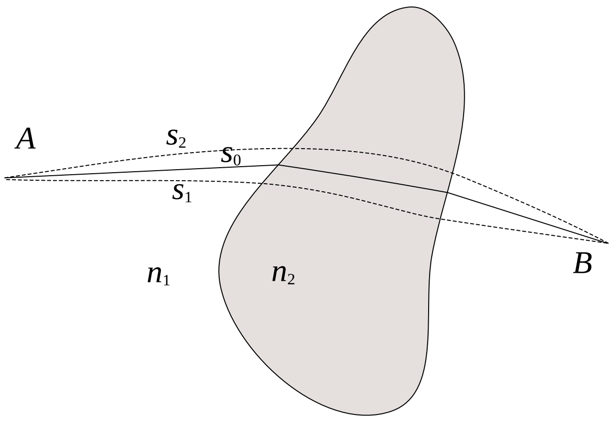


Idee nr 20: kui süsteemi osad on ühendatud fikseeritud pikkusega sidemetega, siis on kiiruste ja kiirenduste arvutamiseks üks võimalus selline, et kirjutada see seos välja koordinaatide kujul ning võtta saadud aval–disest tuletis aja järgi. Lahendame näiteks ühe lihtsa ülesande. Varras toetub ühe oma otsaga vastu põrandat ning teisega vastu vertikaalset seina. Milline on varada alumise otsa kiirus *u* sel hetkel, kui tema ülemine ots libiseb allapoole kiirusega *v* ning nurk põranda ja varda vahel α? *Lahendus*: Olgu ülemise otsa koordinaat *y* ning alumise oma—*x*. Sellisel juhul on varda pikkus $l^2=x^2+y^2$. Varda pikkus on konstantne, seega tema tuletis on null. Võtame oma avaldisest tuletise aja järgi, kasutades seejuures matemaatikast teada olevat liitfunktsioonidest tuletise võtmise reeglit: $0 = x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} = xu + yv$. Siinjuures punkt sümboli kohal tähistab tuletist aja järgi. Siit saame avaldada $u = -vy/x = -v\tan\alpha$.



Ülesanne 16 *(Kvant F868, X Venemaa ol., 10. klass)*
Rõngad *O* ja *O'* libisevad vabalt mööda vertikaalselt kinnitatud vardaid *AB* ja *A'B'*. (vt. joonis). Venimatu niit on seotud rõnga *O* külge ja tõmmatud läbi rõnga *O'*. Niidi teine ots on kinnitatud punktis *A'*. Sel hetkel kui $\angle AOO' = \alpha$, liigub rõngas *O'* allapoole kiirusega *v*. Leidke rõnga *O* kiirus sel samal hetkel!
Vastus: $u = v\,(1 - \cos^{-1}\alpha)$

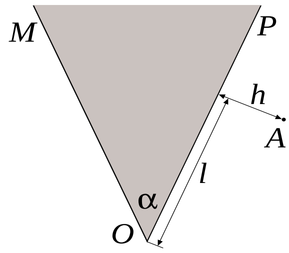
Idee nr 21: nende kinemaatika ülesannete puhul, kus on ette antud kiirused eri keskkondades ning küsitakse kõige kiiremat teed punktist *A* punkti *B*, aitab sageli geomeetrilise optika jaoks formuleeritud Fermat' printsiip. Nimelt, kui meil on mingi konfiguratsioon erineva murdumisnäitajaga kehadest, ja kui valguskiir, mis lähtub punktist *A* läbib punkti *B*, siis just piki valguskiire tegelikku teed jõuab valgus kõige kiiremini punktist *A* punkti *B* (meenutame, et kui keskkonna murdumisnäitaja on *n*, siis valguse levimise kiirus on *c/n*). Seega joonise peal aeg mööda teed s_1 ja s_2 on pikem, kui mööda s_0. Siinjuures tuleb täpsustada, et silmas on peetud lokaalset miinimumi, s.o. leviku teed võib varieerida ainult optimaalse tee vahetus ümbruses. Vastasel korral oleks lihtne konstrueerida kontranäide väikese



peeglitüki abil: peegeldudes leviv valguskiir kulutab ilmselt hulga rohkem aega kui mistahes veidi vähem nurgelist teed pidi minnes kuluks. Kui valgus võib levida ühest punktist teise mitut erinevat teed pidi (läbi läätse mingist punktist selle punkti optilise kujutiseni), siis piki kõiki neid teid on aeg üks ja see sama.

