

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

Biomehaanika

(Sissejuhatavad loengud — mehaanika)

Tallinn 2011

Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Mis on biomehaanika

Biomehaanika — mehaanika printsiipide ja seaduste rakendamine bioloogias

- inimesed, loomad, taimed, organid, rakud

Biomehaanika uurib bioloogiliste süsteemide ehitust ja funktsioone mehaanika meetoditega.

Tihe seos füüsika ja inseneriteadustega (tehnikateadustega).

- Pideva keskkonna mehaanika, staatika, kinemaatika, dünaamika, mehansmi-
de teooria, tugevusõpetus ja ehitusmehaanika, elastsusteooria, purunemis-
mehaanika, hüdro- ja aeromehaanika, arvutusmehaanika jne., jne.

Tavaliselt osutuvad bioloogilised süsteemid keerukamateks kui tehissüsteemid.

1.2 Biomehanika ajaloost ja rakendustest

- Aristoteles — jäsemetele mõjuvad jõud, hüdro- ja aerodünaamika: linnud, putukad, kalad
- Leonardo da Vinci
 - Uuris anatoomiat mehaanika võtmes: lihaste jõud näiteks
 - Biomimeemika alged — lendamine
 - Hobused, nende rakmed ja (töö)riistad — et nende jõud oleks otstarbe-
kannalt kasutatud

1.2. Biomehanika ajaloost ja rakendustest

- Galileo Galilei
 - luude tugevus — õõnes konstruktsioon: maksimaalne tugevus minimaal-
se kaaluga
 - Loomade suuruse, kaalu ja luustiku seosed
- René Descartes
- Robert Hooke
- Isaac Newton
- Leonhard Euler
- Herrmann von Helmholtz
- jpt

vt ajaloolist joonist

Rakendused (mõned)

- Sügavam arusaamine elusate organismide, organite ja kudede füsioloogilisest käitumisest — rakendatav alates meditsiinist kuni kunstmaterajlide või tehisorganite (k.a. proteesid) ja tehisorganismide (bioinspireeritud robotid) loomise ja tootmiseni.
- Sport — paremad tulemused, vähem vigastusi.

1.3 Biomehaanika harud

Taimede biomehaanika —

biomehaanika rakendamine taimedele ja nende organitele, k.a. taimede kasvatamine

Sporidi biomehaanika —

biomehaanika rakendamine eesmärgiga saada paremaid sporditulemusi ja vähendada seejuures vigastuste ohtu.

- Meetodid: (inseneri) mehaanika, elektriinseneridelt (signaalitötlus), arvutiteadus, informaatika ja matemaatika (andmetötlus, visualiseerimi-

1.3. Biomehaanika harud

1 - 6

ne, võrrandite alhendamine jms), kliiniline neurofüsioloogia (närvid, närvisignaalid), jne.

Pideva keskkonna biomehaanika —

mitmel tasandil alates molekulaarsest kuni kudede ja organite tasemeni.

- Tavaliselt modelleeritakse elavaid kudesid kui pidevat keskkonda.
 - Organite erinevad koed omavad väga erinevaid mehaanikalisi (ja muid) omadusi
 - Keerulisem olukord kui tavaliste tehnika- ehk inseneriülesannete korral
 - nahk, luud, veresooned *vrs* metall, puit, laminaadid jne. (vt. joonist)
- Rakendatud koormused võivad elusate kudede omadusi muuta (I.K. remodelling):
 - vererõhu mõju arteri seinale
 - luude kasvatamine seoses rakendatud koormustega
 - taimede erinev kasvatamine sõltuvalt tuulest

- Piirid: uuritav pikkusskala peab erinema (olema suurem) vtl. koe mikrostruktuurist

Koordinaadid

- Tahkised — Lagrange'i ehk materiaalsed koordinaadid
- Vedelikud — Euleri ehk ruumi(lised) koordinaadid

Tensorid

- Pingetensorid — tegelik pinge, tinglik- ehk pseudopinge
- Deformatsioonitensorid:
 - (lõpmata) väikesed deformatsioonid — lineaarsed
 - suure (lõplikud) deformatsioonid — mittelineaarsed

1.3. Biomehaanika harud

Pideva keskkonna põhiseadused ehk aksioomid —

Jäävusseadused ehk tasakaalu seadused

- liikumishulga ehk impulsi jäävuse seadus ehk liikumishulga teoreem — conservation of linear momentum
- kineetilise momendi ehk pöördimpulsi ehk impulsi momendi jäävuse seadus ehk kineetilise momendi teoreem — conservation of angular momentum
- massi jäävuse seadus — conservation of mass
- energia jäävuse seadus — conservation of energy
- entroopia võrratus — the entropy inequality

Liikumisvõrrandid (tasakaaluvõrrandid):

- Euleri liikumisvõrrandid
- Chauchy liikumisvõrrandid

Olekuvõrrandid:

- lineaarsed (näteks Hooke'i seadus)
- mittelineaarsed

Pidevusvõrrandid — siirete ja deformatsioonide vahelised seosed.

Kahest (kolmest) viimast kokku — konkreetsetele keskkondadele (materjalidele) ja konkreetsetele ülesannetele vastavad võrrandid

- Navier-Stokesi võrrandid (vedelikud)

$$\rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_k v_l \right) = \rho f_k - p_{,k} + \mu v_{k,ll}$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

*1.3. Biomehaanika harud**1 - 10*

Kui kasutada nn. klassikalist DRK tähistust (koordinaadid x, y, z , massijõud

$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, ja kiirus $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{array} \right. \quad (1.11)$$

- Navier' võrrandid (tahkised)
- jne.

