

Peatükk 4

Pideva keskkonna kinemaatika

Kinemaatika on mehaanika osa, mis uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.

Pidev keskkond. Eeldame, et uuritavad materjalid täidavad ruumi pidevalt, st. iga kahe materiaalse punkti vahel leidub vähemalt üks materiaalne punkt¹. Iga materiaalne punkt omab massi.

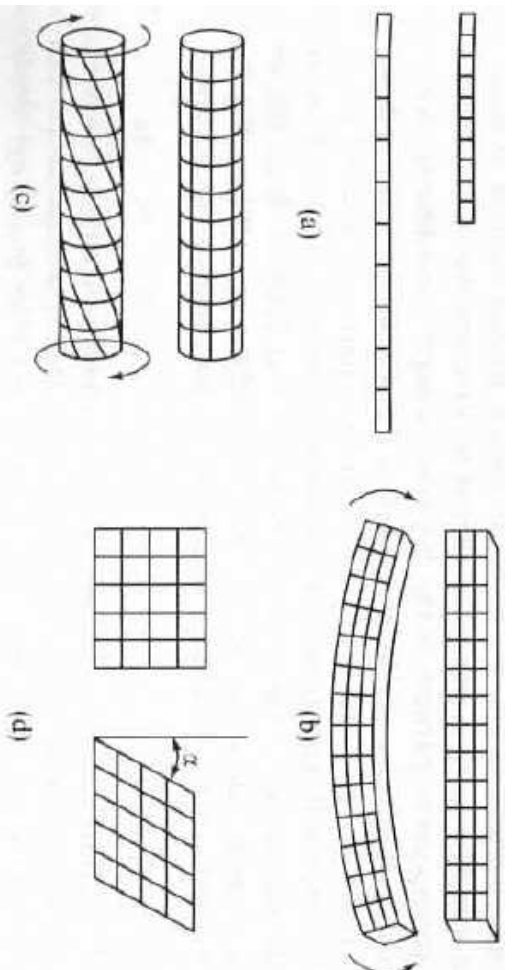
¹ Analoogiliselt reaalarvude pidevusega

4.1. Deformatsioonide liigid ja mõõdud

4 - 2

4.1 Deformatsioonide liigid ja mõõdud

Lihtdeformatsioonid



Joonis 4.1: Lihtdeformatsioonid: (a) – pikideformatsioon (pike), (b) – paine, (c) – väänne, (d) – nihke.

4.1.1 1D deformatsioonimäärdud

Meenutame tugevusõpetuse kursuses tehtud tõmbekatset, mille korral katsekeha algpikkusega l_0 pikeneb suuruse δ võrra, omades seega katse lõpul pikkust $l = l_0 + \delta$. Toimunud deformatsiooni iseloomustamiseks võib kasutada erinevaid *deformatsiooni määrdte*²:

- *pikennemiskoeffitsent ehk pikennemine*³

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (4.1)$$

- *insenerideformatsioon* (ka Cauchy deformatsioon)⁴

$$\varepsilon_e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\delta}{l_0} = \lambda - 1 \quad (4.2)$$

²I. k. *strain measures*

³I. k. *stretch, stretch ratio,*

⁴I. k. *engineering strain, Cauchy strain*

4.1. Deformatsioonide liigid ja määrdud

4 - 4

- *logaritmiline deformatsioon* (ka tegelik deformatsioon või Hencky deformatsioon)⁵

$$\varepsilon_{\log} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \dots \approx \frac{\delta}{l_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad (4.3)$$

- *Lagrange'i deformatsioon* (ka Greeni deformatsioon)⁶

$$\varepsilon_L = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \dots = \frac{\delta}{l_0} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_L = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (4.4)$$

- *Euleri-Almanssi deformatsioon*⁷

$$\varepsilon_{EA} = \frac{l^2 - l_0^2}{2l^2} = \dots = \frac{\delta}{l} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l^2} \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_{EA} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (4.5)$$

Märkus: Isikute nimedesse, mis on ühe või teise deformatsiooni määrduga seotud, tuleb suhtuda teatava ettevaatusega:)

