

# ÜLESANDEID MEHAANIKAST

J K



## SISSEJUHATUS

Antud vihik on jätkuiks kinemaatika ülesannete kogule. Nii nagu kinemaatikagi puhul on püütud tuua välja põhilised lahendusideed, mille abil peaks olema võimalik lahendada enamik (>95%) mehaanika alastest olümpiaadiülesannetest. Harilikult on toodud kõigepealt ülesanne ning seejärel asjakohased ideed ja soovitus (K-täht idee numbri ees viitab sellele, et algformuleeringu võib leida antud numbri all kinemaatika kogust). Ülesande vastused on toodud kogumiku lõpus, veidi eespoolt võib leida vihjeid — kohati üsnagi detailseid soovitusi ülesannete lahendamiseks (kuid siiski mitte täislahendusi); nende piilumine jäägu siiski hädaväljapääsuks.

Kogumiku kandvaks teljeks on väide, et pea-aegu kõik olümpiaadiülesanded on kirjutatud “variatsioonina” teatud teema(de)l — lahendamiseks on vaja lihtsalt teada vastavat lahendusideed. Teades piisavat hulka lahendusideid pole harilikult kuigi raske ära tunda see õige ja antud ülesande jaoks sobilik idee. Kahtlemata oleks hulga loomingu iseloomu kohapeal kõik vajalikud lahendusideed välja mõelda, see pakuks märksa suuremat lahendamisrõõmu. Paraku on uute ideede väljamõtlemisotskus väga raskesti õpitav/õpetatav (vahest ehk võimatugi). Pealegi võib uue ideeni jõudmine võtta palju aega ning olümpiaadil selle peale lootma jäädes oleksime teistega (nendega, kes ideid valdavad) võrreldes ebasoodsas olukorras.

Lahendusideedega on teaduses kui tervikus samamoodi kui olümpiaadiülesannetegi puhul: enamus teadusartikleid on olemasolevate ideede rakendamine ja kombineerimine uute (halvemal juhul vanade) probleemide lahendamiseks, parimal juhul ka ideede mõningane edasi arendamine ja üldistamine. Tõeliselt uudseid ja häid ideid

esineb äärmiselt harva ning hiljem tuntakse olulist osa neist teaduse suursaavutustena. Kuivõrd aga teaduses tervikuna on ideede repertuaar võraturalt laiem, kui mehaanikas, siis polegi õigeid ideid õiges kohas nii lihtne meenutada ja rakendada ning vastav oskus on väga kõrges hinnas; eriliseks saavutuseks on see, kui üldtuntud ideed õnnestub rakendada harjumatus (ootamatus, uudses) olukorras.

Peale ideede on antud kogumikus esitatud ka “fakte” ja “meetodeid”. Selline jaotus on suuresti meelevaldne, mõnda fakti oleks võinud sama hästi nimetada ka ideeks ja vastupidi. Põhimõtte järgi peaks “idee” olema laiemalt ja/või loominguilisemalt rakendatav kui “fakt”; “meetodi” puhul on tegemist universaalse ning standardiseerunud “ideega”.

Ülesandeid on võetud mitmesugustest allikatest: Eesti olümpiaadide piirkondlikest- ja lõppvoorudest, ajakirjast “Kvant”, Venemaa ja NSVL-i olümpiaadidelt; mõnesid ülesandeid on muudetud (lihtsamaks või keerulisemaks), mõned ülesanded on nõ suuline pärimus (algpäritolu teadmata).

## STAATIKA

Staatika ülesannete puhul on lahenduskäik harilikult standardne: tuleb välja kirjutada igale kehale mõjuvate jõudude tasakaalu tingimus  $x$ -,  $y$ - ja vajadusel ka  $z$ -komponendi jaoks; sageli tuleb neile lisada veel jõumomentide taakaalu tingimus. Tavaliselt on põhiliseks kavaluseks

**1:** teljestik tuleb valida optimaalne, st nii, et võimalikult paljude jõudude projektsioonid lähedaks nulliks. Eriti hea on, kui nulliks lähedavad nende jõudude projektsioonid, mida me ei tea ja mis meid tegelikult ei huvita,

näiteks kahe keha vaheline rõhumisjõud või pingepinge niidis (vardas). Nullimaks võimalikult paljude jõude tasub silmas pidada, et a) teljed ei tarvit-

se olla risti; b) kui süsteem koosneb mitmest kehast, siis võib iga keha jaoks valida ise teljestiku.

**2:** jõumomentide võrrandi kirjutamisel on tark valida pöörlemistelg nii, et võimalikult paljude jõudude õlad oleksid nullid. Jällegi on eriti tõhus nullida “ebahuvitavate” jõudude momente.

Näiteks kui valida pöörlemisteljeks kahe keha puutepunkt, siis on nii nende kehade vahelise hõõrdejõu kui ka rõhumisjõu õlg null.

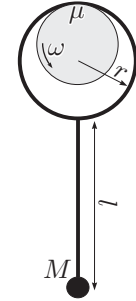
**3:** kui on tegemist kahemõõtmelise süsteemiga, siis saab iga keha jaoks välja kirjutada kaks võrrandit jõudude jaoks ( $x$ - ja  $y$ -komponendid) ning ühe võrrandi jõumomentide jaoks.

Jõumomentide võrrandi võib kirjutada suvalise punkti (pöörlemistelje) suhtes ja põhimõtteliselt võiks kirjutada mitu võrrandit mitme punkti jaoks korraga, kuid koos jõudude võrranditega on maksimaalne lineaarselt sõltumatute võrrandite arv võrdne keha vabadusastmete arvuga (antud juhul kolmega, sest keha saab pöörelda tasandis, nihkuda piki  $x$  ja  $y$ -telge). St võib kirjutada ühe jõu võrrandi ja kaks momentide võrrandit (või kolm momentide võrrandit — eeldusel, et kasutatud pöörlemisteljed ei leba ühes tasandis) ning kõik on kombes; kui aga kirjutada kumastki sordist kaks võrrandit, siis neljast võrrandist üks tuleneb alati kolmest ülejäänust ja teda pole tegelikult mingit mõtet kirjutama hakata.

Niisiis võib jõudude tasakaalu kirjeldava võrrandi asendada momentide võrrandiga täiendava telje suhtes. Selline asendus võib osutuda otsustavaks juhul, kui soovimatud (ebahuvitavad) jõud ei ole üksteisega paralleelsed, sest siis saab jõudude võrrandi puhul projektsiooni telge valides nullida vaid ühe jõu, pöörlemistelge valides aga korraga kaks jõudu.

**ÜL 1.** Kerge traatvarda üks ots on keeratud rõngaks raadiusega  $r$ . Varda sirge osa pikkus on  $l$  ja teise otsa külge on kinnitatud kuulike massiga  $M$ . Sel viisil moodustatud pendel on riputatud

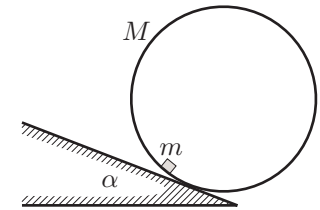
rõnga abil pöörleva võlli külge. Hõõrdetegur võlli ja rõnga vahel on  $\mu$ . Leida millise nurga moodustab varras tasakaaluasendis vertikaalsihiga.



Selle ülesande puhul ongi vaja rakendada eeskätt ideed nr 2; lahendust lihtsustab see, kui on meelest kergesti tuletatav

**1:** kaldpinnal algab libisemine siis, kui kaldenurk  $\alpha$  rahuldab tingimust  $\tan \alpha = \mu$ .

**ÜL 2.** Kaldpinnal kaldenurgaga  $\alpha$  asub silinder massiga  $M$ , mille telg on horisontaalne ning mille sisepinnal lebab pisike klotsike massiga  $m$ . Klotsi ja silindri vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ , kaldpind on aga hästi kare, silinder seal ei libise. Milline on maksimaalne kaldenurk  $\alpha$ , mille puhul silinder püsib paigal? Klotsi mõõtmed on hulga väiksemad silindri raadiusest.



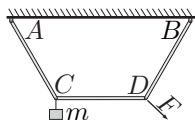
Siin saab jällegi kasutada fakti nr 1 ja ideed nr 2, kuid lisandub

**4:** mõnikord on kasulik vaadelda kahest (või enamast) kehast koosnevat süsteemi kui ühtset tervikut ning kirjutada jõudude ja/või jõumomentide võrrandi terve selle süsteemi jaoks.

Seejuures võib süsteemile mõjuva summaarse jõu (või jõumomendi) arvutada komponentkehadele mõjuvate välisjõudude (jõumomentide)

summuna (töövaeva vähendab see, et süsteemi sisejõudused pole vaja arvestada — need taanduksid välja). Antud juhul tasub terviksüsteemi- na vaadelda silindrit koos klotsiga.

**ÜL 3.** Kolm ühesugust varrast on ühendatud šarniirselt ning kaks otsmist on šarniirselt kinnitatud horisontaalse lae külge punktides  $A$  ja  $B$ . Nende punktide vaheline kaugus on kaks korda suurem, kui varraste pikkus. Šarniirse ühenduse  $C$  külge on riputatud koormis massiga  $m$ . Millise minimaalse jõuga on vaja hoida šarniiri  $D$ , et süsteem püsiks paigal ja varras  $CD$  oleks horisontaalne?



Taas saame rakendada ideed nr 2 Peale selle lihtsustab töövaeva

**2:** kui vardale mõjuvad jõud on rakendatud ainult kahte punkti ning varda kinnitus pole jäik (st varras on vabalt toetuv, nõõri või šarniiri külge kinnitatud), siis on pinge vardas suunatud piki varrast.

Tõepoolest, kummalegi jõudude rakenduspunktile mõjuvate väliste jõudude resultant  $\vec{F}$  peab olema suunatud piki varrast, sest tema jõumoment teise rakenduspunkti suhtes peab olema null. Lisaks välistele jõududele mõjub rakenduspunktile veel varda pinge  $\vec{T}$ , mis peab kompenseerima ülejäänud jõudude summa, st  $\vec{F} = -\vec{T}$ .

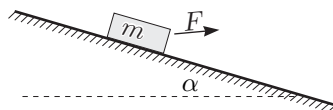
Osa ideid on väga universaalsed, eeskätt puudutab see matemaatikaga seonduvat. Meenutagem kinemaatika juures õpitut.

**K5:** mõnesid ekstreemumeid on lihtsam leida ilma tuletisteta,

nt lühim tee punktist tasandini on risti sellega.

**ÜL 4.** Millist minimaalset jõudu on vajalik rakendada selleks, et nihutada paigalt kaldpinnal leavat klotsi, mille mass on  $m$ , kui hõõrdetegur on  $\mu$  ja kaldenurk  $\alpha$ ? Vaadelda juhtumeid kui

a)  $\alpha = 0$ ; b)  $0 < \alpha < \arctan \mu$ .



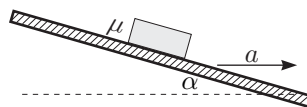
**5:** Mõnikord saab jõudude tasakaalus selguse kätte vektoriaalsel kujul, polegi vaja hakata telgedele projekteerima.

Tulusaks osutub jällegi fakt nr 1, õigemini selle üldistus,

**3:** kui keha on libisemise piiri peal (või libiseb), siis hõõrdejõu ja rõhumisjõu summa ning pinnanormaali vaheline nurk on  $\arctan \mu$ .

Seda fakti saab kasutada järgmiseski ülesandes.

**ÜL 5.** Klots lebab kaldpinnal, mille kaldenurk on  $\alpha$ . Kaldpind liigub horisontaalsuunalise kiirendusega  $a$ , mis asub kaldpinna normaaliga ühes ja samas vertikaaltasandis. Millise hõõrdeteguri  $\mu$  puhul klots ei libise?



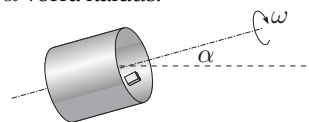
Siin aitab väga universaalne

**6:** paljud ülesanded lahenduvad lihtsalt, kui minna üle mitteinertsiaalsesse kulgevast liikuvasse taustsüsteemi, kus lisandub inertsijõud.

Selgituseks: kulgevast liikuva taustsüsteemi puhul saab Newtoni seadused taas kehtima panna, kui lugeda, et igale kehale massiga  $m$  mõjub inertsijõud  $-m\vec{a}$ , kus on  $\vec{a}$  taustsüsteemi kiirendus. Paneme tähele, et see jõud on igati analoogne raskusjõuga ning ääremärkusena olgu öeldud, et nende kahe jõu ekvivalentsus on üldrelatiivsusteooria nurgakivi (veidi täpsemalt formuleerides on selleks asjaolu, et lokaalsete mõõtmiste teel pole võimalik kindlaks teha, kas on tegemist inertsii- või raskusjõuga).

**7:** inertsijõu ja raskusjõu resultanti võib vaadelda efektiivse raskusjõuna.

**ÜL 6.** Silinder raadiusega  $R$  pöörleb ümber oma telje nurkkiirusega  $\omega$ . Silindri sisepinnal on pisike klots ning klotsi ja silindri sisepinna vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ . Leidke, milliste  $\omega$  väärtuste puhul püsib klots silindri suhtes ilma libisemata paigal. Vastata juhtumil a) kui silindri telg on horisontaalne; b) telg on horisondi suhtes nurga  $\alpha$  võrra kaldus.



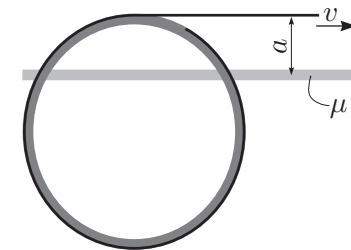
**8:** minna võib ka pöörlevasse taustsüsteemi lisades tsentrifugaaljõu  $m\omega^2 \vec{R}$  ( $\omega$  on süsteemi nurkkiirus ning  $R$  — pöörlemisteljest vaadeldavasse punkti tõmmatud vektor) ja Coriolis'i jõud. Viimast pole vaja arvestada (a) kui keha seisab pöörlevas taustsüsteemis paigal või liigub paralleelselt pöörlemisteljega (Coriolis'i jõud on null); (b) energia jäävuse seaduses (Coriolis'i jõud on risti kiirusega ja seetõttu ei muuda energiat).

Hoiatus: pöörlemistelg peab olema antud idee rakendamisel tõeline, mitte hetkeline. Viimase ülesande puhul tasub meenutada ka ideed nr K5 ja fakti 3; punkti (b) juures lisandub

**9:** kolmemõõtmelise geomeetria puhul tasub vaadelda kahemõõtmelisi löikepinde. Eriti hea on, kui õnnestub saavutada olukord, kus kõik huvipakkuvad objektid (näiteks jõuvektorid) asuvad sellel löikepinnal. Pole midagi hullu, kui need löikepinnad peaksid muutma ajas oma ruumilist asendit.

**ÜL 7.** Õõnes silinder massiga  $m$  ja raadiusega  $R$  seisab horisontaalsel alusel; tema alumine serv on sile ja kõikjal kontaktis aluspinnaga. Silindri le on mähitud niit, mille vaba otsa tõmmatakse konstantse kiirusega  $v$  piki niidi sihti. Leidke, millise kiirusega liigub silinder. Vaadelda eraldi kahte juhtumit: (a) aluspinna ja silindri vaheli-

ne hõõrdetegur on kõikjal null, välja arvatud kitsas sirge vööt (hulga kitsam silindri raadiusest) hõõrdeteguriga  $\mu$ , mis on niidiga paralleelne ja mille kaugus niidist on  $a < 2R$  (joonisel on näidatud pealtvaade); (b) aluspinna hõõrdetegur on kõikjal konstantne ning võrdne  $\mu$ -ga. *Juhtnõör:* kõva keha suvaline liikumine on vaadeldav pöörlemisena ümber hetkelise pöörlemistelje, so keha iga punkti kiirusvektor on täpselt sama nagu siis, kui hetkeline telg oleks tõeliseks pöörlemisteljeks.



Tegemist on võrdlemisi raske ülesandega. Lahendamisel tuleb abiks

**10:** kui keha peab liikuma konstantse kiirusega, siis on faktiliselt tegemist staatika ülesandega.

Meenutada tasub ka ideid 1 ning 2. Viimase asemel võib rakendada temast tuletatud fakti.

**4:** Kui tasakaalus kehale mõjuvad kolm eri punktidesse rakendatud jõudu, siis nende pikendused lõikuvad ühes punktis. Kui rakenduspunkte on kaks, siis jõudude pikendus-sirged ühtivad.

Kasulik on veel

**5:** antud punktis mõjuv hõõrdejõud on alati paralleelne (ja vastassuunaline) punkti kiirusega hõõret põhjustava keha seotud taustsüsteemis.

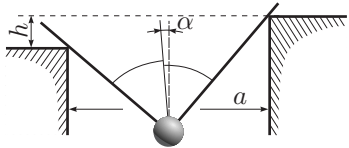
Füüsika ülesannete puhul kuluvad aeg-ajalt ära ka väikesed matemaatilised nipid; antud juhul on selleks piirnurkade omadus,

**6:** täisnurk toetub poolringile (üldjuht: piirnurk radiaanides on pool oma kaare pikkuse ja raadiuse suhtest).

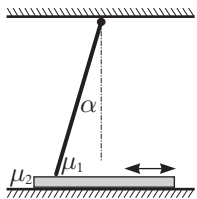
Piirnurkade omadust saab kasutada ka järgmises ülesandes, kui võtta abiks (võrdlemisi triviaalne)

**11:** stabiilse tasakaalu olekus on keha potentsiaalne energia minimaalne.

**ÜL 8.** Kerge traat on keeratud täisnurkseks ning murdekohta on kinnitatud massiivne kuul. Traat toetub vastu tugesisid, mille kõrguste vahe on  $h$  ja mille horisontaalsihiline kaugus on  $a$ . Leidke, millise asendi võtab traat tasakaaluasendis. Asendi iseloomustamiseks kasutage nurka täisnurga poolitaja ja vertikaalsihi vahel. Hõõre traadi ja tugede vahel lugege nulliks; tugedel on traadi jaoks tehtud väikesed sooned, nii et kogu liikumine toimub traadi ja joonise tasandis.



**ÜL 9.** Šarniirise kinnituse abil on lakke riputatud varras, mille pikkus  $l > h$ , kus  $h$  on lae kõrgus põrandast. Varda ülesanne on võimaldada mööda põrandat lohstatava plaadi liikumist ühes suunas, kuid takistada tema liikumist vastassuunas. Millise tingimuse puhul ta täidab oma ülesannet? Hõõrdetegur plaadi ja varda vahel on  $\mu_1$  ning plaadi ja põranda vahel  $\mu_2$ .

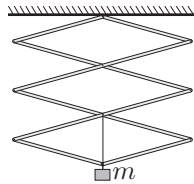


Meenutame fakti 3: kui kahe keha vaheline libisemine toimub fikseeritud suunas, siis on hõõrde- ja rõhumisjõu resultantvektori suund üheselt määratud hõõrdeteguriga. Kui antud suunas mõjuv jõud paneb ühe kehast liikuma selliselt, et rõhumisjõud hakkab kasvama, siis

toimub blokeerumine: mida suurema jõuga me üritame kehi libistada, seda suuremaks lähevad rõhumis- ja hõõrdejõud, mis seda takistavad.

**12:** hõõrdejõud võivad blokeerida keha liikumise. Blokeerumise korral muutuvad kõik muud jõud ebaolulisteks peale rõhumis- ja hõõrdejõu ning välise jõu, millega üritatakse süsteemi liikuma panna, sest raskus- jms jõud on fikseeritud väärtusega, kuid antud jõud lähevad seda suuremaks, mida tugevamini tõmmata.

**ÜL 10.** Šarniirsel kinnitatud neljast pikast ja neljast poole lühemast vardast on moodustatud süsteem, mis näeb välja nagu kolm ühesugust otstest ühendatud rombi. Ühest otsast on see kaadervärk riputatud šarniirise kinnituse abil lakke; teises otsas ripub koormis massiga  $m$ . Koormise juures asuv šarniir on ühendatud niidi abil tema kohal asuva šarniiri külge. Leidke pinge selles niidis.



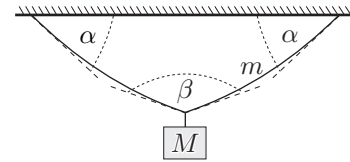
Kõige lihtsam on lahendada kasutades *virtuaalse nihke meetodit*.