Laud — tildjuhul suhteliselt kõvad — deformatsioonid on väikesed — Hooke'i seadus: lineaarsed seosed pingete ja deformatsioonide vahel, näiteks $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$.

Pehmed koed

- Laias laastus praktiliselt kõik mis pole luu — nahk, lihased, kiud, kõõlused, rasv, kiled (membraanid), närvid, veresooned —
 - kollageen — valk, mis moodustab loomsete sidekudede (nahk, luud, kõõlused) põhimassi, Inimeses 25-33% valkude massist.
 - elastin — tugivalk, mis annab elunditele elastsuse — kõõlused, veresoonte seinad, bronhid jms.
- *Lihased* — liigutusi sooritavad organid — kolm tüüpi (vt. jooniseid)
 - Skeletilihased — seotud skeletiga — tahte alluvad
 - Südamelihased — tahte allumatud — vere pumpamine sünnisõlme sig-naalidele vastavalt
 - Silelihased — tahte allumatud — enamus on (õõnes)organite (k.a. arterid, aordid, hingamisteed jms.) seintes, mõned iseseisvalt, näiteks pillihendajad või karvapüstirajad lihased)

1.3. Biomehaanika harud

1 - 12

- *Viskoelastsus* (vt joonist)
 - Energia dissipatsioon — hüstereetiline käitumine, st. materjal käitub koormamisel ja koormuse maha võtmisel (lossimisel) erinevalt.
 - Mõnedel juhtudel võib pinge sõltuda ka deformatsioonikiirusest — mõned autorid nimetavad neid materjale pseudoelastseteks materjali-deks
 - Paljud sellised materjalid (koed) on modelleeritavad kui hüperelastsed
 - * hüperelastne ehk Greeni materjal on ideaalselt elastne materjal, mille korral pinge sõltub deformatsioonienergia tihedusest; teisisõnu, pingete ja deformatsioonide vaheline seos tuletatakse deformatsiooni-energia funktsioonist

- *Lineaarne vrs mittelineaarne*

- Hooke'i seadus — lineaarne — luud
- Pehmed koed — enamasti on nende käitumine mittelineaarne
- Mittelineaarsed pole mitte üksnes materjalide omadused, vaid mitteli-nearsus tuleb ülesannetesse ka (väga) suurtest deformatsioonidest, mis võivad ulatuda üle 100%

Mida tuleb veel tunda ja arvesse võtta

- Teisi teadusi (peale mehaanika)
 - Keemia
 - Fisioloogia
 - Molekulaarbioloogia
 - Rakubioloogia
 - Biokeemia
 - Jne. Jne.

Näiteks: lihaste kokkutõmme — energia — biokeemilised reaktsioonid: kaltsiumi ioonid, ATP, ADP jne

- Materjalide anisotroopia ja mittehomogeensus, näiteks luud

1.3. Biomehaanika harud

1 - 14

Võrdlev biomehaanika

- Urrib näiteks loomade liikumist — jooksmine, hüppamine, lendamine, ujumine
 - Vaja energiat, et ületada hõõret, (õhu või vee) takistust, inertsi, gravitatsiooni jms mõjud
- Võrdlev biomehaanika kattub paljude teiste teadus harudega
- Teda rakendatakse näit. meditsiinis (loomkatseted) ja biomimeetikas (looduse järelaimamine)

Biovedelike mehaanika

- *Veri* — enamusel juhtudel saab vere voolamist modelleerida Navier'-Stokesi võrranditega, eeldades, et tegu on kokkusurumatu Newtoni vedelikuga.
- Kui aga veresoone läbimõõt saab võrreldavaks vereliblede mõõtudega, siis tuleb rakendada muid mudelid (vt. joonist).

Biotribooloogia

- Hõõre, kulumine, määrimine (õlitamine, piltlikult öeldes) — eeskätt just liigestes

1.4 Uurimismetoodika

Vastavalt Y. C. Fungile peaks biomehaanika probleemide lahendamise toimuma järgmise skeemi põhjal:

1. Tuleb uurida organismi morfoloogiat (välisehitust), organi anatoomiat, koe histoloogiat jne, et saada teada uurimisobjekti geomeetriline konfiguratsioon.
 2. Määrata uuritavate materjalide või kudede mehaanikalised omadused. See võib osutuda suhetelisel keerukaks. Probleemid:
 - mõõtmed
 - koeproovi (katsekeha) isoleerimine
 - koe elusana hoidmine
 - suurte deformatsioonide teke — mittelineaarsed olekuvõrrandid
 3. Tuginedes mehaanika (füüsika) seadustele (jäävusseadused jms.) ja olekuvõrranditele tuleb uuritavat nähtust või protsessi kirjeldavad võrrandid (i.k. governing equations) — tavaliselt differentsiaal või integraalvõrrandid
-
- 1.4. Uurimismetoodika 1 - 16
4. Rajatüüpide määramiseks teha kindlaks, millises keskkonnas uuritav organism (või organism) töötab
 5. Lahendada saadud rajatüüpide kas analüütiliselt, numbriliselt või eksperimentaalselt
 6. Teostada (füsioloogiline) eksperiment, et kontrollida saadud rajatüüpide lahkendit. Vajadusel tuleb matemaatiline tüüp reformuleerida ja uuesti lahendada. Eesmärgiks peab olema teooria ja eksperimendi kokkulangevus — nad peavad lähtuma samadest hüpoteesidest ja kontrollima samu hüpoteese.
 7. Võrrelda eksperimentaalseid ja teoreetilisi tulemusi. Kui teoorias püstitatud hüpoteesid leiavad eksperimentaalselt kinnitust, siis saab määrata tundmatute olekuvõrrandi parameetrite arvulised väärtused.
 8. Selliselt kontrollitud (valideeritud) teooriat saab nüüd kasutada analoogiliste tüüpide lahendamiseks ja rakendada praktikas.