Vaatleme illustratsiooni mõttes sellist situatsiooni, kus punkt A asub kõva pinnase peal (meie liikumiskiirus v_1) ja punkt B — keset liiva (kiirus v_2); peale selle, olgu nende kahe piirkonna eraldusjoon sirge. Sellisel juhul rahuldab kiireim tee nende punktide vahel murdumisseadust: $v_1 / v_2 = \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2$.

Ülesanne 17

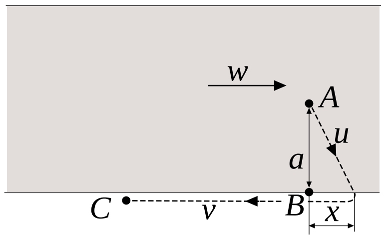


Poiss elab lahe MOP kaldalõigul OP (vt. joon.) Lahe kaks kallast moodustavad nurga a. Poisi maja asub punktis A, mille kaugus kaldast on h ja lahesopist O — $\sqrt{h^2+l^2}$. Poiss püüab kala kaldal OM. Millisel kaugusel x punktist O peaks asuma kalapüügikoht, et kodust sinna jõudmiseks kuluks võimalikult vähe aega ja kui pikk on see aeg? Poiss liigub kuival maal kiirusega v ja paadis kiirusega u.

Vastus: $x = \cos\alpha\,(l - h\tan\beta)$ ja $t = \dfrac{h\cos\beta}{v} + \dfrac{l\sin\alpha}{u}$, kus $\beta = \arcsin(v\sin\alpha / u)$

Siinjuures kulub ära väike täiendus viimase idee juurde: kui küsitakse kiireimat teed mingi tasandini (kui on 3-mõõtmeline ülesanne) või jooneni (2-mõõtmelisel juhul), siis võib selle tasandi või joone asendada tema ristsihis hästi kaugel (lõpmatuses) asuva punktiga. Sellest on ka üsna lihtne aru saada, miks see nii on: sellisest hästi-hästi kaugel asuvast punktist kulub tasandi (joone) igasse punkti jõudmiseks täpselt ühepalju aega. Kui me nüüd tõlgime eelpooltoodu geomeetrilise optika keelde, siis see tähendab, et tasandile (joonele) langeb normaali sihis paraleelsete kiirte kimp.

Ülesanne 18



Jões, mille voolukiirus on w asub punktis A (kaugus kaldast on a) poiss. Piki kallast jookseb ta kiirusega v ja ujub kiirusega u, kusjuures $u<w$. Poiss tahab jõuda jõe kaldal ülesvoolu asuvasse punkti C minimalse ajaga. Millisel kaugusel x punktiga A kohakuti asuvast punktist B peaks veest välja ronima?

Vastus: $x = -a\,(\tan\alpha - w / u \cos\alpha)$, kus $\alpha = \arcsin\,[u / (w+v)]$.

Selle ülesande juures meenutage ideed nr 1 ja hoiatust nr 1. Lisada tuleb veel **hoiatus nr. 3:** Fermat' printsiip on rakendatav üksnes siis, kui liikumise <u>kiirused on kõikides suundades ühesugused ning lähte- ja sihtpunktid on paigal</u>. Siiski võib printsiipi rakendada sel juhul, kui kiirused mingis ruumiosas sõltuvad küll liikumise suunast, kuid liikumise suund selles ruumiosas on muudest kaalutlustest teada. Ja mõnikord õnnestub liikuva sihtpunktiga ülesanne asendada ekvivalentse ülesandega (trajektoori kuju mõttes mingis kitsamas ruumiosas), kus sihtpunkt on paigal.

Idee nr 22: suur osa kivi-viske ülesandeid on taandatavad nn. <u>ballistilise laskeulatuse probleemile</u>. Enne selle idee rakendamist on meil aga vaja käsitledas toda probleemi ennast.

