

### SISSEJUHATUS

Käesolev vihik on järjeks mehaanika omale ning seetõttu on kasutatud ka sama struktuuri. Et teatud termodünaamika mõistete täpsem seletamine on ühest küljest suhteliselt keeruline, teisest küljest aga pole kõik detailid ülesannete edukaks lahendamiseks ning esma-arusaama omandamiseks hädavajalik, siis on nõ fakultatiivne (silmaringi avardamise mõttes kasulik) materjal toodud väiksemas kirjas.

Termodünaamika erineb teistest füüsika harudest selle poolest, et tema seadused on statistilised, mis pole absoluutselt ranged, vaid kehtivaid üksnes teatud tõenäosusega (mis on küll harilikult väga lähedane ühele) ning toimivad seetõttu, et aine koostisosade (molekulide, aatomite jne) arv on hästi suur. Tänu osakeste suurele arvule on igasuguste keskväärtuste (nt molekulide ruutkeskmise kiirus) fluktuatsioonid väga väikesed.

Eelpoolväidetud täpsustuseks: matemaatilistest statistikast on teada, et teatud juhusliku suuruse  $N$ -kordsel realiseerimisel on keskväärtuse standardhälve  $\sqrt{N}$  korda väiksem, kui juhusliku suuruse enese standardhälve. Näiteks  $N$  molekuli ruutkeskmise kiiruse  $\bar{v}$  standardhälve  $\delta v$  on  $\sqrt{N}$  korda väiksem, kui üksiku molekuli kiiruse ruutkeskmise hälve; viimane aga on umbes sama suur, kui ruutkeskmise kiirus  $\bar{v}$ . Seega võib  $n$  molekuli ruutkeskmise kiiruse suhteliseid fluktuatsioone hinnata kui  $\delta v/\bar{v} \approx 1/\sqrt{N}$ . Vaadelgem nüüd näitlikkuse mõttes ühe-kuupsentimeerilist kogust gaasi. Normaalingimustes on seal umbes  $N \approx 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-3}/22,4 \approx 3 \cdot 10^{19}$  molekuli, seetõttu on ühe kuupsentimeetri gaasi jaoks leitavate termodünaamiliste suuruste suhtelised statistilised vead suurusjärgus  $1/\sqrt{N} \approx 5 \cdot 10^{-9}$ , st igati tühised.

Koolifüüsika raames ning enamiku olümpiaadiülesannete puhul jääb termodünaamika statistiline loomus märkamatuks, sest termodünaamika ja molekulaarkineetika valemeid saab rakendada samamoodi nagu teisigi füüsika valemeid.

### Soojus ja temperatuur

**def. 1:** Soojus on süsteemi soojusliikumise energia.

Sellest definitsioonist tuleneb vahetult esimene termodünaamika ülesannete lahendamiseks vajalik fakt.

**fakt 1:** suletud süsteemi koguenergia (soojuslik+mehhaaniline jne) säilib,

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A,$$

kus  $\Delta U$  on süsteemi siseenergia muut,  $\Delta Q$  — süsteemile antud soojushulk,  $\Delta A = p\Delta V$  — süsteemi poolt ruumala muutmisel tehtav töö,  $p$  — gaasi rõhk ning  $\Delta V$  — ruumala muutus.

Toodud valemit (sisuliselt termodünaamilist energia jäävuse seadust) nimetatakse **termodünaamika I seaduseks** (TDIS). Valemi kolm liiget on kõik märgiga suurused: kui süsteem annab soojust ära, siis  $\Delta Q < 0$  ning kui ruumala väheneb, siis  $\Delta A < 0$  (kui eelistatakse vaadelda välisjõudude tööd  $\Delta A_v$ , siis  $\Delta A_v = -\Delta A$ ).

Töö avaldise juures on eeldatud, et muutused on väikesed (õigem oleks asendada  $\Delta$  diferentsiaaliga), nõnda et  $p$  muutumist võib mitte arvestada. Suuremate muutuste korral tuleb töö leida  $p(V)$  graafiku aluse pindalana:  $A = \int p dV$ .

Selle avaldise tuletamiseks vaatleme gaasi eralduspinna väikeset tüki  $\Delta S_i$  väikest normaali-sihilist nihet  $\Delta x_i$ . Rõhumisjõud sellele pinnatükile on  $\Delta F_i = p\Delta S_i$  ning rõhumisjõu töö  $\Delta A_i = \Delta F_i \Delta x_i = p\Delta V_i$ , kus  $\Delta V_i$  on pinnatüki juures toimunud ruumala suurenemine. Kogutöö leidmiseks tuleb summeerida üle kogu gaasi pinna,

$$\Delta A = \sum_i p \Delta V_i = p \sum_i \Delta V_i = p \Delta V.$$

Ülesannete lahendamiseks vajame ka temperatuuri mõistet, mis on küll intuiitiivselt enam-vähem selge, kuid korrekse definitsiooniga on asi keerulisem. Tõepoolest, temperatuuri oleme harjunud mõõtma kraadiklaasiga, mis tegelikult mõõdab, kui suurt ruumala täidab tema sees olev vedelik (jätkem elektroonsed termomeetrid siinkohas kõrvale). Aga erinevad vedelikud paisuvad soojenemisel erinevalt, milline vedelik tuleks võtta aluseks? Ja kuidas määrata hästi madalaid ja hästi kõrgeid temperatuure, kui peaaegu kõik ained on tahkestunud või aine on muutunud plasmaks? Seega ei ole ühe vedeliku, nt elavhõbeda, paisumine piisavalt universaalne nähtus, et seda oleks otstarbekas kasutada temperatuuri defineerimiseks.

Kui mingi süsteem saab soojust juurde, siis definitsiooni 1 tõttu kasvab osakeste liikumisenergia, aga (intuitsioonile tuginedes) ilmselt ka temperatuur. Seetõttu ongi loomulik defineerida temperatuur soojusliikumise määra abil. Piirdugem alustuseks kvalitatiivse määratlusega.

**def. 2:** Temperatuur iseloomustab soojuslikus tasakaalus oleva süsteemi soojusliikumise määra: mida kõrgem temperatuur, seda suurem soojusliikumise energia. Kahe eri-tüüpi süsteemi temperatuurid loeme võrdseks, kui kontakti viiduna ei toimu soojuse ülekandumist ühelt süsteemilt teisele.

Kvantitatiivseks määratluseks vaadelgem, kuidas sõltub tõenäosus leida süsteem teatud energiaga olekus sellest energiaga väärtusest. Uurime mingi süsteemi (olgu konkreetsuse mõttes selleks süsteemiks üksik gaasis liikuv ühe-aatomiline molekul) kahte suvalist kvantmehaanilist olekut energiatega  $E_1$  ja  $E_2$ . Gaasi molekuli puhul  $E_i = mv_i^2/2$ , kus  $v_i$  on molekuli kiirus ( $i = 1, 2$ ). Paneme tähele, et see molekul on soojuslikus tasakaalus (vahetab vabalt energiat) palju suurema süsteemiga, nn soojusreservuaariga, milleks antud juhul on ülejäänud gaas. Matemaatilise statistika abil on võimalik näidata, et tõenäosuste suhe leida selline osake (mis vahetab juhuslikult moel energiat hästi suure soojusreservuaariga) energiatega  $E_1$  ja  $E_2$  juures sõltub ainult energiatega vahel kujul  $p_1/p_2 = e^{-\beta(E_1 - E_2)}$ . Seega kehtib võrdelissuhe, mida tuntakse **Boltzmanni jaotuse** nime all,  $p_i \propto e^{-\beta E_i}$ . Konstant  $\beta$  sõltub soojusreservuaari olekust. On lihtne näha, et mida väiksem on  $\beta$ , seda suurem on tõenäosus leida molekul suure energiaga olekus. Niisiis oleks mõnus defineerida temperatuur kui reservuaari olekut iseloomustava konstandi  $\beta$  pöördväärtus. Siiski on tegelik definitsioonis  $T = 1/k\beta$  veel Boltzmanni konstant  $k$ , tänu millele võrdub temperatuuri ühik ajaloolise, vee keemise ja sulamise abil defineeritud ühikuga  $1^\circ\text{C}$ . Et Boltzmanni jaotus on termodünaamika üheks peamiseks nurgakiviks, siis kirjutame ta veelkord ümber, asendades konstandi  $\beta$  temperatuuri abil:

$$p \propto e^{-E/kT}.$$

**def. 3:** Iga keha saab iseloomustada soojusmahtuvuse  $C$  abil, mis näitab, kui kiiresti kasvab soojushulk temperatuuri kasvamisel:  $C = dQ/dT$ .

Toatemperatuuri lähedastel temperatuuridel võib kehade soojusmahtuvuse lugeda harilikult konstantseks (va faasiüleminekute puhul, nt kui vesi jäätub) ning sellisel juhul  $\Delta Q = C\Delta T$ ;

suuremate temperatuurivahemike puhul see nii ei ole. Nii näiteks on hästi madalatel temperatuuridel kristalsete kehade soojusmahtuvus võrdeline temperatuuri kuubiga (see on, muide, seotud Stefan-Boltzmanni seadusega  $\sigma T^4$ ).

**I 1.** Soojuslikult isoleeritud metallitükki soojendatakse atmosfäärirõhul elektrivoolu abil sellisel viisil, et temal eralduv elektriline võimsus on ajas konstantne ja võrdne  $P$ -ga. Selle tagajärjel kasvab metalli absoluutne temperatuur ajas seaduse

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}$$

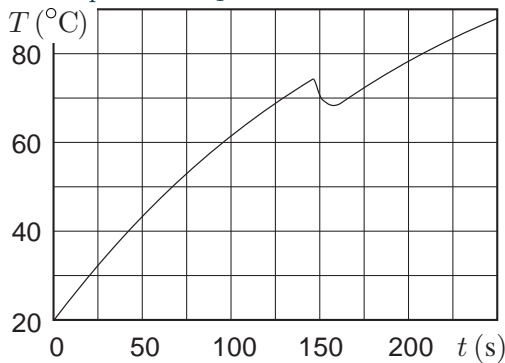
kohaselt, kus  $a$ ,  $t_0$  ja  $T_0$  on konstandid. Määrata metalli soojusmahtuvus  $C_p(T)$  (antud katses kasutatud temperatuurivahemiku jaoks sõltub see temperatuurist).

Selle ülesande lahendusidee on lihtne ja tuleneb vahetult definitsioonist 3 (sealse võrduse mõlema poole korrutamisel  $\frac{dT}{dt}$ -ga).

**idee 1:** Summaarse soojusvõimsuse  $P$  ja keha temperatuuri  $T$  vahel kehtib avaldis  $P \equiv \frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt}$ .

Seda valemit saab antud juhul kasutada  $C$  leidmiseks, kuid kui on antud  $T(t)$  graafik, siis ütleb see meile, et soojusvõimsus on võrdeline graafiku puutuja tõusuga. Illustreerigu seda järgmine ülesanne.

**I 2.** Elektrikannus soojendatakse vett. Teatud hetkel pandi kannu  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  juures olevat jääd. Joonisel on toodud vee temperatuuri sõltuvus ajast. Kui suur oli jää mass, kui kannu võimsus  $P = 1\text{ kW}$ . Jää sulamissoojus on  $L = 335\text{ kJ/K}$ . Toatemperatuur  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ .



Graafikult saame teada, kui kaua võtab aega ( $\tau$ ), et jäätükki vette viskamise järel kuumeneks (vahepeal jahtunud) vesi esialgse temperatuurini. Kui teaks summaarset soojusvõimsust  $P$  (kuumutamine miinus soojusvahetuse läbi õhku eralduv võimsus) temperatuuri  $t = 80^\circ\text{C}$  juures, siis saaks aja  $\tau$  siduda jää massiga. Aga siin aitabki meid antud idee, sest me teame summaarset soojusvõimsust toatemperatuuril (kui soojusvahetus puudub) ja me saame võrrelda graafiku tõususid neil kahel temperatuuril!

Asume nüüd soojusvahetuse juurde; alustame põhialustest.

**fakt 2:** Kahe keha (ka keha ja keskkonna) vaheline soojusvahetuskirgus (soojusvoog ühelt kehalt teisele, mõõtühikuks Watt) on väikese temperatuurivahe  $\Delta T$  puhul võrdeline  $\Delta T$ -ga. Suuremate  $\Delta T$  väärtuste puhul muutub sõltuvus üldjuhul mitteliineaarseks, sest (a) materjalide soojusjuhtivus võib sõltuda temperatuurist ning (b) domineerima võib hakata soojuskiirgus.

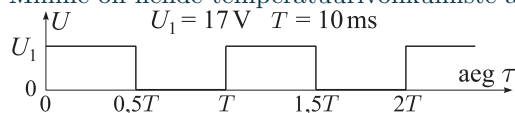
Olgu selle fakti rakendamise peale üks ülesanne ka.

**I 3.** Toas töötab radiaator võimsusega  $P = 1\text{ kW}$  ning sooja on  $t_1 = 19^\circ\text{C}$ . Öueõhu soojus on  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Tuppa tuleb inime-ne ning tasapisi tõuseb toa temperatuur  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ -ni. Millise võimsusega “kütab” inimese keha?

**idee 2:** Soojusvahetusvõimsus  $P_Q$  võib olla küll keeruline funktsioon temperatuurist, kuid kui on teada võimsus  $P_0$ , mille keha kuumutatakse ning temperatuur  $T_0$ , mille juures saabub soojuslik tasakaal, siis teame vähemalt  $P_Q$  väärtust  $T_0$  juures:  $P_Q(T_0) = P_0$ .

Antud suhteliselt triviaalse idee kasulikkust sobib illustreerima järgmine ülesanne.

**I 4.** Halogeenlambi pirni hõõgniit on tehtud volframtraadist. Temperatuuri  $T_0 = 3200^\circ\text{C}$  juures on volframi tihedus  $\rho = 18\,200\text{ kg/m}^3$ , erisoojus  $c = 235\text{ J/(K}\cdot\text{kg)}$  ja eritakistus  $\rho_{el} = 9,95 \times 10^{-7}\Omega \cdot \text{m}$  ning antud pirni hõõgniidi pikkus  $l = 5,0\text{ cm}$ . Pirnile rakendatakse hüppeliselt muutuv pinget, vt joonis. Hõõgniit saavutab töötemperatuuri  $T = 3200^\circ\text{C}$  (täpsustus: niidi pinnakihid on sisemusest veidi jahedamad, sestap räägime siin ja edaspidi niidi keskmisest temperatuurist). Pinge võnkumise loomu tõttu võngub veidike ka hõõgniidi temperatuur. Milline on nende temperatuurivõnkumiste amplituud  $\Delta T$ ?



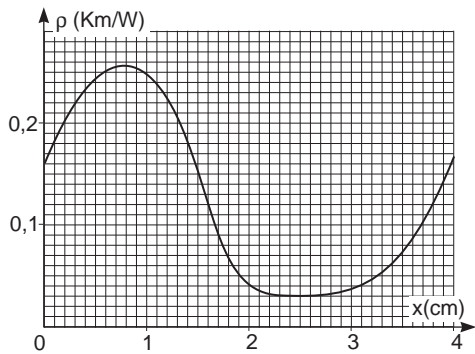
Kui me teaksime elektrilise kuumutamise keskmist (üle perioodi) võimsust, siis saaksime teada soojusvahetusvõimsuse keskmisega, mis oleks vajalik selleks, et leida  $\Delta T$ . Me teame küll pinget, kuid ei tea takistust (mida vajaksime keskmise võimsuse arvutamiseks), sest see sõltub niidi (tundmatust) ristlõikepindalast  $S$ . Aga ärme laseme ennast sellest segada,  $S$  taandub hiljem välja!

**idee 3:** Soojusvahetuse ülesanded on analoogsed elektriahlade ülesannetega. Pingele vastab temperatuuride vahe, voolutugevusele soojusvoog, takistusele soojustakistus, eritakistusele soojustakistustegur, mahtuvusele soojusmahtuvus, laengule soojushulk. Kehtivad mõlema Kirhoffi seadused analoogid. Üks neist on triviaalne (suletud kontuuri mööda liikudes on temperatuurivahede summa 0), teist tuleb aga antud juhul nimetada soojusvoo pidevuse seaduseks: tasakaalulises olekus on igasse kehasse sisenevate soojusvoogude summa on 0.

**I 5.** Soojustakistustegur on võrdne ühikulise ristlõikega ja ühikulise pikkusega traadi otspunktide temperatuuride vahe ja traati läbiva soojusvoo (mõõtühik  $W$ ) suhtega.

(a) Vesijahutusega mikroprotsessori võimsus on  $P = 90\text{ W}$ , voolavast veest eraldab teda vaskseib paksusega  $d = 5\text{ mm}$  ja ristlõike pindalaga  $s = 100\text{ mm}^2$ . Kui suur on vee ja protsessori temperatuuride vahe? Vase soojustakistustegur  $\rho = 2,6\text{ mm}\cdot\text{K/W}$ .

(b) Traat on valmistatud erinevatest sulamitest ning tema soojustakistusteguri  $\rho$  sõltuvus koordinaadist piki traati on toodud graafikul. Traadi ristlõikepindala on  $S = 1\text{ mm}^2$ , pikkus  $l = 4\text{ cm}$ . Leidke soojusvoog läbi traadi, kui traadi ühte otsa hoitakse  $100^\circ\text{C}$  juures ning teist  $0^\circ\text{C}$  juures.



Teise osa lahendamisel kulub ära väga laia kasutusala meetod.

**method 1:** Otsitava füüsikalise suuruse määramine taandub sageli teatud graafiku aluse pindala (st integraali) leidmiseks (mõnikord ei pruugi see üldse ilmne olla).