Peatükk 2

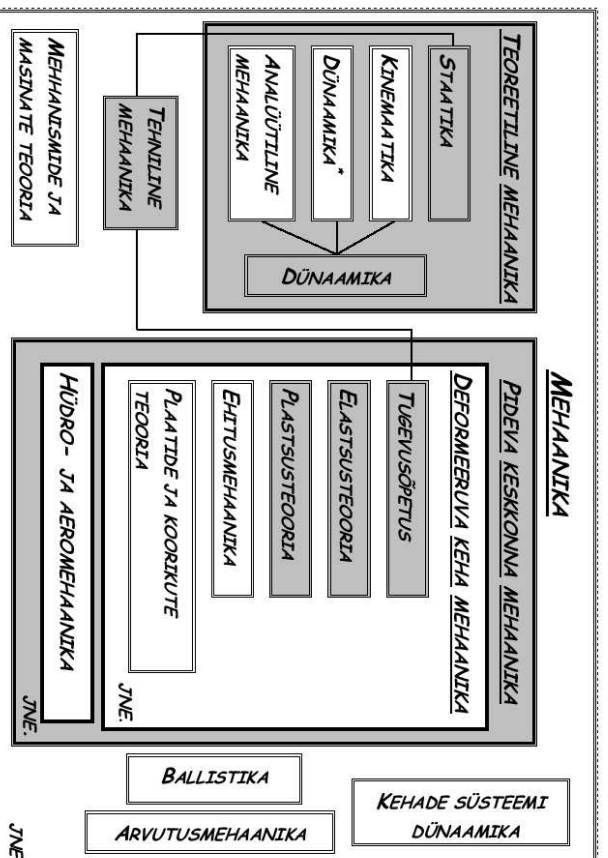
Ülevaade staatika, kinemaatika ja dünaamika põhimõistetest, hüpoteesidest ja võrranditest

2.1. Mehaanika harud

2 - 18

2.1 Mehaanika harud

Mehaanika on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joonis 2.1: Mehaanika harud

2.1.1 Jäiga keha mehaanika

Teoreetiline mehaanika ehk jäiga keha mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

Absoluutselt jäiga keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks*, *kinemaatikaks* ja *dünaamikaks*.

- *Staatika* uurib:
 1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja
 2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.
- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.

2.1. Mehaanika harud

2 - 20

Liikumisena ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem. Tulenust nimetatakse *taustsüsteemiks*.

Punktmassiks nimetatakse materiaalet keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

Aeg loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

2.1.2 Pideva keskkonna mehaanika

Pideva keskkonna mehaanika (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

Palju harusid

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika
 - tugevusõpetus
 - elastsusteooria

- plastusteooria
- jne.
- hüdro- ja aeromehaanika
 - hüdrostaatika
 - hüdrodünaamika
 - jne.

2.1.3 Muud harud

Pole ei puhtalt jäiga keha ega puhtalt pideva keskkonna mehaanika

- biomehaanika
- arvutusmehaanika
- kehade süsteemi mehaanika
- jne

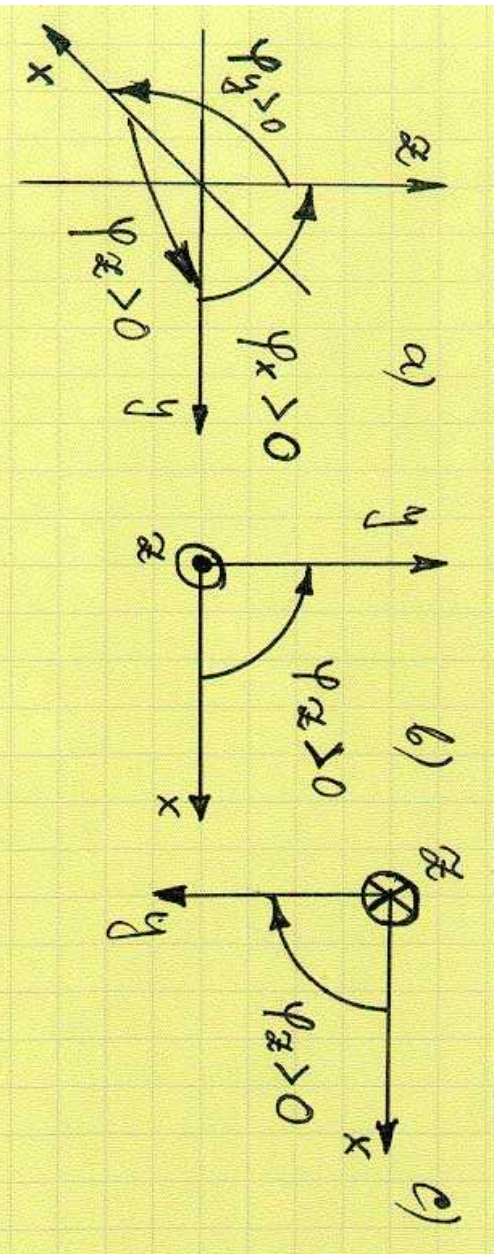
2.2. Staatika

2 - 22

2.2 Staatika

- Jäik keha
- Jõud
 - Kehade vastastikuse mõju mõõt
- Jõusüsteem
 - koonduv JS, paralleeljõudude süsteem, jne.
- Jõu moment, jõupaar
 - $M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- Jõu ja momenti projektioonid ning komponendid
 - $\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$

Koordinaadid ja koordinaatteljed



- Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)
- *Koordinaatteljed peavad moodustama parema käe kolmniku*
- Ümber telje toimuva *pöörde positiivne suund* määratakse kruvireeglga

2.2. Staatika

2 - 24

Vabaks kehaks nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

Side on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.

Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

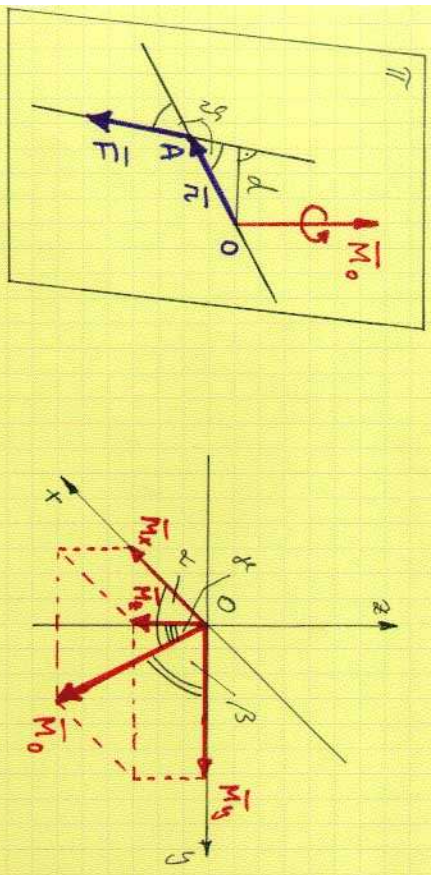
Sidemetest vabastatavuse printsiip: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

Sidemete tüübid: sile pind, kare pind, liikumatu liigend (tugi), liikuv liigend (tugi), kerge varras, painduv tihendus jne.

Jõu momentideks punkti suhtes nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti A kohavektori \mathbf{r} ja jõuvektori \mathbf{F} vektorikorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (2.1)$$

Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.



Joonis 2.2: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori \mathbf{M}_O suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti O valikust kuid ei sõltu punkti A valikust jõu mõjusirgel.

2.2. Staatika

2 - 26

Momentvektori \mathbf{M}_O mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud \mathbf{F} püüab tekitada pöörlemist.

Pöörde suund määratakse *kruvireeglaga* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

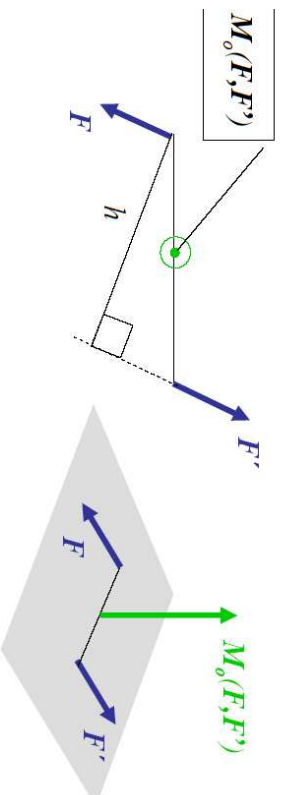
Jõu moment telje suhtes võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

- See on üldlevinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult võib ka jõu momenti telje suhtes käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valenmist $M = \pm Fd$, s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruvireeglga.

✓

Jõupaari moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ millel on erinev mõju-sirge.

Jõupaari moment võrdub tihed jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.



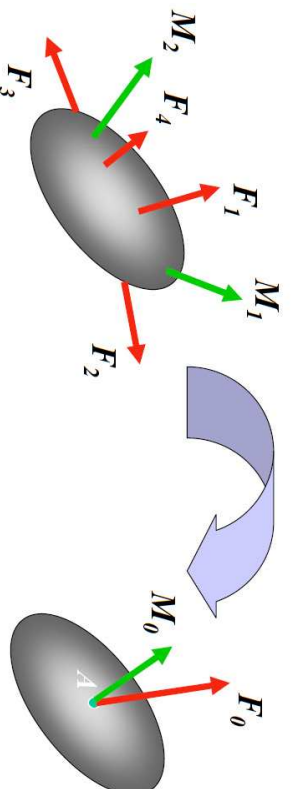
Jõupaari moment on *vabavektor*, mille moodul $M=Fh$, kus h on jõupaari õlg.

Joonis 2.3: Jõupaar ja jõupaari moment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetistist.)

Lemmas jõu paralleel liikkest. Jäiga keha mistahes punktis A rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti B kui lisada punktis A rakendatud jõu moment punktis B suhtes.

Staatika põhiteoreem (Poinsoi' teoreem): Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 2.4: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetistist.)

Jõusüsteemi peavektor: $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

Jõusüsteemi peamoment: $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$, kus punkti O nimetatakse *taandamistsentriks*. (Joonisel on kahjuks O asemel A .)

Jõusüsteem on *tasakaalus* parajasti siis kui peavektor \mathbf{F}_O ja mingi punkti O suhtes leitud peamoment \mathbf{M}_O on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (2.2)$$

Skalaarsed tasakaalu tingimused:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.3 Kinemaatika

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Liikumisena* ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes.
 - Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem.
 - Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.
- *Punktmassiks* nimetatakse materiaalsel keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.
 - Materiaalne punkt
- Liikumise kirjeldamiseks peab olema kokkulepe kuidas mõõdetakse aega
 - *Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides

- Punkti *trajektooriks* nimetatakse pidevat joont, mille joonistab liikuv punkt taustsüsteemi suhtes
- *Punkti liikumissaaduseks* nimetatakse eeskirja, mis määrab punkti asukoha igal ajahetkel.