**1:** Kujutlegem, et me võimuses on muuta selle niidi või varda pikkust, mille pinget küsitakse, väikese nihke  $\Delta x$  võrra. Võrrutame tehtud töö  $T\Delta x$  potentsiaalse energia muuduga  $\Delta\Pi$ ; seega  $T = \Delta\Pi/\Delta x$ .

*Üldistus:* kui süsteemile mõjuks veel teatud välised jõud  $\vec{F}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  mille rakenduspunktide nihkevektorid virtuaalse nihke  $\Delta x$  korral on  $\delta\vec{x}_i$ , siis  $T = (\Delta\Pi - \sum_i \delta\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i)/\Delta x$ .

Meetodit on võimalik kasutada ka siis, kui küsitakse jõudu ja mitte pinget (näiteks ploki ülesannete puhul): nihutades mõtteliselt otsitava jõu rakenduspunkti saab leida selle jõu projektsiooni vaadeldud mõttelise nihke sihile.

**ÜL 11.** Nöör massiga  $m$  on riputatud mõlemat otsa pidi lakke ja tema keskohta on kinnitatud koormis massiga  $M$ . Nööri otste juurest tõmmatud nöörü puutujad moodustavad horisontaalse laega nurga  $\alpha$ . Milline on koormise kinnituspunkti juurest tõmmatud nöörü puutujate vaheline nurk  $\beta$ ?



**7:** Vabalt rippuva massiivse niidi pinge on suunatud piki niidi puutujat.

Lisaks kulub ära

**13:** mõnikord tasub mõtteliselt eraldada niidist mingi lõik ning vaadelda sellele lõigule mõjuvate jõudude tasakaalu komponentkujul.

Õigupoolest ei lähe siinkohal vaja mitte ideed kui tervikut, vaid sellest tuletatud fakti.

**8:** massiivse niidi pinge horisontaalkomponent on konstantne.

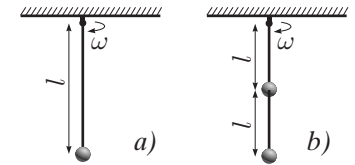
Kõite puhul võib olla kasulik ka

**14:** Kui rippuva kõieosa kaal on hulga väiksem tema pingest, siis on kõie kõverus väike ning tema horisontaalsihilise massijaotuse võib lugeda heas lähenduses konstantseks.

See tõdemus võimaldab välja kirjutada rippuvale kõieosale mõjuvate jõumomentide tasakaalu tingimuse (sest me teame massikeskme horisontaalkoordinaati). Illustreerimiseks sobib järgmine ülesanne.

**ÜL 12.** Poiss veab enda järel  $L = 50$  m pikkust köit mööda horisontaalpinda hõõrdeteguriga  $\mu = 0,6$ , hoides kõie otsa kõrgusel  $H = 1$  m maapinnast. Milline on maad mittepuudutava kõieosa pikkus  $l$ ?

**ÜL 13.** Šarniirsel kinnitatud kerge varras pikkusega  $l$  annab liikuma üksnes ühes tasapinnas. Šarniiri keerutatakse ümber vertikaalse telje nurkkiirusega  $\omega$ . Varda teise otsa külge on kinnitatud kuulike. (a) Leidke, milliste nurkkiiruste puhul on varda vertikaalne rippuv asend stabiilne. (b) Kuuli külge on kinnitatud samasuguse šarniiri abil teine samasugune varras; ülemist šarniiri keerutatakse endisel viisil. Milline on nüüd rippuva asendi stabiilsuse tingimus?



Kui küsitakse, kas tasakaalu asend on stabiilne, töötab harilikult kõige paremini

**15:** oletage, et süsteem kaldub tasakaaluasendist veidi kõrvale, kas väikese nihke  $\Delta x$  või väikese nurga  $\Delta\varphi$  võrra ning vaadake, kuhu suunas mõjub nüüd jõud või jõumoment, kas tasakaaluasendi poole või sellest eemale. NB! kasutage ligikaudset arvutust: peaaegu alati piisab kõrvalekalde järgi lineaarsest lähendusest.

Mh võib kasutada kõiki matemaatikast teada ligikaudse arvutamise valemeid ( $\sin\varphi \approx \varphi$  jms),

**16:**  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2$ ;  $(x + \Delta x)(y + \Delta y) \approx xy + x\Delta y + y\Delta x$  jne (kaaluge rakendatavust kõikjal, kus andmed viitavad teatud parameetri väiksusele).

Juhtum (b) on märksa keerulisem, sest süsteemil on kaks vabadusastet (nt varraste kõrvalekalde nurgad  $\Delta\varphi_1$  ja  $\Delta\varphi_2$ ). Kuigi ka ideed 15 on võimalik üldistada enama kui ühe vabadusastme jaoks, on ilmselt lihtsam võtta aluseks idee 11.

**17:** kahe vabadusastmega süsteemi tasakaaluasend  $x = y = 0$  on stabiilne siis, kui potentsiaalsel energial  $\Pi(x, y)$  on ühe-muutuja funktsioonil



sioonina  $\Pi(x, kx)$  miinimum kõikide reaalarvuliste konstantide  $k$  puhul.

**ÜL 14.** Kui asetada vette ruudu kujulise ristlõikega pruss, mille tihedus on hästi väike, siis võtab pruss niisuguse asendi, kus ühed tema pikakadest vastastahkudest on horisontaalsed. Kui prussi tihedust suurendada, siis see asend muutub ebastabiilseks. Leidke, millise tiheduse juures toimub see üleminek. Vee tihedus  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**18:** vedelikku asetatud kehale mõjuvate rõhumisjõudude pöördemoment on võrdne temale mõjuva Archimedese jõu momendiga, kui lugeda Archimedese jõud rakendatuks välja surutud vedeliku massikeskmesse.

Tõesti, vaadeldgem keha, mis on kujult identne antud keha vedeliku sisse jääva osaga ning mille tihedus on sama, mis vedelikulgi. Muidugi mõista on ta peale vedelikku asetamist tasakaalus: millise punkti suhtes me ka momente ei vaatle, rõhumisjõudude momentide summa on alati võrdne raskusjõu momendi vastandväärtusega.

Antud ülesande juures tasub Archimedese jõu momendi arvutamisel pidada silmas, et tükikidele võib omistada negatiivse massi: kui katuvad kaks tükki, mille tihedused on moodulilt võrdsed kuid erimärgilised, siis summas annavad nad null-tiheduse. Viimase soovitusse saab formuleerida veidi üldisemal kujul,

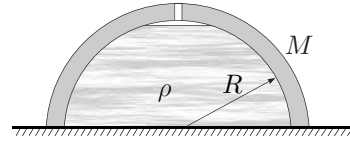
**19:** mõnikord tasub konfiguratsiooni sümmeetrilisuse või muidu lihtsama käideldavuse huvides esitada null-väärtusega piirkond kahe vastandmärgilise piirkonna superpositsioonina.

Tegemist võib olla massitihedusega (nagu praegu), laengu või voolu ruumtihedusega, mingi jõuväljaga vms. Antud nippi on sageli hea kombineerida teise ideega,

**20:** muutke ülesanne nii sümmeetriliseks kui võimalik.

Selle sihini võib viia, nagu öeldud, idee 19, aga ka sobilike taustsüsteemide kasutamine, lahendamise jagamine mitmeks etapiks (kus mõned etapid kasutavad sümmeetrilist geomeetriat) jms.

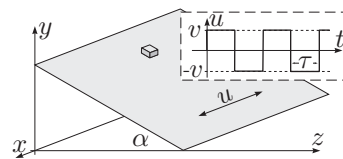
**ÜL 15.** Siledal horisontaalpinnal asuvasse kummuli asetatud poolsfääri kujulisse anumasse hakatakse valama vett läbi anuma põhjas asuva pisikese avause. Just sel hetkel, kui anum saab täis, hakkab anuma servade ja laua vahelt vett välja voolama. Leidke, milline on anuma mass  $M$ , kui vee tihedus on  $\rho$  ja poolsfääri raadius on  $R$ .



**21:** kui kummuli keeratud anuma alt hakkab vedelik välja voolama, siis on anuma serva ja aluse vaheline rõhumisjõud läinud nulliks. Seetõttu on süsteemile anum+vedelik laua poolt mõjuv jõud võrdne pelgalt hüdrostaatilise rõhumisjõuga.

Viimane avaldub kui  $pS$ , kus  $p$  on vedeliku rõhk laua pinna juures ning  $S$ — anuma suu pindala.

**ÜL 16.** Kaldpinnal kaldenurgaga  $\alpha$  asub klots, hõõrdetegur  $\mu > \tan \alpha$ . Kaldpinda liigutatakse kiiresti edasi-tagasi sel viisil, et kaldpinna kiirusvektor  $\vec{u}$  on paralleelne nii horisontaaltasandi kui ka kaldpinnaga ning moodul on kogu aeg konstantne ja võrdne  $v$ -ga; kiirusvektori suund muutub hüppeliselt iga ajavahemiku  $\tau$  järel vastupidiseks. Millise keskmise kiirusega  $w$  hakkab liikuma klots? Lugeda, et  $g\tau \ll v$ .



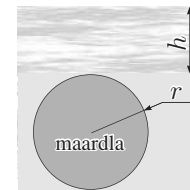
**22:** kui süsteem muutub kõrgsageduslikult, siis on harilikult otstarbekas detailsete arvutuste asemel kasutada üle aja keskmistatud väärtusi

$\langle X \rangle$ . Keerulisemates olukordades võib vaja minna ka rehkendusi kõrgsagedusliku komponendiga  $\tilde{X}$  (niisiis  $X = \langle X \rangle + \tilde{X}$ )

**2:** (häirituse meetod) kui mingi jõu mõju keha liikumisele on eeldatavasti väike, siis lahendage probleem kahes (või enamas) etapis: alul leidke, kuidas liiguks keha siis, kui jõudu ei olekski (see on nn null-lähendus); edasi tehke nägu, et keha liigubki nii, nagu eelmisel etapil leitud, kuid talle mõjub see väike jõud. Vaadake, milline parandus (nn esimene parand) tuleks tema tõttu viia null-lahendusse.

Antud juhul vajab null-lähendi valik mõningaid selgitusi. Tingimus  $g\tau \ll v$  viitab sellele, et ühe perioodi jooksul ei jõua klotsi kiirus kuigivõrd muutuda. Seega, kui klots libiseb alghetkel mingisuguse kiirusega  $w$  allapoole ja me vaatleme piisavalt lühikest ajavahemikku, siis võime klotsi kiiruse lugeda null-lähendina konstantseks ja liikumise sirgjooneliseks. Teisel etapil leiame hõõrdjõu keskväärtuse, tuginedes esimese etapi liikumisele.

**ÜL 17.** Vaatleme, mil määral võib rauamaardla mõjutada veepinna taset. Oletame, et ookeani põhjas sügavusel  $h = 2 \text{ km}$  asub rauamaardla. Arvutuste lihtsustamise huvides lugegem, et ta kujutab endast  $r = 1 \text{ km}$  raadiusega kera-kujulist piirkonda, kus tihedus on ümbritsevate kivimite tihedusest  $\Delta\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  võrra suurem. Oletagem, et see kera puudutab oma ülemise servaga ookeani põhja, so et tema keskpunkt asub sügavusel  $r + h$ . Kui palju erineb veepinna tase maardla kohal üldisest veepinnatasemest?



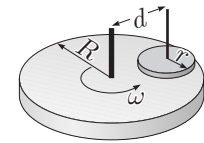
**23:** tasakaalus vedeliku pind võtab ekvipotentsiaalse kuju, so ühesuguste vedeliku osakese potentsiaalsed energiad on igas pinna punktis võrdsed.

Kui see nii ei oleks, saaks vedeliku potentsiaalset energiat vähendada sel teel, et lasta pinna pealsel vedeliku osakesel voolata mööda pinda sinna, kus ta potentsiaalne energia oleks väiksem.

**24:** gravitatsioonivälja potentsiaale saab arvutada täpselt sama moodi, nagu elektrostaatilisi potentsiaalegi.

Nimelt kehtib superpositsiooni printsiip ja kera potentsiaal erineb ainult kordaja poolest: elektrostaatilise  $Q/4\pi\epsilon_0 r$  asemel on kera gravitatsiooniline potentsiaal lõpmatuse suhtes  $\varphi = -GM/r$ ; miinusmärk tuleb sellest, et sama märgiga [“+”] massid tõmbuvad.

**ÜL 18.** Horisontaalne platvorm pöörleb ümber vertikaalse telje nurkkiirusega  $\omega$ . Ketas raadiusega  $R$  saab vabalt pöörelda ning üles-alla liikuda mööda hästi libedat vertikaalset võlli, mis asub platvormi teljest kaugusel  $d > R$ . Ketas vajutab raskusjõu tõttu vastu pöörlevat alust; hõõrdetegur tema ja platvormi vahel on  $\mu$ . Leidke, millise nurkkiirusega hakkab pöörlema ketas. Lugeda, et rõhk jaotub ühtlaselt üle kogu ketta põhja.



**25:** kui minna üle pöörlevasse taustsüsteemi, siis nurkkiirusi ümber hetkeliste pöörlemistelgedega saab liita nii, nagu harilikult kiirusigi liidetakse.

Seega  $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ , kus  $\vec{\omega}_1$  on taustsüsteemi nurkkiirus,  $\vec{\omega}_2$  on keha nurkkiirus pöörlevas taustsüsteemis ja  $\vec{\omega}_3$  — liikumatus taustsüsteemis. Antud ülesande juures on kasu veel faktist nr 49, ideedest 2, 8, 10 ja kulub ära ka

**K7:** kõva keha suvaline liikumine on esitatav pöörlemisena ümber hetkelise pöörlemistelje (keha punktide kiirusvektorite mõttes).

**3:** (diferentsiaalrvutus) jagage objekt lõpmatu väikesteks tükkeks või protsess lõpmatu lühikesteks perioodideks (kui vaja, siis kombineerige seda ideega 16).

Ühe lõpmatu väikese tüki (perioodi) piires võib lugeda ruumis (ajas) muutuvad suurused (antud juhul hõõrdejõu vektori suund) konstantseks. Kui vaja (vt järgmine ülesanne), võib neid suurusi summerida üle kõikide tükide — seda nimetatakse integreerimiseks.

**ÜL 19.** Poonimismasin kujutab endast rasket ketast massiga  $M$ , mis on ühelt küljelt kaetud tihedalt madalate harjastega nii, et kui ta lebab põrandal, siis kogu ta kaal jaotub ühtlaselt üle kogu ringi-kujulise ala raadiusega  $R$ . Elektrimootor paneb selle ketta pöörlema nurkkiirusega  $\alpha$  ning hõõrdejõudude tekitatud jõumomendi kompenseerib poonija pika käepideme abil. Sama käepideme abil saab poonimismasinat lükata mööda põrandat edasi-tagasi. Millise jõuga on vaja masinat lükata, et ta liiguks kiirusega  $v$ ? Ketta nurkkiirus lugeda suureks,  $\omega R \gg v$  ja pöördemomendi tasakaalustamiseks vaja minevat jõudu mitte arvestada, hõõrdeegur harjaste ja põranda vahel on  $\mu$ .

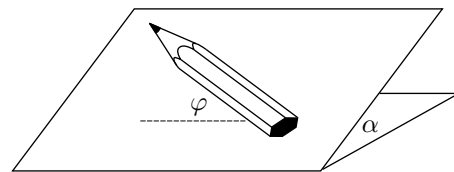
Siin läheb vaja fakti nr 49, ideid K7 ja 19 ning lisaks formuleerigem lisaks

**26:** katsuge välja selgitada ruumipiirkond, kus paarikaupa punktides toimub jõu (või jõumomendi vms) välja taandumine.

Sageli on need punktipaarid paigutatunud sümmeetriliselt. Asjakohane on ka meenutada ideed 20.

**ÜL 20.** Kaldpinnal (kaldenurk  $\alpha$ ) lebab kuuekandiline pliiats; pliiatsi telje ja kaldpinna ning horisontaaltasandi lõikejoone vaheline nurk on

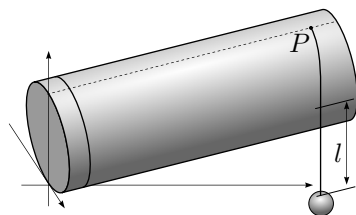
$\varphi$ . Millisel tingimusel ei veere pliiats alla?



**27:** Mõnikord on ruumiliste ülesannete lahendamisel abi koordinaatide arvutamisest sobilikult valitud teljestikes ning ruumipöörete valemite rakendamisest.

Mida (millist vektorit) siis antud juhul võiks komponentidena avaldada? Ainus tulutõotav valik on massikeskme väike nihkevektor liikuma hakkamisel ning lõpptulemusena huvitab meid ainult selle vertikaalkomponent.

**ÜL 21.** Libeda pinnaga silinder raadiusega  $R$  on kallutatud nii, et tema telg moodustab horisontaaltasandiga nurga  $\alpha$ . Silindri teatud ristlõike kõrgeimasse punkti  $P$  on kinnitatud niit pikkusega  $L$ , mille teise otsa küljes on koormis massiga  $m$ . Niit võtab tasakaalulise asendi, milline on vaba osa pikkus  $l$ ? Koormis nihutatakse tasakaaluasendist kõrvale nii, et nihkevektor on paralleelne silindri telge hõlmava vertikaaltasandiga; milline on väikeste võnkumiste periood?



**28:** Ruumiliste ülesannete lahendamisel võib abi olla pinnalaotuste vaatlemisest, mh aitab see leida vähimaid vahemaid.

**ÜL 22.** Ühtlane varras massiga  $m$  ja pikkusega  $l$  ripub nelja ühesuguse kerge traadi otsas. Traadid on kinnitatud varda külge üksteisest kaugusel  $\frac{l}{3}$  ning on vertikaalsed, varras aga horisontaalne. Algselt on igas niidis ühesugune pinge

$T_0 = mg/4$ . Leidke pinged peale seda, kui üks äärmistest traatidest on läbi lõigatud.



**29:** Kui staatilises tasakaalus oleva keha paigal hoidmiseks on kasutatud rohkem fikseerivaid elemente (vardaid, niite jms) kui hädapärast vaja (st vabadusastmete arvust rohkem) ja fikseerivad elemendid on absoluutselt jäigad, siis pole pingeid elementides võimalik määrata. Selleks, et pingeid oleks siiski võimalik määrata, tuleb lugeda elementid elastseteks (deformeeruvateks).

Märkigem, et siinväidetud on kooskõlas ideega 3, mis annab kasutatavate võrrandite arvu (tundmatuid ei tohi olla rohkem, kui võrrandeid).

Antud juhul on tegemist efektiivselt ühemõõtmelise geomeetriaga, kus horisontaalsed jõud puuduvad, kuid keha saaks (traatide puudumisel) pöörelda. Seega on vabadusastmeid kaks (vastavad vertikaalsuunalisele ja pöörlevale liikumisele). Et traadid on ühesugused, siis on loomulikult ühesugused ka nende jäikused; sõna "traat" vihjab suurele jäikusele, st deformatsioon (ning varda kaldenurk) on väike.

## DÜNAAMIKA

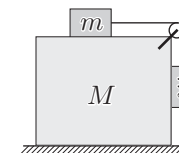
Suur osa dünaamika ülesannetest seisneb selles, et on vaja leida mingitest kehast koostatud süsteemi kiirendus või nende kehade vahel mõjuvad jõud. Neid ülesandeid on võimalik lahendada harilikult mitut moodi, kuid välja võiks tuua kolm meetodit.

**4:** leiame iga keha jaoks kõik talle mõjuvad jõud, sh rõhumisjõud ja hõõrdejõud ning kirjutame välja Newtoni II seaduse komponentide kujul

(so projekteerides võrrandi  $x$ -,  $y$ - ja vajadusel ka  $z$ -teljele).

Võrrandeid peab tulema sama palju, kui tundmatuid; võrrandite ja tundmatute arvu aitab vähendada idee 1 järgimine.

**ÜL 23.** Klots massiga  $M$  lebab libedal horisontaalpinnal. Tema peale on asetatud klotsi massiga  $m$ , mille külge on kinnitatud nõõri abil teine samasugune klots. Nõõr on tõmmatud üle suure klotsi nurgas asuva ploki ning teine väike klots ripub alla. Algselt hoitakse süsteemi paigal. Leidke suure klotsi kiirendus vahetult peale süsteemi vabastamist. Hõõre lugeda kõikjal nulliks, nõõri ja ploki massi mitte arvestada.