Kui protsessi kirjeldab mingi parameeter  $x$  (aeg, koordinaat, kiirus vms) ja otsitav suurus  $A$  õnnestub esitada summana  $A = \sum_i F_i \Delta x$ , kus  $\Delta x$  on parameetri  $x$  hästi väike vahemik, summa võetakse üle kõikide vahemike ja  $F_i$  sõltub  $x$ -st, kuid mitte  $a$ -st, siis piirile  $\Delta x \rightarrow 0$  minnes saame  $A = \int F(x) dx$ , st  $A$  on graafiku  $F(x)$  alune pindala.

Meetodi näitlikustamiseks vaatleme mehaanika ülesannet, kus on teada paadile mõjuva hõõrdejõu sõltuvus kiirusest  $F(v)$  ning vaja on leida, kui kaugele libiseb paat massiga  $m$ , kui anda talle algiirus  $v$ . Jagame nihke mõtteliselt väikesteks tükikeks,  $s = \sum \Delta s$ , kus  $\Delta s = v \Delta t$ . Kui me teaksime funktsiooni  $v(t)$ , oleks asi valmis, aga meil oleks vaja  $\Delta t$  (või  $\Delta s$ -i) pealt üle minna  $\Delta v$ -le, sest meil on lihtne avaldada ainult asjade sõltuvusi  $v$ -st [kasutades funktsiooni  $F(v)$ , nt kiirendus  $a(v) = \frac{dv}{dt} = F(v)/m$ ]. Proovime, mis välja tuleb:  $\Delta t = \Delta v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta v} = \Delta v / \frac{\Delta v}{\Delta t} = \Delta v / a$ . See tulemus rahuldab meid juba igati, sest kiirendus  $a = F(v)/m$  on meil juba avaldatud funktsioonina  $v$ -st. Niisiis,

$$s = \sum \frac{v}{a} \Delta v = \sum \frac{vm}{F(v)} \Delta v \rightarrow \int \frac{vm}{F(v)} dv,$$

st nihe on sellise graafiku alune pindala, kus  $\frac{vm}{F(v)}$  on kujutatud sõltuvuses kiirusest  $v$ .

Soojusvoo pidevuse peale on ka järgmine ülesanne, kuid siin tuleb teada veel Stefan-Boltzmanni seadust soojuskiirguse kohta.

**fakt 3:** Iga keha kiirgab soojuskiirgust, mille voo tihedus  $w = \varepsilon \sigma T^4$  (see on võimsus pindalaühiku kohta), kus  $T$  on tema temperatuurist ja  $\varepsilon \in [0; 1]$  — neeldumistegur.

Tegur  $\varepsilon$  näitab, milline osa pealelangebvast kiirgusest neeldub; absoluutselt musta pinna jaoks  $\varepsilon = 1$  ideaalselt valge või peegelpinna jaoks  $\varepsilon = 0$ . Antud valem tuletatakse vaakumis leviva soojusliku elektromagnetkiirguse ja seinte soojusliku tasakaalu tingimusest kasutades kvantmehaanikat ning Boltzmanni jaotust elektromagnetlainete energianivoode asustatuse jaoks; vajalik on mõningane matemaatiline osavus.

**16.** Tehiskaaslase kere on kera läbimõõduga 1 m, mille kõikides punktides on ühesugune temperatuur. Kogu kera pind on kaetud ühesuguse kattematerjaliga. Tehiskaaslane asub kosmoses Maa läheduses, aga mitte tema varjus. Päikese pinna kui absoluutselt musta keha pinna temperatuur  $T_{\odot} = 6000$  K, Päikese raadius  $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8$  m, Maa ja Päikese vaheline kau-

gus  $L = 1,5 \times 10^{11}$  m. Tehiskaaslane kuumeneb Päikese valguses temperatuurini, kus tema kui absoluutselt musta keha kiirgus tasakaalustab neelatava päikesevalguse võimsuse. Absoluutselt musta keha pinnaiühiku poolt kiiratav võimsus on antud Stefan-Boltzmanni seadusega  $P = \sigma T^4$ , kus universaal-konstant  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ . Esimeses lähenduses võib eeldada, et Päike ja tehiskaaslane neelavad kogu neile langeva elektromagnetilise kiirguse. Leia avaldis tehiskaaslase temperatuuri jaoks ja hinnang selle arvulisele väärtusele.

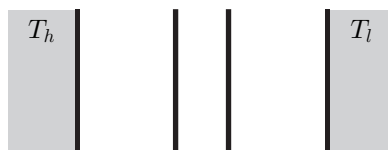
Selle ülesande puhul osutub tulusaks järgmine fakt (kui integraal ehmatab ära, siis võib selle vahele jätta ja vaadata fakte järgnevat lihtsamat järeldust)

**fakt 4:** Statsionaarses olukorras kehtib soojusvoo jaoks (analoogiliselt elektri- ja magnetväljaga) Gaussi teoreem:  $\oint \vec{w} \cdot d\vec{S} = P$ , kus integraal võetakse üle suletud pinna,  $P$  on pinna sees oleva soojusallika võimsus, soojusvoo tiheduse vektor  $\vec{w}$  on suunatud soojuse levimise suunas ning vektor  $d\vec{S}$  on suunatud piki pinnanormaali ja selle moodul on võrdne vaadeldava väikese pinnaelemendi pindalaga.

Antud seadus on tegelikult soojusvoo pidevuse seaduse ümbersõnastamine. Sfäärilis-sümmeetrilises olukorras taandub pindintegraal lihtsalt kogupindala ja soojusvoo korrutiseks:  $4\pi R^2 w = P$ , kus  $w$  on soojusvoo tihedus kaugusel  $R$  sfäärilis-sümmeetrilisest soojaallikast.

Soojusvoo pidevuse teema lõpetuseks vaatleme ülesannet, kus tekib  $N$  tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem. Selle jaoks väike soovitus.

**idee 4:** Füüsika olümpiaadide ülesanded ei nõua üldjuhul pikki matemaatilisi teisendusi. Kui teil tuleb palju või keerulisi võrrandeid, siis on võimalik, et (a) valitud lahendustee ei ole optimaalne; (b) valitud tee on hea, aga matemaatiline ülesanne on keeruline vaid näilisel; võrrandite sümmeetria kasutamine võib aidata välja taandada peaaegu kõik tundmatud või muul viisil asju lihtsustada.



**17.** Absoluutselt musta kuumas tasapinda hoitakse konstantsel temperatuuril  $T_h$ . Temaga on paralleelne teine absoluutselt must tasapind, mida hoitakse madalamal konstantsel temperatuuril  $T_l$ . Plaatide vahel on vaakuum. Selleks, et vähendada kiirgusest tingitud soojusvoogu soojalt tasapinnalt külmale tasapinnale kasutatakse ekraani, mis koosneb  $N$  üksteisega paralleelsest ja üksteisest soojuslikult isoleeritud absoluutselt mustast plaadist (joonisel  $N = 2$ ). See ekraan asetatakse kuumas ja külma plaadi vahele, paralleelsena nii sooja kui külma tasapinnaga. Teatud aja pärast tekib süsteemis statsionaarne olek. Millise koefitsiendi  $x$  võrra kahandab ekraan soojusvoogu külma ja sooja tasapinna vahel? Pindade lõplikest mõõtetest tingitud ääreefekte mitte arvestada.

## Gaasid

Statistilises füüsikas (termodünaamikas) on nii, et asju on (suhetisel) lihtne arvutada siis, kui kõik on hästi korrapärane (nt

tahked ained, eriti kristalsed) või kui on hästi kaootiline (gaasid). Vahepealne olukord, kus justnagu oleks mingi kord, aga ei ole kah (vedelikud, granulaarsed ained — liiv jms) on hulga raskemini analüüsiv ja tänapäevani on hulgemini lahtisi küsimusi. Eriti lihtne on kaootiline olukord ja seepärast on põhirõhk koolifüüsikas just gaaside uurimisel.

Heaks mudeliks, mis kirjeldab realsust üsna tõetruult, on *ideaalse gaasi mudel*.

**def. 4:** Ideaalse gaasi puhul loetakse, et (i) molekulid on nagu tühiselt väikeste mõõtmetega absoluutselt elastsed kuulikesed (või vedrude abil ühendatud kuulikeste süsteemid), mis liiguvad juhuslikult, vastu seinu ja üksteist põrgeldes; (ii) molekulid mõjutavad üksteist vaid siis, kui nad on vahetus kontaktis ning nendevaheline kaugmõju (nt elektrostaatiline) puudub.

Olgu  $n$  molekulide kontsentratsioon (arv ruumalaühiku kohta) ning  $f(v_x)$  nende jaotusfunktsioon kiiruse  $x$  komponendi järgi. See tähendab, et niisuguste molekulide arv ruumalaühikus, mille kiiruse  $x$ -komponent  $u_x$  jääb vahemikku  $[v_x; v_x + \Delta v_x]$  on  $\Delta n = n f(v_x) \Delta v_x$ . Vastavalt Boltzmanni seadusele  $f(v_x) = A e^{-mv_x^2/2kT}$ , kus tegur  $A$  on selline, et  $f(v_x)$  graafiku alune pindala on 1, st  $A = 1/\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x$ .

Viimases avaldises olevat integraali on võimalik ka kahe nipi abil leida. Esimene ja lihtsam nipp on muutujavahetus  $x = v_x/v_0$ , kus  $v_0 = \sqrt{2kT/m}$ , mille abil saame integraali aluse funktsiooni vabastada parameetrist  $v_0$ . Tõepoolest, et  $v_0$  on integreerimise juures konstant, siis  $dv_x = v_0 dx$  ning

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Teise nipi abil saaks näidata, et  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , kuid siin kasutame ainult tulemust:

$$f(v_x) = e^{-mv_x^2/2kT}/v_0\sqrt{\pi}.$$

Leiame rõhu avaldise. Teeme seda kahes osas: kõigepealt hindame ja siis leiame täpsemalt. Rõhk on jõud pindalaühiku kohta,  $p \approx F/S$ ; jõud on aga seinale ajaühikus üle antud impulss,  $F \approx Nm v_T/t$ , kus  $N$  on aja  $t$  jooksul vastu seinu põrkavate molekulide arv ning  $v_T$  nende soojusliikumise karakterne kiirus. Aja  $t$  jooksul jõuavad seinani need molekulid, mis asuvad sealalähedases kihis paksusega  $v_T t$ ; selle kihi ruumala on  $V \approx S v_T t$  ja molekulide arv  $N \approx n V \approx S v_T t$ . Seega saab seinale mõjuvat jõudu hinnata kui  $F \approx m v_T N/t \approx n m v_T^2 S$ , mis tähendab, et rõhk

$$p \approx n m v_T^2.$$

Vaadates nüüd Boltzmanni jaotusseadust näeme, et kui kineetiline energia  $\frac{1}{2} m v^2$  on suurusjärgus  $kT$ , on  $f(v_x)$  suurusjärgus 1; samal ajal neid molekule, mille kineetiline energia  $\frac{1}{2} m v^2$  on paar või enam korda suurem, kui  $kT$ , on eksponentsiaalselt vähe. Niisiis võib öelda, et karakterne kineetiline energia on  $kT$  ning  $m v_T^2 \approx kT$ . Asendades selle rõhu avaldisse, saame  $p \approx n k T$ . Nagu hiljem selgub, võib ligikaudse võrduse asendada täpsega, st arvuline tegur, mille hinnanguid tehes kaotasime, on täpselt üks. Et saada ideaalse gaasi olekuvõrrandit klassikalisel kujul, tuleb molekulide kontsentratsioon avaldada moolide arvu  $\nu$ , ruumala  $V$  ja Avogadro arvu  $N_A$  abil,  $n = \nu N_A/V$ . Lõplikuks tulemuseks on

$$pV = \nu k N_A T \equiv \nu RT,$$

kus universaalne gaasikonstant  $R = k N_A$ . Siia võib asendada  $\nu = m/\mu$ , st  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ ; mõnikord on see valem mugav esita-

da ka gaasi tiheduse  $\rho$  abil,  $p\mu = \rho RT$ . Teeme vahekokkuvõtte.

**fakt 5:** Ideaalse gaasi puhul kehtib olekuvõrrand

$$pV = \nu RT,$$

mille ekvivalentseid kujud on

$$p = nkT \text{ ning } p\mu = \rho RT.$$

Kordame nüüd eelpooltoodut, kuid täpse arvutuse huvides jagame mõtteliselt molekulid sõltuvalt nende seinaga risti oleva kiiruskomponendi  $u_x$  järgi gruppidesse. Keskendumine alguses ühele kiirusgrupile — neile molekulidele, mille kiirus  $u_x \in [v_x; v_x + \Delta v_x]$ ; ülaltoodu põhjal on selliste molekulide kontsentratsioon  $\Delta n = n f(v_x) \Delta v_x$ . Lühikest ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul jõuavad seinani need molekulid (meie kiirusgrupist), mis asuvad sealalähedases kihis paksusega  $\Delta t v_x$ . Nende koguarvu leidmiseks korrutame kihi ruumala kontsentratsiooniga,  $\Delta N = S \Delta t v_x \Delta n$ . Elastsel pörkel muutub molekuli  $x$ -kiirus vastupidiseks, st ta annab seinale üle impulsi  $2m v_x$ . Seega on seinale mõjuv jõud  $\Delta F = 2m v_x \Delta N / \Delta t = 2m v_x^2 \Delta n S \Delta t$ . Rõhu leidmiseks on meil vaja see avaldis jagada  $S$ -ga ja summerida üle kõikide selliste kiirusgruppide, mille puhul molekulid liiguvad seinu poole, st  $v_x > 0$ . Niisiis  $p = \sum_{v_x > 0} 2m v_x^2 \Delta n = \sum_{v_x > 0} 2m v_x^2 f(v_x) \Delta v_x$ . Kui me summeeriksime ka üle piirkonna  $v_x < 0$ , siis saaksime kaks korda suurema tulemuse, sest mõlemas suunas liikuvaid molekule on ühepalju, st  $f(-v_x) = f(v_x)$ ; konstandi  $mn$  võib tuua sulgude (summa märgi) ette. Seega saame  $p = mn \sum_{v_x} v_x^2 f(v_x) \Delta v_x \rightarrow mn \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x$ .

Paneme tähele, et  $\sum_{v_x} v_x^2 f(v_x) \Delta v_x$  (ja loomulikult ka vastav integraal) kujutab endast kiiruse  $x$ -komponendi ruutkeskmist väärtust  $\bar{v}_x^2$ . Tõepoolest, kui me korrutame ja jagame selle avaldise läbi molekulide koguarvuga  $N$ , siis  $N f(v_x) \Delta v_x$  on nende molekulide koguarv  $N_{v_x}$ , mis on kiirusgrupis  $v_x$  ning  $\sum_{v_x} v_x^2 N_{v_x}$  kujutab endast lihtsalt kõikide molekulide kiiruste  $x$ -komponentide ruutude summat. Niisiis

$$p = mn \bar{v}_x^2.$$

Ruutkeskmise kiiruse leidmiseks tuleb tegeleda integraalide võtmisega; keda see eriti ei huvita, võib käesoleva lõigu vahele jätta ja vaadata ainult lõpptulemust. Kasutame ülalolevaid seost,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Integreerimine on sisuliselt summeerimine ning matemaatikast me teame, et summa tuletis on tuletiste summa. See tähendab, et me võime antud avaldises võtta tuletise vasakust ja paremast poolest parameetri  $v_0$  järgi.

Vasaku poole jaoks saame

$$\frac{d}{dv_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dv_0} e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x = 2v_0^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x,$$

parema poole jaoks aga

$$\frac{d}{dv_0} v_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

See tähendab, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x = \frac{1}{2} v_0^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Meenutades, et  $f(v_x) = e^{-v_x^2/v_0^2}/\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x$ , võime ruutkeskmise kiiruse avaldise kirjutada kujul

$$\bar{v}_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_0^2} dv_x = \frac{1}{2} v_0^2.$$

Kui nüüd asendada tagasi  $v_0 = \sqrt{2kT/m}$ , siis jõuame lõpptulemuseni:

$$m \bar{v}_x^2 = kT, \quad p = nkT.$$

**method 2:** Mitmeid gaasidega seotud hindamisülesandeid on võimalik lahendada kasutades ülalkirjeldatud nn molekulaarkineetilist lähenemist.

Täpseid arvutusi seejuures harilikult ei nõuta, sest (a) need sisaldavad keerulisi integreerimisi ja (b) sest paljud täpsed arvutused kehtivad ainult nn vaakumlähenduses, kus molekulide vaba tee pikkus (keskmine vahemaa pörkest pörkeni) on suurem, kui anuma (avause vms) mõõtmed, mille realistlikkus on aga sageli küsitav. Vaatleme kahte ülesannet.



**I 8.** Vaakumis kaalutuse tingimustes asuva silindrilise klaasi põhjas on tahke aine molaarmassiga  $\mu$ . Tasapisi see aine sublimeerub (aurab tahkelt pinnalt gaasina) ning tõukab seeläbi klaasi avausele vastassuunas. Hinnake, millise kiiruse omandab klaas, kui klaasi mass on  $M$  ja seal sees olnud aine mass  $m \ll M$ ; aine temperatuur on  $T$  ning soojuskiirgusest tingitud jahtumisega mitte arvestada.

**I 9.** Looduslik uraan koosneb põhiliselt kahest isotoobist,  $U^{238}$  ja  $U^{235}$ , kusjuures viimast on umbes 0,7%. Uraani rikastamiseks ( $U^{235}$  sisalduse tõstmiseks) kasutatakse mitme-etapilist protsessi, kus igal etapil lastakse gaasilises olekus oleval uraaniühendil  $UF_6$  tungida läbi poorse vaheseina. Poorset vaheseina võib vaadelda kui õhukest kilet, milles on mikroskoopilised augud (väiksemad molekulide vaba tee pikkusest, kuid suuremad molekuli mõõtmetest). Mitme etapi tulemusel suureneb  $U^{235}$  sisaldus 1,4%-ni? Fluori molaarmass on 19 g/mol.