— *Vektoriaalne viis.*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

— *Koordinaatviis.* — Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

— seos

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.3. Kinemaatika

2 - 32

- *Loomulik viis.* Punkti asukoht ruumis määratakse tema loomuliku koordinaadiga

$$s = s(t).$$
- seos

$$s = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

- *Punkti kiiruseks* nimetatakse tema kohavektori esimest tuletist aja järgi

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

- DRK

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

- *Kiirus on vektor*, mis
 - on suunatud pilki trajektoori puutujat liikumise suunas;
 - iseloomustab nii kohavektori pikkuse kui suuna muutumist.
- *Punkti kiirenduseks* nimetatakse kiirusvektori esimest tuletist aja järgi ehk tema kohavektori teist tuletist aja järgi.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

- DRK

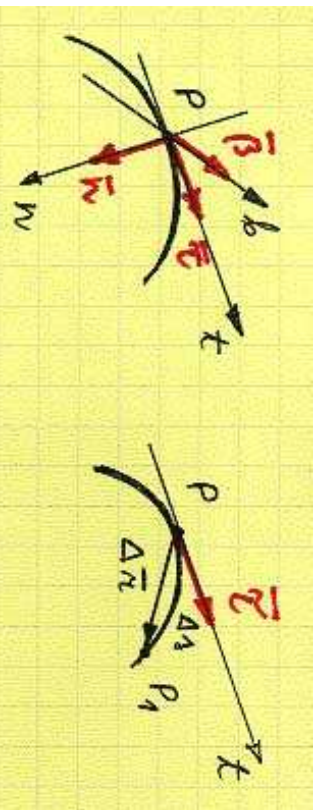
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

- *Kiirendus on vektor*, mis
 - on suunatud trajektoori sisse (v.a. sirgjooneline liikumine);
 - iseloomustab kiiruse muutumist (mii kiirusvektori pikkuse kui suuna muutumist).

2.3. Kinemaatika

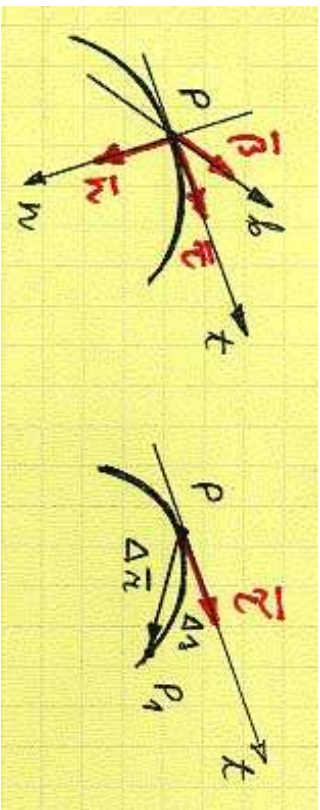
2 - 34

- *Loomulik teljestik*: parema käe teljestik $t - n - b$, mis liigub koos vaadeldava punktiga.



- telg t on puutuja, n peanormaali ja b binormaali sihis
- Vastavaid ühikvektoreid tähistame $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ ja $\boldsymbol{\beta}$.

- *Koordinaattasandid:*



- $t - n$ — kooldumistasand,
- $t - b$ — sirgestumistasand,
- $b - n$ — normaaltasand.

- *Kiirus*

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T}$$

2.3. Kinemaatika

- *Kiirendus*

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{v} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

- \mathbf{a}_t — *puutekiirendus ehk tangentsiaalkiirendus*
- \mathbf{a}_n — *normaalkiirendus*
- Vastavad projektsioonid

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}_t \quad \text{ja} \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

- $a_n = 0$!!!

- Puutekiirendus \mathbf{a}_t iseloomustab kiirusvektori mooduli muutumist
- Normaalkiirendus \mathbf{a}_n iseloomustab kiirusvektori suuna muutumist
- Kuna kiirenduse projektsioon b -teljel (binormaamil) on null, siis kiirenduse moodul

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Jäiga keha liikumise tüübid

- *Rööplikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul iga kehaga muutumatult seotud sirge jääb kogu liikumise kestel oma algsiluga paralleelseks
- *Pöörlemiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kaks kehaga muutumatult seotud punkti jäävad kogu liikumise kestel paigale
 - *Keha pöörlemisseaduseks* nimetatakse pöördenurga muutumise eeskirja $\varphi = \varphi(t)$
 - * Kui pöörlemine toimub ümber z telje, siis võib pöörlemisseaduse esitada kujul
$$\varphi = \varphi(t) = \varphi_z(t)\mathbf{k}$$
 - *Nurkkiiruseks* nimetatakse pöördenurga vektori esimest tuletist aja järgi:
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}.$$

2.3. Kinemaatika

- Nurkkiirus(vektor) $\boldsymbol{\omega}$ määrab
 - * pöörlemise suuna (läbi kruvireegli)
 - * pöörlemise kiiruse (rad/s ehk 1/s)
 - *Nurkkiirenduseks* nimetatakse nurkkiiruse vektori esimest tuletist aja järgi ehk pöördenurga vektori teist tuletist aja järgi:
$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\varphi}.$$
- Pöörleva keha punkti kiirus
$$\mathbf{v} = \omega_z h \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$
- kiiruse projektsioon loomulikul teljel t
$$v_t = \omega_z h = \dot{\varphi}_z h,$$
- kiiruse moodul
$$v = \omega h = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|.$$

– Pöörleva keha punkti kiirendus, puutekiirendus ja normaalkiirendus

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{cases}$$

– Vastavad moodulid

$$\begin{cases} a = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4 h}, \\ |a_t| = \alpha h, \\ a_n = \omega^2 h \end{cases}$$