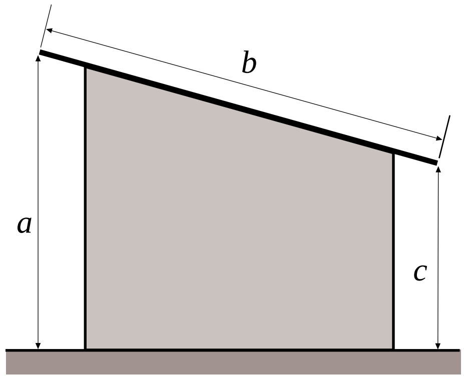
Ülesanne nr 19

Milline on see ruumiosa, kuhu saab lasta kahuriga, mis asub koordinaatide alguspunktis ja mis annab kuulile algkiiruse v_0 ? Laskesuuna võib valida vastavalt vajadusele.

Vastus: pöördparaboloid, mille lõige x-z tasandiga on parabool $z \le \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}$.

See ülesanne kuulub taolist sorti ülesannete klassi, mis tunduvad küll lihtsad, kuid mille lahendus, kui seda jõuga tegema hakata, võib üsna pikakas kätte minna ning seetõttu viga sisse tulla või vastus hoopistükis saamata jääda. Niisiis **hoiatus nr 4:** kui valemid lähevad tüütult pikaks, on paras aeg valemite kirjutamisesse paus teha ning mõelda, ega pole mõnda teist teed vastuseni jõudmiseks. Kui on, siis tasub eelmine töö pooleli jätta ning proovida, ehk on teine lahendustee lühem. Ning antud ülesande juurde konkreetne soovitus, ehk teisisõnu **idee nr 23:** kui nõutakse sellise piirkonna leidmist, kus eksisteerib teatud lahend, siis selle piirkonna eraldusjoon on sageli leitav niisuguse joonena, kus mingi diskriminant läheb nulli. Niisiis, koostage võrrand sellise nurga tangensi leidmiseks, mille all tuleks tulistada, et tabada märki punktis koordinaatidega (x,z). Selgub, et $\tan\alpha$ jaoks on tegemist ruutvõrrandiga ning seega saab ülesandes nr. 16 küsitud piirkonna eraldusjoone võrrandi panna kujul $D=0$, kus D on ruutvõrrandi diskriminant.

Kasulik mnemotehniline võte viimase vastuse meelde jätmiseks: parabooli tipp asub seal, kuhu jõuab kiirusega v_0 otse üles lastud kuul; parabooli kuju on selline, nagu otse horisontaalsuunas lastud kuuli trajektooril.

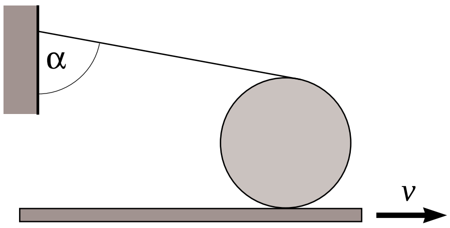


Ülesanne 20

Millise minimaalse algkiiruse peab andma kivile, et visata üle viilkatuse? Viilkatuse laius on b, ühe otsa kõrgus on a, teise kõrgus — c.

Vastus: $v_{\min} = \sqrt{g(a+b+c)}$

Selle ülesande lahendus koosneb kahest etapist. Esiteks on vaja aru saada, et minimaalse kiiruse korral puudatab kivi mõlemat katuse serva. Selle tõestuseks on vaja rakendada matemaatikast pärit **ideed nr 24:** miinimumi (maksimumi) leidmiseks tuleb varieerida vabu parameetreid (antud juhul viskepunkti ja -nurka) hästi väikeste (formaalselt lõpmatult väikeste) juurdekasvude võrra ning vaadata, mis juhtub minimiseeritava suurusega. Kui ta kasvab kõikide lubatavate variatsioonide puhul, siis ongi tegemist miinimumiga. Edasi tuleb mängu idee dünaamikast, **idee nr. 25:** vabalangemise puhul kehtib energia jäävuse seadus. Konkreetsemalt antud juhu jaoks: keha kiiruse moodul antud punktis on määratud tema kiiruse mooduliga mingis teises punktis ning nende punktide kõrguste vahega. Nüüd jääb üle ainult rakendada ideed nr 22.