**Üheaatomilise gaasi siseenergia  $U$**  (st molekulide sojusliikumise energia) arvutamiseks võime kasutada eespool saadud tulemust  $m\bar{v}_x^2 = kT$ . Tõepoolest, üheaatomilise molekuli mõõtmised on nii väikesed, et normaalingimustel ta ei saa pöörelda. (Põhjus on sügavalt kvantmehaaniline; aatomituum saaks tegelikult pöörelda ka, aga see nõuaks juba hästi kõrgeid temperatuure.) Seega on koguenergia molekulide arvu ja üksiku molekuli kineetilise energia keskväärtuse korrutis:

$$U = N \frac{m}{2} (\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2).$$

Kõikide suundade võrdväarsuse tõttu  $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = kT$ ; arvestades, et  $N = \nu N_A$  ja  $N_A k = R$ , saame lõpptulemuse

$$U = \frac{3}{2} \nu RT.$$

Kahe- ja enama-aatomiliste molekulide puhul tuleb kulgliikumise energiale liita veel pöördliikumise energia  $U_p = \frac{1}{2} N (I_x \bar{\omega}_x^2 + I_y \bar{\omega}_y^2 + I_z \bar{\omega}_z^2)$ , kus  $I_x$ ,  $I_y$  ja  $I_z$  tähistavad inertsi momente erinevate telgede ümber pöörlemisel ning  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  ja  $\omega_z$  vastavaid nurkkiirusi. Kasudes Boltzmanni jaotust pöördliikumise jaoks ümber  $x$ -telje,  $p \propto e^{-I_x \omega_x^2 / 2kT}$  saame eespool tooduga täiesti analoogse avaldise ( $v_x$  asemel on  $\omega_x$  ja  $m$  asemel  $I_x$ ). Seetõttu on ka tulemus sama,  $U_p = \frac{3}{2} \nu RT$ . Siiski, nii nagu ühe-aatomiline molekul ei saa üldse pöörelda, ei saa kaheaatomiline (ja enama-aatomiline, kuid lineaarne, st sirgjoontel asuvate aatomitega) molekul pöörelda ümber kahte aatomit ühendava telje. Seetõttu jääb sellistel molekulidel üks liidetav (kolmest) ära ning  $U_p = \nu RT$ .

Paneme tähele, et iga nn *vabadusaste* (liikumine  $x$ -telje suunas, pöörlemine  $x$ -telje ümber, liikumine  $y$ -telje sihis jne) annab ühesuguse panuse siseenergiasse,  $\frac{1}{2} \nu RT$  (või kui rääkida üksiku molekuli keskmisest energiast, siis  $\frac{1}{2} kT$ ). Seetõttu on mugav kasutada vabadusastmete arvu  $i$  gaasi molekulide iseloomustamiseks ning kirjutada siseenergia avaldis kujul

$$U = \frac{i}{2} \nu RT.$$

Ühe-aatomilise gaasi jaoks  $i = 3$ , kaheaatomilise (ja lineaarsete molekulidega enama-aatomilise) gaasi jaoks  $i = 5$  ning ülejäänutel puhkude  $i = 6$ . Gaaside segu puhul (nt õhk) võib keskmine vabadusastmete arv osutada murdarvuks. Kasutades seda avaldist on meil lihtne leida ideaalse gaasi soojusmahtuvus konstantse ruumala juures. Kui ruumala ei muutu, siis rõhumiisjõud tööd ei tee ning järelikult läheb kogu soojus siseenergia

suurendamiseks, st  $C_V = dU/dT = \frac{i}{2} \nu R$ . Meeldejätmiseks on see mugav esitada molaarse soojusmahtuvusena  $c_V = C_V/\nu$ :

$$c_V = \frac{i}{2} R.$$

Teisest küljest, konstantse rõhu puhul ruumala kasvab vastavalt eelpooltuletatud olekuvõrrandile  $p\Delta V = \nu R\Delta T$ . Seetõttu teeb gaas välise rõhu vastu tööd  $A = p\Delta V = \nu R\Delta T$  ning TDIS põhjal  $\Delta Q = \Delta U + A = \frac{i+2}{2} \nu R\Delta T$ , st

$$c_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Reegel “ $\frac{1}{2} kT$  soojust vabadusastme kohta” kehtib siiski ainult mõõdukate temperatuuride puhul. Kui aga temperatuur on küllalt suur, siis hakkavad molekulid võnkuma nagu vedrude otsas olevad kuulikesed ning arvestada tuleb ka juba võnkumise energiaga. Sellisel puhul võib öelda, et *võnkumise vabadusastmed ergastuvad*. Kergemate gaaside (sh õhu koostisosade) jaoks on kriitiline temperatuur (millest alates hakkavad molekulid olulisel määral võnkuma) tublisti kõrgem toatemperatuurist. Raskemate gaaside (nt boor) puhul aga võnguvad molekulid juba toatemperatuuril täiel hooga. Tähelepanu tasub pöörata sellele, et iga võnkumise vabadusaste (nt lineaarse molekuli telje-sihilise võnkumise vabadusaste) annab topelt-panuse siseenergiasse. Seega nt boori puhul tuleb toatemperatuuril võtta  $i = 5 + 2 = 7$ .

Võnkumise vabadusastmete eripära põhjus peitub kvantmehaaniliste energianivoode struktuuris. Kulg- ja pöördliikumise puhul kahaneb järjestikuste energianivoode kaugus energia kasvades, sest konstantne oleks nivoo intervall siis, kui vaadelda neid (energia asemel) kiiruse  $v_x$  või nurkkiiruse  $\omega_x$  järgi. Võnkumise puhul on aga järjestikused energianivood alati konstantse energiavahe  $\hbar\omega$  kaugusel, kus  $\omega$  on omavõnkesagedus. Seega asendub siin varemvaadeldud integraal natuke teistsugusega: ühe molekuli keskmine võnkumise energia

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-E/kT} dE / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-E/kT} dE.$$

Nende integraalide võtmine on lihtsamgi, tulemuseks saame  $\bar{E} = kT$ , mis on kaks korda suurem, kui  $x$ -telje sihilise kineetilise energia keskväärtus.

Teisest küljest, väga madalatel temperatuuridel ei ole ka pöördliikumine ergastatud ning isegi mitme-aatomiliste molekulide efektiivne vabadusastmete arv on sellisel juhul 3. Et teada saada, kas üks või teine vabadusaste ergastatakse või mitte, tuleb võrrelda energianivoode vahekaugust vabadusastme keskmise energiaga  $kT$ .

Tõepoolest, vaatleme kahte kõige madalamat energianivood  $E_0$  ja  $E_1$ . Boltzmanni jaotuse põhjal on vastavate tõenäosuste suhe  $p_1/p_0 = e^{-(E_1 - E_0)/kT}$ . Kui  $E_1 - E_0 \gg kT$ , siis on ergastatud olekus viibimise tõenäosus eksponentsiaalselt väike ning järelikult on eksponentsiaalselt väike ka sellega seonduv energia juurdekasv.

Nüüd saab ka selgeks, miks hakkavad raskete gaaside molekulid madalamatel temperatuuridel võnkuma. Raskemate molekulide omavõnkesagedus  $\omega \approx \sqrt{k/m}$  on madalam, kui kergetel (keemilise sideme kui “vedru” efektiivne jäikus  $k$  on üldjuhul enam-vähem ühesugune). Seetõttu on väiksem ka energianivoode vahekaugus  $\Delta E = \hbar\omega$  ning nii ergastuvadki sellised võnkumised madalamatel temperatuuridel.

Arvestades sellega, et gaasi molekuli vabadusastmete arv sõltub temperatuurist ja selle kindlaks tegemine võib olla komplitseeritud, kasutatakse gaasi kirjeldamisel sageli  $i$  väärtuse määratlemise asemel molaarsete soojusmahtuvuste  $c_V$  ja  $c_p$  väärtuste ette andmist. Kui gaas on piisavalt heas lähenduses ideaalne, siis piisab  $c_V$  väärtusest, molaarset soojusmahtuvust  $c_p$  saab leida seosest  $c_p = c_V + R$ . Seega, kui  $c_p - c_V \neq R$ , siis

see tähendab, et gaas erineb oluliselt ideaalsest gaasist ning valem  $pV = \nu RT$  ei ole enam täpne. Samas, ideaalse gaasi puhul võib jooksev  $2c_V/R$  väärtus olla murdarv (siis, kui mingi vabadusaste on antud temperatuuril parasjagu ergastumas). Teeme vahekokkuvõtte.

**fakt 6:** Ideaalse gaasi puhul

$$c_V = \frac{i}{2}R; \quad c_p = c_V + R; \quad \Delta U = \nu c_V \Delta T,$$

kus  $i$  on ergastunud vabadusastmete arv (võnkumise vabadusastmed liidetakse topelt). Teatud liikumisele vastav vabadusaste ergastub, kui  $kT$  saab (oluliselt) suuremaks molekuli vastavate energianivoode vahest  $\Delta E$ . Normaalingimustel on rütsikareegel selline, et üheaatomilise gaasi jaoks  $i = 3$ , kaheaatomilise gaasi jaoks  $i = 5$  ja kolmeaatomilise jaoks  $i = 6$ .

Eespool kasutasime korralikult defineerimata vabadusastme mõistet. Seletame seda mõistet lähemalt.

**def. 5:** Vabadusastmete arv näitab, mitut parameetrit (üldistatud koordinaati) on vaja süsteemi oleku täielikuks määratlemiseks.

Näiteks ühe punktmassi kirjeldamiseks ruumis läheb vaja  $j = 3$  koordinaati,  $N$  punkti kirjeldamiseks aga  $j = 3N$  koordinaati. Kõva keha kirjeldamiseks läheb vaja 6 koordinaati: ühe tema punkti, nt massikeskme asukoha jaoks 3 ruumikoordinaati ja tema ruumilise orientatsiooni kirjeldamiseks veel 3 nurka (nt mingi tema telje suuna määratlemiseks 2 nurka ja pöördenurga jaoks ümber selle telje veel üks nurk). Lineaarse molekuli puhul pole pöördenurka ümber telje vaja, seega  $j = 5$ .

Mugav reegel  $N$  punktmassist (ka kuulidest vms) koosneva süsteemi vabadusastmete arvu määratlemiseks on  $j = 3N - s$ , kus  $s$  on sidemete arv. Molekulide puhul kujutavad sidemed endast keemilisi sidemeid (mis toimivad vedrudena) ning seega kujutab siis  $s$  endast võnkumisega seotud vabadusastmete arvu. Arvestades, et lineaarse molekuli jaoks  $j = 5$  ja tasandilise või ruumilise molekuli jaoks  $j = 6$ , saame selle valemi abil leida võnkumisvabadusastmete arvu  $s = 3N - j$ . Seotud harmooniliste ostsillaatorite teoorias näidatakse, et nn omavõnkumiste arv on võrdne võnkumise vabadusastmete arvuga. *Kui kõik võnkumised on soojuslikult ergastatud*, siis on iga võnkumise keskmine energia  $kT$ , seega molekuli kõikide võnkumiste energia on kokku  $skT$ . Sellisel juhul tuleb siseenergia avaldises ( $U = \frac{i}{2}\nu RT$ ) kasutada efektiivset väärtust  $i = j + 2(3N - j)$  (madalamatel temperatuuridel, kui võnkumisi ei toimu, loomulikult  $i = j$ ).

Vaatleme ühte ülesannet vabadusastmete arvu peale.

**I 10.** Mänguasjade komplekt “Supermag” võimaldab ehitada muuhulgas hulktahkuid, nt tetraeeder, kuup jne, kus hulktahuka servadeks on magnetpulgad ja tippudeks — teraskuulid. Viimaseid võib vaadelda šarniirsete kinnitustena. Selgub, et tetraeeder on jäik konstruktsioon, kuup aga mitte. Tõestage järgmine teoreem: kumer hulktahkukas on jäik parajasti siis, kui kõik tema tahud on kolmnurksed.

Selle lahendamiseks kulub ära valem  $j = 3N - s$ , aga samuti läheb vaja Euleri valemit hulktahkukate (graafide) jaoks,  $N + t = s + 2$ , kus  $N$  on nurkade (kuulikeste) arv,  $s$  — servade (sama, mis sidemete, st supermagi pulkade) arv ja  $t$  — tahkude arv. Euleri valemit me tõestama ei hakka; mainime vaid, et seda saab teha matemaatilise induktsiooni meetodil. Vaja on tõestada,

et siis, kui kõik tahud on kolmnurksed, jääb vabadusastmeid alles ( $j = 3N - s$ ) täpselt sama palju, kui kõval kehal, st 6. Kui neid jääks rohkem, siis poleks keha jäik, tema oleku kirjeldamiseks läheks vaja veel mingeid parameetreid; Kui neid jääks vähem alles, siis on mõni pulk üleliigne, jääkuse oleks võimalik saavutada (st võrduse  $j = 6$ ) väiksemate sidemete arvuga.

Sarnaselt raskete gaasidega on paljudes kristalsetes ainetes toatemperatuuril kõik võnkumiste vabadusastmed ergastatud.  $N$  iooniga (aatomiga) kristalses aines on  $3N$  vabadusastet; peaaegu kõik need (va 6 kõva keha vabadusastet) on võnkumisega seotud. Et  $N$  on hästi suur, siis võib arvu 6 ära unustada ning seega on piisavalt kõrgel temperatuuril kristalse aine siseenergia avaldiseks  $U = 3\nu RT$ . Molaarne soojusmahtuvus on seega  $c_V = 3R$ . Kergete ionide puhul võib siiski juhtuda, et osa omavõnkumisi on liiga kõrge sagedusega ( $> kT/h$ ) ja jäävad seetõttu ergastamata. Sellisel juhul on siseenergia väiksem, kui  $3\nu RT$ . Selleks, et  $U$  saavutaks kõrgematel temperatuuridel väärtuse  $3\nu RT$ , peab ta kasvama kiiremini, kui lineaarse funktsioonina  $T$ -st. Järelikult suureneb soojusmahtuvus temperatuuri tõustes, lähenedes küllastunud väärtusele  $3R$ .

Proovime hinnata kristalse aine siseenergiat madalamatel temperatuuridel (teemandi puhul on ka toatemperatuur veel piisavalt madal). Iga ergastunud võnkumise vabadusaste kannab energiat  $kT$ ; seega peame hindama ergastunud omavõnkumiste arvu, st selliste omavõnkumiste arvu, mille sagedus  $\omega < kT/h$ . Kristalli omavõnkumisi võib vaadelda, kui helilainete tekitatud seisulained. Helilaine sagedus  $\omega = c_s \kappa$ , kus  $c_s$  on heli kiirus antud kristallis ja  $\kappa = 2\pi/\lambda$  — lainevektor. Seega sobivad meile kõik lained, mille lainevektor on väiksem, kui  $kT/hc_s$  ja seega lainepikkus suurem, kui  $hc_s/kT$ . Olgu kristall kuubikujuline küljepikkusega  $L$ . Piki ühte kuubi külge ( $x$ -telge) levival seisulainel lainepikkusega  $\lambda = hc_s/kT$  on  $m_x = 2L/\lambda$  nullkohta. Meile sobivad ka need lained, millel on vähem sõlmi ( $2L/\lambda - 1, 2L/\lambda - 2$  jne), sest nende lainepikkus on suurem ja sagedus väiksem. Selliseid erinevaid variante on  $2L/\lambda$ . Kuid laine ei pruugi levida  $x$ -telje sihis; olgu seisulaine sõlmede arv  $y$ - ja  $z$ -telje sihis vastavalt  $m_y$  ja  $m_z$ . Kuivõrd me eesmärk on hinnata, siis võime ligikaudselt väita, et analoogselt  $m_x$ -ga on  $m_y$  ja  $m_z$  jaoks lubatavad kõik väärtused, mis on väiksemad, kui  $2L/\lambda$ . Kokku on seega erinevaid kombinatsioone (st omavõnkumisi)  $M = (2L/\lambda)^3 = (2LkT/hc_s)^3$ . Siseenergia avaldiseks saame

$$U \approx MkT \approx kT(2LkT/hc_s)^3 \propto T^4.$$

Niisiis on siseenergia võrdeline  $T^4$ -ga ja soojusmahtuvus  $C_V = \frac{dU}{dT} \propto T^3$ .

Läheme nüüd ülesannete juurde, mis ei eelda molekulaarkineetilist käsitlemist, vaid lihtsalt olekuvõrrandi teadmist. Paljud olümpiaadiülesanded ongi pelgalt selle võrrandi peale. Alljärgnevas ülesandes on ainsaks “ootamatuseks” see, et ühes etapis toimub siin (erinevalt harjumuspärastele isotermidele, isohooridele ja isobaaridele) muutuva gaasihulgaga protsess, kus  $\nu T = \text{Const}$ .

**I 11.** Vesinikuga täidetud aerostaat (venimatust nahast õhupall) ruumalaga  $V_0$  hõljub stabiilsel kõrgusel, kus on muutumatu õhurõhk  $p$  ja õhutemperatuur  $T_{\text{õhk}}$ . Päikesekiirguse käes soojenes aerostaat temperatuurini  $T_1$ . Selle tulemusel väljus aerostaadist osa gaasi ventiili kaudu, mis laseb gaasi välja, kuid mitte sisse ja ei lase rõhul aerostaadis tõusta kõrgemaks välisrõhust. Seejärel varjus päike pilve taha ja aerostaat jahtus taas ümbritseva õhu temperatuurini, mistõttu tema ruumala vähenes. Kui palju ballasti tuleb üle parda heita, et aerostaat säilitaks algse kõrguse? Vesinik ja õhk lugeda ideaalseteks

gaasideks, mille molaarmassid  $\mu_{H_2}$  ja  $\mu_{\text{õhk}}$  on teada. Eeldada, et aerostaadi kõrgus soojenemise-jahtumise käigus ei jõudnud praktiliselt muutuda.

Järgmine ülesanne käsitleb juba märksa keerulisemat energia muundumise protsessi. Lahendamise hõlbustamiseks formuleerigem üks idee.