2.3. Kinemaatika

2 - 40

- *Tasapinnaliseks liikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kõik keha punktid liiguvad tasapindades, mis on paralleelsed ühe paigalseisva tasapinnaga.
 - Tasapinnalise liikumise võib lahutada
 - * tasapinnaliseks rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja
 - * pöörlemiseks ümber selle pooluse (pöörlemiseks ümber seda poolust läbiiva ja vaadeldava tasandiga ristuva telje).
 - * Rööpliikumine sõltub pooluse valikust, pöörlemine aga mitte
 - $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$, $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$
 - Hetkeline kiiruste tšenter ja hetkeline kiirenduste tšenter

- *Liitliikumine* — vaadeldav keha liigub taustsüsteemis, mis omakorda liigub mingi teise (paigalseisva) taustsüsteemi suhtes
 - *Absoluutseks liikumiseks* nimetatakse punkti (keha) liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes
 - *Relatiivseks liikumiseks* nimetatakse punkti (keha) liikumist liikuva taustsüsteemi suhtes
 - *Kaasaliikumiseks* (ülekandeliikumiseks) nimetatakse liikuva taustsüsteemiga muutumatult seotud punktide liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes
- Absoluutne kiirus võrdub relatiivse kiiruse ja kaasaliikumise kiiruse geomeetrilise summaga

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e.$$
- Absoluutne kiirendus võrdub relatiivse kiirenduse, kaasaliikumise kiirenduse ja Coriolise kiirenduse geomeetrilise summaga

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C$$
- *Coriolise kiirendus*

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

2.3. Kinemaatika

2 - 42

- *Sfääriliseks liikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul üks kehaga muutumatult seotud punkt jääb liikumatuks.
 - Seda liikumatut punkti nimetatakse *kinemispunktiks*¹
 - Lõikuvate telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine
- *Vaba jäiga keha liikumine*
 - Vaba jäiga keha liikumine on lahutatav rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja pöördeks ümber poolust läbiiva pöörlemistelje

¹Jäiga keha liikumine kinemispunkti ümber

2.4 Dünaamika

- *Dünaamika (klassikalises mõttes)* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel
- Newtoni seadused
 - I — inertsiseadus
 - *Inerts*² on kehade võime püsida paigalseisus või ühtlases ja sirgjoonelises liikumises kuni mingi jõud seda olekut ei muuda.
 - * Keha inertsi mõõduks on tema *mass*
 - II — dünaamika põhiseadus: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
 - III — mõju ja vastumõju seadus

²kr. *inertia* - tegevusetus, loidus

Märkused:

- Newtoni seadused pole matemaatiliselt tõestatavad vaid nad põhinevad katsetel.
 - See annabki aluse nimetada neid ka aksioomideks.
 - Neile seadustele on tilsehitatud kogu klassikaline mehaanika (vastandina relativistlik mehaanika).
- Praktikas loetakse paigalseisvaks taustsüsteemiks tavaliselt Maaga seotud taustsüsteemi. Kui sellest ei piisa, seotakse liikumatu taustsüsteem Päikesega.
- *Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.
 - Newton: ”Seadused kehtivad absoluutses ajas, millel pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ja mis kulgeb ühtlaselt.”
 - Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel ikkagi mingist konkreetsest nähtusest (Maa pöörlemine, isotoobi ¹³³Cs kiirguse periood).

- Praktikas määratakse keha mass kaalumise teel:

$$m = \frac{P}{g}.$$

- Newtoni II seadus käsitleb juhtu, kus punktmassile mõjub vaid üks jõud.
 - *Jõudude mõju sõltumatuse printsiip*: Jõu mõju punktmassi liikumisele ei sõltu sellest, kas punktile on rakendatud peale tema veel teisi jõude või ei ole.

Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet

- Newtoni II seadus + jõudude mõju sõltumatuse printsiip

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

1. On antud punktmassi liikumisseadus. Leida millised punktmassile rakendatud jõud põhjustavad sellise liikumise!
 - diferentseerimine

2.4. Dünaamika

2. On teada punktmassile mõjuvad jõud. Leida selle punktmassi liikumisseadus!
 - integreerimine
- *Punktmasside mehaanikaliseks süsteemiks* nimetatakse sellist ükskeist mõjutavate punktmasside kogumit, kus iga punktmassi liikumine sõltub teiste punktmasside liikumisest ja asukohast.
 - päikesesüsteem, vedelikud, gaasid, tahked kehad jne.
 - Lihiduse mõttes jäetakse sõna mehaanikaline tihti ära ja piirduakse vaid terminiga punktmasside süsteem.
- *Välisjõud* on jõud, millega sellesse süsteemi mittekuuluvad kehad mõjutavad vaadeldava süsteemi punkte.
- *Sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist.
- Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude summa on null.
- Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude momentide summa mistahes punkti suhtes on null.

- *Punktmasside süsteemi mass*

$$m = \sum_i m_i$$

- *Punktmasside süsteemi masskese*

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m},$$

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}.$$

Masskeskme liikumise teoreem

- *Teoreem:* Punktmasside süsteemi masskese liigub nagu punktmass, mille mass võrdub süsteemi kogumassiga ja millele on rakendatud kõik sellele süsteemile mõjuvad välisjõud:

$$m\mathbf{a}_C = \sum_i \mathbf{F}_i$$

- DRK

$$m\ddot{x}_C = \sum_i F_{ix}, \quad m\ddot{y}_C = \sum_i F_{iy}, \quad m\ddot{z}_C = \sum_i F_{iz}$$

- $\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_C = 0, \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0$ jne.