Seda ülesannet saab edukalt lahendada meetodi 4 abil, ainult et vaja läheb veel kahte ideed.

**30:** kui keha on alghetkel paigal, siis vahetult peale liikuma hakkamist on tema nihkevektor paralleelne kehale mõjuva jõuga (keha kiirendusega).

**31:** kui kehad on seotud nõõri või varda ja võib-olla ka ploki abil või toetuvad üksteisele, siis kehtib kehade nihete (ja kiiruste, kiirenduste) vahel nõõri (varda vms) venimatust kirjeldav aritmeetiline seos.

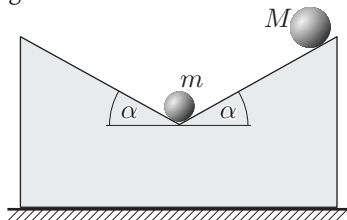
Kui kehad stardivad paigalseisust või kui liikumine on sirgjooneline, siis kehtib sama seos ka kiirenduste vahel, sest nihete jaoks kehtivast seosest võib võtta aja järgi tuletisi. Harilikult on seos võrdlemise lihtne, kuid mõne ülesande puhul võib viga kergesti sisse lipsata.

**5:** muus osas sama, mis meetod 4, kuid liikumist vaadeldakse mitteinertsiaalses taustsüsteemis (vt idee 6), kus üks kehast on paigal.

Meetod 5 on otstarbekas mitmesuguste kiilu ülesannete puhul, kui asjade kiilul püsivuse tingimust on laboratoorses süsteemis raske kirja panna. Ka idee 31 rakendamine on kiiluga seotud taustsüsteemis sageli lihtsam, kui laboratoorses süsteemis. Et taustsüsteemi defineeriva keha seisab paigal, siis tema jaoks tuleb välja kirjutada tasakaalu tingimus(ed),

**9:** kui seote taustsüsteemi kiirendusega liikuva kehaga (meetod 5), siis uues süsteemis on sellele kehale mõjuvate jõudude summa null.

**ÜL 24.** Hästi kergest ja libedast materjalist on valmistatud klots, mille ülarpind koosneb kahest üksteise poole pööratud kaldpinnast kaldenurgaga  $\alpha$ . Klots asub horisontaalpinnal; klotsi ülarpinnal moodustuva vao põhjas lebab kuul massiga  $m$  ning sellest kõrgemale asetatakse kuul massiga  $M$ . Süsteem lastakse vabalt liikuma. Millisel tingimusel hakkab kuulike massiga  $m$  mööda kaldpinda ülespoole libisema? Hõõre jõududega mitte arvestada.



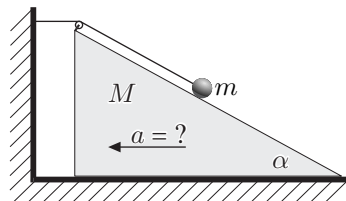
Viimane meetod põhineb üldistatud koordinaatide kasutamisel ja on pärit teoreetilisest mehaanikast. Seal on ta esitatud võrdlemisi keerulise matemaatilise aparatuuri abil, kuid enamuse ülesannete puhul on kasutatav hulga lihtsam vormis.

**6:** kui süsteemi olek on kirjeldatav üheainsa arvu abil, siis nimetagem seda üldistatud koordinaadiks  $\xi$ . Olgu meil vaja leida koordinaadi  $\xi$  kiirendus  $\ddot{\xi}$ . Kui meil õnnestub avaldada süsteemi potentsiaalne energia  $\Pi$  koordinaadi  $\xi$  funktsioonina  $\Pi(\xi)$  ja kineetiline energia kujul  $K = \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2$ , kus kordaja  $\mathcal{M}$  on kombinatsioon keha

massidest (ja võib-olla ka inertsimomentidest), siis  $\ddot{\xi} = -\Pi'(\xi)/\mathcal{M}$ .

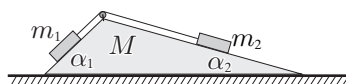
Siinjuures ülarpunkt tähistab tuletist aja järgi ning primm tuletist koordinaadi  $\xi$  järgi. Tööpoolest, energia jäävusest tulenevalt  $\Pi(\xi) + \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2 = \text{Const}$ . Võttes siit tuletise aja järgi ja kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit saame  $\Pi'(\xi)\dot{\xi} + \mathcal{M}\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$ . Taandades  $\dot{\xi}$  jõuamegi eelpooltoodud valemile.

**ÜL 25.** Kiilul nurgaga  $\alpha$  ja massiga  $M$  asub klotsike massiga  $m$ , mis on kinnitatud üle kiilu tipus oleva ploki tõmmatud nõoriga horisontaalseina külge nii, nagu näidatud joonisel. Leidke, millise kiirendusega hakkab liikuma kiil. Kõik pinnad on libedad (hõõre puudub).



Meetodi 5 illustreerimiseks on selle ülesande lahendus toodud terveni ära vihjete peatükis.

**ÜL 26.** Horisontaalpinnal lebab kiil massiga  $M$  ja teravnurkadega  $\alpha_1$  ning  $\alpha_2$ . Üle kiilu tipus asuva ploki on visatud nõör, mille otstes on klotsid massidega  $m_1$  ja  $m_2$ . Millise kiirendusega hakkab liikuma kiil? Hõõre on igal pool null.



Selle ülesande puhul võib tunduda, et vabadusastmeid on rohkem kui üks: nihkuda saab kiil ja kiilu suhtes saab libiseda nõör. Hädast aitab välja

**32:** kui kehade süsteemile mõjuvate väliste jõudude summa ja massikeskme kiiruse  $x$ -komponent on nullid, siis massikeskme  $x$ -koordinaat jääb konstantseks.

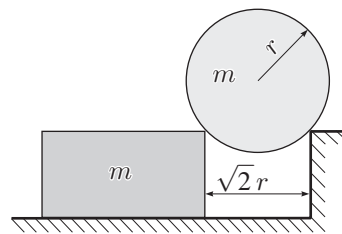
Antud asjaolu saab kasutada selleks, et vähendada efektiivset vabadusastmete arvu. Käesoleval juhul koosneb süsteem kahest komponendist ning seega saab avaldada ühe komponendi nihke teise nihke abil.

**33:** kehade või punktmasside süsteemi massikeskme  $x$ -koordinaat

$$X_C = \sum x_i m_i / \sum m_i,$$

kus  $m_i$  tähistab  $i$ -nda komponendi massi ja  $x_i$  tema massikeskme  $x$ -koordinaati. Sama valemi võib ümber kirjutada integraalkujul,  $X_C = \int x dm / \int dm$ , kus  $dm = \rho(x, y, z) dV$  on massi diferentsiaal.

**ÜL 27.** Libedal horisontaalpinnal on trepiastme kujuline jõnks sees. Jõnksu juurde lükatakse sama kõrgde klots, kui on jõnkski. Silinder raadiusega  $r$  asetatakse moodustuva renni kohale. Nii silindri kui ka klotsi mass on  $m$ . Leidke silindri ja trepiastme vaheline rõhumisjõud  $N$  sel hetkel, kui klotsi ja trepiastme vaheline kaugus on  $\sqrt{2}r$ . Alghetkel olid klots ja trepiaste hästi lähistikku ning kehad seisid paigal. Hõõre on igal pool null. Kas silinder eraldub enne klotsilt või trepiastmelt?



Selle ülesande lahendamisel on lihtne jõuda väga keeruliste avaldisteni ja seejuures võivad veada sisse lipsata. Niisiis on enne valemite kirja panemist mõistlik lahendusplaan hoolikalt läbi mõelda.

**34:** harilikult kasutatakse Newtoni seadusi seda pidi, et jõu abil leitakse kiirendus; mõnikord aga osutub tulusaks avaldada kiirenduse abil jõud.

Kuidas aga leida antud juhul kiirendus(ed)? Iseenesest on see täiesti võimalik, kasutades meetodit 6, kuid see lahendustee viib pikkade valemiteeni. Taktikaline soovitus: kui näete, et lahendus läheb tehniliselt keeruliseks, siis pidage pausi ja mõelge, kas lihtsamalt ei saa. Antud ülesande juures torkab silma "juhulik" asjaolu: kera keskpunkti puutepunktidesse tõmmatud sirged on risti; kas ehk see võiks aidata? Selgub, et aitabki,

**35:** pöörake tähelepanu erijuhtudele ja kasutage neist tulenevaid lihtsustusi!

Meenutagem kinemaatika juures õpitud:

**K29:** kõverjoonelisel liikumisel on punkti kiirenduse radiaalkomponent  $v^2/R$  (trajektooriga risti olev komponent) määratud kiirusega  $v$  ja kõverusraadiusega  $R$ ; trajektoori-sihiline komponent on joonkiirenduseks (pöördliikumise puhul võrdub see  $\varepsilon R$ -ga, kus  $\varepsilon$  on nurkkiirendus).

Silindri massikeske sooritab ringliikumist, nurkkiirenduse leidmiseks oleks aga vaja kasutada meetodit 6, mille rakendamisest me lootsime pääseda. Hädast aitab välja idee 1 edasiarendus:

**36:** projekteerige Newtoni II seadus sellisele teljele, mis on risti ebasooitava vektoriga, nt tundmatu jõuga või kiirenduse tangentsiaalkomponendiga.

Silindri kiiruse (ning seega ka kiirenduse radiaalkomponendi) leiame antud juhul hõlpsasti,

**37:** kui energia säilib (või kui tema muutus on arvatav tehtud töö vms abil), siis pange see viivitamatult kirja. Energia säilib siis, kui puudub dissipatsioon (hõõre, mitte-elastsed pörked jms) ja süsteemile mõjuvad välised jõud on staatilised (nt liikumatu kaldpind);

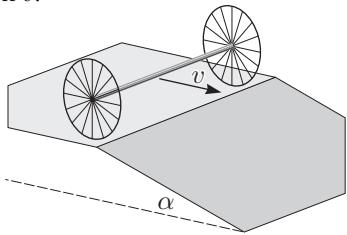
ajaks muutlikud jõud (liikuva rakenduspunktiga jõud, liikuv kaldpind) muudavad energiat. Energia jäävust aitab kirja panna idee 31 (kehade kiiruste vaheline seos!). Teisele küsimusele vastamiseks on



**38:** sel hetkel kui keha eraldub mingilt pinnalt, läheb rõhumisjõud nulliks.

Ning vaadake üle ideed 31 (kiirenduste horisontaalkomponentide jaoks).

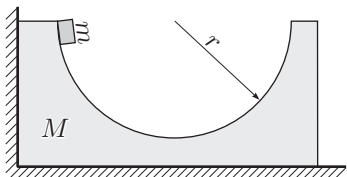
**ÜL 28.** Raske telje otstes on kerged rattad raadiusega  $R$ . Süsteem veereb mööda horisontaalpinda, mis läheb järsku üle kaldpinnaks kaldenurgaga  $\alpha$  moodustades nürinurkse jõnksu. Millise nurga  $\alpha$  puhul liiguvad rattad ilma õhku hüppamata, so puutuvad kogu aeg vastu pinda? Rastaste massi mitte arvestada, telg on paralleelne horisontaal- ja kaldpinna eraldusservaga. Telje kiirus on  $v$ .



**39:** vastamaks küsimusele, kas keha hüppab õhku, tuleb leida selline punkt mitte-õhkuhüppamise trajektoorigi, kus rõhumisjõud on kõige väiksem.

Kui rõhumisjõud oleks seal negatiivne, siis hüppab; kriitiline väärtus on null — vrld idee 38). Vaadake üle ka ideed 1, 37 ja K29.

**ÜL 29.** Horisontaalsel libedal pinnal lebab vastu seinatõetuv klots massiga  $M$ , mille ülapiinjal on poolsilindri kujuline uure raadiusega  $r$ . Uure seinapoolse ülaserava juures lastakse lahti pisike litter massiga  $m$ . Milline on klotsi maksimaalne kiirus edaspidise liikumise käigus? Hõõrdumise-ga mitte arvestada.



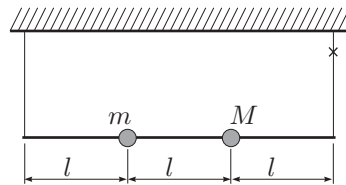
**40:** Jäätusseadus võib kehtida vaid ainult teatud perioodi vältel.

**41:** Impulss säilib siis, kui väliste jõudude resultant on null; mõnikord säilib impulss ainult ühe telje sihis.

Vaja läheb ka ideed 37.

**42:** Kiirus on maksimaalne (või minimaalne) siis, kui kiirendus (ja resultantjõud) on null (sest  $0 = \frac{dv}{dt} = a$ ); nihe on ekstremaalne siis, kui kiirus on null. Võimalikke teisi paare: elektrilaeng (kondensaatori pinge)-voolutugevus, volutugevus-induktiivne emj, jne.

**ÜL 30.** Kerge varras pikkusega  $3l$  on kinnitatud lakke kahe võrdse pikkusega nööri abil. Varda küljes on kaks kuulikest massiga  $m$  ja  $M$ , mille kaugus nii üksteisest kui ka varda ottest on  $l$ . Leidke pinge teises nööri vahetult peale seda, kui esimene on läbi lõigatud.



Selle ülesande jaoks on mitu head lahendust, mida kõiki ühendab idee 34 rakendamine ning vajadus leida varda nurkkiirendus. Esiteks, varda nurkkiirenduse võib leida meetodi 6 abil võttes üldistatud koordinaadiks pöördenurga  $\varphi$ . Teiseks, võib kasutada Newtoni II seadust pöörliikumise jaoks: leiame kuulidega vardale mõjuva jõumomendi teise nööri kinnituspunkti suhtes ning võrrutame selle suurusega  $I\varepsilon$ , kus  $\varepsilon$  nurkkiirendus ja inertsimoment  $I = ml^2 + 4Ml^2$ . Üldisemalt,

**43:** Kui keha pöörleb ümber telje  $s$ , siis summaarne jõumoment  $M = I\varepsilon$ , kus  $I$  on inertsimoment telje  $s$  suhtes,  $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \rho \cdot dV$  ja  $r_i$  on  $i$ -nda punkti kaugus teljest  $s$

(summa võetakse üle keha kõigi punktide). Kineetiline energia  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ .

Kui nurkkiirendus leitud, tuleb idee 34 tehnilisel rakendamisel abiks

**44:** Newtoni II seaduse üldisem ja mõnikord väga mugav kuju on  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ , kus  $\vec{P}$  on süsteemi summaarne impulss ning  $\vec{F}$  väliste jõudude summa. Analoogselt kehtib seos  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , kus  $\vec{L}$  on süsteemi summaarne impulsimoment (teatud punkti suhtes) ning  $\vec{M}$  väliste jõudude momentide summa.

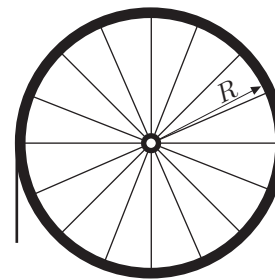
Antud juhul viib viimane meetod tulemuseni nii jõu kui jõumomendi jaoks rakendatuna.

Kolmanda lahendustee puhul vaadeldakse varrast ja kuule kolme eraldi (üksteisega vastasmõjus oleva) kehana. Seejuures saab kuulide kiirendused siduda vastavalt ideele 31; ära kulub ka

**45:** hästi kergele (võrreldes teiste kehadega) asjale mõjuvate jõudude ja jõumomentide summad on nullid.

Tõepoolest, null-massi korral tähendaks nullist erinev jõud lõpmatut kiirendust.

**ÜL 31.** Venimatu kare niit joontihedusega  $\rho$  ja pikkusega  $L$  on visatud üle ploki nii, et ühe rippuva otsa pikkus on  $l$ . Horisontaalsele teljele asetatud plokk kujutab endast kergete kodarate abil kinnitatud võru massiga  $m$  ja raadiusega  $R$ . Alguses hoitakse süsteemi liikumatuna ning seejärel lastakse ta lahti. Leidke teljele mõjuv jõud vahetult peale liikuma hakkamist. Ploki ja telje vaheline hõõre lugeda tühiseks.



Tööplaani võiks siin olla selline: jõu leidmiseks kasutame ideed 34, süsteemi kiirenduse leiame meetodi 6 abil. Selleks, et mugavaimal moel rakendada ideed 34, sobib

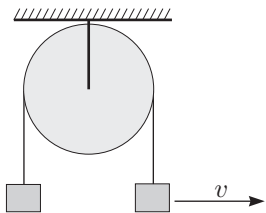
**46:** Newtoni seaduse võib panna kirja kujul  $\vec{F} = M\vec{a}_C$ , kus  $\vec{a}_C$  on massikeskme kiirendus.

Viimast ideed on harilikult otstarbekas kasutada siis, kui osa süsteemi massist jääb paigale ning toimub suhteliselt väike massi ümber paigutumine (nagu siin: lühikese ajavahemiku jooksul on ainsaks muutuseks see, et nööri ühe otsa juures "kaob" ja teise otsa juures "ilmub välja" lühike jupp nööri). Loomulikult läheb seejuures vaja ka ideed 32, töövaeva vähendab idee 19. Tasub silmas pidada, et antud juhul ei huvita meid massikeskme koordinaat iseseisvana, vaid tema muut ajas; seega võib massikeskme avaldisest välja jätta ajast mittesõltuvad liikmed (nende tuletis oleks niikuinii null). Massikeskme koordinaadi ajas muutuva osa tasub avaldada sellesama üldistatud koordinaadi järgi, mida kasutame meetodi 6 juures (sest meetod 6 annab meile selle teise tuletise aja järgi). Lisaks kulub ära tehnilist laadi soovitus: vektoriaalne suurus on määratud ( $a$ ) oma mooduli ja suunaga; ( $b$ ) koordinaatidega teatud teljestikus;

**47:** mõnikord on vektoriaalseid suurusi otstarbekas arvutada komponentidena, isegi siis, kui küsitakse ainult moodulit.

Eeskätt kehtib see siis, kui vektori suund pole teada ega ilmne. Antud juhul tuleks siis sobivalt valitud teljestikus leida  $F_x$  ja  $F_y$ .

**ÜL 32.** Üle ploki on visatud nööri, mille otstes ripuvad kaks ühesuguse massiga klotsi. Alguses on klotsid ühel kõrgusel. Ühele neist antakse hetkelise tõukega horisontaalsuunaline väike kiirus  $v$ . Kumb klotsidest osutub mõne aja pärast kõrgemal olevaks? Plokk lugeda kaaluetuks.



See ülesanne kuulub väga raskete hulka, sest lahenduse võti on spetsiifiline ja harva rakendatav,

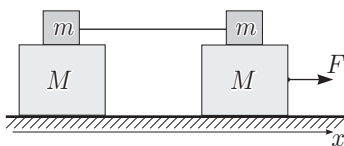
**48:** kui süsteemi massikese ei saa paigast liikuda, siis temale mõjuv summaarne jõud on null.

Antud juhul saab küll massikese natuke liikuda, kuid pikas perspektiivis (keskmistatuna üle pendeldava liikumise perioodi — vrd idee 22) jääb ta paigale, sest klotsid on üheraskused ja kui üks neist kerkib, siis massikeskme vertikaalkoordinaadi avaldises kompenseeritakse see teise klotsi laskumise poolt. Õeldu kehtib antud juhul ka massikeskme horisontaalkoordinaadi jaoks, kuid ülesande lahendamiseks piisab vaid vertikaalkoordinaadi vaatlemisest. Igaks juhuks olgu ära toodud ka suhteliselt ilmne

**10:** üle kaalutu plokki või hõõrdevaba toe tõmmatud kaalutu niidi pingeline on kõikjal sama.

Lahendusskeem on niisiis selline, et kirjutame välja Newtoni II seaduse (a) kahest klotisist koosneva süsteemi jaoks ja (b) ühe klotsi jaoks; keskmistame mõlemad võrrandid ja kasutame (a)-st tulenevat võrdust niidi keskmise pingele leidmiseks, mille asendame võrrandisse (b). Lähitundes ideest 22 jagame niidi pingele keskmiseks ja kõrgsageduslikuks komponendiks ja kasutame ideed 16.

**ÜL 33.** Siledal laual asub niisugune klotside süsteem, nagu näidatud joonisel. Klotside omavaheline hõõrdetegur on  $\mu$ , laud on libe ( $\mu = 0$ ).