**idee 5:** Kui kaks gaasireservuaari on ühendatud peenikese toru, poolavatud kraani vms abil, siis on võimalik kvaasitasakaal: temperatuurid on erinevad (nende ühtlustumine võtab kaua aega, sest soojusjuhtivustegur reservuaaride vahel on väike), kuid rõhud on võrdsed.

**I 12.** Vaatleme ballooni, mis on algselt õhust tühjaks pumbatud. Ballooni ventiil keeratakse natuke lahti ning õhk voolab ballooni sisse. Millise temperatuuri omandab õhk balloonis peale seda, kui õhu sissevool on lakanud? Toatemperatuur on  $T$ , ballooni seinte soojusjuhtivuse ja soojusmahtuvusega mitte arvestada.

Selle ülesande puhul tuleb aru saada, milleks kulub välisrõhu poolt tehtav töö  $p\Delta V$ , kuidas see muutub soojuseks ning kuidas on seotud selles avaldises sisalduv  $\Delta V$  anuma ruumalaga  $V$ . Märkigem veel, et ilmselt on ventiiliava piisavalt suur (suurem vabatee pikkusest), nii et asjakohane pole mitte molekulaarkineetika rakendamine (nii, nagu ülesandes 9), vaid makroskoopiline lähenemine: gaas tungib sisse peenikese joana.

## Adiabaatilised protsessid

Kiire vastus küsimusele, mis on adiabaatiline protsess, kipub olema, et see on nii kiire protsess gaasiga, et soojusvahetust ei toimu. Kumatigi on see vaid pool tõest ja seejuures vähemoluline pool. Tõe poolikusest aru saamiseks vaatleme lihtsat ülesannet: Soojuslikult isoleeritud anum on jagatud vaheseinaga kaheks osaks. Ühes pooles on gaas rõhu  $p$  juures, teises aga vaakum. Vahesein eemaldatakse hetkeliselt ning gaas täidab kogu anuma. Milline on gaasi rõhk peale tasakaalu saabumist? Kuivõrd vahesein eemaldatakse hetkeliselt, siis gaas paisudes tööd ei saa teha (sein ei liigu rõhu mõjumise suunas). Et soojusvahetust ei toimu ja tööd ei tehta, siis TDIS põhjal siseenergia ei muutu, st temperatuur jääb endiseks. Seega, võime ideaalse gaasi olekuvõrrandi abil järeldada, et ruumala kahekordistumise tõttu vähenes rõhk kaks korda: ei mingit adiabaati, vaid pigem isotherm!

Tegelikult on adiabaadi põhieelduseks justnimelt protsessi piisavalt väike kiirus.

**def. 6:** Adiabaatiliseks nimetatakse sellist protsessi, mis on nii aeglane, et tema kulgemise karakterne aeg on mõnevõrra väiksem (praktilikas piisab paarikordset erinevusest), kui süsteemi omavõnkesagedus.

Gaaside puhul on omavõnkesageduseks pikima seisulaine sagedus  $c_s/2L$ , kus  $c_s$  on heli kiirus ja  $L$  — anuma pikkus. Selliselt defineerituna mängivad adiabaatilised protsessid olulist rolli mitte ainult termodünaamikas, vaid kvantmehaanikas, elektrodünaamikas jpm füüsika valdkondades. Teoreetilise mehaanika kursuses tõestatakse, et aeglastel protsessidel säilib nn adiabaatiline invariant, vt mehaanika idee 72. Erijuhtudel (vt mehaanika ülesanne 54) on võimalik selle invarianti säilimist

tõestada ka suhteliselt lihtsalt. Mehaanika ülesande 54 tulemuse põhjal võib öelda, et kui elastne kuulike liigub edasi-tagasi kahe seina vahel ning need seinad eemalduvad aeglaselt üksteisest, siis  $Lv = \text{Const}$ , kus  $v$  on osakese kiirus ja  $L$  seinte vahemaa. Kujutleme nüüd ühe-dimensionaalset gaasi, kus selliseid osakesi on palju. Gaaside molekulaar-kineetilise teooria põhjal  $p = nm\bar{v}^2$ . Osakeste kontsentratsioon on loomulikult pöördvõrdeline anuma “ruumalaga”,  $n \propto 1/L$ . Adiabaatilise invarianti tõttu on iga molekuli kiirus pöördvõrdeline  $L$ -ga ning loomulikult käitub siis ka keskmine kiirus samamoodi,  $\bar{v} \propto 1/L$ . Niisiis  $p \propto 1/L^3$ , ehk teisisõnu  $pL^3 = \text{Const}$ . See ongi meie ühe-dimensionaalse gaasi adiabaadi seaduseks:  $pV^\gamma = \text{Const}$ , kus antud juhul  $\gamma = 3$ . Tuleme selle tulemuse juurde tagasi peale seda, kui oleme tuletanud termodünaamiliselt adiabaadi seaduse.

Gaaside puhul täpsustatakse, et **adiabaatilisel protsessil ei eraldu ega neeldu soojust**:  $\Delta Q = 0$ . Tõepoolest, kui mõelda ühedimensionaalse gaasi peale kahe seina vahel, siis seal ju ka andsid osakesed energiat ainult seinalle, mingit muud energia (=soojuse) ära- ega juurdevoolu seal ei toimunud. Et soojusvahetus alati mingil määral siiski toimub, olgu isolatsioon kui hea tahes, siis tähendab see praktikas, et protsess ei tohi tõepoolest ka liiga aeglane olla

Enne kui adiabaadi seaduse tuletamise kallale asume märkigem, et olümpiaadidel seda tuletust üldjuhul oskama ei pea, piisab adiabaadi seaduse teadmisest. Niisiis, kirjutame ühe mooli ideaalse gaasiga toimuva adiabaatilise protsessi jaoks TDIS:  $\Delta U = p\Delta V$ , kus  $\Delta U = c_V \Delta T$ , st

$$c_V \Delta T = -p\Delta V.$$

Siin figureerib soojusmahtuvus konstantsel ruumalal, kui ruumala ei muutu, siis läheb kogu soojus siseenergia muutmiseks. Eespoolmainitud põhjustel jätame siin soojusmahtuvuse parameetriks ega kasuta valemit  $c_V = \frac{1}{2}R$ .) Nüüd avaldame gaasi olekuvõrrandist temperatuuri muudu rõhu ja ruumala muutude kaudu: seostest  $RT = pV$  ja  $R(T + \Delta T) = (p + \Delta p)(V + \Delta V)$  saame (ignoreerides kahe väikse liikme korrutist  $\Delta p\Delta V$ )

$$R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p.$$

Selle tulemuse oleks saanud ka lihtsamalt: diferentseerides seost  $RT = pV$  leiame  $RdT = pdV + Vdp$ ; soovi korral võib diferentsiaalidelt minna tagasi lõplikele muutudele ( $\Delta$ -ga suurused).

Nüüd jääb üle ainult asendada  $\Delta T$  esimesest valemist teise:

$$p\Delta V(c_V + R) + c_V V\Delta p = 0.$$

Paneme tähele, et  $c_V + R = c_p$  ja toome sisse adiabaadi näitaja mõiste,

$$\gamma = c_p/c_V.$$

Selle abil saame viimase võrrandi ümber kirjutada kujul

$$\gamma \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p} = 0.$$

Edasi paneme tähele (diferentseerimist eelpoolnäidatud viisil ligikaudse arvutamise jaoks kasutades), et  $\Delta \ln p \frac{\Delta p}{p}$  ning  $\Delta \ln V^\gamma = \gamma \Delta \ln V = \frac{\Delta V}{V}$ . Seega  $0 = \Delta \ln V^\gamma + \Delta \ln p = \Delta(\ln V^\gamma + \ln p) = \Delta \ln(pV^\gamma)$ , st  $\ln(pV^\gamma) = \text{Const}$  ja järelikult ka

$$pV^\gamma = \text{Const}.$$

Naaseme nüüd ühe-dimensionaalse gaasi juurde. Sellel on üks vabadusaste ja järelikult  $c_V = \frac{1}{2}R$  ning  $c_p = \frac{3}{2}R$ , st  $\gamma = 3$ ,

täielikus kooskõlas adiabaatilise invariandi abil saadud tulemusega. Teeme vahekokkuvõtte.

**fakt 7:** Ideaalse gaasi adiabaadi seadus, mis kehtib samaaegselt olekuvõrrandiga  $pV/T = \text{Const}$ :

$$pV^\gamma = \text{Const}; \text{ kus; } \gamma = c_p/c_v.$$

**idee 6:** Adiabaatilise protsessi korral tehtavat tööd on kõige mugavam arvutada siseenergia muuduna (sest soojust ju ei anta ega eraldu):

$$\Delta A = \nu \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V.$$

**idee 7:** Harilikult on õhumassid atmosfääris tugevas liikumises, nii et nad liiguvad pidevalt üles-alla. Et kõrgemal on rõhk väiksem, kui all, siis jahtub gaas üles liikudes adiabaatilise paisumise tõttu (õhumasside suurte mõõtmete tõttu on soojusjuhtivus hästi aeglane).

Seega moodustub vertikaalsuunas adiabaadile vastav temperatuurijaotus; seetõttu on ka kõrgete mägede harjad lumised. Pikalt püsiva vaigse ilma korral, eriti õhtu- ja öötundidel ning talvel, võib tekkida ka nn inversiooniolukord, kui alumised kihid jahtuvad soojuskiirguse tõttu ning muutuvad raskemaks; see tähendab, et nad ei taha enam üles kerkida, isegi kui tekiks natuke tuult. Sellisel juhul jäävad ka kõik heitgaasid ja korstnasuitsud maapinna lähedale ning nina abil võib sellise olukorra kohe ära tunda

**I 13.** Milline on õhu temperatuur  $H = 200$  m kõrguse mäe otsas, kui jalamil on sooja  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ? Õhumasside liikumisel üles- või allapoole võib õhu paisumise ja kokkusurumise lugeda adiabaatiliseks protsessiks. Õhurõhk maapinnal  $p_0 = 10^5$  Pa, õhu tihedus  $\rho = 1,29$  kg/m<sup>3</sup> ja adiabaadinäitaja  $\gamma = 1,4$ .

Selles ülesandes on ilmselt otstarbekas kasutada ligikaudset arvutust, sest rõhu suhteline muutus on väike.

**idee 8:** Kui kehtib seos  $a^\alpha b^\beta = \text{Const}$  ning tegemist on suuruste  $a$  ja  $b$  väikeste muutustega, siis ligikaudse arvutuse jaoks võime kasutada seost  $\alpha \frac{\Delta a}{a} = -\beta \frac{\Delta b}{b}$

See seos on lihtsasti tuletatav logaritmilise diferentseerimise teel:  $\alpha \ln a + \beta \ln b = \text{Const} \Rightarrow \alpha \frac{da}{a} + \beta \frac{db}{b} = 0$ . Õhutiheduse suhtelise muutuse jaoks saaksime kasutada Boltzmanni seadust  $\rho \propto e^{-\mu gh/RT}$  ning sellest tuletatud ligikaudset avaldist juhtumiks  $\mu gh \ll RT$ , kuid ekvivalentset (ja ehk lihtsamalt) saaksime leida hoopis õhurõhu muudu.

**idee 9:** Kui kõrgusevahed on väikesed ning Boltzmanni jaotust pole vaja rakendada, võib õhurõhu muudu leida õhusamba rõhuna  $\Delta p = \rho gh$ , kus esimeses lähenduses võib tiheduse  $\rho$  sõltuvust kõrgusest mitte arvestada.

## Vedeliku ja auru eralduspind

Aine osakesed on vedelikus ja kristalses aines seotud keemiliste sidemetega — jõudude abil, mis sõltuvad kaugusest suhteliselt keerulisel viisil. Oma algolemuselt on need elektrostaatiliselt seotud aatomituumade positiivsed laengud ning elektronide negatiivsed laengud interakteeruvad kvantmehaanika ja elektrodünaamika seaduste abil suhteliselt keerulisel moel. Lõpptulemusena selgub, et suuritel kaugustel kahaneb kahe molekuli tõmbejõud kiiresti (kiiremini, kui elektrostaatiline  $r^{-2}$  sea-

du); teatud kaugusel saavutab tõmbejõud maksimaalse väärtuse ning edasisel lähenemisel hakkab kahanema, läbib nullväärtuse (tasakaaluline olek) ning muutub lõpuks tõukejõuks. Niisiis on piltlikult võttes keemiline side nagu vedru, mille “välja venitamiseks” (molekulide üksteisest eemaldamiseks) on vaja teha tööd. Teisisõnu, iga selline keemiline side kannab endas mingit negatiivset potentsiaalset energiat  $-\Delta U_0$ . Kui molekul on vedelikus (või kristallis) siis on ta moodustanud sidemeid enam, kui ühe naabermolekuliga ning nende “vedrude” summaarne potentsiaalne energia on moodulilt mõnevõrra suurem, kui ühe sideme puhul,  $\Delta U > \Delta U_0$ . Niisiis on vedeliku kohal auru oleval molekulil vedelikus olevaga võrreldes potentsiaalne energia  $\Delta U$ , mis tähendab, et (a) iga molekuli aurustamiseks kulub  $\Delta U$  jagu energiat ( $\Delta U N_A/\mu$  vastab aurustumissoojusele); (b) tõenäosused leida molekul aurustunud olekus ja vedelas olekus suhtuvad nagu  $e^{-\Delta U/kT}$ . Tegelikult on need mõlemad järeldused veidi ebatäpsed, aga nad annavad siiski üldjoontes õige ettekujutuse aurustumise protsessi olemusest.

Vedeliku pinnalt väljub igas ajahetkes teatud hulk molekule seetõttu, et nad saavad soojuslike fluktuatsioonide tõttu suurema energia, kui neid vedelikus hoidvate sidemete energia. Termodünaamilise tasakaalu korral neeldub vedelikus sama auru seest tulevaid ja vastu vedeliku pinda pörkuvaid molekule. Kui auru rõhk on sellest tasakaalulisest väärtusest, nn küllastunud auru rõhust väiksem, siis aurab vedelik tasapisi ära, sest vedelikust väljuvate molekulide arv sõltub ainult temperatuurist ning jääb seega ühesuguseks sõltumata sellest, milline on auru rõhk vedeliku kohal. Tänu sellele on võimalik küllastunud auru rõhku teades hinnata aurustumise kiirust nt auru täielikul puudumisel vedeliku kohal. Auru puudumine vedeliku kohal (või tahke aine kohal, kui on tegu sublimeerumisega) realiseerub nt vaakumi puhul.

Kui aga rääkida aurustumisest normaalingimustel, siis ei lase õhu molekulid harilikult aurustunud molekulidel vedeliku pinna juurest kiiresti minema lennata. Seetõttu püsib vedeliku pinna lähedal kõrgendatud aururõhuga kiht, mille paksus sõltub mh tuule kiirusest. Vahetult vastu vedeliku pinda on auru tasakaalus vedelikuga, st auru on küllastunud; pinnakihi teises servas aga on auru rõhk enam-vähem võrdne ümbritseva õhu aururõhuga (seoses õhuvoolude turbulentsse olemusega ei pruugi pinnakihi välimine serv olla selgepiiriline ning kihi paksus võib ajas fluktueeruda). Harilikult on pinnakihi paksus siiski suurem molekulide vaba tee pikkusest ning siis pole aurumise kiirus piiratud mitte sellega, kui kiiresti jõuavad molekulid vedeliku pinnalt välja hüpata, vaid sellega, kui kiiresti nad jõuavad pinnakihist läbi difundeeruda ja eest ära minekuga uutele molekulidele pinna lähedal ruumi teha. Molekulide voog (pindalaühikut ajaühikus läbivate molekulide arv) on pöördvõrdeline pinnakihi paksusega.

Alljärgnev ülesanne on põhiliselt aurustumisprotsessist arusaamise peale. Alates teisest küsimusest tuleb ka rakendada ideed 3. Samuti tõuseb tulu järgmisest ideest.

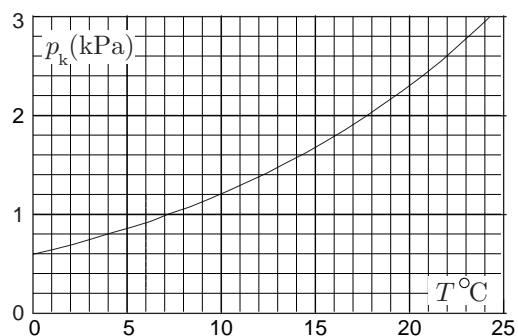
**idee 10:** Kui on antud mingi füüsikalise suuruse  $f$  graafik parameetrist  $x$  ning on vaja leida süsteemis kujunev  $x$ -i või  $f$ -i väärtus ja teoreetilistest kaalutlustest on võimalik tuletada lineaarne sõltuvus  $f = ax + b$ , siis saab lahendi leida graafiku ja sirge lõikepunktina.



See idee on mh sageli kasulik mittelinearseid elemente sisaldavate alalisvooluahelate puhul.