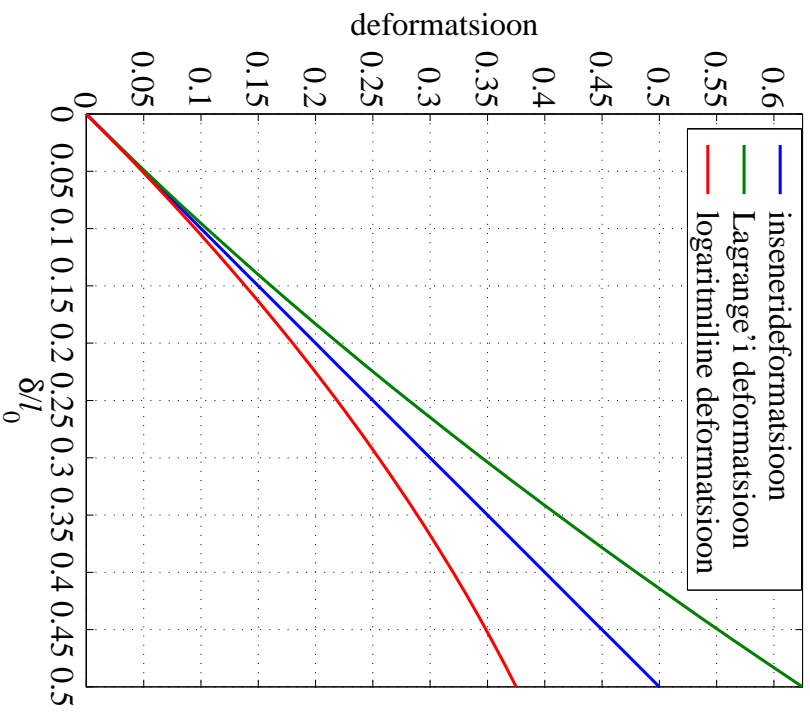
⁵I. k. *logarithmic strain, also called natural strain, true strain or Hencky strain*

⁶I. k. *Lagrange strain, Green strain*

⁷I. k. *Euler-Almanssi strain*

Joonise 4.2 põhjal on selge, et kui $\delta/l_0 < 0,1$, siis langevad inseneri, Lagrange'i ja logaritmiline deformatsioon praktiliselt kokku. Suurte deformatsioonide korral aga erinevad vaadeldavad kolm deformatsioonimõõtu oluliselt. Kõige sagedamini kasutatakse suurte deformatsioonide kirjeldamiseks Lagrange'i deformatsiooni.

Euleri-Almansi deformatsiooni korral võrreldakse pikkuse muutu δ deformeerunud katsekeha pikkusega l ja seetõttu on selle deformatsiooni mõõdu otsene võrdlemine vaadeldud kolmikuga komplitseeritud.



Joonis 4.2: Erinevate deformatsioonimõõtude võrdlus

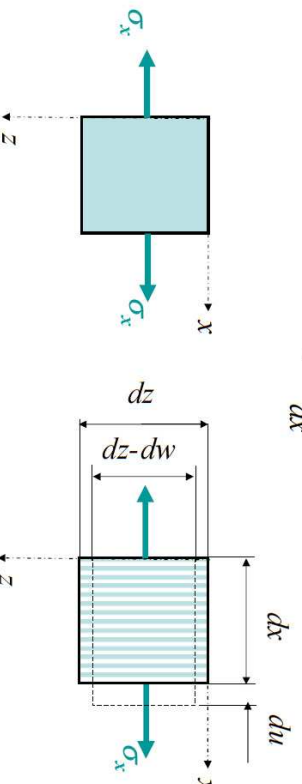
4.1. Deformatsioonide liigid ja mõõtmised

4.1.2 Deformatsiooni mõõtmised — tugevusõpetusest pärit lähenemine

Käesolevas alajaotuses eeldame, et deformatsioonid on lõpmata väikesed. Matemaatiliselt tähendab see, et vastavad suurused on ühega võrreldes väikesed (näiteks $\varepsilon_x \ll 1$).

Normaaldeformatsioon (normaalmoone)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

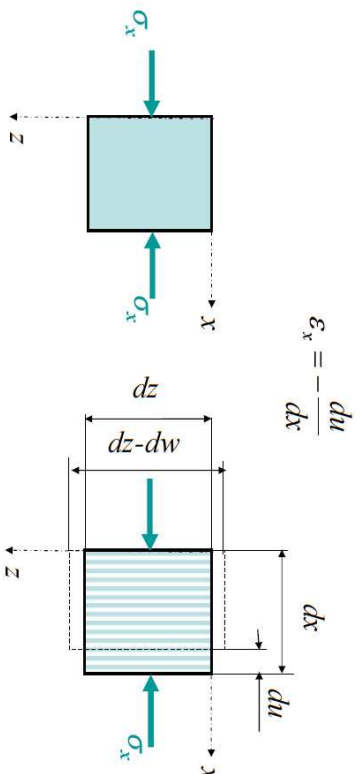


Tõmbel kaasneb pikideformatsiooniga vastasmärgiline pöikideformatsioon:

$$\varepsilon_z = -\frac{dw}{dz}$$

Joonis 4.3: Normaaldeformatsioon: $\sigma > 0$

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)