Parempoolset alumist klotsi tõmmatakse jõuga  $F$ . Leidke kõikide klotside kiirendused.

**49:** Kui kehad on omavahel seotud hõõrdejõududega, siis mõnele küsimusele ammendava vastuse andmiseks on vaja läbi arvutada kõikvõimalikud kombinatsioonid eri kontaktpindade libisemise-mittelibisemise osas.

Näiteks kui teha oletus, et kahe keha vahel libisemist ei toimu, siis võib kontaktis olevaid kehi vaadelda kui ühtset tervikut. Pärast tuleb välja rehkendada kehade vaheline hõõrdejõud  $F_h$  ning leida mis tingimisel tehtud oletus kehtib, so milal on  $F_h$  väiksem maksimaalsest seisuhõõrdejõust  $\mu N$ .

**ÜL 34.** Piljardikuul lendab vastu teist, paigalseisvat piljardikuuli. Millistes punktides võib asuda paigalseisev kuul, et oleks võimalik saavutada olukord, kus mõlemad kuulid kukuvad laua nurkades asuvatesse aukudesse — üks ühte, teine teise. Põrge lugeda absoluutselt elastseks, kuulide pöörlemisega mitte arvestada, (kuulid on absoluutselt libedad).

**50:** Kui absoluutselt elastne kuul põrkab vastu teist samasugust paigalseisvat kuuli ja kuulide pöörlemist võib mitte arvestada, siis peale põrget on kahe kuuli kiirusvektorite vahel täisnurk.

Tõestuseks paneme tähele, et impulsi jäävuse tõttu moodustavad kolm kiirusvektorit (kiirus enne ja kiirused pärast põrget) kolmnurga. Energia jäävus tähendab, et kolmnurga küljed rahuldavad Pythagorase tingimust. Erijuhuks (vt ülejõrgmine ülesanne) on

**11:** Kui elastne kuul põrkab tsentraalselt teise samasuguse paigalseisva kuuliga, siis esimene jääb paigale ning teine omandab esimese kiiruse.

**ÜL 35.** Absoluutselt elastne ja libe piljardikuul liigub kiirusega  $v$  kahe paigalseisva täpselt samasuguse kuuli poole. Paigalseisvad kuulid puutuvad üksteise vastu ning nende keskpunktid aset-

sevad teljel, mis on risti liikuva kuuli kiirusvektoriga. Liikuv kuul on sihitud täpselt kahe seisva kuuli vahekohta. Millise kiiruse saab algselt liikuv kuul peale põrkeid? Vaadelda kahte juhtumit: (a) ta tabab tõepoolest täpselt seisvate kuulide vahekohta; (b) tema trajektoori on natukene nihkes, nii et ta tabab ühte seisvatest kuulidest karvavõrra enne.



Esimesele küsimusele vastamiseks on vajalik

**51:** põrkeid (ka igasugust muud kehade interaktsiooni, nt nööriaga seotud kuulide liikumine) on mugav vaadelda massikeskme süsteemis, sest seal on impulsi jäävus kõige kergemini kirja pandav (summaarne impulss on null). Massikeskme süsteem on harilikult mugavam ka muul viisil interakteeruvate (nt niidi või vedru abil seotud) kehade süsteemide uurimisel.

Ja loomulikult ärge unustage ideed 37. Teise küsimuse juures kulub ära

**52:** kui teatud ajavahemiku vältel kehale mõjuv jõud ei muuda oma suunda, siis on üle antav impulss sama suunaline, mis jõudki.

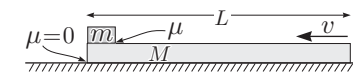
**ÜL 36.** Libedat renni mööda liiguvad  $n$  absoluutselt elastset kuuli. Milline on maksimaalne võimalik põrgete arv? Kuuli mõõtmetega ning võimalusega, et korraga põrkavad kokku enam kui kaks kuuli, mitte arvestada.

**53:** Alati on abiks protsessi võimalikult visuaalne esitamine, mh graafikutena.

Abistav küsimus: kuidas näeb välja  $x - t$  teljestikus kahe kuuli elastne põrge?

**ÜL 37.** Laud pikkusega  $L$  ja massiga  $M$  lebab libedal horisontaalsel pinnal; tema peal ühes otsas lebab omakorda pisike klots massiga  $m$ . Hõõrdetegur klotsi ja laua vahel on  $\mu$ . Milline minimaalne kiirus  $v$  oleks vaja anda järsu tõukega lauale, et klots libiseks edaspidise liikumise

käigus üle terve laua ja edasi laua pealt maha? Klotsi mõõtmed lugeda tühiseks.

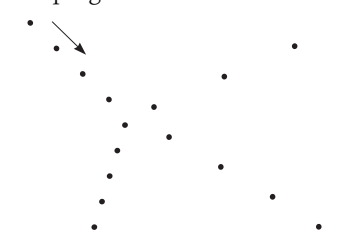


Sellel ülesandel on kaks enam-vähem võrdväärset lahendust. Esiteks, teda saab lahendada idee nr 6 abil. Teiseks, võib kasutada ideid 37 ja 51 võttes käiku

**54:** kui keha libiseb mööda tasast pinda, siis soojuseks läinud energia on võrdne hõõrdejõu ja libisemisjälje pikkuse korrutisega.

Tõesti, hõõrdejõud on moodulilt konstantne ning kui minna alusega seotud taustsüsteemi, siis on ta alati paralleelne nihkevektoriga.

**ÜL 38.** Juuresolev joonis on tehtud stroboskoopilise foto põhjal ning temal on kujutatud kahe ühesuguse diameetriga kuid erinevate massidega kuuli põrget. Noolega on näidatud ühe kuuli liikumise suund enne põrget. Leidke kuulikeste masside suhe ja näidake, mis suunas liikus teine kuul enne põrget.



**55:** mõnikord on kasulik opereerida impulsidega nagu vektoritega vaadeldes nende vektorsummasid ja vahesid kolmnurga või rööpküliku reegli abil (see kehtib ka muu — nihete, kiiruste, kiirenduste, jõudude jne puhul).

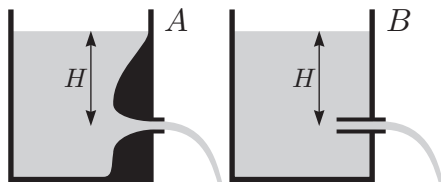
Konkreetsemalt: kahe keha vastasmõju puhul on üle antud jõuimpulsi vektor võrdne kahe impulsi vektorvahega. Vrdl ka idee 5.

**12:** stroboskoopilisel fotol on keha ühest asendist järgmisse tõmmatud vektor võrdeline tema kiirusvektoriga.



**13:** (Newtoni III seadus) kui kaks keha on olnud vastasmõjus, siis kehade impulsside muutud on võrdsed ja vastassuunalised.

**ÜL 39.** On kaks tünni ( $A$  ja  $B$ ), mis erinevad kraani konstruktsiooni poolest, vt joonis. Kraan on avatud, veepinna kõrgus kraani juurest arvates on  $H$ . Millise kiirusega voolab välja veejuga?

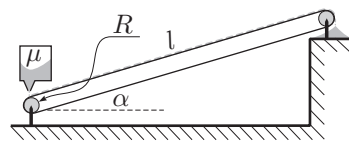


**56:** Kui näib, et ülesannet on võimalik lahendada nii energia kui ka impulsi jäävusest lähtudes, siis vähemalt üks neist suurustest tegelikult ei säili!

Teisiti see ei saagi olla, sest vastused tulevad erinevad. Niisiis läheb eeskätt vaja tähelepanelikkust. Antud juhul on kraani  $A$  koostamisel üritatud saavutada voolu laminaarsus, st energia säilib. Kui me aga meetodist 3 lähtudes üritaksime kirja panna aja  $dt$  jooksul veerõhu poolt joale üle antud impulsi kui  $pSdt$  (kus  $S$  on kraani ristlõike pindala), siis selgub, et vee voolamisest tingituna  $p \neq \rho g$  (vrld dünaamiline rõhk, Bernoulli seadus!). Teisest küljest kraani  $B$  puhul pole voolu laminaarsus tagatud, tekivad keerised ja energiakadu. Küll aga võime kasutada impulssi: kirjutame avaldise aja  $dt$  jooksul anumate seinete poolt vedelikule üle antud rõhu jaoks (üldiselt taandavad vasaku- ja parema seina poolt avaldatavad rõhud üksteist ära, kuid vasakul jääb kraaniga kohakuti pindalal  $S$  rõhk  $p = \rho gH$  kompenseerimata).

**ÜL 40.** 1981. 9. klass) Transportööri abil toimetatakse liiv ehitusplatsile. Transportööri lindi pikkus on  $l$ , kaldenurk horisondi suhtes  $\alpha$ ; lindi paneb liikuma alumine linti hoidev völli raadiusega  $R$ . Liiva riputatakse lindi alumise otsa kohal olevast punkrist konstantse massikuluga  $\mu$

(kg/s). Milline on minimaalne liiva vedamiseks vaja minev pöördemoment? Milline on seejuures lindi kiirus? Hõõrdetegur on piisavalt suur selleks, et liivaterad peatuksid lindi suhtes peatselt peale lindile kukkumist; liivaterade algkiirus lugeda nulliks.



**14:** Selleks, et midagi liikuma panna — olgu see keha või (nt liivaterade) vool — on vaja jõudu.

Selle ülesande juures läheb vaja ka ideid 56 ja meetodit 3, lisaks tuleb veel

**57:** (pidevuse tingimus) statsionaarse voolamise puhul on aine voog (voolu ristlõiget ajaühikus läbiv ainekogus) konstant ja ei sõltu ristlõikest:  $\sigma v = \text{Const}$  [ $\sigma(x)$  on aine joontihedus ja  $v(x)$  — voolu kiirus].

Konstantse tihedusega vedeliku voolu puhul torudes on joontihedus  $\sigma = \rho S$  ning seega  $vS = \text{Const}$ . Selles ruumiosas kuhu vool suubub, aine mass kasvab:  $\frac{dm}{dt} = \sigma v$  — ka seda võrrandit võib nimetada pidevuse tingimuseks.

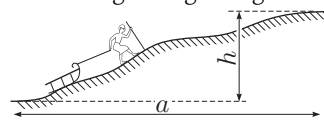
**ÜL 41.** Kõrguselt  $h$  kukub vastu põrandat ja libiseb edasi plastne saviplönn. Milline on saviplönni kiirus kohe libisemise alguses, kui hõõrdetegur tema ja põranda vahel on  $\mu$ ? Saviplönni horisontaalsuunaline algkiirus oli  $u$ .

**58:** Kui löögil vastu kõva seina toimub kogu aeg libisemine, siis piki- ja risti seina üle antud jõuimpulsside suhe on  $\mu$ .

Tõesti,  $\Delta p_{\perp} = \int N(t)dt$  (integreerime üle löögi aja) ja  $\Delta p_{\parallel} = \int \mu N(t)dt = \mu \int N(t)dt$ .

**ÜL 42.** Poiss tassib nõõripidi oma järel kelku massiga  $m$  ning ronib tasakesi mäest üles. Leidke, millise töö teeb poiss kelgu mäe otsa vedamiseks, kui mäe kõrgus on  $h$  ning horisontaalne

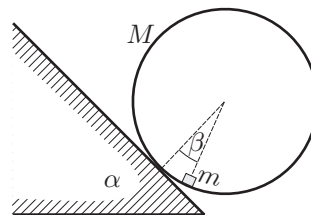
vahemaa mäe jalamilt mäe tippu on  $a$ . Lugega, et kelgu nõõr on kogu aeg mäe nõlva puutuja sihiline ja hõõrdetegur kelgu ning lume vahel  $\mu$ .



**15:** kui mingi profiili või ajalise sõltuvuse vms kuju pole ette antud, siis tuleb vaadelda üldjuhtu — tõestada, et tulemus kehtib suvalise kuju jaoks.

Ilmselt läheb fakti 15 rakendamisel vaja ideed 3.

**ÜL 43.** Seest tühi silinder massiga  $M$  veereb ilma libisemata mööda kaldpinda, mille kaldenurk on  $\alpha = 45^\circ$ . Tema sisepinnal libiseb ilma hõõrdumiseta klotsike massiga  $m = M/2$ . Milline on nurk  $\beta$  kaldpinna normaali ja silindri keskpunkti ning klotsikest ühendava sirge vahel?



Ilmselt baseerub lihtsaim lahendus ideel 6, kuid on vaja arvutada veereva silindri kineetiline energia.

**59:**  $K = K_c + M_{\Sigma}v_c^2$ , kus  $K_c$  on kineetiline energia massikeskmega seotud taustsüsteemis ja  $M_{\Sigma}$  — süsteemi summaarne mass. Analoogiad: süsteemi impulss  $\vec{P} = M_{\Sigma}\vec{v}_c$  (sest  $\vec{F}_c \equiv 0$ ) ja impulsimoment  $\vec{L} = L_c + \vec{r}_c \times \vec{P}$ . Steineri teoreem:  $I = I_0 + M_{\Sigma}a^2$ , kus  $I$  on inertsimoment telje  $s$  suhtes ja  $I_0$  — massikeset läbiva ( $s$ -ga paralleelse) telje suhtes ning  $a$  — telgede kaugus.

Impulsimomenti tuleb arvutada juba järgmises ülesandes, sestap klaarigem veidi seda asja.

**60:** impulsimoment on aditiivne, jagades süsteemi punktmassideks  $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ , kus  $i$ -nda

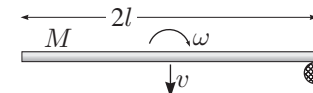
punktmassi jaoks  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  (üldjuht) või  $L_i = h_i p_i = r_i p_{ti}$  (tasapinnaline liikumine,  $h_i = r_i \sin \alpha_i$  on impulsi õlg ja  $p_{ti} = p_i \sin \alpha$  — impulsi tangentsiaalkomponent). Ka kineetiline energia, impulss jms on aditiivsed.

Kui kolmemõõtmelises ruumis on impulsimoment vektoriaalne suurus, siis tasandilise liikumise korral on see vektor tasandiga risti ja seega efektiivselt skalaarne suurus (mis võimaldab loobuda vektorkorrutistest). Sageli on mugav kombineerida ideid 59 ja 60: me ei jaga süsteemi mitte punktmassideks, vaid kõvadeks kehadeks ( $L = \sum L_i$ ), iga keha impulsimomendi  $L_i$  arvutame vastavalt ideele 59, st massikeskme impulsimoment pluss impulsimoment massikeskme süsteemis.

**61:** Kehade inertsimomente massikeskme suhtes. Pulk pikkusega  $l$ :  $\frac{1}{12}Ml^2$ , kera:  $\frac{2}{5}MR^2$ , sfäär  $\frac{2}{3}MR^2$ , silinder  $\frac{1}{2}MR^2$ , ruut küljepikkusega  $a$ , telg risti tasandiga:  $\frac{1}{6}Ma^2$ .

Kui pöörlemistelg ei läbi massikeset, võib (a) leida inertsimoment vaadeldava telje suhtes Steineri teoreemi abil; (b) rakendada ideed 59 kineetilise energia või impulsimomendi arvutamiseks (mispuhul vajame ainult inertsimomenti massikeskme suhtes).

**ÜL 44.** Mööda jääd libiseb pööreldes palk massiga  $M$  ja pikkusega  $2l$ . Palgi massikeskme kiirus on  $v$ , nurkkiirus on  $\omega$ . Sel hetkel kui palk on risti tema massikeskme kiirusega, pörkub ta otsaga vastu paigalseisvat posti. Milline on palgi massikeskme kiirus peale pörget, kui (a) pörge oli absoluutselt plastne, so vastu posti pörganud ots jääb paigale; (b) pörge oli absoluutselt elastne.



Absoluutselt elastse pörke puhul saab ühe võrandi tänu energia jäävusele; kui pörge on plast-

ne, siis asendub see tingimusega, et palgi ots jääb paigale. Tundmatuid on aga kaks. Teise võrrandi saamiseks on

**62:** kui keha pörkub millegi vastu, siis tema impulsimoment säilib pörkepunkti suhtes.

Tõepoolest, pörke ajal muudab keha oma liikumist rühumisjõu ja hõõrdejõu toimel, kuid need mõlemad on rakendatud puutepunkti: nende õlg on null. Kui keha liigub raskusjõu (vms) väljas, siis pikemas perspektiivis võib keha impulsimoment pörkepunkti suhtes muutuma hakata, kuid vahetult enne- ja pärast pörget on see ikka üks ja sama (sest raskusjõud on mõõduka suurusega — erinevalt rühumisjõust, mis on suur kuid lühiaegne — ja kuigi õlg ei ole null, ei saa ta hetkeliselt muuta impulsimomenti).

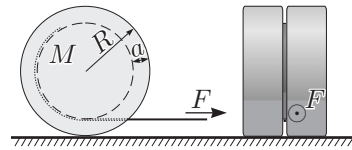
**ÜL 45.** Kui lüüa teibaga vastu mingit kõva eset, näiteks vastu palki, siis võib teivast hoided käsi kõvasti pörutada saada — seda siis kui löök ei taba teiba nn löögikeset, vaid satub sellest kas ette- või tahapoole. Leidke kus kohas asub ühtlase massijaotusega teiba löögikese. Lugeda, et löögi puhul sooritab teivas pöörlemist ümber hoidva käe.

**7:** Tõlkige reaal-eluline probleem formaalsesse füüsikalis-matemaatilisse keelde (koostage mudel).

Niimoodi kirjapandult võib tunduda, et sellest meetodist palju kasu pole. Tegelikult aga on niisuguse tõlkimise probleem füüsikas üks huvitavaid ja raskemaid asju üldse, seda nimetatakse mudeli koostamiseks. Huvitav sellepärast, et selles on rohkem loominguilisust ja tegutsemisvabadust kui valmis mudeli lahendamises olemasolevate ideede rakendamise teel. Mis ei tähenda täielikku vabadust: mudel peab kirjeldama reaalsust võimalikult hästi, lähendused peavad olema mõistlikud, soovitatav oleks, et mudelit saaks lahendada kas ise oma peaga või arvu- ti abiga. Käesoleva ülesande puhul palju vaba-

dust pole jäetud ja asi on lihtsam: mõistlikele eeldustele on selgelt viidatud. Alustame tõlkimist: “Jäik homogeenne massijaotusega teivas pikkusega  $l$  pöörleb ümber ühe otspunkti nurkkiirusega  $\omega$ , pöörlemistelg on teibaga risti. Kaugusel  $x$  pöörlemisteljest on jäigalt fikseeritud palk, mis on paralleelne pöörlemisteljega. Teivas lööb vastu palki.” Nüüd tekib esimene tõrge: kas löök on elastne või plastne? Sellele pole ülesande tekstis vihjatud. Jätame tõlkimata — võib-olla saab ilma vastava eelduseta (selgub, et saabki). Edasi on aga põhiküsimus: mida tähendab “käsi ei saa pörutada”? Haiget saab siis, kui miski asi lööb vastu kätt — kui see miski saab käelt lühikese aja jooksul (löögi vältel) teitava impulsi, sest see tähendab hästi suurt jõudu. Käsi on paigal, st pulga käes olev ots peab jääma paigale ilma käelt impulssi saamata. Saamegi lõpuni tõlkida: “Löögi tulemusel pöörlemine muutub vastassuunaliseks,  $0 \geq \omega' \geq -\omega$ ; löögi ajal pöörlemistelg teibale mingit impulssi ei anna. Leida  $x$ .” Eelviimane lause annab selge vihje, et võib rakendada ideed 62.

**ÜL 46.** Massiivne silinder raadiusega  $R$  ja massiga  $M$  lebab pörandal. Tema keskele on treitud kitsas soon sügavusega  $a$ . Soonde on keritud niiti, mille vaba ots on horisontaalne ning mida tõmmatakse jõuga  $F$ . Silinder on asetatud nii, et niit jookseb silindril maha altpoolt küljest. Millise kiirendusega hakkab liikuma silinder? Hõõre pörand ja silindri vahel on piisavalt suur, nii et libisemist ei ole.



Seda ülesannet saab lahendada mitmeti, kuid kasutagem siinkohas järgmist ideed.

**63:** Seos  $I\varepsilon = M$  on ilmselgelt õige vaid siis, kui pöörlemiskese on paigal; selgub aga, et see keh-

tid ka siis, kui hetkeline pöörlemistelg liigub kulgevast nii, et keha massikeskme kaugus teljest ei muutu (nt silindrilise või keraja keha veeremisel).