**I 14.** Üks meetod õhu relatiivse niiskuse määramiseks seisneb selles, et tehakse kindlaks kuiva ja märja termomeetri näitude erinevus. Märg termomeeter on muidu nagu termomeeter ikka, ainult et tema sensori ümber on mässitud niiske lapp ning lapi ja sensori peale lehitatakse tuult. Alljärgnevale küsimustele vastamiseks on teil kasutada graafik, mille on kujutatud küllastunud veeauru rõhu sõltuvus temperatuurist. Punktis a) võite lugeda õhu soojusjuhtivuse tühiselt väikeseks, so võtta soojusjuhtivusest tingitud soojusvoog võrdseks nulliga.

a) Leidke kuiva ja märja termomeetri näitude vahe  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$  ning relatiivse niiskuse  $r = 90\%$  juures;



b) Kui eeldada, et tuult lehitatakse kogu aeg ühe ja sama intensiivsusega, siis soojusjuhtivusest tingitud soojusvoog  $Q_{sj}$  (J/s) on võrdeline õhu temperatuuri  $T_0$  ja märja lapi temperatuuri  $T$  vahel,  $Q_{sj} = a(T_0 - T)$ . Siinjuures võrdetegur  $a$  sõltub märja lapi pindalast, kujust ja tuule kiirusest. Vee aurustumisest tingitud soojusvoog  $Q_a$  on võrdeline aurustumise intensiivsusega, mis omakorda on võrdeline küllastunud aururõhu ja tegeliku aururõhu vahel, so  $Q_a = b[p_k(T) - p_a]$ . Koefitsient  $b$  sõltub samadest teguritest, kuid selgub, et suhe  $a/b$  on faktiliselt konstantne — seda eeldusel et küllastunud aururõhk on hulga väiksem õhurõhust. Ta sõltub ainult õhurõhust ning temperatuurist, kuid antud temperatuurivahemiku jaoks on see sõltuvus tühine ning Te võite lugeda, et normaalrõhu juures  $a/b = 65\text{ Pa/K}$ . Arvestades eelpooltoodut, milline oleks märja termomeetri näit siis, kui õhk hoitaks absoluutselt kuivana (so  $r = 0$ )?

c) Tuletage võimalikult lihtne avaldis termomeetrite näitude vahe ligikaudseks arvutamiseks, mis oleks rakendatav  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$  ja  $80\% < r < 100\%$  jaoks ning annaks vastuse ca 10% täpsusega.

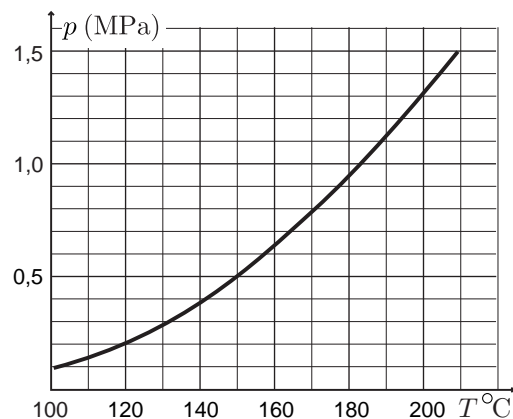
d) Pesu on riputatud kuivama vilusse tuule kätte. Ühel juhtumil on õhu niiskus 95%, teisel juhtumil 80%; muud tingimused on täpselt samad. Mitu korda kuivab pesu teisel juhtumil kiiremini?

**fakt 8:** Kehtib Daltoni seadus: gaaside segu rõhk on osarõhkude summa.

Molekulaarkineetika peale mõeldes on see äärmiselt loomulik. On ju rõhk osakeste poolt üleantav impulss ning süsteemi impulss on koostisosade impulsside summa. Aurustumise ja keemise puhul tuleb seda alati silmas pidada. Meenutagem ideed 5: gaaside puhul saabub harilikult kõige esimesena tasakaal rõhkude jaoks; muud tasakaalud (nt soojuse) saabuvad hiljem (kui

üldse). Näiteks kui toimub aurumine vee pinnalt, siis on vee (nt mere) kohal kõrgendatud veeauru sisaldus, mis tähendab vähenenud õhu sisaldust, sest kogurõhk, mis on veeauru ja õhu rõhkude summa, on võrdne atmosfäärirõhuga (idee 5!).

**fakt 9:** Kui vedeliku auru rõhk  $p_a(T)$  saab suuremaks hüdrostaatilisest rõhust  $p_h$ , siis pole kvaasitasakaal enam võimalik ja algab keemine, mis kestab seni, kuni tingimus  $p_a(T) > p_h$  on rahuldatud.



**I 15.** Geisreid võib vaadelda kui suuri maa-aluseid reservuaare, mis on täidetud põhjaveega ja mida kuumutavad reservuaari kuumad seinad. Reservuaar on ühendatud maapinnaga kitsa ja sügava kanali abil, mis on geisri puhkeolekus täidetud peaaegu servani veega. Lugeda, et geiser hakkab purskama siis, kui vesi reservuaaris läheb keema; puhkeperioodi jooksul vesi maapinnale viivas kanalis ei kuumene; purske ajal on kanal täidetud ainult veeauruga; reservuaari sees seguneb vesi hästi, nii et vee temperatuur on seal kõikjal enam-vähem üks ja sama; reservuaari maht on hulga suurem kanali mahust; põhjavee juurdevool läbi reservuaari seinte on piisavalt kiire, et täita purskete vahelise aja jooksul reservuaar ja kanal kuni kanali ülemise servani. Olgu maapinnale viiva kanali otste kõrguste vahe  $h = 90\text{ m}$ . Vee aurustumissoojus  $\lambda = 2,26 \times 10^6\text{ J/kg}$  ja tema erisoojus  $c = 4,2 \times 10^3\text{ J/kg}\cdot\text{K}$ . Vee küllastunud auru rõhu sõltuvus temperatuurist on toodud graafikul. Leidke, millise osa oma veest kaotab reservuaar purske jooksul.

Kaks viimast fakti kombineeruvad omapärasel kombel siis, kui on tegemist kahe vedeliku eralduspinnaga. Vedelike eralduspinnal moodustuvatesse mullidesse saavad eralduda mõlema aine molekulid ning vastavalt Daltoni seadusele on siis rõhk mulli sees  $p_{1a} + p_{2a}$ , kus  $p_{1a}$  ja  $p_{2a}$  on vastavalt esimese ja teise vedeliku küllastunud auru rõhk antud temperatuuril.

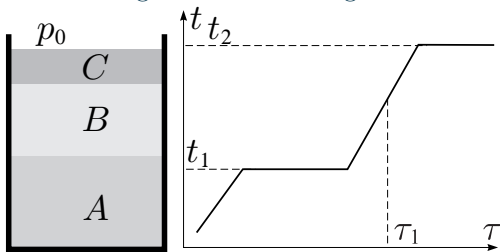
**fakt 10:** Kahe vedeliku piirpinnal algab keemine märksa madalamal temperatuuril, kui kummaski vedelikus eraldi.

**I 16.** Vedelikud  $A$  ja  $B$  omavahel ei segune. Küllastunud auru rõhk  $p_i$  ( $i = A, B$ ) nende kohal vastab piisava täpsusega valemile  $\ln(p_i/p_0) = a_i/T + b_i$ , kus  $p_0$  on atmosfääri normaalrõhk,  $T$  on auru absoluutne temperatuur ning  $a_i$  ja  $b_i$  on vedeliku omadustest sõltuvad konstandid. Suhte  $p_i/p_0$ ,  $i = A, B$  tegelikud väärtused temperatuuride  $40\text{ }^\circ\text{C}$  ja  $90\text{ }^\circ\text{C}$  jaoks on esitatud tabelis.

T (°C)	$p_A/p_0$	$p_B/p_0$
40	0,248	0,07278
90	1,476	0,6918

a) Leidke vedelike  $A$  ja  $B$  keemistemperatuurid.

b) Vedelikud  $A$  ja  $B$  valati nõusse, kus nad kihistusid nii, nagu näidatud joonisel. Vedelikku  $B$  katab õhuke mitteaerustuva vedeliku  $C$  kiht, mis ei lahustu ei  $A$  -s ega  $B$  -s. Vedelike  $A$  ja  $B$  molaarmassid gaasilises olekus suhtuvad nagu  $g = M_A/M_B = 8$ . Algselt oli mõlemat vedelikku ühepalju,  $m = 100\text{g}$  kumbagi. Vedelikusamba kõrgus ja nende tihedus on sellised, et kõikjal anumas võib rõhu lugeda võrdseks välisrõhuga  $p_0$ . Seda segu hakatakse aeglaselt ja ühtlaselt kuumutama. Skemaatiliselt on vedeliku temperatuuri  $t$  sõltuvus ajast  $t$  esitatud graafikul. Leidke temperatuurid  $t_1$  ja  $t_2$  ühe kraadilise täpsusega. Millised on vedelike massid ajahetkel  $t_1$ ? Märkus: Eeldatakse, et vaadeldavate vedelike aurud alluvad piisava täpsusega Daltoni seadusele ning kuni küllastunud auru rõhuni võib neid lugeda ideaalseteks gaasideks.



## Pindpinevus

Nagu me eelmises peatükis nägime, omandavad vedelikud olevad molekulid keemiliste sidemete tõttu negatiivse potentsiaalse energia aurufaasis olevate molekulide suhtes. Äärmises pinnakihi on igal molekulil lähinaabreid ainult ühel pool ning seetõttu on nende negatiivne potentsiaalne energia natuke väiksem. Teisisõnu, vedeliku pinnal asuvatel molekulidel on teatav positiivne potentsiaalne energia vedeliku sisemuses asuvate molekulide suhtes. Seda energiat võib vaadelda kui vedeliku vaba pinnaga seonduvat energiat, mis loomulikult on võrdeline vaba pinna pindalaga,  $U = S\sigma$ . Võrdetegurit  $\sigma$  nimetatakse pindpinevusteguriks.

Kui vaadelda mõtteliselt joont pikkusega  $l$  vedeliku pinnal, siis kaks poolt, milleks see joon vedeliku pinna jagab, tõmbuvad jõuga  $F = \sigma l$ . Tõepoolest, kui lasta vedeliku pinnal laieneda risti mõttelise joonega väikese vahemaa  $\Delta x$  võrra, siis pindala suureneb  $\Delta S = l\Delta x$  võrra ning potentsiaalne energia  $\Delta U = \sigma l\Delta x$  võrra. Selle jaoks on vaja teha tööd, st peab toimima jõud  $F$ , mis rahuldab võrdust  $F\Delta x = \Delta U$ , st  $F = l\sigma$ .

Kui vedelik asub mingil tahkest materjalist pinnal (või anumas), siis tuleb arvestada sedagi, et sarnaselt vaba (vastu õhku/auru puutuva) pinnaga on ka tahke materjaliga kontaktis oleval pinnal mõnevõrra erinev energia, sest vedeliku molekulid moodustavad ka tahke ainega molekulaarseid sidemeid. Veelgi enam, ka tahke aine vabal pinnal on täpselt samal põhjusel oma energia. Tahke pinna ainsaks erinevuseks on, et see pind säilitab materjali jäikuse tõttu oma kuju, mistõttu pindpinevusjõud ei saa avalduda. Tahke materjali vaba pinna energia muutub oluliseks aga siis, kui vedelik hakkab seda osaliselt katma, nii et tahke aine ja õhu kontaktpind saab asenduda tahke aine ja

vedeliku kontaktpinnaga (või vastupidi).

Niisiis, kui meil on tegemist kolme ainega — olgu nendeks tahke materjal, gaas (õhk) ja vedelik, siis tuleb meil olukorda iseloomustada kolme pindpinevusteguriga,  $\sigma_{g-v}$ ,  $\sigma_{g-t}$  ja  $\sigma_{t-v}$ . Vaatleme nüüd kolme faasi kokkupuutejoont (seda joont, kus vedeliku pind kerkib tahkelt pinnalt ülespoole). Vedeliku pindpinevus tirib seda joont (pikkusega  $l$ ) vedelikupinna puutuja sihis jõuga  $\sigma_{g-v}$ . Selleks, et leida, millise jõuga tiritakse seda joont piki tahke aine pinda, vaatleme joone mõttelist nihet  $\Delta x$  vedelikuga kaetud ala laienemise suunas. Vedelikuga kaetud ala energia suureneb  $\sigma_{t-v}l\Delta x$  võrra ning ilma vedelikuta ala energia väheneb  $\sigma_{g-t}l\Delta x$  võrra. Sellisele summaarsele energiamuudule vastab pinnasihiline jõud  $l(\sigma_{t-v} - \sigma_{g-t})$ .

Vaatleme nüüd kolme faasi kokkupuutejoone tasakaalutingimust. See saaks liikuda piki tahke aine pinda, seetõttu peavad jõud olema tasakaalus tahke pinna sihis:

$$\sigma_{t-v} - \sigma_{g-t} + \sigma_{g-v} \cos \alpha = 0,$$

kus  $\alpha$  on vedeliku pinna ja tahke pinna vaheline nurk. Antud võrrandit saab loomulikult kasutada nurga  $\alpha$  leidmiseks.

Olukorda  $\sigma_{g-t} - \sigma_{t-v} \geq \sigma_{g-v}$  nimetatakse **täielikuks märgamiseks**: pindpinevustegur  $\sigma_{g-t}$  on nii suur, et vedelikul on energeetiliselt kasulik katta kogu tahke pind, et vähendada gaasi ja tahke aine kokkupuutepinda. Vedelik katab kiiresti kogu pinna ja üritab “üles ronida” mööda vertikaalseid seinu; nt mensuuris moodustub seetõttu nn menisk — üldisest vedeliku pinnast kõrgemal asuv klaasseinteäärne vedelikuosa.

Kui võrratus on range,  $\sigma_{g-t} - \sigma_{t-v} > \sigma_{g-v}$ , siis oleks energeetiliselt kasulik vedelikul katta kogu tahkise pind vedeliku kihiga, vajadusel “ronides” vertikaalset seinu mööda üles molekulaarse kihina. Molekulaarsena seepärast, et hoida ühest küljest gravitatsiooniline potentsiaalne energia minimaalne ning teisest küljest tagada iga osakese jaoks tahke aine pinnal keemiliste sidemete loomise võimalus vedeliku molekulidega. Üldjuhul siiski selline mööda seinu üles ronimine eriti ei toimu, sest viskoossus takistab hästi õhukeses kihis ülespoole voolamist (ja selleks, et kõrgele ronimine oleks energeetiliselt kasulik, peaks kiht olema tõesti õhuke). Ülivoolavas olekus aga sedalaadi tõket pole.

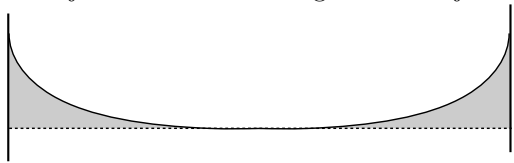
Olukorda  $\sigma_{t-v} - \sigma_{g-t} \geq \sigma_{g-v}$  nimetatakse **täielikuks mittemärgamiseks**. Selle võrratuse võib ümber kirjutada kujul  $\sigma_{t-v} \geq \sigma_{g-v} + \sigma_{g-t}$ . Range võrratuse puhul on energeetiliselt kasulik hoida kahte eralduspinda, vedelik-gaas ja gaas-tahkis. Seega, kui asetada vedelik pinnale, jääb vedeliku ja tahke aine vahele molekulaarse kihina “õhuvähe” (siin enam viskoossuse probleemi pole, sest õhk ei pea sellesse kihti vahele voolama, vaid ta jääb sinna siis, kui vedelik valatakse pinna peale).

Olukorda  $\sigma_{t-v} = \sigma_{g-t}$  võib nimetada neutraalseks märgamiseks: vedelik-tahkise kokkupuutepinna efektiivne energia on null (st kokkupuutepinna suurenemisel süsteemi koguenergia ei muutu), Kokkupuutepunktis on vedelik-gaasi eralduspind risti tahke aine pinnaga.

**idee 11:** Meniski, kapillaaris oleva veesamba, toru otsas ripuva tilga jms massi saab leida tasakaalutingimusest: pindpinevusjõud tasakaalustab raskusjõu.

Näiteks meniski puhul vaatleme mõttelist tasapinda — vedeliku keskosa pikendust — ning jagame selle abil vedelikumassi kaheks osaks, meniskiks (juuresoleval mensuuri vertikaalläbilõiget kujutaval joonisel hall piirkond) ja alumiseks osaks. Sellele

eralduspinnal on hüdrostaatiline rõhk võrdne atmosfäärirõhuga ning seetõttu vastav jõud taandub meniskile mõjuvate vertikaaljõudude tasakaalutingimusest välja.



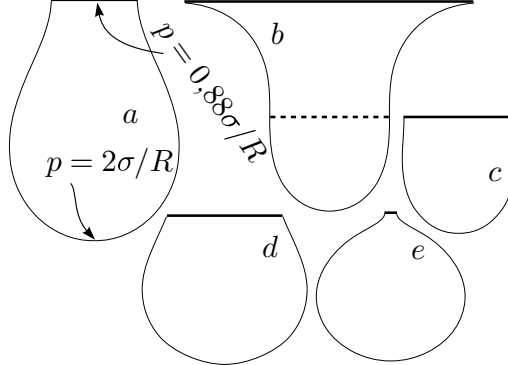
**I 17.** Silindrilise mensuuri mahtuvus on  $V = 100\text{ml}$  ja kõrgus  $h = 20\text{cm}$ . Mensuurile kantud skaalal on jooned tõmmatud iga 1ml järel. Oletame, et Te kasutate mensuuri vee ruumala mõõtmiseks ja loete vee nivooks vee vaba pinna madalaima punkti kõrguse. Milline viga tuleneb sellest asjaolust, et vee pind on tegelikult kõver? Vee pindpinevustegur  $\sigma = 0,073\text{N/M}$  ja ta märgab täielikult mensuuri seinu.

Toru otsas (ava raadius  $r$ ) rippuva tilga puhul muutub vedelikupinna puutuja siht toruga liitumiskohas tilga alla kukkumise hetkel vertikaalseks (vt joonis  $a$ ,  $c$ ,  $e$ ) ning seetõttu oleks ahvatlev võrrutada tilgale mõjuv raskusjõud pindpinevusjõuga toru otsa juures. Paraku ei ole rõhk tilga sees sellel kõrgusel päriselt võrdne välisrõhuga  $p_0$ , vaid kapillaarjõud põhjustavad mõningase rõhkude vahe; selle konkreetne väärtus sõltub toru raadiusest  $r$ . Näiteks joonisel  $a$  esitatud tilga kuju jaoks on vastav rõhk ligikaudu  $0,88\sigma/R$ , kus  $R$  on tilga madalaima osa kõverusraadius (see tulemus on saadud tilga kuju täpse arvutamise teel). Tilga üks võimalik kuju mõnevõrra enne alla kukkumist on kujutatud joonisel  $d$ .