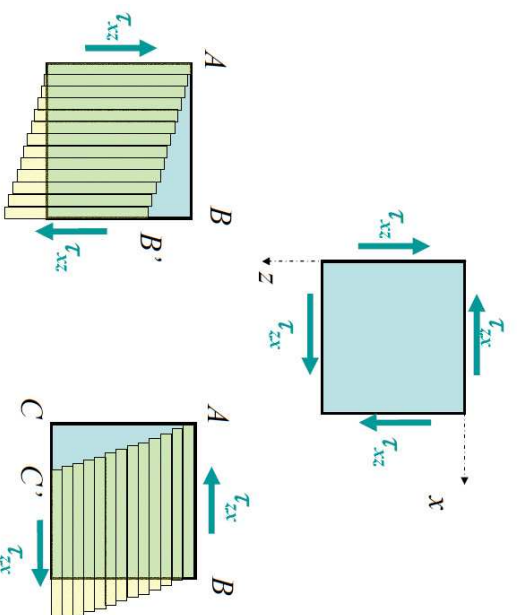
Survel pikideformatsiooniga kaasneb vastasmärgiline põikideformatsioon:

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

Joonis 4.4: Normaaldeformatsioon: $\sigma < 0$

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

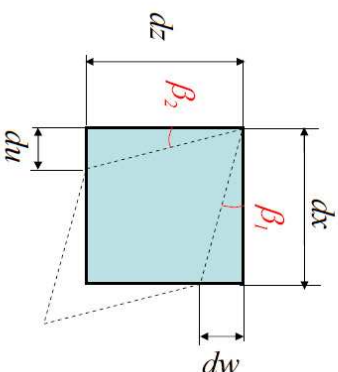
Nihkedeformatsioon ehk nihe ehk nihkemoone



Joonis 4.5: Nihkedeformatsioon

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

Kuna tangentsiaalpinged τ_{xz} ja τ_{zx} mõjuvad ainult koos, siis kirjeldatakse elementaarriistahuka kogu deformatsiooni osaniliete summamana:



$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \omega_{xz} + \omega_{zx} = \tan \beta_1 + \tan \beta_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \approx \beta_1 + \beta_2$$

See summa on suhteline nihkedeformatsioon ehk nihkemõone.

Joonis 4.6: Nihkedeformatsioon

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

4.1. Deformatsioonide liigid ja määrdud

4.1.3 Siire ja deformatsioon — lineaarsest elastsusteooriast pärit lähenemine

Siire

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti A . Algolekus on tema koordinaadid x, y, z . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse A' koordinaatidega x', y', z' . Vektorit $\overline{AA'}$ nimetatakse punkti A *siirdeks* ehk *siirdevektoriks*.⁸

Eristame kahte liiki siirdeid:

- keha kui terviku siirdeid (toimuvad ilma deformatsioonideta) — jäiga keha mehaanika⁹
- siirdeid, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse vaid selliseid siirdeid.

Siirdevektori koordinaattelgede x, y, z sihilisi komponente tähistatakse u, v, w , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (4.6)$$

⁸Siirde sünonüüm on paigutus.

⁹Mitmed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.

Cauchy seosed¹⁰

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (4.7)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist x, y tasandil (joon. 4.7). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$ ja $AC = dy \parallel y$;
- Punktide koordinaadid: $A : (x, y)$; $B : (x + dx, y)$; $C : (x, y + dy)$.