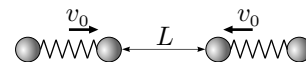
Selle väite tõestuseks on hea meenutada ideed 6: kineetiline energia tekib töö arvelt,  $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = M\varphi$  ( $\varphi$  on keha pöördenurk,  $\omega = d\varphi/dt$ ). Kui inertsimoment hetkelise pöörlemistelje suhtes  $I$  ei sõltu ajast, siis  $dK/dt = \frac{1}{2}Id\omega^2/dt = I\omega\varepsilon = dM\varphi/dt = M\omega$ , st  $I\varepsilon = M$ .

**ÜL 47.** Kuul veereb mööda horisontaalset pörandat piirkonnas  $x < 0$  kiirusega  $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ . Piirkonnas  $x > 0$  on transportöör, mis liigub kiirusega  $\vec{u} = (0, u)$  (st paralleelselt oma servaga  $x = 0$ ). Leida kuuli kiirus transportööri suhtes  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  peale transportöörile veeremist. Transportööri pind on kare (kuul ei libise) ning pörand pinnaga ühes tasapinnas.

**64:** Horisontaalpinnal veerevatel-libisevatel silindri või kera-kujulistel kehadel säilib impulsimoment sellise suvalise telje suhtes, mis lebab antud horisontaalpinnal.

Tõepoolest, rühumisjõu ja raskusjõu rakendus- punktid on samal sirgel ning nende resultant on null, st nende summaarne jõumoment on null; rühumisjõu vektor lebab horisontaalpinnal, st tema moment horisontaalpinnal lebava telje suhtes on samuti null.

**ÜL 48.** “Vedruhantel” koosneb kahest kuulist massiga  $m$ , mis on ühendatud vedru abil (jäikus  $k$ ). Kaks sellist “vedruhantlit” libisevad üksteisele vastu, kummagi kiirus on  $v_0$ . Mingil hetkel oli nende vahekaugus  $L$  (vt joonis). Leidke, millise aja möödudes on vahekaugus jälle  $L$ . Pörked lugeda absoluutselt elastseks.

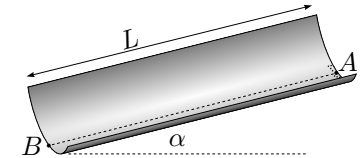


**65:** Kui süsteem, mis koosneb elastsetest kehadest, mis on seotud vedru, nööri vms abil, inte-

akteerub mingite teiste kehadega, siis elastsete kehade pörkeage on hulga väiksem kui muude protsesside karakterseadajad. Siis saab tervikprotsessi jagada lihtsateks etappideks: peaaegu hetkeline elastsete kehade pörge (kehad võib lugeda vabadeks, sest nt vedru avaldab hulga väiksemat jõudu, kui kaks pörkuvat elastset keha) ning sellele järgnev (eelnev, pörgete vaheline) aeglane protsess — vedrupendli võnkumine vms.

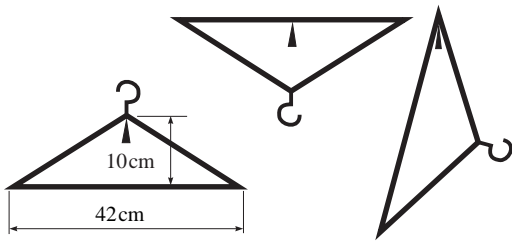
*Märkus:* toodud idee on üldisem, liht-etappideks jagamine on kasulik alati, kui dünaamilises süsteemis võivad aeg-ajalt toimuda kiired (peaaegu hetkelised) protsessid; näiteks sobib järgmine ülesanne (meenutage ka ideed 51).

**ÜL 49.** Väikesed liivaterakesed libisevad hõõdevabalt mööda silindrilist renni raadiusega  $R$  (vt joonis). Renni kaldenurk  $\alpha$ . Kõik liivaterakesed stardivad paigalseisust renni pinnal punkti  $A$  läheduses (kuid mitte tingimata punktist  $A$  enesest). Milline peaks olema renni pikkus  $L$ , et kõik liivaterakesed väljuksid rennist punktis  $B$ ?



**66:** Kui hajusas kimbus olevate osakeste liikumise saab jagada teatud suunaliseks võnkumiseks ning võnkuvast liikumisest sõltumatuks (sellega ristsihiliseks) liikumiseks, siis teatud punktides toimub kimbu fokuseerumine — seal, kus kõikide osakeste võnkefaas on null (või  $2\pi$  täisarv- kordne).

**ÜL 50.** Traadist riidepuu kõigub väikese amplituudiga joonise tasandil. Kahel esimesel juhtumil on kolmnurga pikk külj horisontaalne. Kõigil kolmel juhtumil on võnkeperioodid võrdsed. Kus asub massikese ja milline on võnkeperiood?



**Taustinfot:** kõva keha, mis võngub teatud telje ümber, nimetatakse füüsikaliseks pendliks. Tema omavõnkesagedust  $\omega$  on lihtne tuletada seosest  $I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$ , kus  $I$  on inertsimoment võnkumistele suhtes ning  $l$  — massikeskme kaugus sellest teljest:  $\omega^{-2} = I/mgl = I_0/mgl + l/g$  (siinkohal kasutasime Steineri teoreemi, vt idee 59). Füüsikalise pendli *taandatud pikkuseks* nimetatakse sellist pikkust  $\tilde{l} = l + I_0/ml$ , mille puhul matemaatilise pendli omavõnkesagedus on sama, mis antud pendlil.

**67:** Kui füüsikalisele pendlile joonistada lõik pikkusega  $\tilde{l}$  nii, et see läheb läbi massikeskme ja selle üks otspunkt on pöörlemistelje juures, siis asetades pöörlemistelje teise otspunkti juurde (ning lastes kehal vajuda stabiilse tasakaalu asendisse), on uus omavõnkesagedus sama, mis ennegi. Järeldus: nende punktide hulk, kuhu võib asetada võnkumistele nii, et omavõnkesagedus ei muutu, moodustab kaks kontsentrist ringjoont ümber massikeskme.

Tõestus: eelpooltoodud valemi võib kirjutada ruutvõrrandina leidmaks antud sagedusele  $\omega$  (st antud taandatud pikkusele  $\tilde{l} = g/\omega^2$ ) vastavaid kaugusi  $l$ ,  $l^2 - \tilde{l}l + I_0/m = 0$ . Vieta teoreemi põhjal lahendid  $l_1$  ja  $l_2$  rahuldavad tingimust  $l_1 + l_2 = \tilde{l}$ , st  $l_1$  ja  $l_2 = \tilde{l} - l_1$  annavad sama omavõnkesageduse.

**ÜL 51.** Metallkera, mille raadius on 2 mm ja tihedus  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$  liigub vees vabalt langedes kiirendusega  $a_0 = 0,57g$ . Vee tihedus  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Millisega kiirendusega tõuseb kera-kujuline mull, mille raadius on 1 mm?

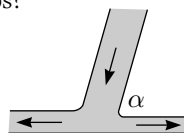
Vee liikumine lugeda mõlemal juhul laminaarseks ning hõõrdejõud tühiiseks.

**68:** Kui keha liigub vedelikus, siis hakkab ka vedelik liikuma. (A) Laminaarse liikumise korral (st siis, kui puuduvad keerised) on liikumises ainult keha läheduses olev vedelik; (B) turbulentsse voolu korral jääb keha taha turbulentsne saba. Mõlemal juhtumil on liikuva vedelikuosa karakterne kiirus sama, mis keha enese kiiruski.

Kasutades meetodit 6 leiame, et juhtumil (A) on süsteemi kineetiline energia  $K = \frac{1}{2}v^2(m + \alpha\rho_0V)$ , kus konstant  $\alpha$  on liikuva keha geometriat iseloomustav arv, mis näitab, kui suur vedeliku piirkond hakkab liikuma (võrreldes keha enese ruumalaga). Kui kehale mõjub jõud  $F$ , siis selle jõu poolt arendatav võimsus  $P = Fv = \frac{dK}{dt} = v\alpha(m + \alpha\rho_0V)$ . Seega  $F = \alpha(m + \alpha\rho_0V)$ , st keha efektiivne mass suureneb suuruse  $\alpha\rho_0V$  võrra. Antud ülesande puhul saab kerakujulise keha jaoks leida konstandi  $\alpha$  kasutades ülesande esimeses pooles antud tingimusi.

Kui juhtumil (B) eeldada, et keha liikumise kiirus on konstantne, siis  $K = \frac{1}{2}v^2\rho_0(\alpha Svt)$ , kus  $S$  on keha ristlõikepindala ja  $\alpha S$  on turbulentsse saba ristlõike pindala. Konstant  $\alpha$  on jällegi keha iseloomustav suurus. Siit on juba lihtne leida  $Fv = \frac{dK}{dt} = \frac{\alpha}{2}v^3\rho_0S$ , millest  $F = \frac{\alpha}{2}v^2\rho_0S$ .

**ÜL 52.** Veejuga langeb kiirusega  $v$  vastu renni põhja ning jaguneb vasakule- ja paremale voolavaks veevooks. Leidke mõlema veevoo kiirus, kui juga langes renni (ning seega ka veevoogude) suhtes nurga  $\alpha$  all. Milline on vooluhulkade suhe neis kahes voos?



Tegemist on üpriski raske ülesandega, sestap formuleerigem mitu ideed ja fakti.

**69:** Vedeliku voolamisel on sageli abi Bernoulli (st energia jäävuse) seadusest  $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{Const}$ , kus  $p$  on staatiline rõhk,  $h$  — vaadeldava punkti kõrgus ning  $v$  — kiirus antud punktis.

**16:** Vedeliku vaba pinna lähedal vedeliku sees on staatiline rõhk võrdne välisrõhuga.

Ülesande teise poole lahendamiseks läheb vaja veel järgmisi teadmisi.

**70:** Ideed 44 saab üldistada nii, et see kehtiks avatud süsteemide puhul (süsteemi siseneb ja sealt väljub teatud kogus ainet):  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Phi}_{P_{in}} - \vec{\Phi}_{P_{out}}$ , kus  $\vec{\Phi}_{P_{in}}$  ja  $\vec{\Phi}_{P_{out}}$  on süsteemi sisenev ja sealt väljuv impulsi voog (st ajaühikus süsteemi siseneva ja sealt väljuva aine summaarne impulss).

Voolava vedeliku impulsi voogu võib arvutada kui impulsi ruumtiheduse  $\rho\vec{v}$  korrutist ruumikuga (ajaühikus süsteemi siseneva/sealt väljuva vedeliku ruumala).

Millist avatud süsteemi siis tuleks antud juhul vaadelda? Ilmselt sellist, mis võimaldaks eelpooltoodud valemi abil siduda rennil langeva veehulga  $\mu$  (massikulu ajaühikus) rennis vasakule ja paremale leviva veehulgaga ( $\mu_v$  ja  $\mu_p$ ): mõtteline väike ruumiosa, mis hõlmab vedelikujoa kaheks jagunemise piirkonda.

**17:** Kui viskoossust võib mitte arvestada, siis voolusängi seinte poolt vedelikule avaldatava jõu seintega paralleelne komponent on null.

**ÜL 53.** Leidke, kui kiiresti levivad madalad lained madalas vees. Madalaks loetakse vesi siis, kui lainepikkus on hulga suurem vee sügavusest  $H$ . Tänu sellele võib lugeda, et üle kogu vertikaallõike on kõigi vee osakeste horisontaalkiirus  $v_h$  üks ja sama ning et vee osakeste horisontaalkiirus on hulga suurem vertikaalkiirusest. Lainete madalus tähendab, et nende kõrgus on hulga väiksem vee sügavusest. See võimaldab meil lugeda, et vee osakeste horisontaalkiirus on hulga

väiksem lainete kiirusest  $u$ .

**71:** Laine (või muu püsiva kujuga struktuuri) levimiskiiruse (või muu karakteristiku) arvutamise üks standardmeetod seisneb üleminekus sellisesse taustsüsteemi, kus laine on paigal. Selles süsteemis kehtib (a) pidevuse tingimus — idee 57; (b) energia jäävus (nt Bernoulli seaduse kujul; teatud juhtumitel võib energia jäävuse seadust siinkohal asendada jõudude tasakaalu tingimus).

(Alternatiivne lähenemine seisneb osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi lineariseerimises ja lahendamises.)

**ÜL 54.** Väike kuulike massiga  $m = 1 \text{ g}$  liigub libedat alust mööda libesedes ning elastseid põrkeid sooritades seina ja klotsi vahel edasi-tagasi. Risttahuka kujulise klotsi mass on  $M = 1 \text{ kg}$  ja kuuli algkiirus  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ . Milline on kuuli kiirus sel hetkel, kui klotsi ja seina vaheline kaugus on alghetkega võrreldes kahekordistunud? Mitu korda muutub kuuli poolt seinale avaldatav keskmine (üle aja keskmistatud) jõud?

**72:** Kui toimub niisugune ostsilleeruv (võnkuv) liikumine, mille puhul süsteemi parameetrid muutuvad aeglaselt (võrreldes võnkeperioodiga), siis säilib nn adiabaatiline invariant  $I$ : see on nn faasitasandil (kus koordinaatideks on ruumikoordinaat  $x$  ja impulss  $p_x$ ) moodustuva suletud kontuuri pindala.

Lisame täpsustusi ja kommentaare. Suletud kontuur moodustub parameetrilise kõverana (nn faasitrajektorina)  $x(t), p_x(t)$ , kui jälgime süsteemi liikumist ühe täisperioodi  $T$  vältel. Faasitrajektor varustatakse harilikult noolega, mis näitab liikumise suunda. Adiabaatiline invariant pole mitte absoluutselt täpselt säiliv suurus, vaid tema säilimise täpsus kasvab suhte  $\tau/T$  kasvamisega, kus  $\tau$  on süsteemi parameetrite muutumise karakterne aeg.

Adiabaatilisel invariandil on füüsikas tohutu suur roll, mis algab gaaside adiabaadi seadu-

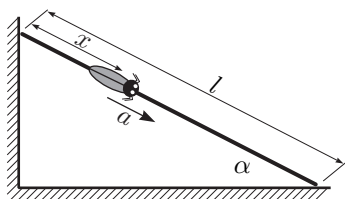


sest (võrrelge eelmise ülesande tulemust ühe vabadusastmega ideaalse gaasi adiabaadiseadusega!) ning viib välja kvantmehaanika seadusteni (süsteemi kvantide — nt footonite — arv säilib süsteemi parameetrite aeglasel muutmisel).

## KORDAMISÜLESANDEID

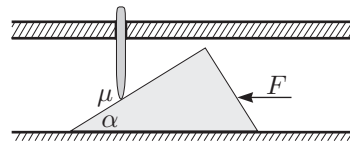
**ÜL 55.** Sirge ühtlane varras toetatakse vastu vertikaalset seina nii, et tema ja seina vaheline nurk on  $\alpha < 90^\circ$ . Milliste nurga  $\alpha$  väärtuste korral saab varras sedasi paigale püsima jääda? Vaadelda kahte juhtumit: a) sein on libe ja põrand kare hõõrdeteguriga  $\mu$ ; b) põrand on libe ja sein kare hõõrdeteguriga  $\mu$ .

**ÜL 56.** Hästi kerge pulk on toetatud ühe otsaga vastu seina ja teisega vastu põrandat. Sitikas tahab ronida seda pulka mööda ülevalt alla. Kuidas peaks sõltuma kiirendus, millega ta liigub sellest, kui kaugel on ta pulga ülemisest otsast? Sitika mass on  $m$ , pulga pikkus on  $l$ , nurk põrand ja pulga vahel on  $\alpha$  ning pulga mass lugeda nulliks; nii sein kui ka põrand on libedad ( $\mu = 0$ ). Kui kaua kulub tal aega selleks, et laskuda ülemise otsa juurest (paigalseisust) päris alla?

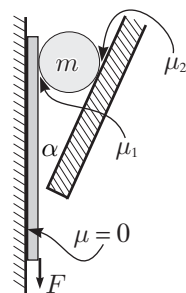


**ÜL 57.** Libedal horisontaalpinnal lebab kiil tipunurgaga. Läbi lae on puuritud siledade seintega auk. Läbi selle augu on pistetud varras, mis täidab tihedalt augu, nii et ta saab libiseda hõõrdetavalt üles-alla, kuid tema telg on fikseeritud ja vertikaalne. Varras toetub vastu kiilu; ainus koht antud süsteemis, kus toimub hõõre, on varda ja kiilu vaheline kontaktpind — hõõrdetegur seal on  $\mu$ . Milliste  $\mu$  väärtuste puhul on võimalik suruda kiil varda alt läbi, kui vaid rakendada sel-

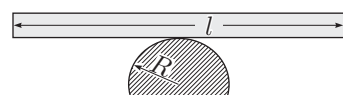
leks piisavalt tugevat horisontaalsuunalist jõud?



**ÜL 58.** Mõnel pool kasutatakse piltide jms. seinale riputamiseks sellist konstruktsiooni, mille mudel on alljärgnev. Fikseeritud vertikaalpinnas vastas on liikumatu kaldpind, kusjuures nurk vertikaalsihi ja kaldpinna vahel on. Vertikaal ja kaldpinna vahele jääb pilu, kust saab läbi pista õhukese plaadi. Plaat asetatakse tihedalt vastu vertikaalpinda; hõõrdetegur nende kahe vahel lugeda nulliks. Plaadi ja kaldpinna vahele jäävas ruumiosas saab vabalt liikuda silinder massiga  $m$ , mille telg on horisontaalne ja paralleelne kõigi vaadeldud pindadega. Silinder toetub plaadile ja kaldpinnale ning hõõrdetegurid neil kontaktpindadel on vastavalt  $\mu_1$  ja  $\mu_2$ . Milliste hõõrdetegurite väärtuste puhul on garanteeritud, et kuitahes raske plaat ei kuku pilust välja?

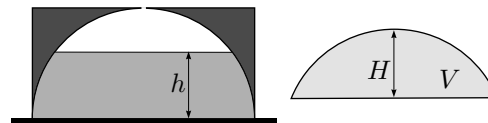


**ÜL 59.** Silindrile, mille telg on horisontaalne, asetatakse laud, mille pikkus on  $l$  ja paksus  $h$ . Millise silindri raadiuse  $R$  puhul on laua horisontaalne asend stabiilne?



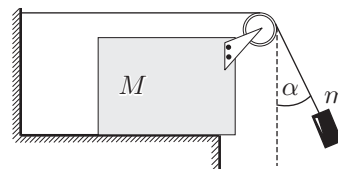
**ÜL 60.** Silindri kujuline anum, mille kõrgus võrdub tema raadiusega  $R$  ning mille õõnsus on poolsfääri kujuline, on täidetud ääreni veega kee-

ratud kummuli ja asetatud siledale horisontaalpinnale. Poolsfäärilise õõnsuse raadius on samuti  $R$ , anuma põhjas on väike auk. Vabalt lebava anuma servade vahelt voolab osa vett välja. Leidke, kui kõrge veekiht jääb alles, kui anuma mass on  $m$  ja vee tihedus  $\rho$ . Oma arvutustes võite kasutada valemit kera kihi ruumala jaoks (vt joonis):  $V = \pi H^2(R - H/3)$ .



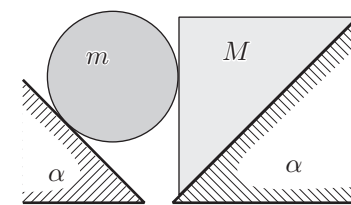
**ÜL 61.** Silindriline vertikaalne anum raadiusega  $R$  pöörleb ümber oma telje nurkkiirusega  $\omega$ . Kui palju erineb veepinna kõrgus telje juures kõrgusest anuma servade juures?

**ÜL 62.** Klots massiga  $M$  asub libedal horisontaalpinnal. Üle tema nurka kinnitatud ploki on visatud nõor, mille üks ots on kinnitatud seina külge ning on horisontaalne ja mille teise otsa külge on kinnitatud klots massiga  $m$  ning mis on kallutatud vertikaalsihist nurga  $\alpha$  võrra kõrvale. Algselt on nõor pingul ning klotsi hoitakse paigal. Seejärel klotsid vabastatakse. Millise masside suhte korral jääb nurk  $\alpha$  edaspidise liikumise käigus konstantseks?