Vaatleme tilga probleemi lähemalt. Gravitatsiooniväljas viibivat vedelikku iseloomustavatest suurustest  $g$ ,  $\rho$  ja  $\sigma$  saab moodustada kombinatsiooni, mis omab pikkuse dimensiooni  $\mathcal{R} = \sqrt{\sigma/g\rho}$  (sellise suurusega tilgal on vedelikusamba rõhk ja kapillaarrõhk enam-vähem ühesuurused). Tilga kuju määrab ära dimensioonitu parameeter, toru raadiuse ja karakteristiku  $\mathcal{R}$  suhe  $\tilde{r} = r/\mathcal{R}$ . Juhul, kui  $\tilde{r} \ll 1$ , siis on tilk allakukkumise hetkel peaaegu kerakujuline (joonis  $c$ ) ning selle kera raadius  $R$  rahuldab võrratusi  $\mathcal{R} \gg R \gg r$ . Kuigi toru ava juures on kapillaarrõhk ligikaudselt  $2\sigma/R$ , siis tänu toru ava väiksusele ( $r \ll R$ ) võib jätta kapillaarrõhu arvestamata vertikaalsihilises jõudude taskaalu võrrandis, st  $mg = 2\pi r\sigma$  (kus  $m$  on tilga mass).

Täpsemad arvutused (mis sisaldavad teist järku diferentsiaalvõrrandi koostamist ja numbrilist lahendamist/analüüsimist) näitavad järgmist. Toru ava raadiuse kasvades esialgu kasvab ka eralduva tilga mass; väärtuse  $r = 0,841\mathcal{R}$  juures saavutab see maksimumi (tilk omandab kuju joonisel  $c$ ). Kui kasutada sellisel tilga puhul seost  $mg = 2\pi r\sigma$ , siis ülehindaksime tilga massi umbes 35% võrra (joonise  $a$  jaoks oleks see viga 24%). Toru edasisel jämenemisel tilga mass veidi kahaneb. Kui toru raadius saavutab kriitilise väärtuse  $r = 0,918\mathcal{R}$ , siis toru otsas rippuv tilk enam ei laiene allapoole (selline tilk on kujutatud joonisel  $b$  punktiiriga joonest allapoole jääva osana; joonis  $b$  on samas mõõtkavas joonisega  $c$ ). Nüüd annaks valem  $m = 2\pi r\sigma/g$  õigest vastusest täpselt kaks korda suurema tulemuse. Veelgi jämedama toru puhul omandab rippuv tilk niisuguse kuju, nagu joonisel  $b$  — toru ots on antud pideva joonega, alla kukub aga ainult punktiirjoonest allapoole jääv osa. See tähendab, et nii jämedate torude puhul ei sõltu tilga

mass enam toru raadiusest.



Kokkuvõtte ellpooltoodust on selline, et valem  $m = 2\pi r\sigma/g$  on täpne (ja kasutatav nt pindpinevusteguri eksperimentaalseks määramiseks) siis, kui toru ots on hulga kitsam eralduvast tilgast (kõige laiemast kohast); mida kitsam toru, seda väiksem viga. Samas, kui on lubatav paarikümne protsendine viga, võib seda kasutada ka jämedamate torude puhul.

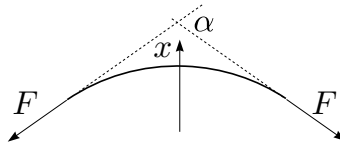
**idee 12:** Teatud puhkudel on pindpinevusülesannetes võimalik leida tasakaaluasend summaarse energia (pinna-energia koos ülejäänud potentsiaalse energiaga) miinimumina.

**I 18.** Lauale valatakse laua pinda mittemärgavat vedelikku, mis moodustab seal loigu. Leidke, vedeliku kihi paksus laual, kui vedeliku tihedus on  $\rho$  ja tema pindpinevustegur on  $\sigma$ . Milline oleks paksus siis, kui oleks tegemist neutraalse märgamisega (kokkupuutepunktis on vedelik-gaasi pind risti laua pinnaga)?

Selle ülesande puhul paneme tähele, et vedeliku kogus on fikseeritud, st kui vedeliku kiht oleks madal, siis oleks gravitatsiooniline potentsiaalne energia väike, kuid pind (ja pinnaenergia) oleks suur. Kehtib ka vastupidine: paksu kihi puhul oleks pinnaenergia väike, kuid gravitatsiooniline energia suur.

**fakt 11:** Kõver pindpinev pind põhjustab rõhkude erinevust (ühe ja teise ruumipole vahel). Sfäärilise pinna puhul  $\Delta p = 2\sigma/R$  ja silindrilise pinna puhul  $\Delta p = \sigma/R$ , kus  $R$  on kõverusraadius.

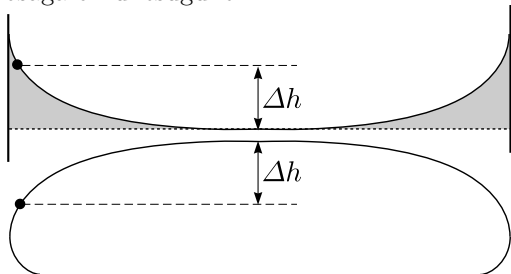
Jagame mõtteliselt sfäärilise mulli (nt vedelikus olev õhumull) tasapinnaga pooleks ning vaatleme nende poolte vaheliste jõudude tasakaalutingimust. Pindpinevusest tingitud jõud  $F = 2\pi R\sigma$ , hüdrostaatilisest rõhust tingitud jõud  $F = \pi R^2$ . Nende kahe avaldise võrdsusest saamegi eelpooltoodud tulemuse. Silindrilise pinna puhul on tuletuskäik analoogiline. Silindri puhul võib kasutada ka teist meetodit: vaatleme hästi väikest pinnaelementi ning jõudude tasakaalu pinna keskpunktiga risti oleva  $x$ -telje sihis (vt joonis). Pinnaelemendile servadest mõjuvate pindpinevusjõudude resultant on  $\sigma l\alpha$ , kus  $\alpha \ll 1$  on nurk pinna puutujate vahel, mis on tõmmatud selle tüki kahest vastasservast ja  $l$  on vaadeldava tüki telje-sihiline pikkus. Pinna pindala  $\Delta S = lR\alpha$  ja seega rõhumisjõudude resultant on  $\Delta p l R\alpha$ .



Paneme sedagi tähele, et analoogne meetod töötab ka siis, kui pole tegemist pindpinevusega, vaid nt nõõri poolt avaldata-

va rõhumisjõuga, kui nõör on pinge  $T$  all tõmmatud üle kumera pinna: rõhumisjõud nõõri pikkusühiku kohta on  $n = T/R$ .

Selle idee abil saab selgeks, et meniski ristlõike profiil on identne laual lebava mitte-märgava vedeliku loigu ristlõike profiiliga. Tõepoolest, pinna kõverus sõltub ainult pindpinevustegurist ja rõhkude vahest ühel- ja teisel pool pinda. Viimane on aga nii meniski kui ka loigu jaoks üks ja sama, kui vaadelda punkte, mille jaoks kõrguste vahe  $\Delta h$  vedeliku tasapinnalise osaga on ühesugune.



**I 19.** Leidke ülesande 17 andmete puhul meniski kõrgus (st vedelikupinna kõrguste vahe mensuuri keskkohas, kus pind on peaaegu tasane ja meniski kõige äärmises, klaaspinna vastu puutuvas servas).

Pindpinevuse tõttu üritab vedelik võtta vähima pinnaga kuju (kui gravitatsioonilise jms energiaga võib mitte arvestada). Seetõttu jaguneb näiteks veekraanist tulev peenike veejuga teatud kaugusel tilkadeks (silindriline kuju on ebastabiilne, sfääriliste tilkadena on pindala väiksem. Veepiisad on ka kerakujulised (ja mitte kunagi nn klassikalise tilga kujulised — terava otsa juures tekiks kohe suur rõhk, mis suruks vedeliku sealt minema); kukkumistuule takistus võib nad muuta vaid kergelt loperguseks, lapiku kukli sarnaseks). Samal põhjusel on ebastabiilne ka vedelikukile. Siiski, kui pindpinevustegur on hästi väike, nt šampooni lisamise tulemusel, siis on see protsess piisavalt aeglane ning tänu sellele on võimalik seebiveekilede ja seebimullide moodustumine. Selliste kilede pinnaenergia on küll hulga suurem, kui oleks ümaral tilgal, kuid kui imeõhuke kile on juba moodustunud, siis peaks kilesse augu tekkimiseks vahepeal pindala suurenema (augu servade jagu).

Pindpinevusülesannetes figureerivadki sageli kiled (sh seebimullid). Sellisel juhul ei tohi unustada, et kilel on kaks külge ning mõlemal küljel on oma pindpinevusenergia, mis tekitab valemitesse teguri “2”.

## Entroopia ja Carnot tsükkel

**def. 7:** Klassikaline (mitte-kvantmehhaaniline) entroopia  $S$  on defineeritud oma juurdekasvu abil

$$\Delta S = \Delta Q/T,$$

kus  $\Delta Q$  on vaadeldavale süsteemile juurde antav soojushulk ja  $T$  on süsteemi temperatuur.

Järeldus: adiabaat on isoentroop, st konstantse entroopiaga protsess.

Kui nn klassikalises termodünaamikas on entroopia sarnaselt potentsiaalse energiaga defineeritud konstandi täpsusega, siis kvantmehaanika abil üles ehitatud termodünaamikas on ta määratud täpselt: jämedas laastus  $S = k \ln N$ , kus  $N$  on soojuslikult ergastatud kvantolekute arv; täpselt  $S = -k \langle \ln p_i \rangle$ , kus  $p_i$  on  $i$ -nda kvantoleku tõenäosus ja

nurksulud tähistavad keskmistamist üle kõikide kvantolekute. Matemaatilise statistika abil on võimalik näidata, et selline definitsioon annab juurdekasvu jaoks samuti reegli  $\Delta S = \Delta Q/T$ .

**def. 8:** Pööratavaks nimetatakse sellist protsessi, mis võib kulgeda ka vastassuunas, st süsteem võtab vaadeldavaga identseid olekuid ajaliselt vastupidises järjekorras.

Paneme tähele, et pööratud protsessi puhul muutuvad kõik kiirused, ühelt kehalt teisele üle antavad suurused (nt soojus) ja iga keha poolt tehtud töö vastasmärgiliseks. Näiteid pööratavatest protsessidest: mehhaaniline hõõrdevaba liikumine, sumbumatud võnkumised  $LC$ -ahelas, adiabaatiline protsess gaasiga. Näiteid mitte-pööratavatest protsessidest: mehhaaniline liikumine hõõrdumise olemasolul, erisorti gaaside segunemine, kahe keha temperatuuride ühtlustumine. Soojuse ülekandumine ühelt kehalt teisele saab olla pööratav vaid siis, kui kehade temperatuurid on üksteisele lõpmatult lähedal (ja seetõttu toimub ka protsess lõpmatult aeglaselt. Loomulikult on pööratava protsessi mõiste idealisatsioon: nii nagu pole olemas hõõrdevaba liikumist, nii pole ka pööratavaid protsesse. Samas võivad mõned protsessid olla väga lähedased pööratavale.

**fakt 12:** Suletud süsteemi entroopia säilib pööratavates protsessides, kasvab mitte-pööratavates protsessides ning ei saa kunagi kahaneda.

Seda väidet nimetatakse **termodünaamika teiseks seaduseks** (TDIIS). Rakendame entroopia definitsiooni kahest kehast koosneva süsteemi jaoks, millest ühe temperatuur on  $T_1$  ja teisel  $T_2 < T_1$ . Kui soojus läheb teiselt kehalt esimesele, siis süsteemi summaarne entroopia muut oleks  $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_1} - \frac{\Delta Q}{T_2} < 0$ , st see protsess ei saa toimuda. Seega tundub TDIIS võrdlemisi loomulik: soojus ei saa minna madalama temperatuuriga kehalt kõrgema temperatuuriga kehale. Ometigi on järeldused sellest seadusest vähem triviaalsed.

Kvantmehhaanilise definitsiooni põhjal võib öelda, et ergastatud olekute arv saab ainult kasvada. Mida vähem olekuid, seda suurem korrastatus. Seega saab suletud süsteemis korrastatus ainult väheneda, see on igapäevaelust ammuteada fakt. Tõesti mahakukkunud vaas lähe kildudeks, aga need killud ei lenda kunagi ise vaasiks kokku.

Kui klassikalises termodünaamikas jääb TDIIS postulaadiks, siis kvantmehhaanilises termodünaamikas tuletatakse see definitsioonist matemaatilise statistika abil.

Selgub, et TDIIS üheks järelduseks on, et nn soojusmasinales — seadeldistes, mis mingit (perioodilist) ringprotsessi sooritades muudavad soojust kasulikuks tööks — ei saa kasutegur  $\eta = A/Q$  (kasuliku töö  $A$  ja kuumutatavalt kehalt saadud soojuse  $Q$  suhe) olla suurem, kui nn Carnot tsükli puhul. Seda asjaolu kasutatakse ka mõnikord TDIIS alternatiivse formuleeringuna. Sellist fiktiivset masinat, mis (olles vastuolus siinse väitega) suudaks muundada soojusenergia saajaprotsendilisel tööks, nimetatakse teist liiki igiliikuriks (*perpetuum mobile*).

Kuigi TDIIS on statistiline seadus, on makroskoopiliste kehade kvantolekute arv niivõrd hiiglaslik, et statistika seadused töötavad praktikas sama vääramatult nagu nt energia jäävuse seadus. Ometigi on TDIIS olnud aluseks mitmete kavalatele paradoksile ja mõtteliste eksperimentidele, millest kõige tuntum on ehk nn Maxwelli demon. See on tilluke mehike, kes istub gaasianumat kaheks jagava vaheseina sisse tehtud tillu-



kese augu juures ja liigutab luuki: ta laseb läbi vasakult paremale ainult kiired molekulid ning paremalt vasakule ainult aeglased. Paradoksi lahendus seisneb selles, et igasugune informatsiooni kogumine ja töötlemine on seotud energia dissipeerumisega ning sellega seotud entroopia kasv ületab molekulide valikulisest läbilaskmisest tuleneva kahanemise.

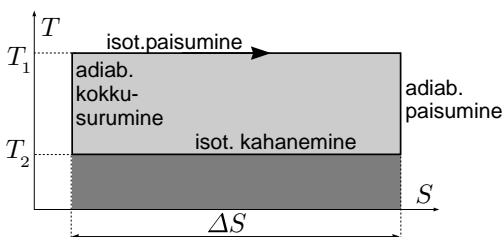
**Carnot tsükli** puhul konstrueeritakse soojusmasin teatud kogusest ideaalsest gaasist, lõpmatult suure mahtuvusega soojusreservuaarist temperatuuril  $T_1$  ja samasuurest jahutist temperatuuril  $T_2 < T_1$ . Ühel täistsükli on neli osa.

i) Gaas saab temperatuuril  $T_1$  isothermiliselt soojust soojusreservuaarist. See protsess peab olema hästi aeglane, sest kiirema protsessi puhul peaks gaasi temperatuur olema märgatavalt madalam reservuaari temperatuurist, et lasta soojusjuhtivusel kanda üle soojust (koguhulgas  $\Delta Q_1$ ) kiirendatud korras. Selle tulemusel gaas paisub ning paisumise käigus tehtavat tööd  $\int pdV$  saab kasutada.

ii) Gaasil lastakse adiabaatilisel paisuda niikaua, kuni ta temperatuur on omandanud jahuti temperatuuri. Ka selles etapis tehtavat tööd saab kasutada.

iii) Gaas annab jahutile isothermiliselt (aeglaselt) ära teatud osa esimeses etapis saadud soojust  $\Delta Q_2 < \Delta Q_1$ . Et ruumala seejuures väheneb, siis tuleb seejuures ka tööd teha (selleks saab kasutada esimestes etappides saadud ja osaliselt nt mehhaaniliseks potentsiaalseks energiaks akumulieritud tööd).

iv) Gaas surutakse adiabaatilisel kokku — sel määral, et temperatuur tõuseb  $T_1$ -ni. Jälle tuleb teha natuke tööd.



Sellise soojusmasina kasutegurit on kõige mugavam arvutada  $S - T$  teljestikus (vt joonis), sest seal on tsükliks ristkülik (mis moodustub kahest isothermist ja kahest adiabaadist=isoentroobist). Olgu horisontaalteljeks  $S$  ning ristküliku pikkus  $\Delta S$ . Vastavalt entroopia definitsioonile saame arvutada üleantud soojushulgad:  $\Delta Q_1 = T_1 \Delta S$  (kogu halliks värvitud ala pindala joonisel) ja  $\Delta Q_2 = T_2 \Delta S$  (tumehalli ala pindala). Edasi, TDIS tõttu säilib energia, st tehtud töö  $\Delta A = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \Delta S(T_1 - T_2)$  (see on  $S - T$  teljestikus kontuuri sisepindala — vt helehall ala joonisel). Kasuteguri definitsiooni tõttu

$$\eta_{sm} = \frac{\Delta A}{\Delta Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1.$$

Niisiis me näeme, et soojus saab muutuda tööks ainult samaaegselt sellega (ja tänu sellele), kui süsteem “jahuti + soojendav keskkond” kasvatab entroopiat. Samas ei saa kasutegur olla kunagi 1, sest jahutav keha ei saa olla absoluutsel nulltemperatuuril.