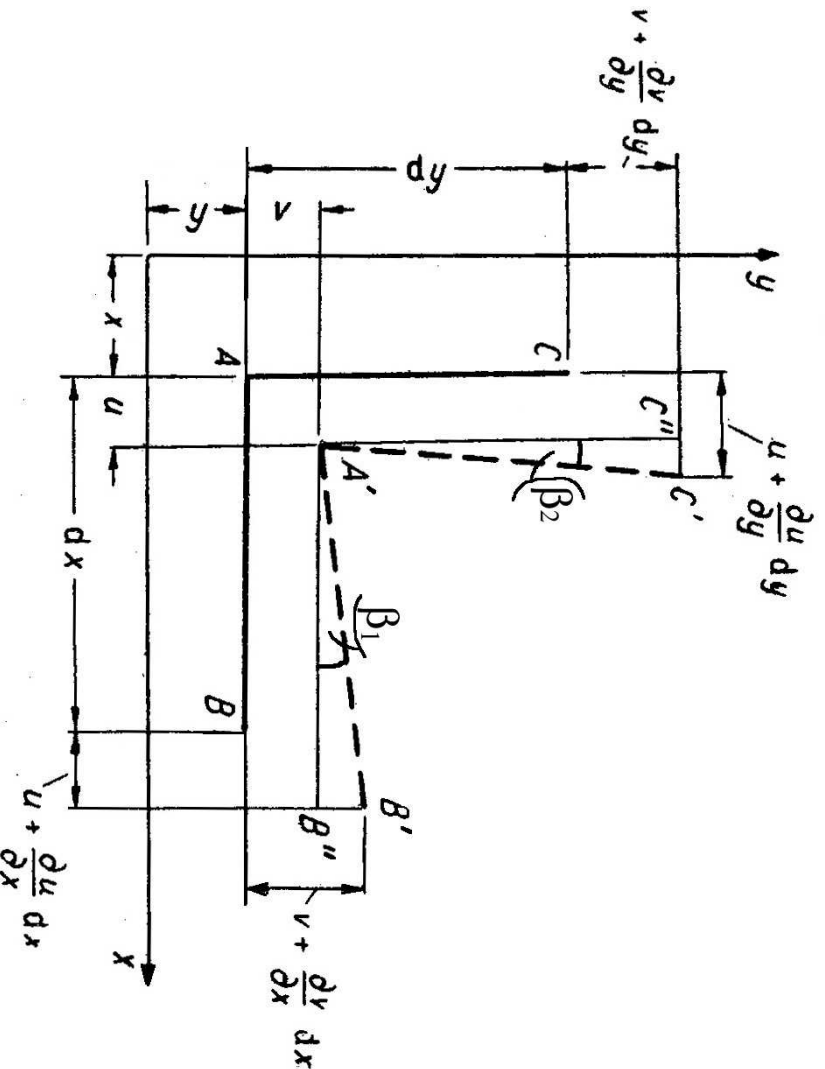
Peale deformatsiooni: $A \rightarrow A'$; $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$. Vastavad siirded:

- Punkt A : u ja v ;
- Punkt B : $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$;
- Punkt C : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$;

¹⁰Ka käesolevas alajaotuses eeldame, et deformatsioonid on lõpmata väikesed (näiteks $\epsilon_x \ll 1$). Sama eeldus on kasutusel ka paragrahvides 4.2 ja 4.3.

4.1. Deformatsioonide liigid ja määrdud

4 - 12



Joonis 4.7: Normaal- ja nihkedeformatsioon.

Kuna lineaarses elastsusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade AB ja AC pöördenurgad, st., $\cos \beta \sim 1$, $\sin \beta \sim \beta$ ja $\tan \beta \sim \beta$.

Seetõttu lõikude AB ja AC suhtelised pikenemised (koordinaatide x ja y sihilised normaaldeformatsioonid)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (4.8)$$

ja pöörded

4.1. Deformatsioonide liigid ja mõõdud

4 - 14

$$\begin{cases} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\varepsilon_x \ll 1}) dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy} = \dots = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (4.9)$$

Nihke ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui algse täisnurga muutus, st. nihke xy tasandil

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.10)$$

Analoogiliselt saab leida suhtelised pikenemised (normaaldeformatsioonid) ja nihked teistel koordinaattasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsioonikomponentide $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ja siirdekomponeentide u, v, w vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

Märgireeglid:

- pikenemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgedele positiivsete suundade vahelisele täisnuruga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

Järeldus: Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

4.2. Deformatsioonitensor

4.2 Deformatsioonitensor

Normaaldeformatsioonidest (suhtelistest pikenemistest) ja nihetest saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0, 5. Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensoriarvutuste reeglitele.

Analoogiliselt pingetensoriga saab ka deformatsioonitensorile leida peaväärtused ja peasuunad (ehk peavektorid) ning invariantid — tuleb lihtsalt rakendada analoogilisi valemeid ja arvutuseeskirju.

4.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul muutub keha ruumala (maht) deformatsiooni käigus. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli $dV = dx dy dz$. Serva AB pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 4.7) on dx ja peale deformatsiooni $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$. Analoogiliselt $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$ ja $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$. Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et normaaldeformatsioonid ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hiljatakse teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud elementaaristikuliku mahuks $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$. *Ruumdeformatsioon* ehk *suhteline mahumuutus*¹¹ avaldub seega kujul

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.13)$$

Seega on ruumdeformatsioon võrdne deformatsioontensori esimese invariantiga. Teisest küljest, arvestades deformatsioonide ε_x , ε_y ja ε_z defnitsioone (4.11) on ruumdeformatsioon siirde divergents¹²:

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

¹¹I. k. *dilatatsioon*
¹² $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

4.4. Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

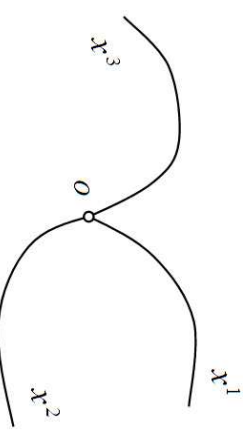
4.4 Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

On selge, et biomehaanika probleemide korral ei ole deformatsioonid alati lõpmata väikesed, vaid omavad nn. lõplikke väärtusi. Et sellist olukorda adekvaatselt kirjeldada on otstarbekas kasutada liikumise kirjeldamisel kahte liiki koordinaate: *Euleri- ja Lagrange'i koordinaate*. Esmalt defneerime nad tildiste kõverjooneliste koordinaatidena.

Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi x^1, x^2, x^3 , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalsete punktide liikumist. Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks* ehk *ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate x^1, x^2, x^3 — *Euleri koordinaatideks* (*EK*) ehk *ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.14)$$



Joonis 4.8: Euleri koordinaadid

Lagrange'i koordinaadid

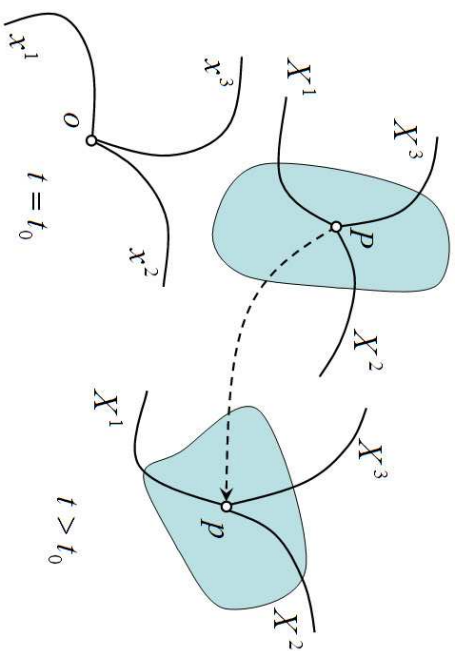
Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalse punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi X^1, X^2, X^3 . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem X^1, X^2, X^3 .

Sellist koordinaatsüsteemi

nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks* ehk *materiaalseks koordinaatsüsteemiks*

ning vastavaid punkti koordinaate X^1, X^2, X^3 — *Lagrange'i koordinaatideks* (LK) ehk *materiaalseteks koordinaatideks*.

Lagrange'i koordinaadid deformeeruvad koos kehaga (vt. joon. 4.1).



Joonis 4.9: Lagrange'i koordinaadid

4.4. Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)¹³

Käesolevas kursuses esitame kõik PKM võrrandid DRKs ja seega pole vaja eris-tada alumisi ja ülennisi indekseid. Seetõttu tähistame DRK korral EK x_1, x_2, x_3 ning vastavaid baasivektoreid $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ ja \mathbf{i}_3 . Kui vaja, siis täpsustame, et meil on Euleri Descartes'i ristkoordinaadid (EDRK).

Mõned näited tähistustest:

- ruumipunkt: p ; tema kohavektor: $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$
- punkti kiirus EKs: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \equiv \dot{\mathbf{x}} = (v_1, v_2, v_3)$
- punkti kiirendus EKs: $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{p}} \equiv \ddot{\mathbf{x}} = (a_1, a_2, a_3)$
- pingetensori komponendid: t_{ij} ;
Euleri deformatsioonitensori komponendid: e_{ij}
- $x_i, v_i, a_i, f_i, c_{ij} \dots$
- Kõiki suurusid, mis on esitatud EKs tähistame väikeste tähtedega

¹³DRK pole EK ja LK kõrval kolmas koordinaatide tüüp, vaid annab tõe võimaluse esitada EK ja LK.

Lagrange'i koordinaate tähistame DRK korral X_1, X_2, X_3 ning vastavaid baasivektoreid $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ ja \mathbf{I}_3 .

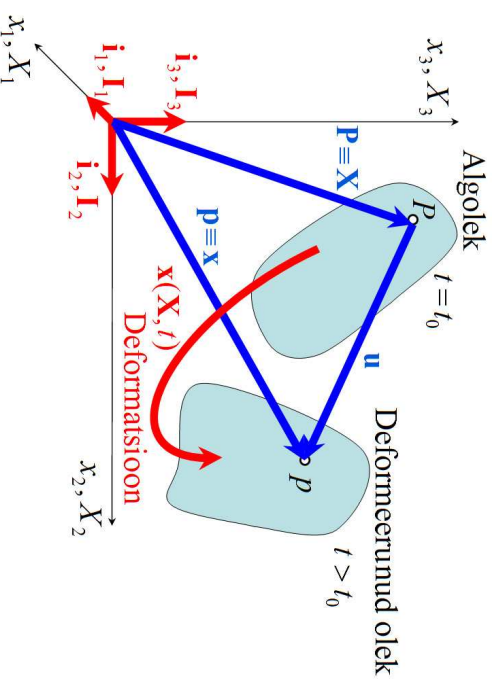
Mõned näited tähistustest:

- materiaalne punkt: P ; tema kohavektor: $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$
- punkti kiirus EKs: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{P}} \equiv \dot{\mathbf{X}} = (V_1, V_2, V_3)$
- punkti kiirendus EKs: $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{P}} \equiv \ddot{\mathbf{X}} = (A_1, A_2, A_3)$
- pingetensori komponendid: T_{IJ} ; Lagrange'i deformatsioonitensori komponendid: E_{IJ}
- $X_I, V_I, A_I, F_I, C_{IJ} \dots$
- Kõiki suurusi, mis on esitatud LKs tähistame suurte tähtedega

4.5. Liikumise kirjeldamine

4 - 22

Üldjuhul eeldatakse, et keha (keskkond) on alghetkel $t = t_0$ deformeerumata olekus¹⁴, nn. *algolekus*. Välismõjude toimel hakkab keha deformeeruma ja kui vaadelda mingit hetke $t > t_0$ siis on keha *deformeerunud olekus*¹⁵ (joon. 4.10). Tihti öeldakse, et alghetkel hõlvab keha (materiaalne maht¹⁶ \mathcal{V} , mida ümbritseb materiaalne pind¹⁷ S) ruumipiirkonna B . Deformeerunud olekus hõlmab vaadeldav keha ruumipiirkonna b ((ruumi)mahtu v , mida ümbritseb (ruumi)pind s).



Joonis 4.10: Deformatsioon, algolek ja deformeerunud olek.

¹⁴I. k. *reference configuration*

¹⁵I. k. *deformed configuration, actual configuration*

¹⁶I. k. *material volume*

¹⁷I. k. *material surface*

Materiaalse punkti P kohavektor¹⁸

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = X_K \mathbf{I}_K, \quad (4.15)$$

ruumipunkti kohavektor

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k \mathbf{i}_k \quad (4.16)$$

ja siirdevektor

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k = U_K \mathbf{I}_K. \quad (4.17)$$

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{ehk} \quad x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t) \quad (4.18)$$

või tema pöördteisendust

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{ehk} \quad X_K = X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad (4.19)$$

mis siirdab materiaalse punkti P ruumipunkti p . Parameetrik on siin aeg t . Alghetkel $t = t_0$ kujutavad teisendused (4.18) ja (4.19) (parameetrist sõltumatuid) koordinaat teisendusi.

¹⁸Siin ja edaspidi kasutatakse summeerimiskokkulepet, st. korduva indeksi järgi summeeritakse, eeldades, et ta omab väärtusi 1, 2, 3. Vt. põhjalikumalt minu pideva keskkonna mehaanika loengukonспекти 3. peatükist § 2.2.4.

4.5. Liikumise kirjeldamine

4 - 24

Tihti on kasulik kui $t = t_0$ puhul teljestikud x_k ja X_K ühtiksids, st., hetkel $t = t_0$ $x_k = X_K$ kui $k = K$. Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel $t = t_0$ automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel $t > t_0$ lihtsalt leitav (vt. joon. 4.10).

Märkused:

- On ilmne, et kuna LK liiguvad (deformeeruvad) koos kehaga, siis on nad DRK vaid alghetkel.
- Väga sageli esitatakse liikumisseadus (4.18) kujul $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$.

Teisendused (4.18) ja (4.19) peavad olema teineteise ühised pöördteisendused. * Eldame, et nii funktsioon (4.18) kui (4.19) kuuluvad klass C^r , $r \geq 1$. Vastavalt matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemile ilmutamata funktsioonist on see tingimus täidetud ruumipunkti p ümbruses δ parajasti siis, kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| \neq 0 \quad |x_k - x_k^0| < \delta. \quad (4.20)$$

Siin x_k^0 , $k = 1, 2, 3$ on ruumipunkti p koordinaadid ja

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{vmatrix}. \quad (4.21)$$

Jakobiaan (4.20) väljendab tegelikult pidevuse aksioomi, mille põhjal positiivne † lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks¹⁹ ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse²⁰. Teisisõnu, joon deformeerub alati jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks.

Kui keskkonnas esineb katkevusi (näit. kihiline materjal või praod), pole eeltoodu otseselt kasutatav ja tuleb sisse tuua lisatingimusi. Samuti tuleb erilist tähelepanu pöörata võimalikele singulaarsetele punktidele, joontele või/ja pindadele, kus tingimus (4.20) pole täidetud.