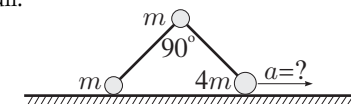


**ÜL 63.** Kaks hästi libedat ( $\mu = 0$ ) kiilukujulist kaldpinda, millel on ühesugused kalde-nurgad  $\alpha$ , on asetatud sel viisil, et servad on paralleelsed, kalded on vastakuti ja nende vahele jääb väike pilu (vt joonis). Pindade peale on asetatud silinder ja kiilukujuline klots nurgaga, kusjuures nad toetuvad üksteise vastu ning klotsi üks tahk on horisontaalne; massid on vastavalt  $m$  ja  $M$ . Millise kiirendusega nad hakkavad

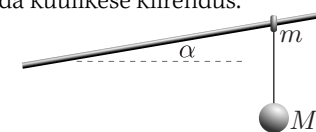
liikuma? Leidke nende vaheline rõhumisjõud.



**ÜL 64.** Kolm pisikest silindrikest on ühendatud kaalutute varraste abil, kusjuures keskmise silindri juures on liigend, nii et varraste vaheline nurk saab vabalt muutuda; alghetkel on see täisnurk. Kaks silindrit on ühesuguse massiga  $m$ , ühe otsmise silindri mass on aga  $4m$ . Leidke, milline on selle raskema silindri kiirendus vahetult peale liikuma hakkamist. Hõõre on igal pool null.



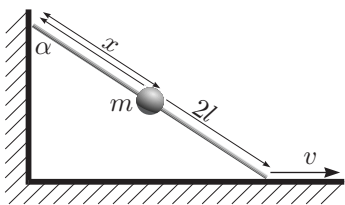
**ÜL 65.** Libe varras on asetatud horisondi suhtes kaldu nurga  $\alpha$  all. Mööda seda varrast saab libiseda väike rõngas massiga  $m$ , mille külge on kinnitatud pikk nõor ja nõori otsa on riputatud kuulike massiga  $M$ . Alghetkel hoitakse rõngast paigal, nii et nõor ripub otse alla. Siis lastakse ta lahti ning küsitakse, milline on vahetult peale seda kuulikese kiirendus.



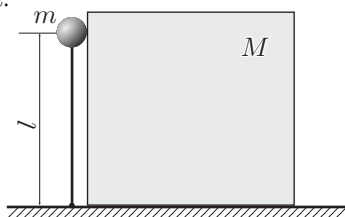
**ÜL 66.** Klots hakkab libisema sfäärilise pinna kõige ülemisest punktist. Leidke, millisel kõrgusel eraldub ta sfääri pinnalt. Sfääri hoitakse paigal ja tema raadius on  $R$ ; hõõre puudub.

**ÜL 67.** Kaalutu varda pikkus on  $2l$  ja tema ülemisest otsast kaugusele  $x = l$  on kinnitatud kuulike massiga  $m$ . Varras toetub ühe otsaga vastu seina ja teisega vastu põrandat. Vastu põrandat toetavat otsa liigutatakse konstantse kii-

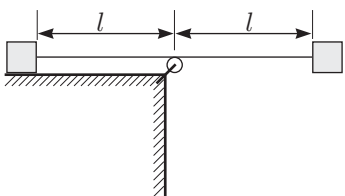
rusega  $v$  seinast eemale. (a) Leidke, millise jõuga mõjutab kuulike varrast sel hetkel, kui nurk sein ja varda vahel on  $\alpha = 45^\circ$ ; (b) milline on vastus siis, kui  $x \neq l$ ?



**ÜL 68.** Kerge varras pikkusega  $l$  on kinnitatud šarniirsel horisontaalpinnale; varda otsa on kinnitatud kuulike massiga  $m$ . Algselt on varras vertikaalasendis ning kuul toetub vastu klotsi massiga  $M$ . Süsteem lastakse vabalt liikuma ning teatud aja pärast eraldub kuul klotsi pinnalt — siis, kui varras moodustab horisontaalsihiga nurga  $\alpha = \pi/6$ . Leidke milline on masside suhe  $M/m$  ning milline on eraldumise hetkel klotsi kiirus  $u$ .

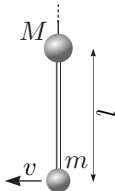


**ÜL 69.** Laua servast kaugusel  $l$  lebab klots, mis on ühendatud nööri abil teise samasuguse klotsiga. Nööri pikkus on  $2l$  ja ta on tõmmatud üle laua serval asuva ploki. Teist klotsi hoitakse laua pinna kõrgusel nii, et niit on pingul. Seejärel lastakse teine klots vabalt kukkuma. Mis juhtub enne, kas esimene klots jõuab plokini või lööb teine end vastu lauda?

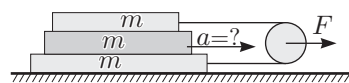


**ÜL 70.** Ühtlase paksuse ja massijaotusega silindrilisele jäähokilitrile antakse nurkkiirus  $\omega$  ja kulgliikumisekiirus  $u$ . Millist trajektoori mööda liigub litter, kui jää on kõikjal ühesuguse libedusega? Millisel juhul libiseb ta kaugemale, kas siis, kui  $\omega = 0$ , või siis, kui  $\omega \neq 0$ , eeldades, et mõlemal juhul on  $u$  ühesugune?

**ÜL 71.** Hästi pika nõõri otsa on riputatud kuulike massiga  $M$ ; tema külge omakorda kaalutu varda abil teine kuulike massiga  $m$ . Varda pikkus on  $l$  Alghetkel on süsteem tasakaaluasendis. Milline horisontaalsuunaline kiirus tuleks anda alumisele kuulikesele, et ta kerkiks ülemise kuuliga samale kõrgusele. Kuulide mõõtmed on hulga väiksemad varda pikkusest.

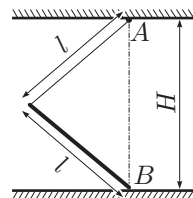


**ÜL 72.** Klots massiga  $m$  lebab libedal horisontaalpinnal. Temal lebab omakorda teine klots massiga  $m$  ja teisel klotsil kolmas klots massiga  $m$ . Üle kaalutu ploki tõmmatud nõõr seob omavahel esimest ja kolmandat klotsi; nõõrid on horisontaalsed ja ploki tõmmatakse jõuga  $F$ . Milline on teise klotsi kiirendus? Hõõrdetegur klotside vahel on  $\mu$ ,



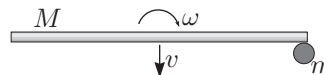
**ÜL 73.** Poiss massiga  $m$  tahab lükata jää peal seisvat teist poissi, kelle mass  $M$  on tema omast suurem. Selleks võtab ta hoogu, jookseb talle poisile otsa ning lükkab teda nii kaua edasi, kuni nad koos seisma jäävad. Milline on maksimaalne kaugus, mille võrra on sel viisil võimalik lükata? Maksimaalne jooksu kiirus on  $v$ , mõlema poisi ja jää vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ .

**ÜL 74.** Ühtlane varras pikkusega  $l$  on seotud kaalutu niidi abil, mille pikkus on samuti  $l$  lakke punktis  $A$ . Varda alumine ots toetub libedale põrandale punktis  $B$ , mis on punktiga  $A$  täpselt kohakuti. Lõigu  $AB$  pikkus on  $H$ ,  $l < H < 2l$ . Varras hakkab paigalseisust libisema; leidke tema keskpunkti maksimaalne kiirus edasise liikumise käigus.



**ÜL 75.** Ühtlase massijaotusega pulk toetub ühe otsaga maha ja teisega vastu seinale. Algselt oli ta vertikaalasendis ja hakkas paigalseisust libisema nii, et kogu järgnev liikumine toimus tasandis, mis on risti sein ja põranda lõikejoonega. Milline nurk oli pulga ja sein vahel sel hetkel, kui pulk eraldus seinast? Hõõrdumist mitte arvestada.

**ÜL 76.** Mööda jääd libiseb pööreldes palk massiga  $M$ . Palgi massikeskme kiirus on  $v$ , nurkkiirus on  $\omega$ . Sel hetkel kui palk on risti tema massikeskme kiirusega, pörkub ta otsaga vastu paigalseivat litrit massiga  $m$ . Millise masside suhte  $M/m$  korral on võimalik selline olukord, kus palk jääb liikumatult paigale, aga litter libiseb minema. Põrge lugeda absoluutselt elastseks. Palk on sirge ja tema joontihedus on konstantne.

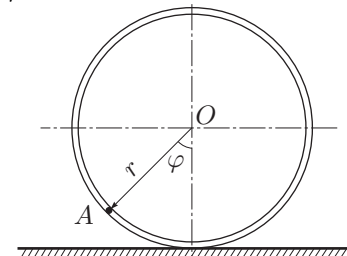


**ÜL 77.** Kõrguselt  $h$  kukub alla pall, millel on alghetkel horisontaalsuunaline kiirus  $v_0$  ja mis ei pöörle. a) Leidke palli kiirus ja nurkkiirus peale sellist põrget vastu põrandat, kus palli deformatsioon oli absoluutsel elastne, kuid kontaktpinnal toimus hõõrdumine, nii et palli vastu põrandat

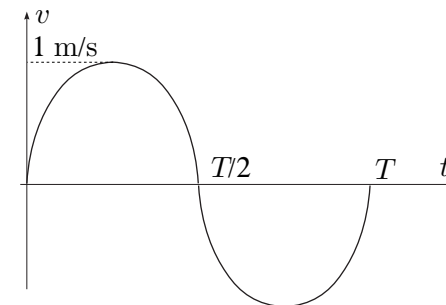
puutunud pind peatus. b) Vastake samale küsimusele eeldusel, et kontaktpindade kiirused ei ühtlustunud ning kogu pörke vältel toimus libisemine hõõrdeteguriga  $\mu$ .

**ÜL 78.** Kuul veereb mööda kaldpinda allapoole. Leidke, milline on kuuli kiirendus. Kaldpinna kaldenurk on  $\alpha$ , kuuli ja pinna vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ .

**ÜL 79.** Võru massiga  $M$  ja raadiusega  $r$  seisab libedal horisontaalpinnal. Võru sisemuses on peenike libe kanal, mida mööda libiseb pisike klotsike massiga  $m$ . Alguses on kõik kehad liikumatud ning klotsike asub võru kõige ülemises punktis. Leidke võru keskpunkti kiirus ja kiirendus sel hetkel, kui võru keskpunktist klotsini tõmmatud joone ja vertikaalsihi vaheline nurk on  $\varphi$ .

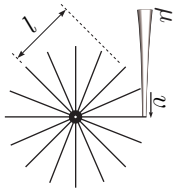


**ÜL 80.** Klots massiga  $m = 10$  g asetatakse lauale, mis on töödeldud selliselt, et libisemisel vasakule poole on hõõrdetegur  $\mu_1 = 0,3$  ja libisemisel paremale on hõõrdetegur  $\mu_2 = 0,5$ . Lauda liigutatakse vasakule-paremale vastavalt joonisel toodud graafikule  $v(t)$ . See graafik on perioodilise perioodiga  $T = 0,01$  s; laua kiirus  $v$  loetakse

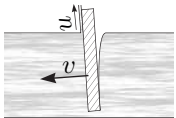


positiivseks, kui ta on suunatud paremale. Kasutades graafikut leida, millise keskmise kiirusega hakkab liikuma klots.

**ÜL 81.** Veeturbiin koosneb suurest arvust labidatest, mida võib vaadelda, kui õhukesti tasapinnalisi lauajuppe pikkusega  $l$ , mis on ühte otsa pidi kinnitatud pöörleva telje külge; labidate vabad otsad paigutuvad turbiini teljega koaksiaalsele silindrilisele pinnale. Turbiinile suunatakse veejuga kiirusega  $v$  ja massikuluga  $\mu$  (kg/s) nii, et ta tabab üksnes labidate otsmisi servi. Leidke millist maksimaalset kasulikku mehaanilist võimsust on võimalik saada sellise turbiini abil.



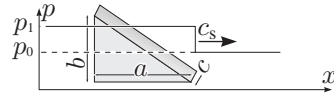
**ÜL 82.** Tasase pinnaga laud on vertikaalsihi suhtes nurga  $\alpha$  all kaldu. Tema üks ots on vees, teine ulatub veest välja. Laud liigub oma pinnanormaali sihis kiirusega  $v$ . Milline on mööda laua pinda ülespoole suunatud veejoo kiirus?



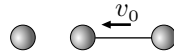
**ÜL 83.** Koormise horisontaalsuunaliseks edasitoimetamiseks kaugusele  $L$  kasutatakse moortoriga vankrikest. Koormis on kinnitatud vankrikest külge trossiga pikkusega  $l$ . Pool ajast liigub vankrike ühtlaselt kiirenevalt, pool ajast aga ühtlaselt aeglustuvalt. Leidke kiirenduse  $a$  niisugused väärtused, mille puhul jääb koormis sihtpunkti jõudmise järel trossi otsas liikumatult ripsuma. Võite eeldada, et  $a \ll g$

**ÜL 84.** Lööklainet võib vaadelda kui heli kiirusega  $c_s$  levivat rõhu hüppelist muutust väärtuselt  $p_0$  väärtuseni  $p_1$ . Leidke, millise kiirusega

omandab lööklaine mõjul ( $a$ ) kiilu-kujuline klots mis kujutab endast prismat mille kõrgus on  $c$ , mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk kaatetitega  $a$  ja  $b$  ning mis on valmistatud materjalist tihedusega; ( $b$ ) suvalise kujuga keha, mille ruumala on  $V$  ning tihedus  $\rho$ .



**ÜL 85.** Hantel, mis koosneb kahest peenikese terasvarda abil ühendatud elastsest kuulist, liigub paralleelselt oma teljega kiirusega  $v$  paigalseisva kolmanda samasuguse kuuli poole. Leida hantli kiirus peale tsentraalset põrget. Kas süsteemi kineetiline energia säilib?



## VIHJEID

- Kirjutage välja jõumomentide võrrand võru ja völli puutepunkti  $O$  suhtes. Millise nurga moodustab horisondiga punktist  $O$  tõmmatud völli puutuja (arvestades, et traat libiseb völlil)?
- Kasutage jõumomentide võrrandit süsteemi silinder+klots jaoks silindri ja kaldpinna puutepunkti suhtes. Millise nurga moodustab horisondiga klotsi juurest tõmmatud silindri puutuja?
- Kasutage vardale  $CD$  mõjuvate jõumomentide võrrandit sirgete  $AC$  ja  $BD$  lõikepunkti suhtes (nii vabaneme kahe varda pingest). Milline peab olema jõu  $F$  moment? Millise jõu suuna korral saavutatakse see moment minimaalse mooduliga?
- Jõudude  $\vec{F}$  ja  $m\vec{g}$  vektorsumma peab kompenseerima rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultandi  $\vec{f} = \vec{N} + \vec{F}_h$ , st olema pinnanormaali suhtes nurga  $\arctan \mu$  all. Hakake joonistama vektorite kolmnurka  $m\vec{g} + \vec{f} + \vec{F} = 0$ : vektori  $m\vec{g}$  võib ära joonistada (suund ja moodul teada),  $\vec{f}$  suuna võib läbi  $m\vec{g}$  lõpp-punkti tõmmatud sirgena ära märkida.  $\vec{F}$  peab ühendama selle sirge  $m\vec{g}$  alguspunktiga. Millise suuna puhul on tema moodul minimaalne?

5. Minge kaldpinnaga seotud taustsüsteemi (raken-dage ideid 6 ja 7) ning kasutage sama meetodit, mis ülesande 4 puhul ( $\vec{a} + \vec{g}$  on efektiivse raskuskiirenduse  $\vec{g}_e$  rollis).

6. Kasutage silindriga seotud pöörlevat süsteemi. ( $a$ ) Raskusjõu ja tsentrifugaaljõu  $\vec{f}_t$  resultantvektori ots-punkt liigub mööda ringjoont ning peab võrduma rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultantiga  $\vec{f}$ . Milline on maksimaalne lubatav nurk vektorite  $\vec{f}_t$  ja  $\vec{f}$  vahel (et poleks libisemist)? Millise  $m\vec{g}$  suuna puhul on vektorite  $\vec{f}_t$  ja  $\vec{f}$  vaheline nurk maksimaalne? ( $b$ ) Joonistage välja osas a) mainitud jõuvektorid tasandis, kus nad kõik lebavad. Millist kõverat mööda liigub  $m\vec{g}$  ja  $\vec{f}_t$  resultantvektori otspunkt?

7. Millisel joonel peab asuma hõõrdejõudude vektori-te pikenduste lõikepunkt fakti nr 4 tõttu? Mida võib öelda kahe nurga kohta, mille moodustavad hõõrdejõu vektorid niidi sihiga tulenevalt ideest 1 (telg on risti niidi pingega)? Kombineerides kahte eelpoolsaadud järeldust, kus asub hõõrdejõudude vektorite pikenduste lõikepunkt? Kuhu on suunatud silindri punktide kiirusvektorid seal, kus silinder lõikub kareda riba-ga? Kus on silindri hetkeline pöörlemiskese (meenuta-maks selle leidmist, vt kinemaatika kogumikku)? Mil-line on silindri keskpunkti kiirusvektor? ( $b$ ) Kas eel-poolleitud tasakaalutingimus saab rikutud, kui pind on ühtlaselt kare?

8. Joonistage ringjoon, mille diameetriks on toetus-punkte ühendav lõik. Kasutage fakti nr 6: millist kõ-verat mööda saab liikuda kuul? Kus on selle kõvera madalaim punkt?

9. Vaadeldge vardale mõjuvaid jõumomente šarni-ri suhtes. Millise nurga  $\alpha$  puhul pöörab rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultantjõud varrast tihedamalt vastu plaati?

10. Kui palju laskub klots, kui niiti pikendada  $\delta$  võrra?

11. Oletagem, et niidi pingeline horisontaalkomponent on  $T_x$ . Milline on niidi pingeline vertikaalkomponent lae juures? Klotsi juures? Kirjutage välja a) klotsile ja b) süsteemile klots+niit mõjuvate jõudude tasakaalu tin-gimus (vrdl idee 4).

12. Et  $H \ll L$ , siis on köis ilmselt nõrgalt kõver-dunud. Avaldage rippuva köieosa pingeline horisontaal-komponent funktsioonina pikkusest  $l$ . Kirjutage välja

rippuvale köieosale mõjuvate jõumomentide tasakaa-lu tingimus hoidva kääre suhtes. Saadud ruutvõrrandit kasutades pikkuse  $l$  leidmiseks.

13. Idee 8: minge pöörleva šarniiriga seotud taust-süsteemi.  $a$ ) Kirjutage jõumomentide tasakaalu tingi-mus šarniiri suhtes (idee 2) väikese kõrvalekalde nurga  $\varphi$  puhul. Mis tekitab suurema momendi, kas  $m\vec{g}$  või tsentrifugaaljõud?  $b$ ) Avaldage summaarne potentsiaalne energia väikese kõrvalekalde nurgade  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  kaudu arvestades tsentrifugaaljõu (sarnaneb elastsus-jõuga!) ja raskusjõu energiat. Esiteks, energial peab olema miinimum  $\varphi_2 = 0$  korral:  $\varphi_1^2$  kordaja peab olema positiivne. Teiseks, asendades energia avaldises kõikjal  $\varphi_2 = k\varphi_1$  ning tuues seejärel  $\varphi_1^2$  sulgude ette, saame  $\varphi_1^2$  kordajaks ruutkolmikme  $P(k)$ , mis peab olema positiivne kõikide  $k$  väärtuste korral (sest ener-gia miinimumis peab energia muut olema alati posi-tiivne). Seega peab  $P(k)$  diskriminant olema negatiiv-ne.

14. Rakendage ideesid 15 ja 18 prussi sellise pöörde jaoks, mille puhul Archimedese jõu moodul ei muu-tu (st eeldades vertikaalsuunalist jõudude tasakaalu). Ideest 2 johtuvalt pange telg läbi massikeskme. Arc-himedese jõu momendi arvutamisel rakendage ideid 19,20; prussi veealuse osa ristlõike võib esitada rist-küliliku ja kahe kitsa kolmnurga (üks neist negatiivse massiga) superpositsioonina.

15. Süsteemile vesi+anum mõjuvad raskusjõud ning vedeliku ja laua vaheline rõhumisjõud; et vedeliku rõhk põhja juures on teada, siis saab vertikaalsuuna-lisest tasakaalutingimusest avaldada anuma massi.