Carnot tsükkel on pööratav, sest seda on nii adiabaat, kui ka isothermiline soojuse üle kandmine, kus soojendava ja soojendatava keha temperatuurid erinevad tühiselt vähe. Pööratud tsükli puhul muutuvad kõikide protsesside suunad vastupidiseks (paisumine  $\rightarrow$  kokkutõmbumine; soojendamine  $\rightarrow$  jahutamine;  $S - T$  diagrammil tuleb ka tsükli suunda märkiv

nool joonistada vastupidine); vastavad soojusmasinad leiavad laialt rakendamist, nii külmikutena kui ka soojuspumpadena. Esimesel juhul on eesmärgiks kasutada tööd (mida teeb elektrimootor) külmast asjast (külmkapi sisemusest) soojust välja pumpamiseks (TDIIS põhjal see ise välja ei kandu). Teisel juhul on eesmärgiks kasutada tööd soojust pumpamiseks soojadesse tubadesse. Mõlemal juhul võib defineerida kasuteguri sõltuvalt sellest, millist soojushulka me loeme “kasulikuks”: külmutus- kapi puhul jahedalt kehalt ära pumbatav soojus  $\Delta Q_2$ , soojuspumba puhul soojemale kehale pumbatav soojus  $\Delta Q_1$ . Mõlemal juhul on kulutatud tööd (elektrienergiat), seetõttu pööratud Carnot tsükli kasutegurid vastavalt külmikutena ja soojusmasina on

$$\eta_{sp} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}; \quad \eta_k = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Paneme tähele, et soojuspumba puhul alati  $\eta_{sp} > 1$ , st ta on etem elektriradiaatorist. Reaalse pööratud soojuspumba ja külmi- kute kasutegurid jäävad eelpooltoodust siiski väiksemaks — seetõttu, et realselt ei ole protsessid kunagi täielikult pööratavad (nt soojust üleandmiseks isothermi puhul on vaja nullist erinevat temperatuuride vahet).

**idee 13:** TDIIS abil on võimalik vastuväiteliselt tõestada mitmeid termodünaamilisi väiteid; vaja on vaid näidata, et soojus peaks kanduma üle madalama temperatuuriga kehalt kõrgema temperatuuriga kehale.

Tõestame näiteks, et kõik kolm toodud kasuteguri avaldist on teoreetilised maksimumid (suuremad väärtused on võimatud), mis kehtivad mitte ainult gaasidel baseeruvate soojusmasinate jaoks, vaid ka nt termopaari abil töötava elektromootorjõu jaoks. Oletame vastuväiteliselt, et mingi soojusmasina jaoks  $\eta_{sm} > \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ . Kasutame seda soojusmasinat energia akumulierimiseks nt mehaanilise potentsiaalse energiaga, koguses  $\Pi = \Delta A > \Delta Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ . TDIS põhjal eraldus soojust jahutavasse keskkonda koguses  $\Delta Q_2 = \Delta Q_1 - \Delta A$ . Kasutame nüüd sedasama potentsiaalset energiat pööratud Carnot tsükliga soojuspumbas soojust tagasi pumpamiseks soojusmasinat jahutanud keskkonnast koguses  $\Delta Q'_1 = \Delta A \eta_{sp} = \delta A \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ . Võrreldes seda tulemust eelduse kohaselt kehtiva võrratusega näeme, et  $\Delta Q'_1 > \Delta Q_1$ , st meil õnnestuks kahe etapi kokkuvõttes pumbata soojust madalama temperatuuriga keskkonnast ilma summaarset tööd tegemata (mis on võimatu). Analoogselt saab tõestada  $\eta_{sp}$  ja  $\eta_k$  avaldiste maksimaalsuse.

**I 20.** Tootja reklaamib spetsiaalset kattematerjali järgmiselt: “See materjal peegeldab tagasi enam kui 90% kogu pealangevast kiirgusest (nii nähtavat kui ka infrapunast valgust), kuid kiirgab kõikidel sagedustel (nii nähtavat kui infrapunast valgust) nii nagu seda teeb absoluutselt must keha, eemaldades sel viisil tehiskaaslaselt palju soojust. Seega hoiab meie kattematerjal teie tehiskaaslase nii külmana kui võimalik.” Kas selline kattematerjal võib eksisteerida? Põhjenda vastust.

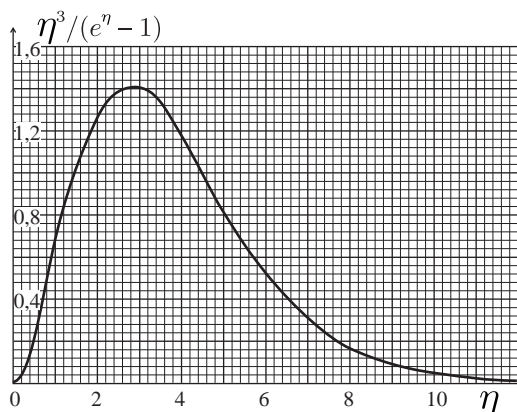
Selle ülesande järeldeks on, et materjali kiirgamis- ja neeldumisomadused peavad olema identsed, sh identsus peab kehtima iga lainepikkuse jaoks. Samal meetodil saab ka näidata, et osaliselt peegeldava ning ülejäänud kiirgust läbi laskva materjali peegeldustegur peab olema mõlemas suunas üks ja sama. Teatud efekti (nt kasvahoone oma) on aga materjalidega mängides võimalik saavutada, vaadelgem järgmist ülesannet.

**I 21.** See on järjeks ülesandele 6; kordame arvandmeid: tehiskaaslane on kera läbimõõduga 1 m, mille kõikides punktides on ühesugune temperatuur. Tehiskaaslane asub kosmoses Maa läheduses, aga mitte tema varjus; Päikese pinna temperatuur  $T_{\odot} = 6000 \text{ K}$ , Päikese raadius  $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$ , Maa ja Päikese vaheline kaugus  $L = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$  ja universaalkonstant  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

Temperatuuril  $T$  oleva absoluutselt musta keha kiirgusspekter  $u(T, f)$  on kirjeldatav Plancki kiirgusseadusega

$$u(T, f)df = A \frac{\eta^3 d\eta}{e^{\eta} - 1}$$

kus  $u df$  on elektromagnetilise kiirguse energiavoo tihedus sagedusintervallis  $(f, f + df)$  ja  $\eta = hf/kT$  ja konstant  $A$  avaldub fundamentaalkonstantide  $c$ ,  $k$  ja  $h$  kaudu. See kiirgusspekter, integreerituna üle kõikide sageduste, annab absoluutselt musta keha ühikulise pinna kiirguse koguvõimsuse  $P = \int u(T, f)df = \sigma T^4$ . Lisatud joonisel on kujutatud normaliseeritud spekter  $c^3 h^3 u(T, f) / 8\pi k^4 T^4$  kui parameetri  $\eta$  funktsioon.



Paljudes rakendustes on vaja hoida tehiskaaslast nii külmana kui võimalik. Tehiskaaslase jahutamiseks kasutavad insenerid peegeldavat kattematerjali, mis peegeldab valgust teatud piirsagedusest suurematel sagedustel aga ei takista soojuskiirguse väljapääsu sellest sagedusest väiksematel sagedustel. Vastaku see piirsagedus  $hf/k$  väärtusele 1200 K. Hinnake, milline on nüüd tehiskaaslase temperatuur.

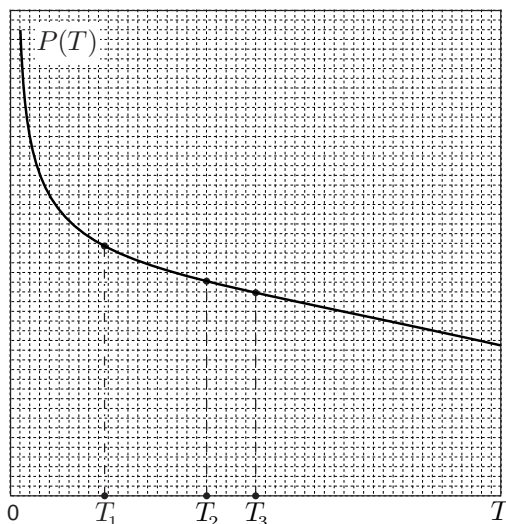
**Soovitus:** Täpset vastust ei nõuta. Seepärast ärge teostage keerukaid integreerimisi, vaid kasutage lähendusi, kus võimalik. Teada on järgmise integraali väärtus:

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta^3 d\eta}{e^{\eta} - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Funktsiooni  $\eta^3/(e^{\eta} - 1)$  maksimum on ligikaudu väärtusel  $\eta \approx 2,82$ . Väikeste  $\eta$  väärtuste korral võib kasutada eksponentfunktsiooni reaksarenduse kahte esimest liiget:  $e^{\eta} \approx 1 + \eta$ .

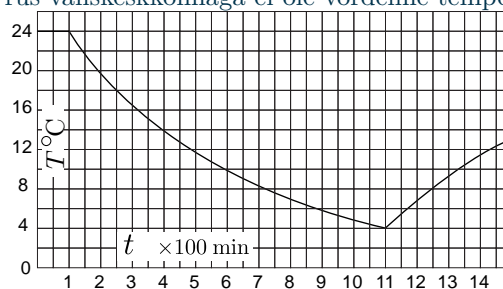
## Kordamisküsimused

**I 22.** Teatud ruumi köetakse sellise küttekehaga, mille võimsus sõltub ruumi temperatuurist nagu on näidatud graafikul. Kui välistemperatuur on  $T_1$ , siis ruumi temperatuur stabiliseerub  $T_2$  juures (need punktid on märgitud graafikul). Millise temperatuurini tõuseb toatemperatuur, kui välistemperatuur tõuseb  $T_3$ -ni (konstrueerida see punkt graafikul). Soojusvahetus keskkonnaga on võrdeline temperatuuride vahega.



**I 23.** Hõõglambile on kirjutatud 26 V ja 0,12 A. Külma volframhõõgniidi takistus  $R_0 = 24 \Omega$ . Hinnata, milline on hõõgniidi pikkus  $l$  ja diameeter  $d$  ning töörežiimi temperatuur  $T$ . Volframi eritakistus toatemperatuuril  $\rho_0 = 5,3 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Metalli eritakistus lugeda võrdeliseks absoluutse temperatuuriga. Temperatuuril  $T$  oleva keha soojuskiirguse võimsus pindalaühiku kohta on  $A\sigma T^4$ . Volframi puhul  $A = 0,5$ . Stefan-Boltzmani konstant  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ . Niidi soojuspaisumist mitte arvestada.

**I 24.** Külmade tõttu läks küttesüsteem rikki ja temperatuur toas hakkas langema. ühel hetkel pandi tööle ajas muutumatu võimsusega töötav soojapuhur ning temperatuur toas hakkas taas tõusma. Graafikul on toodud toatemperatuuri sõltuvus ajast. Leidke toatemperatuur pika aja möödumisel. Protsessi vältel välistingimused ei muutunud. Seinte ja toas olevate esemete soojusmahtuvusega mitte arvestada. Soojusvahetuse kiirus väliskeskkonnaga ei ole võrdeline temperatuuride vahega.



**I 25.** Isoleeritud silindrilises anumab vabalt liikuva koormise all on vesinik ja heelium, mis on teineteisest eraldatud vabalt liikuva ja aeglaselt soojust juhtiva õhukese vaheseinaga (vt joonis). Alguses on gaaside temperatuurid võrdsed, seejuures vesinik hõlmab heeliumist 3 korda väiksema ruumala. Vesinikule anti teatud soojushulk, mille tulemusena nihkus koormis  $d_1 = 5,5 \text{ cm}$  võrra ülespoole. Pika aja möödudes täheldati, et koormis nihkus veel. Mis suunas ja kui palju see nihkus? Gaasid lugeda ideaalseteks. Vesiniku soojusmahtuvus konstantsel rõhul on  $C_{PH_2} = 7/2R$  ning heeliumil  $C_{PHe} = 5/2R$ .

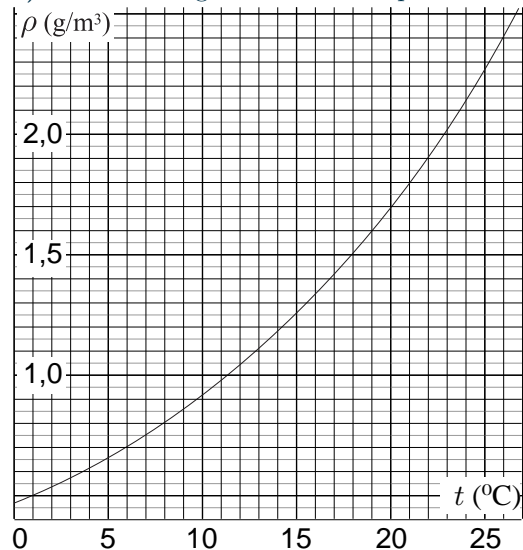
**I 26.** Laialtlevinud arvamuse kohaselt on kasulik pesu kuivatamise ajal akent lahti hoida isegi siis, kui väljas on suhteline õhuniiskus 100%, sest tuppa tulnud välisõhu temperatuur tõuseb ning suhteline niiskus langeb. Vaatleme, kas see arutluskäik

kehtib ka siis, kui toas on küte välja lülitatud.

Oletagem, et toas segunevad  $V_1 = 20 \text{ m}^3$  toaõhku temperatuuril  $t_1 = 25 \text{ °C}$  ja  $V_2 = 10 \text{ m}^3$  välisõhku temperatuuril  $t_2 = 1 \text{ °C}$ . Õhu erisoojus (konstantsel rõhul)  $c_p = 1005 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  lugeda vaadeldavas temperatuurivahemikus konstantseks, soojusvahetus väliskeskkonnaga lugeda tühiseks. Esiialgu ignoreerida võimalust, et osa veeaurust võiks kondenseeruda. Lugeda, et kõik alljärgnevad protsessid toimuvad normaalse õhurõhu  $p_0$  juures.

a) Tõestage, et õhu segunemisel summaarne ruumala ei muutu, st et külma ja sooja õhu segu ruumala  $V = V_1 + V_2$ .

b) Milline on segunenud õhu temperatuur  $T$ ?



c) Juuresoleval graafikul on toodud küllastunud veeauru tiheduse sõltuvus temperatuurist. Enne segunemist oli nii toaku välisõhu suhteline niiskus 100%. Milline on segunenud õhu suhteline niiskus  $r$  (kui see peaks suurenema, siis oletagem, et alguses moodustub üleküllastunud aur, st  $r > 100\%$ )?

d) Kui saite tulemuseks  $r > 100\%$ , siis üleküllastunud aur laguneb kiiresti ning tekib udu. Milline on sellisel juhul uduks kondenseeruva vee mass  $m$ ? Õhu tiheduseks võite võtta  $\rho_0 = 1,189 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ; vee aurustumissoojus  $q = 2500 \text{ kJ}/\text{kg}$ .

**I 27.** Silindriline anum, mille telg on vertikaalne, sisaldab termodünaamilises tasakaalus olevat molekulaarset gaasi. Silindri ülemiseks põhjaks on silindris vabalt liikuv klaasplaat. Me eeldame, et puudub gaasi leke ja hõõrdumine klaasplaadi ja silindri seina vahel on piisav võnkumiste summutamiseks kuid ei põhjusta arvestamisväärset energiakadu. Algselt on gaas ümbritseva keskkonna temperatuuril. Gaasi võib heas lähenduses vaadelda ideaalsena. Eeldame, et silindri seinad (alused kaasa arvatud) on väga halva soojusjuhtivuse ja väga väikese soojusmahtuvusega. Seetõttu on soojusvahetus gaasi ja keskkonna vahel väga aeglane ja seda pole ülesande lahendamisel vaja arvestada.

Läbi klaasplaadi suunatakse silindrisse konstantse intensiivsusega laserkiirgus, mis läbib kadudeta õhku ja klaasplaati kuid neeldub täielikult silindris olevas gaasis. Laserkiirguse neeldumise tõttu lähevad molekulid ergastatud seisundisse. Sellest seisundist lähevad molekulid infrapunast kiirgust kiirates kiiresti tagasi põhiseisundisse. Infrapunast kiirgust neelavad omakorda teised molekulid; silindri seinad (klaasplaat kaasa arvatud) peegeldavad aga selle täielikult tagasi. Laserkiirguse energia

muundub seega väga lühikese ajaga soojusliikumise energiaks (molekulaarne kaos) ja säilib sellisena gaasis piisavalt kaua. Sellise kiiritamise tagajärjel kerkib klaasplaat ülespoole. Mõne aja pärast lülitame me laseri välja ja mõõdame selle nihke.

a) Kasutades küsimustiku järel toodud andmeid ja vajadusel ka andmeid füüsikaliste konstantide tabelist, leidke gaasi temperatuur ja rõhk pärast kiiritamist.

b) Leidke kiiritamise tagajärjel gaasi poolt tehtud mehaaniline töö.

c) Leidke protsessi käigus neeldunud kiirgusenergia.

d) Leidke laseri kiirgusvõimsus ning sellele vastav footonite arv (ja seega elementaarsete neeldumisaktide arv) ajaühikus.

e) Leidke optilise energia klaasplaadi mehhaaniliseks potentsiaalseks energiaks konverteerimise protsessi kasutegur.

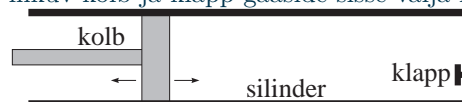
Seejärel pööratakse silindri telge aeglaselt  $90^\circ$  võrra viies ta horisontaalseks. Soojusvahetust gaasi ja anuma vahel pole vaja arvestada.

f) Kas gaasi rõhk ja/või temperatuur muutub sellise pööramise tagajärjel ja kui, siis millised on nende suuruste uued väärtused.

*Andmed:* õhurõhk toas  $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ ; ruumi temperatuur:  $T_0 = 20,0 \text{ °C}$ ; silindri sisemine diameeter:  $2r = 100 \text{ mm}$ ; klaasplaadi mass:  $m = 800 \text{ g}$ ; silindris asuva gaasi kogus:  $n = 0,100 \text{ mol}$ ; ühe mooli gaasi soojusmahtuvus konstantse ruumala juures:  $c_V = 20,8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ; laseri kiirguse lainepikkus:  $l = 514 \text{ nm}$ ; kiiritamise kestus:  $\Delta t = 10,0 \text{ s}$ ; liikuva klaasplaadi nihe peale kiiritusprotsessi lõppu:  $\Delta s = 30,0 \text{ mm}$ .