Liikumishulks

- *Punktmasside süsteemi liikumishulgak*³ nimetatakse süsteemi kõigi punkti-
de liikumishulcade geometrilist summat —

$$\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i = m \mathbf{V}_C.$$

- $m_i \mathbf{V}_i$ — i -nda punktmassi liikumishulks
- \mathbf{V}_C — massikeskme kiirus
- Eesti keeles on terminid impulss ja liikumishulks sünonüümid

Jõu impulss

- *Jõu F elementaarimpulsi*s nimetatakse korrutist $\mathbf{F} dt$, kus dt on elemen-
taarajavahemik.
- *Jõu impulsi*s lõplikus ajavahemikus $[t_0, t_1]$ nimetatakse integraali

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt.$$

³Ik. (linear) momentum

*2.4. Dünamika**Liikumishulga teoreemi diferentsiaalvõrrand*

- Punktmasside süsteemi liikumishulga tuletis aja järgi võrdub süsteemile
mõjuvate välisjõudude geometrilise summaga —

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

- DRK

$$\dot{K}_x = \sum_i F_{ix}, \quad \dot{K}_y = \sum_i F_{iy}, \quad \dot{K}_z = \sum_i F_{iz}.$$

- *Järeldus (liikumishulga jäävuse seadus)*: Välisjõududest vaba süsteem liigub
muutmata liikumishulgaga.

Liikumishulga teoreemi integraalkuju

- Punktmasside süsteemi liikumishulga muutus teatud ajavahemikus Δt võrdub samas ajavahemikus süsteemile mõjuvate välisjõudude impulsside geometrilise summaga —

$$\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0 = \sum_i \mathbf{J}_i,$$

- DRK

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_i J_{ix},$$

$$K_{1y} - K_{0y} = \sum_i J_{iy},$$

$$K_{1z} - K_{0z} = \sum_i J_{iz}.$$

*2.4. Dünamika**Liikumishulga moment, kineetiline moment*⁴

- *Punktmassi liikumishulga momendiks* punkti O suhtes nimetatakse vektor-korrutist

$$\mathbf{L}_O(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v},$$

kus r on punktmassi kohavektor ja $m\mathbf{v}$ tema liikumishulk.

- *Punktmasside süsteemi kineetiline moment* on võrdne süsteemi kõigi punktide liikumishulgade momentide geometrilise summaga —

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{L}_O(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$$

(Loomulikult peavad kõik momendid olema leitud tihke ja sama punkti O suhtes.)

- Nii punktmassi liikumishulga momendi kui punktmasside süsteemi kineetilise momendi puhul kasutatakse eestikeelses kirjanduses ka termineid *impulsi moment* või *pöördeimpulss*. (I.k. angular momentum, moment of momentum)

⁴I.k. angular momentum, moment of momentum

- Jõu momendi ja liikumishulga momendi defintsioonid on analoogsed ja analoogne on ka kogu teooria, mis meist räägib: komponendid, projektsioonid, peamoment jne

- Pöörleva keha puhul

$$L_z = I_z \omega_z,$$

kus $I_z = \int_m \rho^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm$ on keha massinertsimoment.

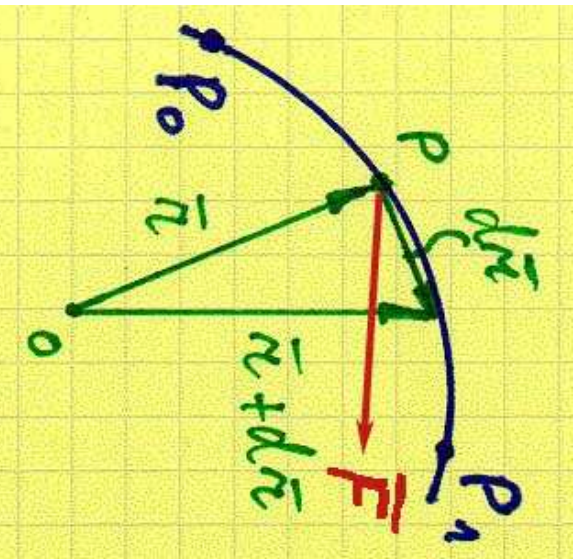
- *Kineetilise momendi teoreem*: punktmasside süsteemi kineetilise momendi tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale süsteemile rakendatud välisjõudude peamomendiga —

$$\dot{L}_O = \sum_i M_O(\mathbf{F}_i).$$

— Vaadeldav teoreem esitatakse diferentsiaal kujul. Võimalik on esitada teda ka integraalkujul.

- *Järeldus (kineetilise momendi jäävuse seadus)*: Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu kineetilise momendiga.

— Seega, kui $\mathbf{L} = const.$ puhul muutub keha inertsimoment, siis peab vastavalt muutuma ka tema nurkkiirus



2 - 54

- *Jõu elementaartööks* nimetatakse jõu ja tema rakenduspunkti elementaarsirde skalaarkorrutist:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- *Jõu töö tema rakenduspunkti lõplikuks siirdel* punktist P_0 punkti P_1 esitatakse joonintegraalina

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

- *Jõupari elementaartöö* (pöördel ümber z telje)

$$dW = M_z d\varphi_z$$

- *Jõupari töö lõplikul pöördel* asendist φ_0 asendisse φ_1

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi_z.$$

- *Jõu võimsus*eks nimetatakse ajahihikus tehtavat tööd, st., töö muutmise kiirust —

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \text{ehk} \quad P = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z.$$

- *Jõupari võimsus*

$$P = M_z \omega_z.$$

2.4. Dünamika

*Kineetilise energia teoreem*⁵

- *Punktmassi kineetiline energia*

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- *Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalaju punktmassi jaoks*: Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale punktmassile mõjuva jõu võimsusega

$$\dot{T} = P.$$

- *Kineetilise energia teoreemi integraalkuju*: kineetilise energia muutus punkt-massi üleminekul asendist P_0 asendisse P_1 võrdub talle rakendatud jõu poolt tehtava tööga sellel liikumisel.

$$T_1 - T_0 = W$$

- Seega tööd saadakse selle arvelt, et kineetiline energia muutub, annab osa endast ära.