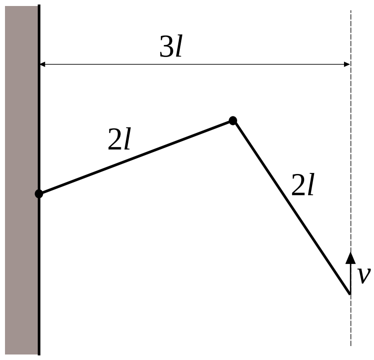
Ülesanne 21

Silindrile on mähitud niit , mille teine ots on kinnitatud seina külge. Silinder asub horisontaalsel alusel, mida tõmmatakse horisontaalsuunalise kiirusega v (silindri telje suhtes risti). Leidke silndri telje kiirus sõltuvuses niidi ja vertikaalsihi vahelisest nurgast a. Silinder veereb alusel ilma libisemiseta

Vastus: $v_0 = v\,/\,(1 + \sin\alpha)$

See ülesanne kuulub omaette ülesannete klassi, kus nöör on mässitud võllile ja võll veereb mingit pinda mööda.. Sellisel juhul tuleb rakendada **ideed nr 26:** on vaja välja kirjutada seos nööri võllilt maha kerimise kiiruse ja võlli edasiliikumise kiiruse vahel. Konks on nimelt selles, et mahakerimise kiiruse saab alati avaldada ka võlli pöörlemise kiiruse abil (ΩR, kus Ω on võlli nurkkiirus [eeldusel, et välja keritud nööri siht ei pöörle; vastasel juhul tuleb võtta nende nurkkiiruste vahe]). Koostatud võrrandisüsteemist saab harilikult leida, mis vaja. Esimese võrrandi välja kirjutamiseks võib kasutada **ideed nr 27:** joonistage välja süsteemi (antud juhul võll koos nööriga) kaks hästi lähedast (lõpmatult lähedast) asendit ja vaadake, milline on uuritava suuruse (antud juhul nööri pikkuse) muut. Seejuures ärge unustage, et süsteemi muutus oli lõpmatult väike ja tehke arvutustes vastavaid lähendusi (näiteks nööri kaks järjestikust asendit võib lugeda üksteisega paralleelseteks).

Ülesanne 22



Šarniirne konstruktsioon koosneb kahest lülist pikkusega $2l$. Tema üks ots on kinnitatud seina külge, teine aga liigub kaugusel $3l$ seinast konstantse vertikaalse kiirusega v_0. Leida šarniirse ühenduspunkti kiirendus sel hetkel, kui *a*) seinapoolne lüli on horisontaalne *b*) ühenduspunkti kiirus on null.

Vastus: mõlemal juhul $a = v_0^2 / \sqrt{3}l$

Siin kulub ära kaks ideed. **Idee nr 28:** kuivõrd kõva keha liikumisel tema suvalise kahe punkti vaheline kaugus ei muutu, siis kummagi punkti kiiruste projektsioonid neid punkte ühendavale sirgele on võrdsed. **Idee nr 29:** kui kõva keha pöörleb ümber fikseeritud pöörlemistelje, siis tema suvalise punkti kiirendus koosneb kahest komponendist: pöörlemistelje poole suunatud kesktõmbe kiirendusest $\omega^2 r = v^2/r$ ja sellega risti olevast komponendist εr. Siinjuures ω tähistab keha nurkkiirust, ε — nurkkiirendust ja r—kaugust pöörlemisteljest. **Hoiatus nr 5:** siin ei ole jutt mitte hetkelisest pöörlemisteljest, vaid telg peab olema tõesti paigal (täpsemini, hetkelise pöörlemistelje asukoha kiirendus peab olema null).

Idee nr 30: mõnikord on abi sellest, kui tuua lisaks ruumikoordinaatidele sisse ka ajatelg ja tasandilise liikumise puhul vaadelda 3-mõõtmelisi graafikuid — seda isegi siis kui ülesande tekstis otseselt ajalisest sõltuvusest juttu ei ole.

Ülesanne 23 *(Kvant F828)*

Punktidest *A*, *B* ja *C*, mis asuvad ühel ja samal sirgel nii et *B* asub *A* ja *C* vahel, hakkavad konstantsete (kuid erinevate) kiirustega liikuma kolm keha *a*, *b* ja *c*. On teada, et *i)* kui keha *c* puuduks, siis *a* ja *b* põrkuksid omavahel ja *ii)* kui keha *b* puuduks, siis *a* ja *c* põrkuksid omavahel ning see toimuks enne kui juhtumil *i)*. Kas *b* ja *c* põrkuksid omavahel kui puuduks keha *a*?