Funktsioonide (4.18) ja (4.19), st., liikumisseaduste leidmine ongi üks pideva keskkonna mehaanika põhivõttesandeid.

¹⁹ik. *indestructibility of matter*
²⁰ik. *impenetrability of matter*

Kui liikumine on kirjeldatud avaldistega (4.18), siis öeldakse, et on antud *liikumise Lagrange'i kirjeldus* — antud juhul saame teada, millises ruumipunktis x_k asub materiaalne punkt X_K hetkel t . Kui $t = t_0$ puhul EK ja LK ühtisid, siis saame liikumisseadusest (4.18) teada, millises ruumipunktis asub hetkel t see materiaalne punkt, mis alghetkel oli ruumipunktis $x_k = X_K$ ($k = K$). Lagrange'i kirjeldust on otstarbekas kasutada deformeeruva tahke keha ülesannete puhul, sest siin keha peasjalikult vaid deformeerub välisjõudude toimel ning tema materiaalsed punktid ei paigutu ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime materiaalse punkti X_K , siis avaldistest (4.18) saame tema liikumisseaduse kujul

$$x_k = f_k(t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Avaldised (4.19) esitavad *liikumise Euleri kirjelduse* — nende põhjal saab määrata materiaalse punkti X_K , mis hetkel t asub ruumipunktis x_k . Seda moodust on mõistlik kasutada näiteks hüdrodünaamika ülesannete puhul, sest vedeliku “osakesed” (materiaalsed punktid) paigutuvad ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime ruumipunkti x_k , siis saab liikumisseadus (4.19) kuju

$$X_K = F_K(t), \quad K = 1, 2, 3 \quad (4.23)$$

† ja esitab materiaalseid punkte, mis liiguvad läbi selle fikseeritud ruumipunkti.

4.6 Siirdeväli ja deformatsioonigradient

4.6.1 Siire

Vastavalt joonisele 4.10 on *punkti P siire*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (4.24)$$

Siirdevektor on liikumisseaduste (4.18) ja (4.19) abil avaldatav nii LKs kui EKs:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = U_K \mathbf{I}_K, \quad U_K = x_k(X_1, X_2, X_3, t) - X_K, \quad \text{kus } k = K \quad (4.25)$$

ja

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = u_k \mathbf{i}_k, \quad u_k = x_k - X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad \text{kus } k = K. \quad (4.26)$$

Valem (4.25) esitab siiret, mille on hetkeks t saanud materiaalne punkt \mathbf{X} ja valem (4.26) määrab siirde, mille on saanud materiaalne punkt, mis hetkel t asub ruumipunktis \mathbf{x} .

4.6. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

Vaatleme joonist 4.11. Materiaalse punkti P kohavektori \mathbf{X} diferentsiaal $d\mathbf{X}$ viib materiaalsest punktist P punkti Q . Ruumipunkti p kohavektori \mathbf{x} diferentsiaal $d\mathbf{x}$ viib ruumipunktist p punkti q . Deformatsiooni käigus siirdub materiaalne punkt P ruumipunkti p , materiaalne punkt Q ruumipunkti q ja vektor $d\mathbf{X}$ deformeerub vektoriks $d\mathbf{x}$. Punktist P viib punkti p vektor \mathbf{u} ja punktist Q punkti q vektor $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.

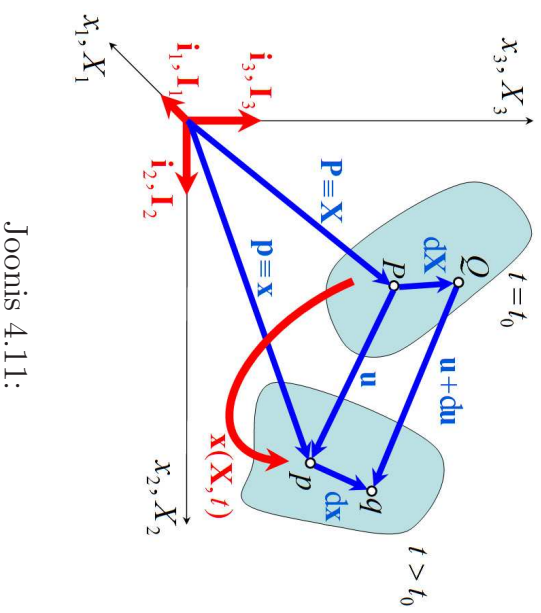
Diferentsiaalid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ on vaadeldavad kui lõpmata väikese pikkusega joonelemendid, mille pikkuste ruudud

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_K dX_K \quad (4.27)$$

ja

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_k dx_k \quad (4.28)$$

mängivad edaspidi tähtsat rolli.