**I 28.** Autokummi pumbatakse käsipumbaga; manomeeter näitab sise- ja välisrõhu vaheks  $p_1 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ , välisrõhk  $p_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Leidke, millise temperatuuriga õhk surutakse läbi ventiili kummi sisemusse. Lugeda, et kui õhk on just pumba imetud, siis pumba sisemuses õhu rõhk võrdub välisrõhuga ning temperatuur välisõhu temperatuuriga  $T = 20 \text{ °C}$ . Eeldada, et õhu kokku surumisel pumbas soojusvahetust ümbritseva keskkonnaga ei toimu ning kogu tehtud töö läheb õhu siseenergia suurendamiseks. Sellisel juhul kehtib seos  $pV^\gamma = \text{Const.}$ , kus astmenäitaja  $\gamma = \frac{7}{5}$ . Rõhu langus avanenud ventiilil on tühine.

**I 29.** Auto bensiinimootori põhiosadeks on silinder, selle sees liikuv kolb ja klapp gaaside sisse-välja laskmiseks.



Mootori töötsükkel koosneb neljast taktist:

I. *Sisselase:* kolb liigub äärmisest parempoolsest asendist vasakule; silindri sisemus täitub läbi avatud klapi tuleva värske õhuga.

II. *Surve:* klapp suletakse, kolb liigub tagasi paremale surudes õhu adiabaatiliselt kokku.

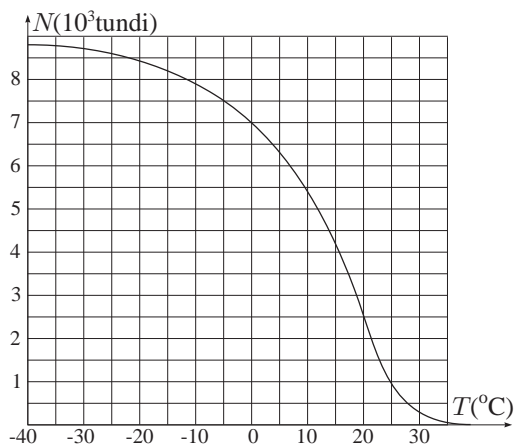
III. *Töö:* silindrisse pihustatakse kütust ja see süüdatakse. Võite lugeda, et kütus põleb hetkeliselt ära. Gaas surub adiabaatiliselt paisudes kolvi äärmisse vasakpoolsesse asendisse.

IV. *Väljalase:* klapp avatakse, kolb liigub paremale ja surub silindri gaasidest tühjaks. Järgneb uus sisselase jne.

a) Joonistage kogu tsükkel  $p - V$  teljestikus, selgitage graafiku osasid.

b) Leidke kasutegur  $\eta$ .

*Lisaandmeid.* Adiabaatilise protsessi korral  $TV^{\gamma-1} = \text{Const}$ . Õhu puhul on adiabaadinäitaja  $\gamma = 1,4$ . Silindri suurima ja vähima ruumala suhet  $k = V_s/V_v$  nimetatakse surveastmeks; lugeda, et  $k = 10$ . Hõõrdumist gaasi voolamisel ja kolvi liikumisel mitte arvestada. Lugeda, et gaasi kogus (so molekulide arv) kütuse sissepritsimise ja põlemise tulemusel ei muutu. Õhu vaadelge kui ideaalset gaasi, mille ühe mooli siseenergia on  $U = c_V T$ , kus  $c_V$  on tema erisoojus konstantse ruumala puhul.



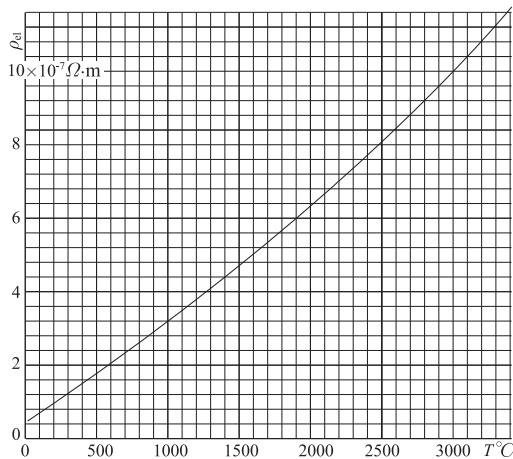
**I 30.** Arhiivihoidlas peab alati olema konstantne temperatuur  $15^\circ\text{C}$ . Millised on aasta kohta tulevad küttekulutused selle temperatuuri hoidmiseks, kui soojuskaod ajaühikus läbi seinte on antud valemiga  $P = C\Delta T$ , kus  $C = 200\text{ W/K}$  ja  $\Delta T$  on sise- ja välistemperatuuri vahe. Temperatuuri hoidmiseks kasutatakse soojuspumpa/konditsioneer; ruumi jahutamisel on selle kasutegur  $\eta_j = 10$  (jahutusvõimsuse ja elektrienergia kulu suhe), soojendamisel aga  $\eta_s = 6$  (ruumi soojendamise võimsuse ja elektrienergia kulu suhe). Juuresolev  $N - T$ -graafik näitab, mitu tundi ( $N$ ) aastas on õhutemperatuur kõrgem, kui  $T$ . Elektrienergia tariifiks võtta 92 senti kWh kohta.

meid huvitavas temperatuuride vahemikus konstantseks.

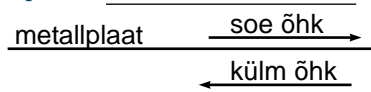
**I 31.** Halogeenlambi pirni hõõgniit on tehtud volframtraadist. Temperatuuri  $T_0 = 3200^\circ\text{C}$  juures on volframi tihedus  $\rho = 18200\text{ kg/m}^3$ , erisoojus  $c = 235\text{ J/(K}\cdot\text{kg)}$  ja eritakistus  $\rho_{el} = 9,95 \times 10^{-7}\Omega \cdot \text{m}$  ning antud pirni hõõgniidi pikkus  $l = 5,0\text{ cm}$ . Pirnile rakendatakse hüppeliselt muutuv pingeline, vt joonis. Hõõgniit saavutab töötemperatuuri  $T = 3200^\circ\text{C}$  (täpsustus: niidi pinnakihid on sisemusest veidi jahedamad, sestap räägime siin ja edaspidi niidi keskmisest temperatuurist).

a) Pirnile rakendatakse (nominaalpingest väiksem) alalispinge  $U_0 = 3\text{ V}$ . Kui kaua võtab aega, et hõõgniidi temperatuur tõuseks  $T_0$  juurest  $T_1 = 40^\circ\text{C}$ -ni?

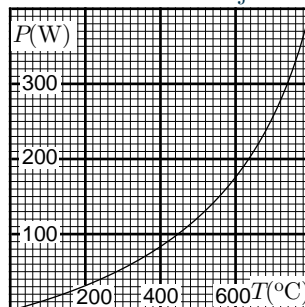
b) Pirnile lülitatakse kogemata liiga suur alalispinge  $U_1 = 120\text{ V}$ . Kui kaua võtab aega volframi sulamistemperatuuri  $T_2 = 3410^\circ\text{C}$  saavutamiseks? Soojuskaod lugeda tühiseks. Kasutage juuresolevat graafikut, kus on toodud volframi eritakistuse sõltuvus temperatuurist.



**I 32.** a) Vaatleme maja ventileerimissüsteemi lihtsustatud mudelit, mis kasutab passiivset soojusvahetit. Soojusvaheti koosneb metallplaadist pikkusega  $x$  ja laiusel  $y$  ning paksusega  $d$ , mis jagab õhukanali kaheks pooleks: ühes liigub sisse tulev õhk, teises — välja minev. Mõlema kanali paksus on  $h$ , õhuvoolu kiirus on  $v$  vt joonis. Metall soojusjuhtivus on  $\sigma$  (metallplaadi pindalaühikut ajaühikus läbiv soojusvoog juhul, kui temperatuur langeb ühe kraadi võrra ühe paksusühiku kohta). Õhu erisoojus konstantsel rõhul on  $c_p$ , õhu tihedus on  $\rho$  (ignoreerida selle sõltuvust temperatuurist). Võite eeldada, et õhk kanalis seguneb turbulentselt, nõnda et nii siseneva kui ka väljuva õhu temperatuurid  $T_{in}$  ja  $T_{out}$  sõltuvad ainult  $x$ -koordinaadist ( $x$ -telg on võetud voolu kiirusvektoriga paralleelseks), st  $T_{in} \equiv T_{in}(x)$  ja  $T_{out} \equiv T_{out}(x)$ . Eeldades, et sise- ja välistemperatuurid on vastavalt  $T_0$  ja  $T_1$ , leidke tupp siseneva õhu temperatuur  $T_2$ .



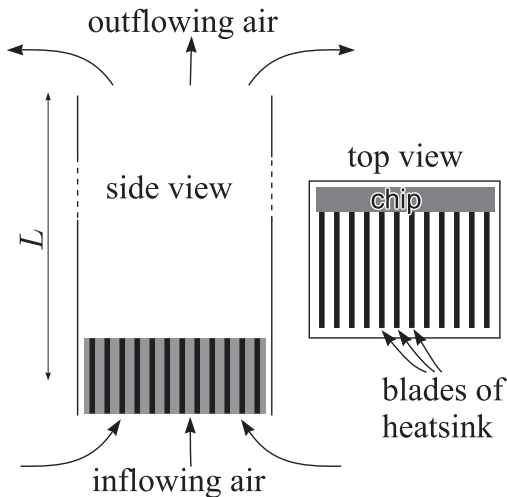
b) Juuresoleval graafikul on toodud elektrisoojendi kütetraadi soojusvahetusvõimsuse  $P$  sõltuvus traadi temperatuurist  $T$  (eeldusel, et toa temperatuur on  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ). Kütetraadi töötemperatuur on  $T_1 = 800^\circ\text{C}$ . Soojendi lülitatakse välja; leida, millise ajavahemiku jooksul jõuab traat jahtuda temperatuuri  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ . Traadi soojusmahtuvus on  $C = 10\text{ J/K}$ .



**I 33.** Vaatleme passiivset õhkjahutussüsteemi, mis on kujutatud joonisel. Külm õhk (normaaltingimustel:  $p_0 = 10^5\text{ Pa}$ ,  $T_0 = 293\text{ K}$ ) voolab üle kiibi jahutusribide ja siseneb vertikaalsesse torru pikkusega  $L = 1\text{ m}$  ning ristlõikepindalaga  $S = 25\text{ cm}^2$ . Kiibi soojuseraldusvõimsus  $P = 100\text{ W}$ . Toru läbimise järel siseneb õhk ümbritsevasse ruumi. Eeldada, et torus voolav õhk seguneb kiiresti; torus ja ribide vahel voolava õhu viskoosne ja turbulentsne hõõre lugeda tühiseks. Õhk lugeda ideaalseks gaasiks adiabaadinäitajaga  $\gamma = 1,4$



ja molaarmassiga  $\mu = 29 \text{ g/mol}$ . Universaalne gaasikonstant  $R = 8,31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ .



a) Avaldage õhu soojusmahtuvus konstantsel rõhul  $c_p$  suuruste  $\gamma$  ja  $R$  abil (1 pt).

b) Leidke seos väljavoolava õhu tiheduse  $\rho$  ja temperatuuri  $T$  vahel (see seos võib sisaldada ka eelpooldefineeritud algandmeid) (2 p).

c) Leidke seos suuruste  $v$  ja  $\rho$  vahel, kus  $v$  on õhu voolukiirus torus ja  $\rho$  — väljavoolava õhu tihedus (see seos võib sisaldada ka eelpooldefineeritud algandmeid) (2 p).

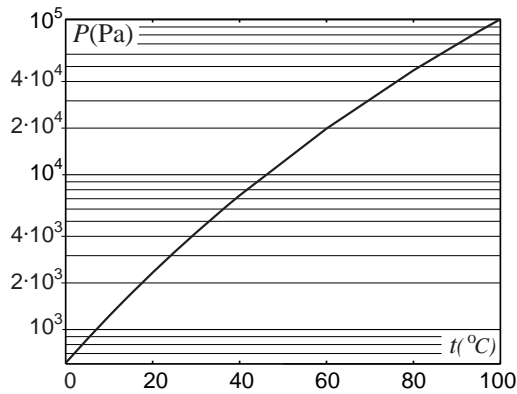
d) Avaldage soojuseraldusvõimsus  $P$  suuruste  $v$ ,  $T$  ja  $\rho$  abil (see seos võib sisaldada ka eelpooldefineeritud algandmeid) (2 p).

e) Milline on väljavoolava õhu temperatuur  $T$ ? Oma arvutustes võite kasutada lähendust  $T - T_0 \ll T_0$  (2 p).

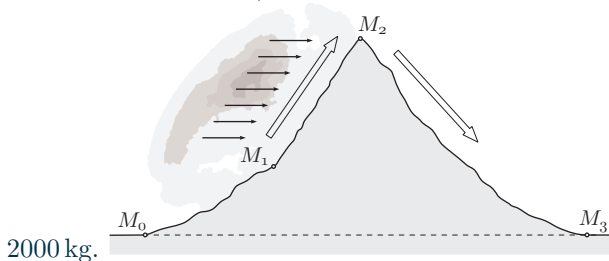
**I 34.** Kinnises paksude seintega anumus on glütseriin. Glütseriinis on õhumull ruumalaga  $w = 1 \text{ ml}$ . Temperatuuril  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  on rõhk anumus  $p_0 = 1 \text{ atm}$ . Anuma ruumala  $V = 1 \text{ l}$  ja materjali joonpaisumistegur on tühiselt väike. Glütseriini ruumpaisumistegur  $\alpha = 5,1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  (ruumpaisumistegur kirjeldab ruumala suhtelist suurenemist temperatuuri tõusmisel  $1 \text{ K}$  võrra). Õhk lugeda ideaalseks gaasiks. a) Leidke rõhu sõltuvus temperatuurist.

b) Millistel temperatuuridel ja millistel füüsikalistel põhjustel valem enam ei kehti?

**I 35.** Mahlapurki pastöriseeritakse  $t_1 = 80^\circ\text{C}$  juures nii, et purgikaas lebab vabalt purgi suu peal. Seejärel keeratakse kaas kõvasti kinni ning lastakse purgil jahtuda toatemperatuurini  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ . Milline on purgi kaane alune rõhk peale jahtumist? Mahl lugeda füüsikaliste omaduste poolest identseks veega, küllastunud veeauru rõhu sõltuvus temperatuurist on toodud juuresoleval graafikul. Õhurõhk  $P_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .



**I 36.** Üle mäeaheliku voolab adiabaatiliselt õhk, mis on niiske (vt joonis). Meteoroloogiajaamad  $M_0$  ja  $M_3$  mõõdavad õhurõhuks  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ , jaam  $M_2$  aga  $p_2 = 70 \text{ kPa}$ . Õhu temperatuur punktis  $M_0$  on  $t_0 = +20^\circ\text{C}$ . Õhumassi kerkides algab rõhu  $p_0 = 84,5 \text{ kPa}$  juures pilvede moodustumine. Edasi kulub õhumassil mäeharjani (jaamani  $M_2$ ) jõudmiseks aega  $1500 \text{ s}$  ning lõppkokkuvõttes sadeneb igast kilogrammist õhust sademete (vihma) näol välja  $m = 2,45 \text{ g}$  vett. Iga ruutmeetri kohal on sellist niisket õhku, kus toimub vee kondenseerumine kokku



a) Leidke õhu temperatuur  $T_1$  pilvede alumise piiri juures.

b) Millisel kõrgusel  $h_1$  jaamast  $M_0$  asub pilvede alumine piir, kui eeldada, et õhu tihedus väheneb kõrguse kasvades lineaarselt?

c) Milline on temperatuur  $T_3$  mäe harja juures?

d) Milline sademetehulk pindalaühiku kohta sajab maha kolme tunni jooksul? Vastus andke veekihi paksusena millimeetrites. Kondenseerumistingimused lugeda ühesuguseks üle kogu mäenõlva, punktist  $M_1$  kuni punktini  $M_2$ .

e) Milline on õhutemperatuur teisel pool mäeahelikku jaamas  $M_3$ ? Mille poolest erineb õhu olek jaamas  $M_3$  tema olekust jaamas  $M_0$ ?

**Juhtnõore ja arvandmeid.** Õhku võib vaadelda ideaalse gaasina; veeauru mõju õhu tihedusele ja erisoojusele ning aurustumissoojuse sõltuvust temperatuurist ignoreerida. Temperatuurid leida täpsusega  $1 \text{ K}$ , pilvede alumise piiri kõrgus —  $10 \text{ m}$ , sademete hulk —  $0,1 \text{ mm}$ . Õhu erisoojus meid huvitavas temperatuurivahemikus on  $c_p = 1005 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ; õhu tihedus jaama  $M_0$  juures rõhul  $p_0$  ja temperatuuril  $t_0$  on  $\rho_0 = 1,189 \text{ kg/m}^3$ ; vee aurustumissoojus pilvede piirkonnas on  $q_V = 2500 \text{ kJ/kg}$ ; adiabaadinäitaja  $\gamma = c_p/c_V = 1,4$ ; vabalangemiskiirendus  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**I 37.** Ulmeromaanis kirjeldatakse järgmist olukorda. Kosmoselaeval toimub avariid ja astronaut osutub olevaks avakosmoses, kaugusel  $L = 100 \text{ m}$  kosmoselaevast. Tal on juhtumisi käes klaas tahkestunud veega (jääga), ja ta kasutab jää sublimeerumisel (aurustumisel) tekkivat reaktiivjõudu selleks,

et naasta kosmoselaevale. Hinnake, kui realistlik see projekt. Võite eeldada, et sublimatsioon toimub konstantsel temperatuuril  $T = 272\text{ K}$ , mille juures küllastunud veeauru rõhk  $P = 550\text{ Pa}$ . Klaasi mõõte ja vee massi hinnake ise.