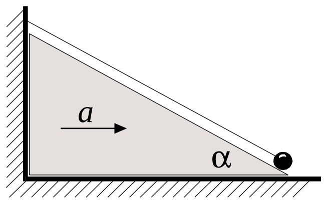
Vastus: jah

Selle ülesande juures on abi veel ka stereomeetrilistest teadmistest, näiteks, et 3 punkti lebavad alati mingil tasandil, ning et sirge ja üks punkt määravad samuti tasandi. Seega võib esialgselt kolme-mõõtmelisena paistnud liikumine osutuda kahe-mõõtmeliseks.

Kokkuvõte

Siin vaadeldud lahendusideedest osa on universaalsemad (nr. 1, 2, 3, 5, 8, 11, 12, 16, 19, 24, 27), osa vähem universaalsed. Igatahes tasuks nad kõik meelde jätta. Ja edaspidi uute ülesannete lahendamisel tuleks peale lahenduse leidmist teha enese jaoks kokkuvõte, milles seisnes idee. Lõpetuseks olgu veel mõned ülesanded, mis baseeruvad eelpooltoodud ideedel.

Ülesanne 24 *(Kvant F718, Ven.ol. 1981, 8.kl.)*



Kiilul tipunurgaga α lebab kuulike *A*, mis on seotud venimatu niidi külge, mille teine ots on kinnitatud vertikaalse seina külge punktis *B* (vt. joonis). Milline on kuul trajektoor? Milline on ta kiirendus kui kiilu kiirendus on a_0?

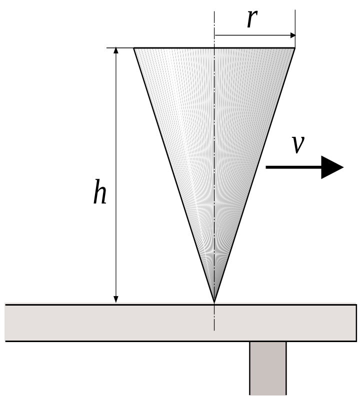
Vastus: $a = 2a_0 \sin\alpha/2$

Ülesanne 25

Koer ajab taga rebast, kes jookseb ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega v_1. Koera kiiruse moodul on küll konstantne ja võrdne v_2-ga, kuid tema vektor on suunatud alati rebase peale. Sel hetkel kui koera ja rebase kiirusvektorid olid üksteisega risti, oli kahe looma vaheline kaugus l. Milline oli koera kiirendus sel samal hetkel?

Vastus: $a = v_1 v_2 / l$

Ülesanne 26 *(NSVLol. 1982, 8.kl.)*



Siledat lauda mööda liigub kiiresti pöörlev koonuse kujuline vurr (kõrgus h, raadius r). Milline peaks olema ta kulgliikumise kiirus v, et ta ei lööks ennast vastu laua serva ära kui ta üle laua ääre jõuab?

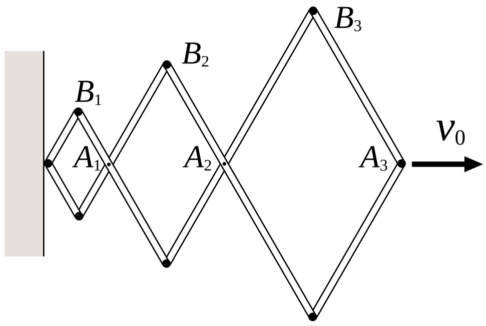
Vastus: $v \geq \sqrt{r^2 g / 2H}$ (NB! vajalik on tõestus, miks külje vastu löömine ei ole ohtlik).

Ülesanne 27

Lõhkeainest on valmistatud ühtlane nöör, mida mööda põlemine levib kiirusega v. Lööklaine kiirus õhus on c, kusjures $v<c$. Millist joont mööda oleks vaja paigutada nöör, et lööklaine jõuaks etteantud punkti kõigist nööri punktidest üheaegselt?

Vastus: mööda logaritmilist spiraali (milliste parameetritega?)