16. Häirituse meetodil esimese parandi arvutamisel kasutame fakti 49 ja ühtlaselt-sirgjoonelisel allapoole libiseva klotsiga seotud taustsüsteemi: teades hõõr-dejõu moodulit ja nurka saab leida tema  $\vec{w}$ -sihilise ja  $\vec{u}$ -sihilise komponendi. Viimase märk muutub poolpe-riodi järel vastupidiseks ning seega taandub ta kesk-mistamisel välja.

17. Võtame vertikaalse  $x$ -telje 0-punktiks maardlast kaugel asuva merepinna punkti. Maa raskusvälja po-tentsiaalse energia 0-nivooks võtame taseme  $x = 0$  (st  $\varphi_{\text{maa}} = gx$ ), maardla puhul aga valime 0-nivooks lõpmatus kauguses asuva punkti. Maardlast kaugel

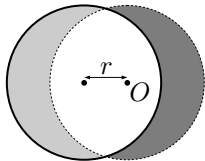


asuvate punktide põhjal on näha, et merepinna gravitatsiooniline potentsiaal on 0. Leiame avaldise potentsiaali jaoks maardla kohal funktsioonina  $x$ -st (kasutades superpositsiooni printsiipi) ja võrrutame selle nulliga.

**18.** Kasutame platvormiga seotud taustsüsteemi. Vaatleme jõumomentide võrrandit väikese ketta telje suhtes (siis on telje poolt avaldatava jõu õlg null). Jagame ketta mõtteliselt väikesteks võrdse suurusega tükkideks. Tükkidele mõjuvad hõrdejõud on moodulilt võrdsed ja suunatud piki ketta punkti joonkiirusi (valitud taustsüsteemis). Et ketta liikumine on esitatav pöörlemisena ümber hetkelise pöörlemistelje, siis moodustub hõrdejõu vektoritest kontsentriliste ringide süsteem (keskpunktiga hetkelisel pöörlemisteljel). On ilmne, et nende jõuvektorite summaarne jõumoment ketta telje suhtes on seda väiksem, mida väiksema kõverusega on ringid, st mida kaugemal on hetkeline pöörlemistelg; jõumoment läheb nulli siis, kui hetkeline pöörlemistelg on lõpmatutes ja ringjoonte asemel on paralleelsed sirged. Lõpmatutes asuv hetkeline pöörlemistelg tähendab, et liikumine on kulgev,  $\omega_3 = 0$  (sest teatud punkti joonkiirus  $v = \omega_3 r$  on lõplik, aga  $r = \infty$ ).

**19.** Hetkeline pöörlemiskese  $O$  asub ketta teljest kaugusel  $r = v/\omega$ . Kasutades samasugust mõtetlist tükeldamist nagu eelmises ülesandes näeme, et resultantjõu liikumissuunalise komponendi arvutamisel kompenseerivad hetkelise pöörlemistelje suhtes sümmeetriliselt paiknevate punktide hõrdejõud üksteist nii, et kompenseeritud saab terve ringikujuline piirkond raadiusega  $R - r$ . Mitte-kompenseeruv piirkond on arvutuste läbiviimiseks suhteliselt ebamugava kujuga. Suurendagem mõtteliselt kompenseeruva piirkonna raadiuse  $R$ -ni (punktiiriga ringjoon joonisel). See laiendatud kompenseeruva piirkonna osa, kus reaalselt pöörlevat ketast all ei ole (tumehall kuusirp joonisel), on esitatav päripidi- ja vastupidi pöörleva ketta superpositsioonina. Sellisel juhul osaleb päripidi pöörlev komponent kompenseerumises, vastupidi pöörlev komponent jääb aga kompenseerimata. Lõppkokkuvõttes jääb kompenseerimata kaks sümmeetriliselt paigutatud kitsa kuusirbi kujulist piirkonda, millest üks vastab reaalsele (joonisel helehall), teine aga vastupidi pöörlevale kettale (tumehall);  $\vec{v}$ -ga

ristisihis on nende piirkondade laius kõikjal võrdne  $r$ -ga. Resultantjõudu on mugavam arvutada integreerides üle sirbikujuliste piirkondade kasutades polaarkoordinaati  $\varphi$ :  $|d\vec{F}| = A \cdot dS$ , kus  $dS$  on pinnaelemendi pindala;  $dF_x = A \cos \varphi dS = B \cos^2 \varphi d\varphi$ ,  $F_x = \int dF_x = B \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$ . Millised on konstantide  $A$  ja  $B$  väärtused?



**20.** Vaatleme ühikvektorit  $\vec{r}$ , mis on suunatud massikeskme väikese nihkevektori suunas pliiatsi liikuma hakkamisel. Avaldame selle koordinaadid ristteljestikus  $(x, y, z)$ , kus  $x$  on paralleelne pliiatsiga ja  $(x, y)$ -tasand on paralleelne kaldpinnaga. Kasutades ruumipöörete valemit avaldame selle koordinaadid teljestikus  $(x', y', z')$ , mis on pööratud  $(x, y, z)$  suhtes ümber  $z$ -telje nurga  $\varphi$  võrra (nii, et telg  $x'$  on horisontaalne). Kasutades ruumipöörete valemit avaldame vektori  $\vec{r}$  vertikaalkoordinaadi  $z'$  teljestikus  $(x', y', z')$ , mis on saadud teljestiku  $(x', y', z)$  pöörlemisel ümber  $x'$ -telje nurga  $\alpha$  võrra.

**21.** Nöör ühtib silindri külgpinnal lühima teega otspunktide vahel; pinnalaotuseks on riskülik. Olgu rippuvat nööriosa hõlmava ja silindri külgpinda puudutava vertikaaltasandi puutejooneks silindri külgpinnaga sirge  $s$ . Silindri pinnajaotusel on nööri ning sirge  $s$  vaheline nurk võrdne silindri kaldenurgaga  $\alpha$ . Seda teades on juba lihtne leida pikkus  $l$ . Kui koormis võngub, siis on nööri jäljeks pinnalaotusel endiselt sirge. Seega ei sõltu rippuva nööriosa pikkus (ja seega ka koormise potentsiaalne energia) üheski võnkumisasendis sellest, kas silindri külgpind on tõesti silinderjas, või "lahti keeratud" vertikaalseks pinnalaotuseks (säilitades seejuures sirge  $s$  ruumilise orientatsiooni).

**22.** Kahele võrrandile, mis kirjeldavad jõudude ja jõumomentide tasakaalu, võrrand, mis kirjeldab nööride piknemiste vahelist lineaarset seost:  $T_1 - T_2 = T_2 - T_3$ .

**23.** Alghetkel mõjuvad rippuvale klotsile ainult vertikaalsed jõud, seega on algne nihkevektor samuti vertikaalne. Kui suure klotsi kiirendus on  $a_1$ , temal lebalval

klotsil  $a_2$  ning rippuvale  $a_3$ , siis kehtib seos  $a_1 + a_2 = a_3$ ; peale selle saab iga keha jaoks kirjutada Newtoni II seaduse; neljandaks tundmatuks on niidi ping.

**24.** Mingem klotsiga seotud süsteemi. Piirjuhul on kuulile massiga  $m$  mõjuv inertsijõu ja raskusjõu resultant risti vasakpoolse kaldpinnaga (et kuul püsiks seal paigal). Kuulidele mõjuvate resultantjõudude toetuspinnaga ristuvad komponendid  $\vec{F}_{\perp 1}$  ja  $\vec{F}_{\perp 2}$  on võrdsed klotsile mõjuvate rõhumisjõududega  $\vec{N}_1$  ja  $\vec{N}_2$  ning seega peavad olema moodulilt võrdsed ( $F_{\perp 1} = F_{\perp 2}$ ), et klotsi jaoks oleks rahuldatud jõudude tasakaalu tingimus horisontaalsuunal.

**25.** Võtkem süsteemi asendit kirjeldavaks koordinaadiks  $\xi$  kiilu nihke. Kui kiil nihkub  $\xi$  võrra, siis klots nihkub kiilu suhtes sama palju, sest nöör ei veni ning potentsiaalse energia muut  $\Pi = mg \sin \alpha$ . Kiilu kiirus on  $\dot{\xi}$  ja klotsi kiirus on  $2\dot{\xi} \sin \frac{\alpha}{2}$  (leiame kiiruste liitmise teel, kus kaks vektorit  $\dot{\xi}$  on nurga  $\alpha$  all), seega summaarne kineetiline energia  $K = \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 (M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2})$ . Edasi leiame:  $\Pi'(\xi) = mg \sin \alpha$  ja  $\mathcal{M} = M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ; nende kahe suhe annabki vastuse.

**26.** Ilmselt on kõige mugavam võtta koordinaadiks  $\xi$  kiilu nihe; kui klotside nihe piki kiilu pinda on  $\eta$ , siis kehtib massikeskme jäävusest tulenev seos  $\eta(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) = (M + m_1 + m_2)\xi$ . Siit saab küll avaldada nihke  $\eta$  suuruse  $\xi$  kaudu, kuid valemite lühiduse huvides pole mõtet seda avaldist väga vara igale poole asendada. Klotside kineetilised energiad leiame horisontaalsete  $[\frac{1}{2}m_i(\dot{\xi} - \dot{\eta} \cos \alpha_i)^2]$  ja vertikaalsete  $[\frac{1}{2}m_i(\dot{\eta} \sin \alpha_i)^2]$  energiatega summana.

**27.** Energia jäävuse kirjutamisel arvestage, et klotsi kiirus on kaks korda suurem silindri kiiruse horisontaalkomponendist ning viimane on võrdne vertikaalkomponendiga (miks?). Newtoni II seadus projekteerige teljele, mis läbib trepi ülemist nurka ja silindri ketset — see telg on risti nii klotsi ja silindri vahelise rõhumisjõuga, kui ka silindri tangentsiaalkiirendusega. Teine küsimus: kahe rõhumisjõu suhe on konstantne (miks? millega võrdne? vihje: võrrelge klotsi ja silindri horisontaalkiirendusi ja pidage meeles Newtoni II seadust), seepärast lähevad nad samal hetkel nulli.

**28.** Projekteerides Newtoni II seaduse rõhumisjõu suunalisele teljele näeme, et trajektoori kaare-kujulise

osa alumises punktis on rõhumisjõud kõige väiksem (kesktõmbe kiirendus suurim, raskusjõu telje sihiline komponent väiksem).

**29.** Süsteemi litter+klots energia säilib kogu aeg; impulss säilib alates sellest hetkest, kui litter on esimest korda alumises punktis. Kui ta on seal teist korda, siis on klotsi kiirus maksimaalne (miks?).

**30.** Idee 44 rakendamine  $\vec{P}$  jaoks: süsteemi summaarne impulss on  $P = \omega l m + 2\omega l M$ , resultantjõud  $F = (m + M)g - T$ . Sama pöördimpulssi kasutades: impulsimoment vasakpoolse kuuli algasendi suhtes on  $l(2\omega l)M$  (kiirus on  $2\omega l$ , kiiruse õlg  $l$ ); summaarne jõumoment on  $(T + Mg)l$ . Edasi, idee 44 juures toodud valemis vajame nurkkiirendust  $\varepsilon = \dot{\omega}$ . Selle leidmine meetodit 6 kasutades:  $\Pi = l\varphi(m + 2M)$ ,  $K = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 l^2 (m + 4M)$ . Kolmanda lahendustee järgimiseks: kiirenduste suhe on 1:2; tundmatuid on neli (kaks toereaktsiooni, kiirendus ja ping niidis); võrrandid: kolm jõudude võrrandit (kummagi kuuli ning varda jaoks) ja üks momentide võrrand (varda jaoks vasaku otsa suhtes).

**31.** Meetod 6: üldistatud koordinaadiks  $\xi$  sobib nööri otsa nihe. Ideed 32,20: süsteemi massikeskme  $y$ -koordinaadi muut on  $\xi \rho h / M$  ( $h$  — nööri otste kõrguste vahe,  $M$  — süsteemi kogumass; eeldame, et  $\xi \ll h$ ),  $x$ -koordinaadi jaoks on see  $2\xi \rho R / M$ .

**32.**  $\langle T(1 + \cos \alpha) \rangle = 2mg$ ,  $T = \langle T \rangle + \tilde{T}$ , kus  $|\tilde{T}| \ll T$ . Lähtudes ideest 16 ignoreerime kõige väiksemat liiget  $\langle \tilde{T} \alpha^2 \rangle$  ja paneme tähele, et  $\langle \alpha^2 \rangle > 0$ .

**33.** Tuleb vaadelda 2 varianti: kõik kehad liiguvad koos, või parempoolne suur klots liigub eraldi. Miks pole võimalikud olukorrad, kus (a) kõik kolm komponenti liiguvad eraldi (b) vasem suur klots liigub eraldi?

**34.** Peale pörget on kuulide trajektoolid üksteisega ristuvad sirged; nurk algtrajektoori suhtes on määratud sellega, kui võrd mitte-tsentraalne oli pörge.

**35.** Nõrgalt mitte-tsentraalse liikumise puhul: mis-suunalise impulsi saab esimese löögi saanud kuul? Edasi rakendage teistkordselt ideed 50. Tsentraalne liikumine: avaldage kiirused peale pörget ühele kuulile üle antud impulsi horisontaalkomponendi  $p_x$  kaudu. Milline on üle antud vertikaalkomponent  $p_y$ ? Energia jäävus annab võrrandi suuruse  $p_x$  leidmiseks (energia

on mugav avaldada kujul  $p^2/2m$ ).

**36.** Graafik näeb välja, nagu  $n$  omavahel lõikuvat sirgjoont; kahe sirgjoone lõikepunkt vastab kahe kuuli pörkimisele (kummagi kuuli graafikuks on murdjoon; pörkepunktis kahe murdjoone nurgad puutuvad üksteist nii, et näib, nagu oleks kaks lõikuvat sirget).

**37.** Algiirused massikeskme süsteemis:  $\frac{mv}{m+M}$ ,  $\frac{Mv}{m+M}$ , lõppkiirused on nullid; hõõrdejõu töö:  $\mu mgL$ .

**38.** Pildi põhjal saame vahetult kätte (konstandi täpsusega) impulsside moodulid ja sihid, kuid mitte suunad. Välja tuleb selgitada kuhu läheb noolega näidatud kuul pärast pörget, kolmest variandist õige aitab valida fakt 13.

**39.** Energia: aja  $dt$  jooksul muutub vedeliku paiknemine, keskosas on endiselt vett, kuid teatud mass  $dm$  on ülalt sattunud kraani kohale (ja kraanist välja) ning süsteemi potentsiaalse energia muut on  $gH \cdot dm$ . Impulss: tunnisis oleks vesi saab seintel summaarse impulsi  $\rho gHS \cdot dt$ . See impulss läheb vedeliku joale massiga  $\rho Sv \cdot dt$ .

**40.** Energia ei säili (liivaterad libisevad ja hõõrduvad). Ajavahemiku  $dt$  jooksul saab lindile maanduv liiv lindilt impulsi  $dp = v \cdot dm = v\mu \cdot dt$ : vastselt lindile langenud liiva ja lindi vaheline jõud  $F_1 = dp/dt$ . Lindil juba levalava liivale mõjub raskusjõud  $mg$ , mille lindi sihilise komponendi kompenseerib hõõrdejõud  $F_2 = mg \cos \alpha$ , kus  $m = \sigma L$  on lindil oleva liiva mass ja  $\sigma v = \mu$ . Miinimum tuleb leida üle  $v$  väärtuste.

**41.** Pörke jooksul  $\Delta p_{\perp} = \sqrt{2gh}$ .

**42.** Vaatleme lühikest löiku mäenõlvast pikkusega  $dl$ . Lisaks potentsiaalse energia muutumisele tehakse tööd hõõrdejõu ületamiseks,  $dA_h = \mu mg \tan \alpha \cdot dl$ . Selgub, et  $dA_h = C \cdot dx$ , kus  $C$  on konstant. Summeerides üle kõikide löikude saame  $A_h = C\Delta x$ .

**43.** Kineetiline energia  $K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + M\dot{x}^2$ , kus  $x$  on nihe piki kaldpinda;  $\Pi = (M+m) \sin \alpha$ . Leidnud kiirenduse  $a$  läheme kiirendusega  $a$  liikuvasse (silindriga seotud) taustsüsteemi (ideed 6 ja 7), kus klots nihkub efektiivse raskuskiirenduse sihis nii madalale, kui võimalik.

**44.** Vastavalt ideele 59 ja 60 on varda impulsimoment enne pörget  $L_0 = Mlv - \frac{1}{3}Ml^2\omega$ ; pärast pörget

$L_1 = Mlv' - \frac{1}{3}Ml^2\omega'$ ;  $L_1 = L_2$ . Energia avaldis:  $K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{6}Ml^2\omega^2$ . Otsa paigal olemise tingimus:  $v' + l\omega' = 0$  ( $\omega$  loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub joonisel näidatud suunas).

**45.** Impulsimoment löögipunkti suhtes enne pörget:  $mv(x - \frac{l}{2}) - I_0\omega$ , kus  $v = \omega\frac{l}{2}$  ja  $I_0 = \frac{1}{12}ml^2$ .

**46.** Hetkeline pöörlemiseljeks on silindri ja pööranda puutepunkt; selle kaugus massikeskmest ei muutu, st saame kasutada ideed 63;  $I = \frac{3}{2}mR^2$ .

**47.** Loeme  $z$ -telje ülespoole suunatuks (see määrab impulsimomentide märgid). Lõpp-impulsimoment  $x$ -telje suhtes on  $-\frac{7}{5}mv_yR - muR$  ja  $y$ -telje suhtes  $\frac{7}{5}mv_xR$ .

**48.** Vahetult peale esimest pörget jäävad kummagi hantli massikeskmed paigale, pörkunud kuulide kiirused muutuvad vastupidiseks, mitte-pörkunud kuulide kiirused ei muutu. Kumbki hantel kui pendel sooritab võnkumise poolperioodi ning seejärel toimub teine, igati analoogne pörge.

**49.** Liivaterakesed sooritavad silindri telje risttasandis harmoonilist võnkumist — nii, nagu matemaatiline pendel pikkusega  $l = R$  raskusväljas  $g \cos \alpha$ ; piki telge toimub ühtlaselt kiirenev liikumine ( $a = g \sin \alpha$ ). Fokuseerumine toimub, kui piki telge renni läbimiseks kuluv aeg on võnkumise poolperioodi täisarvukordne.

**50.** Tasakaaluasendite põhjal võib järeldada, et massikeske lebab riidepuu sümmeetriateljel. Kolm punkti (kõik riputuspunktid) peavad asetsema idees 67 mainitud kahel kontsentriilsel ringil. Seega, ühel ringil peab asetsema vähemalt kaks punkti kolmest ja ringide keskpunkt (massikeske) peab asetsema riidepuu kontuuride sees (miks?) riidepuu sümmeetriateljel. Neid tingimusi rahuldavalt on ringe võimalik joonistada vaid ühel moel. Arvutades trigonomeetria reeglite abil kummagi ringi raadiused  $l_1$  ja  $l_2$  leiame pendli taandatud pikkuse  $l_1 + l_2$  ja selle abil võnkperioodi.

**51.** Liikuma hakkava vee efektiivse massi leiame langeva kuulikeske kiirenduse abil. Tõusva mulli puhul on efektiivne mass täpselt samasugune, gaasi mass on sellega võrreldes tühiselt väike.

**52.** Separatris jagab langeva vee kaheks pooleks: vasakpoolne juga pöörab lauaga kokku puutudes va-

sakule, parem — paremale. Seega moodustub kaks mõttelist “veetoru”. Mõlemas torus on staatiline rõhk võrdne välisrõhuga (sest läheduses on vedeliku vaba välispind); Bernoulli seaduse põhjal ei saa siis vedeliku kiirus muutuda. Horisontaalsihilise impulsi jäävusest johtuvalt peab vasakule ja paremale suunduvate veevoogude impulsvoogude ( $\mu_i \vec{v}$ , kus  $i = v, p$ ) summa võrduma langeva vee impulsvoo horisontaalkomponendiga. Märkimisväärne, et pidevuse tingimuse tõttu  $\mu = \mu_v + \mu_p$ .

**53.** Pidevuse tõttu  $(u+v)(H+h) = Hu$  Const, kus  $h = h(x)$  on vedeliku kõrgus punktis  $x$  ja  $v = v(x)$ . Bernoulli seaduse võime kirjutada pinnalähedase mõttelise “toru” jaoks (vaba pinna ja pinnalähedase voolujoone vahele jääv ruumiosa):  $\frac{1}{2}\rho(u+v)^2 + \rho g(H+h) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gH = \text{Const}$ . Võime ignoreerida teist järku väikseid liikmeid (mis sisaldavad tegureid  $v^2$  või  $vh$ ).