⁵Vaadeldavat teoreemi nimetatakse ka kineetilise energia muutumise teoreemiks või lihtsalt energiäteoreemiks.

- *Punktmasside süsteemi kineetiline energia*

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

- *Kineetilise energia teoreemi diferentsiaaljuu punktmasside süsteemi jaoks:*

Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub kõigile süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude võimsuste summaga —

$$\dot{T} = \sum_{k=1}^n P_k^i + \sum_{k=1}^n P_k^e.$$

- *Kineetilise energia teoreemi integraaljuu punktmasside süsteemi jaoks:*

Kineetilise energia muutus punktmasside süsteemi liikumisel tihest asendist teise võrdub süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude tööde summaga sellel liikumisel —

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n W_k^i + \sum_{k=1}^n W_k^e.$$

- Nagu näha, tuleb kineetilise energia teoreemi puhul sisejõud arvesse võtta.
 - *Süsteemi nimetatakse muutumatuks* kui süsteemi liikumisel tema sisejõudude rakenduspunktide vahelised kaugused ei muutu.
 - Muutumatu süsteemi puhul on süsteemi sisejõudude töö null

- Kineetilise energia leidmine

- rööplikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2}$$

- Pöörlemine ümber z telje

$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

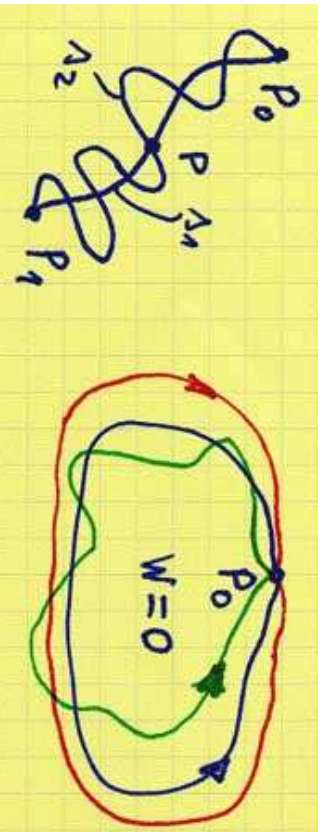
- Tasapinnaline liikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_z^2}{2}$$

Vimmase avaldise puhul leitakse inertsimoment I_C masskeset läbiva ja z teljega paralleelse telje suhtes.

2.4. *Dünamika*

Konservatiivsed jõud



- Kui jõu töö tema rakenduspunktliikumisel asendist P_0 asendisse P_1 ei sõltu trajektoori kujust, siis nimetatakse sellist jõudu *konservatiivseks jõuks*
 - Näiteks gravitatsioonijõud ja elastsusjõud.
 - Kimmise trajektoori puhul on konservatiivse jõu töö null.
 - Mittekonservatiivseid jõude nimetatakse *dissipatiivseteks jõududeks*
 - * Näiteks hõõrdejõud.

- Konservatiivse jõu \mathbf{F} töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel punktist P_0 punkti P_1

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

on sõltumatu integreerimistest.

- Joonintegraal ei sõltu integreerimistest siis ja ainult siis kui integraalialune avaldis on mingi funktsiooni täisdiferentsiaal. Seega võime sisse tuua funktsiooni $V(x, y, z)$ kujul

$$-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

- Sellist täitvat funktsiooni V nimetatakse *potentsiaalseks energiaks*. Miinus märk on siin sisse toodud kokkuleppe tõttu.
- Potentsiaalse energia definitsiooni $-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ põhjal

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

2.4. *Dünaamika*

- Konservatiivse jõu töö

$$W = - \int_{P_0}^{P_1} dV = - V|_{P_0}^{P_1} = V_0 - V_1$$

kus V_0 on süsteemi algasendile ja V_1 süsteemi lõppasendile vastav potentsiaalne energia.

- Konservatiivse jõu töö $W = V_0 - V_1$ võrdub süsteemi alg- ja lõppasendile vastavate potentsiaalsete energiatega (potentsiaalide) vahelga.
- Potentsiaalne energia iseloomustab keha võimet teha tööd ja ta sõltub keha asendist (jõuväljas).
 - Kui keha potentsiaalne energia suureneb, siis $W < 0$ — keha potentsiaalse energia suurendamiseks on vaja teha tööd.
 - Kui keha potentsiaalne energia väheneb, siis $W > 0$ — potentsiaalse energia vähenemise arvelt võib "saada" tööd.
- Kui valemis definitsioonis poleks sisse toodud miinus märki, saaks töö avaldis kuju $W = V_1 - V_0$.

- Olgu kõik muutumatule mehaanikalisele süsteemile mõjuvad jõud konserveeritud
tiivsed
 - Nende jõudude töö süsteemi liikumisel algasendist lõppasendisse: $W = V_0 - V_1$
 - Kineetilise energia teoreem: $T_1 - T_0 = V_0 - V_1$

- Viimasest saame

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1 \quad \text{ehk} \quad \underbrace{T + V}_{=E} = \text{const.}$$

- Kineetilise ja potentsiaalse energia summat nimetatakse *mehaanikaliseks energiaks* ja tähistatakse E .

Mehaanikalise energia jäävuse seadus

- Kui punktmasside süsteem liigub konservatiivsete jõudude mõjul siis jääb tema mehaanikaline energia konstantseks:

$$E = T + V = \text{const.}$$

- Punktmasside süsteeme, kus kehtib mehaanikalise energia jäävuse seadus nimetatakse *konservatiivseteks süsteemideks*.