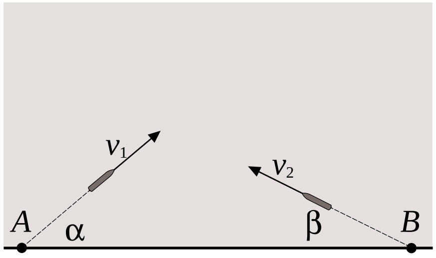
Ülesanne 28 *(NSVLol. 1980, 9.kl.)*



Šarniirne konstruktsioon koosneb rombidest, mille küljed on vastavalt l, $2l$ ja $3l$ (vt. joonis). Punkt A_3 liigub konstantse horisontaalse kiirusega v_0. Leidke punktide A_1, A_2 ja B_2 kiirused sel hetkel, kui konstruktsiooni kõik nurgad on täisnurgad. Lisa–küsimus (olümpiaadil puudus): leidke punkti B_2 kiirendus.

Vastus: $v_0 / 6$, $v_0 / 2$, $v_0\sqrt{5} / 6$, $\sqrt{2}v_0^2 / 36R$

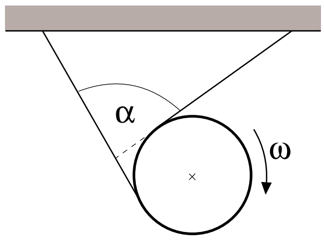
Ülesanne 29



Kahest sadamast (A ja B) mille vaheline kaugus on l, väljuvad samaegselt kaks kaatrit kiirustega vastavalt v_1 ja v_2. Nende kiiruste ja A-d ning B-d ühendava sirge vahelised nurgasd on vastavalt α ja β. Milline on kahe kaatri vaheline minimaalne kaugus?

Vastus: $l \sin\phi$, kus $\tan\phi = (v_1 \sin\beta - v_2 \sin\alpha) / (v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha)$.

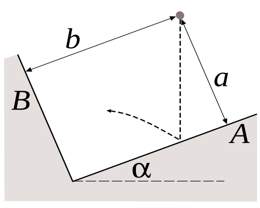
Ülesanne 30



Raske ketas raadiusega R veereb allapoole rullides lahti kahte nööri, mis on kinnitatud lakke. Ketta liikumise käigus on nöörid kogu aeg ühtlase pinge all. Milline oli sel hetkel ketta keskpunkti kiirus, kui tema pöörlemise nurkkiirus oli w ja nurk niidi sihtide vahel α?

Vastus: $\omega R / \cos(\alpha / 2)$

Ülesanne 31

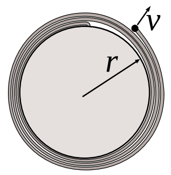


Kaks lauda on asetatud üksteise suhtes täisnurga alla, nende puutejoon on horisontaalne, kuid nad ise on viltu ning üks neist (A) moodustab horisontaaltasandiga nurga α. Elastne kuul lastakse lahti punktis, mille kaugus tasandist A on a ning tasandist B — b. Leida, kui mitu põrget teeb kuul keskmiselt vastu seina B iga põrke kohta vastu seina A? Põrked lugeda absoluutselt elastseteks.

Vastus: $\sqrt{a \tan\alpha / b}$

Ülesanne 32 *(Kvant F734)*

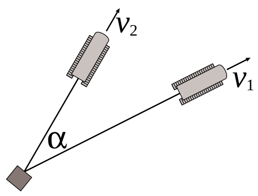
Nöör on kinnitatud ühte otsa pidi silindri külgpinnale maapinna vahetus läheduses. Silinder ise on kinnitatud siledale libedale horisontaalpinnale nii, et ta telg on vertikaalne. Nöör on mähitud *k* korda ümber silndri. Nööri vaba otsa külge on seotud klots, millele antakse horisontaalsuunaline kiirus *v*, mis on suunatud piki silndri teljelt tõmmatud raadius-vektorit. Millise aja pärast on nöör silindrile teistpidi tagasi mähitud?



Vastus: $2\pi^2 kr(2k+1)/v$

Ülesanne 33

Rasket kasti veetakse kahe traktori abil, ühe kiirus neist on v_1, teise kiirus — v_2; kiiruste vaheline nurk on α. Milline on kasti kiirus, kui eeldada, et köied on paralleelsed kiirusvektoritega?



Vastus: $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha} \,/\, \sin\alpha$