**54.** Faasitrajektoriks on horisontaalne ristkülik külgedega  $L$  ja  $2mv$ , kus  $L$  on klotsi kaugus seinast; adiabaatiline invariant on seega  $4Lmv$ .

**55.** Vaatleme jõumomentide tasakaalu tingimust rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultantvektorite pikenduste lõikepunkti jaoks: see peab asuma massikeskme kohal.

**56.** Kirjutame välja Newtoni II seaduse pöörliikumise jaoks rõhumisjõudude sihtide lõikepunkti suhtes: sitika impulsimoment  $L = mvl \sin \alpha \cos \alpha$ , selle muutmise kiirus peab olema võrdne putukale mõjuva raskusjõu momendiga (teiste jõudude õlad on nullid). Perioodi arvutamisel paneme tähele, et kiirendus on negatiivne ja võrdeline kaugusega alumisest otsast, st tegemist on harmoonilise võnkumisega.

**57.** Blokeerumine toimub, kui pulgale mõjuv hõõrdejõu ja rõhumisjõu resultant “sikutab” pulka allapoole.

**58.** Blokeerumise korral võime unustada kõik muu peale rõhumisjõudude ja hõõrdejõudude. Oletame, et blokeerumine on toimunud. Siis peavad vasakult ja paremalt toimivad hõõrdejõu ja rõhumisjõu resultantid üksteist kompenseerima nii jõudude kui jõumomentide seisukohast, st toimima ühel sirgel ning olema moodulilt võrdsed. Seega saame teada pinnanormaali ning rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultandi vahelise nurga.

**59.** Vaatleme, kuhu poole on suunatud lauale mõjuv jõumoment puutepunkti suhtes, kui laud pöörduv nurga  $\varphi$  võrra: puutepunkt nihkub  $R\varphi$  võrra, massikeskme horisontaalkoordinaat aga nihkub laua pöörumise tõttu puutepunkti algasendist kaugusele  $\frac{h}{2}\varphi$ .

**60.** Süsteemile anum+vesi mõjub laua poolt vaid hüdostaatiline rõhumisjõud  $\rho gh\pi R^2$ ; see tasakaalustab raskusjõu  $(m + \rho V)g$ . Paneme tähele, et  $H = R - h$ .

**61.** Tsentrifugaaljõu gravitatsiooniline potentsiaal on  $\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ , kus  $r$  on kaugus pöörlemiseljest.

**62.** Läheme suure klotsiga seotud taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega  $a$ . Kuhu peab olema suunatud efektiivne raskusjõud (inertsijõud ja raskusjõu resultant)? Milline on  $a$ ? Millise kiirendusega langeb selles süsteemis väike klots? Milline on nõõri pinget  $T$ ? Teades vastusi neile küsimustele võime kirja panna suure klotsi tasakaalutingimuse  $ma = T(1 - \sin \alpha)$ .

**63.** Kasutame üldistatud koordinaadina  $\xi$  nt kera nihet (piki kaldpinda alla). Milline on kera nihe (piki teist kaldpinda üles)? Ilmselt  $\Pi = (m - M)g\xi \sin \alpha$ . Kehade vahelise rõhumisjõu saame Newtoni II seaduse projektsioonist kaldpinna sihile.

**64.** Olgu suure silindri nihe  $\xi$ , keskmise ja vasakpoolse silindri horisontaalne nihe vastavalt  $x$  ja  $y$ . Milline seos kehtib nende vahel johtuvalt massikeskme paigalseisust? Milline seos kehtib nende vahel seetõttu, et varraste pikkus ei muutu? Saadud kahe võrrandi abil saab avaldada suurused  $x$  ja  $y$  suuruse  $\xi$  kaudu. Lugesed nihked väikseks, milline seos kehtib keskmise kuuli vertikaalnihke  $z$  ning varda horisontaalprojektsiooni muudu  $\xi - x$  vahel? Teades neid vastusi on juba lihtne rakendada meetodit 6.

**65.** Kuhu on suunatud kuuli väike nihe  $\xi$  (vt idee 30)? Milline on rõngakese nihe avaldatuna  $\xi$  abil? Kasutage meetodit 6.

**66.** Rakendame ideed 38 koos energia jäävuse seadusega projekteerides Newtoni II seaduses jõud ja kiirenduse radiaalsihile.

**67.** Kasutame kinemaatika ideid kuuli kiirenduse leidmiseks (K1, K29 ja K2: minnes kiirusega  $v$  liikuvase taustsüsteemi leiame kuuli kiirenduse pulgasihilise komponendi ning panes tähele, et kuuli horisontaalsuunaline kiirendus on null, taastame trigonomeetria

abil kiirenduse mooduli) ning rakendame Newtoni II seadust.

**68.** Kuuli kiiruse  $v$  abil saab avaldada klotsi kiiruse uurimisel hetkel (arvestades, et nende horisontaalkiirused on võrdsed). Ideed 38 rakendades leiame, et klotsi (ja seega ka kuuli) horisontaalkiirendus on null; Newtoni II seadusest kuuli ja horisontaalsihi jaoks järeldame, et varda pinge on samuti null. Energia jäävuse seadusest avaldame  $v^2$  ning Newtoni II seadusest kuuli ja vardasihilise telje jaoks saame lahendit pakkuva võrrandi.

**69.** Uurige Newtoni II seaduse abil, kuhupoole peaks hakkama nihkuma süsteemi massikese — vasakule või paremale (kui massikese ei nihkuks, siis toimuksid mõlemad sündmused üheaegselt).

**70.** Esimesele osale vastamiseks: näidake, et kiirusega risti olev jõud on null (rakendage meetodit 3 ja ideed 26). Teisele osale vastamiseks kasutage meetodit 3 ja ideed 54.

**71.** Nööri pikkuse tõttu horisontaalsuunalised jõud puuduvad, st impulsi horisontaalkomponent säilib, samuti säilib energia. Kahest vastavast võrrandist piisab, et leida piirkiirus  $v = v_0$ , mille puhul kuul kerkib täpselt teise kõrgusele (pange tähele, et selles punktis on ta vertikaalkiirus null, vt idee 42).

**72.** Rakendage ideed 49. Variandid: kõik klotsid püsivad koos; kõikjal libiseb; ülemine libiseb ja alumised kaks püsivad koos (miks pole võimalik, et ülemised kaks püsivad koos ja alumine libiseb?).

**73.** Milline jäävusseadus toimib siis, kui kaks poissi kokku põrkuvad (lühikese põrkeaja jooksul) — kas põrke võib lugeda absoluutselt elastseks või plastseks (kas impulss saaks kuhugi kaduda; kui plastseks, siis kuhu kaob energia), vt idee 56? Peale põrget: kahe poisi ühine kiirendus on konstantne, teades alg- ja lõppkiirust on vahemaa leidmine on lihtne kinemaatika ülesanne.

**74.** Tõestage, et asendis, kus niit on vertikaalne, on kiirus maksimaalne (rakendades ideed 42 pulga pöördenurga jaoks näidake, et pulga nurkkiirus on selles asendis null; rakendage ideed 59). Seejärel jääb vaid energia jäävuse seadust rakendada (pidage meeles, et  $\omega = 0$ ).

**75.** Leidke hetkeline pöörlemiskese (veenduge, et pöörlemiskeskme kaugus massikeskmest on  $\frac{l}{2}$ ). Tõestage, et massikese liigub mööda ringjoont keskpunktiga seina ja põranda nurgas, kusjuures massikeskme polaarkoordinaat selle ringjoonel on sama, mis seina ja palgi vaheline nurk  $\varphi$ . Avaldage kineetiline energia sõltuvusena üldistatud koordinaadi  $\varphi$  tuletisest  $\omega = \dot{\varphi}$  kasutades Steineri teoreemi ning esitage energia jäävuse seadus kujul  $\omega^2 = f(\varphi)$ ; meetodi 6 abil saame siit  $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{1}{2}f'(\varphi)$ . Kui seina rõhumisjõud läheb nulli, siis massikeskme kiirendus on vertikaalne: esitage see tingimus kasutades massikeskme tangentsiaal- ja radiaalkiirendusi oma ringorbiidil (vastavalt  $\frac{l}{2}\varepsilon$  ja  $\frac{l}{2}\omega^2$ ) ning kasutage seda kui võrrandit  $\varphi$  leidmiseks.

**76.** Idee 62 põhjal leiame, et  $\omega = 6v/l$ . Energia ja impulsi jäävuse seadusest elimineerime kuuli kiiruse pärast põrget ning avaldame masside suhte.

**77.** Pinnanormaali sihilised jõud on elastsusjõud, st põrke käigus vertikaalsihiline energia säilib — peale põrget on vastav kiiruskomponent moodulilt sama, mis ennegi. Ülejäänud kahe tundmatu, horisontaalkiiruse ja nurkkiiruse leidmiseks saame ühe võrrandi idee 62 abil. Teiseks võrrandiks on ( $a$ ) tingimus, et palli pinna kiirus on puutepunktis null (ei libise); ( $a$ ) ideest 58 johtuv võrrand.

**78.** Rakendades ideed 49 uurime libisemise ja veere-mise režiime. Teisel juhul on kiireim tee vastuseni kasutada ideed 63.

**79.** Kiiruse saame impulsi ja energia jäävuse seadustest (paneme tähele, et võru liigub kulgevast). Kiirenduse leidmiseks on mugav kasutada võruga seotud mitte-inertsiaalset süsteemi, kus kuulikese kesktõmbekiirendus on lihtsasti leitav. Kuulikese radiaalsuunaline tasakaalutingimus annab kuulikese ja võru vahelise rõhumisjõu (ärge unustage inertsi jõudu); horisontaalsuunaline tasakaalutingimus võru jaoks annab võrrandi kiirenduse leidmiseks

**80.** Klotsi kiiruse loeme ligikaudu konstantseks. Teatud aja  $t_v$  libiseb alus klotsi suhtes vasakule ning hõõrdejõu poolt üle antud impulss on sel ajal suunatud ka vasakule. Ülejäänud aja  $t_p$  libiseb alus klotsi suhtes vasakule ning üle antud impulss on suunatud ka sinna. Tasakaalu tingimuseks on see, et need kaks impulsi on moodulilt võrdsed; siit leiame suhte  $t_v/t_p$  tasa-

kaalulise väärtuse. Graafikult leiame niisuguse kiiruse, mille puhul  $t_v/t_p$  omab seda väärtust.

**81.** Laba vastu voolates omandab vesi sama vertikaalkiiruse  $u$ , mis labadki. See võimaldab avaldada ajaühikus joa poolt labadele üle antava impulsi (st jõu), mis osutub võrdeliseks vahega:  $F \propto v - u$ . Siit pole enam raske leida võimsuse  $Fu$  maksimumi.

**82.** Lauaga seotud taustsüsteemis taandub ülesanne samaks, mis ülesanne nr 52.

**83.** Kasutame vankrikesega seotud kiirendusega liikuvat taustsüsteemi, kus efektiivne raskuskiirendus  $\sqrt{a^2 + g^2}$  on vertikaali suhtes väikese nurga all. Koormis sooritab võnkumisi ning jääb lõpus paigale, kui tross on peatumishetkel parasjagu vertikaalne ja koormise kiirus on null. See on võimalik siis, kui vastav asend on võnkumise maksimaalseks kõrvalekaldeasendiks. See tähendab, et võnkumiste amplituud peab olema nii kiirenduse kui aeglustusperioodil üks ja sama, st tross peab ka pidurdama hakkamise hetkel olema vertikaalne. Kuidas peavad sellisel juhul suhtuma omavahel kiirendusaeg ja võnkeperiood?

**84.** Kui lööklaine on sellises punktis, kus tema frondi ja vaadeldava keha ristlõike pindala on  $S$ , siis milline on kehale mõjuv jõud? Loeme, et keha seisab kogu lööklaine frondi möödumise aja faktiliselt paigal. Siis saame lühikese ajavahemiku  $dt$  jooksul üleantava impulsi avaldada ristlõike pindala  $S$  ning frondi poolt läbitud vahemaa  $dx = c_s \cdot dt$  kaudu. Paneme tähele, et  $S \cdot dx$  on ruumala element. Lõpetuseks summeerime kõik üle antud impulsid.

**85.** Varras toimib vedruna (sest varras on peenike ja terasest, teras aga on elastne). Peale seda, kui hantli vasakpoolne kuul on põrganud vastu seisvat kuuli omandab viimane kiiruse  $v_0$  ja esimene jääb paigale. Seega hakkab hantel kui kuulikeste ja vedru süsteem võnkuma oma massikeskme ümber. Milline on massikeskme kiirus? Veenduge, et poolperioodi möödudes on üksik kuul juba nii kaugel, et hantli vasakpoolne kuul temaga enam põrkuma ei küüni. Hantli võnkumised tasapisi sumbuvad — sinna kaob ka osa energiat.



## VASTUSED

1.  $\arcsin \frac{R\mu}{(R+l)\sqrt{\mu^2+1}}$ .

2.  $\arcsin \frac{m}{M+m} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$ .

3.  $mg/2$ .

4. a)  $\mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$ ; b)  $mg \sin(\arctan \mu - \alpha)$ .

5.  $\mu \geq \frac{|g \sin \alpha - a \cos \alpha|}{g \cos \alpha + a \sin \alpha}$ , kui  $g + a \tan \alpha > 0$ .

6. a)  $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ ;

b)  $\omega^2 R \geq g\sqrt{1+\mu^{-2}}$ , kui  $\mu < \cot \alpha$  ja  $\omega^2 R \geq g(\cos \alpha + \mu^{-1} \sin \alpha)$  kui  $\mu > \cot \alpha$

7.  $v/2$ .

8.  $\tan 2\alpha = h/a$

9.  $\mu_1 \geq \sqrt{l^2 - h^2}/h$

10.  $3mg$

11.  $2 \arctan[(1 + \frac{m}{M}) \cot \alpha]$

12.  $\sqrt{2HL\mu + \mu^2 H^2} - \mu H \approx \sqrt{2HL\mu} - \mu H \approx 7,2 \text{ m}$ .

13. a)  $\omega^2 < g/l$ ; b)  $(2 - \sqrt{2})g/l$

14.  $\frac{1}{2}(1 - 3^{-1/2})\rho v \approx 211 \text{ kg/m}^3$

15.  $\frac{\pi}{3}\rho R^3$

16.  $v/\sqrt{\mu^2 \cot^2 \alpha - 1}$

17.  $\frac{4}{3}\pi Gr^3 \Delta\rho/g(r+h) \approx 0,95 \text{ cm}$

18.  $-\omega$

19.  $\mu mgv/\omega R$

20.  $\cos \varphi \tan \alpha < \tan 30^\circ$

21.  $L - \pi R/2 \cos \alpha$ ;  $2\pi\sqrt{L/g}$

22.  $\frac{1}{12}mg, \frac{1}{3}mg, \frac{7}{12}mg$

23.  $mg/(2M+m)$

24.  $m < M \cos 2\alpha$ .

25.  $mg \sin \alpha/[M + 2m(1 - \cos \alpha)] = mg \sin \alpha/[M + 4m \sin^2 \frac{\alpha}{2}]$ .

26.  $g \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{(m_1 + m_2 + M)(m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$ .

27.  $mg(5\sqrt{2} - 4)/6$ ; Samaaegselt.

28.  $\cos \alpha \geq \frac{1}{3}(2 + v^2/gR)$

29.  $2 \frac{m}{M+m} \sqrt{2gR}$

30.  $mMg/(m + 4M)$

31.  $F_x = 2Ra\rho, F_y = \rho(m + \rho L)g - (L - \pi R - 2l)a$ , kus  $a = \rho g(L - \pi R - 2l)/(m + \rho L)$ .

32. See, mida ei tõugatud.

33. Kui  $F \leq 2\mu mg \frac{m+M}{2m+M}$ :  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \frac{F}{M+m}$ ; vastasel juhul  $a_1 = \frac{F}{M} - \mu g \frac{m}{M}$ ,  $a_2 = \mu g \frac{m}{2m+M}$ .

34. Poolringi kujulisel joonel.

35. (a)  $v/5$ ; (b)  $v/4$ .

36.  $n(n-1)/2$

37.  $\sqrt{2\mu gL(1 + \frac{m}{M})}$

38. 3,5; tuli alt paremalt.

39. A:  $\sqrt{2gh}$ ;  $\sqrt{gh}$ .

40.  $2R\mu\sqrt{gl \sin \alpha}, \sqrt{gl \sin \alpha}$ .

41.  $u - \mu\sqrt{2gh}$ .

42.  $mg(h + \mu a)$ .

43.  $\arctan \frac{2}{3} \approx 21^\circ 48'$ .

44. (a)  $(\omega l + 3v)/4$ ; (b)  $(\omega l + v)/2$ .

45. Hoidvast käest kaugusel  $2l/3$ , kus  $l$  on teiba pikkus.

46.  $\frac{2}{3} \frac{F}{M} \frac{a}{R}$

47.  $(v_{x0}, v_{y0} - \frac{5}{7}u)$

48.  $L/v_0 + \pi\sqrt{m/2k}$

49.  $\frac{1}{2}\pi^2(n + \frac{1}{2})^2 R \tan \alpha$

50. 1,03 s

51. 2,0 g

52.  $v_1 = v_2 = v$ ;  $\cot^2 \frac{\alpha}{2}$

53.  $\sqrt{gH}$ .

54. 5 m/s.

55. (a)  $\tan \leq 2\mu$ ; (a) pole võimalik.

56.  $g(1 - \frac{x}{l}) \sin^{-1} \alpha$ ;  $\frac{\pi}{2} \sqrt{l \sin \alpha/g}$

57.  $\mu < \cot \alpha$ .

58.  $\mu_1 < \tan \frac{\alpha}{2}$  ja  $\mu_2 < \tan \frac{\alpha}{2}$ .

59.  $R > h/2$

60.  $\sqrt[3]{3m/\pi\rho}$

61.  $\omega^2 R^2/2g$

62.  $M/m = \cot \alpha - 1$ .

63.  $\frac{2mM}{M+m}g \tan \alpha$

64.  $g/9$ .

65.  $g \frac{m+M}{m+M \sin^2 \alpha} \sin^2 \alpha$ .

66.  $2/3R$

67.  $m[g - v^2(2l - x)/\sqrt{2}l^2]$

68.  $M/m = 4, u = \sqrt{gl/8}$ .

69. Esimene jõuab enne

70. Sirgjoont; kui  $\omega \neq 0$

71.  $\sqrt{2gl(1 + m/M)}$

72.  $\frac{F}{3m}$ , kui  $\frac{F}{m\mu g} < 6$ ;  $\frac{F}{4m} + \frac{1}{2}\mu g$ , kui  $6 < \frac{F}{m\mu g} < 10$ ;  $3\mu g$ , kui  $\frac{F}{m\mu g} > 10$

73.  $m^2 v^2/2(M^2 - m^2)\mu g$

74.  $\sqrt{(l - \frac{H}{2})g}$

75.  $\arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ 12'$

76.  $M/m = 4$ .

77. (a)  $\omega = 5v_0/7R, v_x = 5v_0/7, v_y = \sqrt{2gh}$ ;  
(b)  $v_y = \sqrt{2gh}, v_x = v_0 - 2\mu v_y$ ,  
 $\omega = 5\sqrt{2gh}\mu/R$ .

78.  $\frac{5}{7}g \sin \alpha$ , kui  $\mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$ , vastasel korral  $g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$

79.  $\sqrt{\frac{2gr}{m+M} \frac{1+\cos \varphi}{m \sin^2 \varphi + M}} m \cos \varphi$ ;  
 $\frac{gm \sin 2\varphi}{m \sin^2 \varphi + M} [\frac{1}{2} + \frac{m^2 \cos \varphi (1+\cos \varphi)}{(m \sin^2 \varphi + M)(m+M)}]$

80. 0,6 m/s

81.  $\frac{1}{4}\mu v^2$

82.  $v/\cos \alpha$

83.  $n^{-2}Lg/4\pi^2l, n = 1, 2, \dots$

84. (a),(b)  $(p_1 - p_0)V/mc_s$ .

85.  $\frac{1}{2}v_0$ ; ei, osa läheb varda pikivõnkumisteks ja hiljem (võnkumiste sumbudes) soojuseks