Joonis 4.11:

4.6.2 Deformatsioonigradient

Järgnevalt toome sisse deformatsioonigradiendi mõiste ja defineerime viimase abil deformatsioonitensorid. Diferentsiaalid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ on omavahel seotud järgmiselt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (4.29)$$

kus tensorit

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0 \mathbf{x} \quad (4.30)$$

nimetatakse *deformatsioonigradiendiks* ja ∇_0 on gradientoperaator \mathbf{X} suhtes. Seose (4.29) pöördteisendus avaldub kujul

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (4.31)$$

kus

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathbf{X}, \quad (4.32)$$

ja ∇ on gradientoperaator \mathbf{x} suhtes.

Deformatsioonigradiendid \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} kujutavad endast nn. *kahepunktilisi tensorsorväli*, st. nad teisenevad kui tensorid nii \mathbf{x} kui \mathbf{X} suhtes.

4.6. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

Indekskirjaviiisid saame tensorid \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} esitada kujul

$$F_{kK} = x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_K} \quad \text{ja} \quad F_{Kk}^{-1} = X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}, \quad (4.33)$$

kus *indeksis esinev koma tähistab osatuletise võtmist vastavalt avaldisele (4.33)*.

Indekskujul saavad avaldised (4.29) ja (4.31) kujul

$$dx_k = x_{k,K} dX_K \quad \text{ja} \quad dX_K = X_{K,k} dx_k. \quad (4.34)$$

Valemite (4.20) ja (4.21) põhjal saame öelda, et jakobiaan $j = |\mathbf{F}|$.

Maatrikskujul

$$[\mathbf{F}] = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad [\mathbf{F}^{-1}] = [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Osatuletise leidmise ahelreegli põhjal:

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL}. \quad (4.36)$$

Seega, $x_{k,K}$ ja $X_{K,k}$ on teineteise pöördtensorid ja analoogiliselt pöördmaatriksi leidmise eeskirjale

$$X_{K,k} = \frac{\text{cofactor } x_{k,K}}{j} = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (4.37)$$

ning

$$x_{k,K} = \frac{\text{cofactor } X_{K,k}}{j} = \frac{1}{2j} e_{klm} e_{KLM} X_{L,l} X_{M,m}, \quad (4.38)$$

kus jakobiaan

$$j = |x_{k,K}| = \frac{1}{6} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M}. \quad (4.39)$$

Viimast diferentseerides saadakse *Jacobi samasus*

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = \text{cofactor } x_{k,K} = j X_{K,k}. \quad (4.40)$$

4.6. Siirdeväli ja deformatsioonigradient

4.6.3 Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorid

DRK korral on kohavektorite \mathbf{X} ja \mathbf{x} diferentsiaalid avaldatavad kujul

$$d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{i}_k \quad (4.41)$$

Arvestades kohavektorite diferentsiaalide avaldisi (4.34) saame avaldada suurused dS^2 ja ds^2 järgmiselt:

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \delta_{Kl} dX_K dX_L \quad \text{ja} \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \delta_{kl} dx_k dx_l \quad (4.42)$$

Nende vahe $ds^2 - dS^2$ iseloomustab kahe materiaalse punkti vahelise kauguse muutu deformatsiooni käigus ja seda saab avaldada nii Lagrange kui Euleri koor-dinaatides:

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}(\mathbf{X}, t) dX_K dX_L = 2e_{kl}(\mathbf{x}, t) dx_k dx_l, \quad (4.43)$$

kus

$$2E_{KL} = x_{k,K} x_{l,L} - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - X_{K,k} X_{K,l} \quad (4.44)$$

nimetatakse vastavalt *Lagrange'i* ja *Euleri deformatsioonitensoriteks*. Võrduse (4.43) põhjal näeme, et

$$E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l}. \quad (4.45)$$

Märkused:

- Siinsega võrreldes seostatakse Fungi biomehaanika õpikus tensoreid E_{KL} ja e_{kl} teiste isikute nimedega (vt. Fungi õpik lk. 32).
- On selge, et kui suvalise joonelemendi korral vahe $ds^2 - dS^2 = 0$, siis on tegujäiga keha liikumisega ja $E_{KL} = e_{kl} = 0$.
- Lõpmata väikeste deformatsioonide korral kasutatakse tavaliselt nn. lõpmata väikeste deformatsioonide tensorit

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (4.46)$$

Sama deformatsioonitensor oli sisse toodud alajaotuses 4.2 ja oli seal tähistatud E . Minu teistes pideva keskkonna mehaanika loengukonspetides on sama tensor tähistatud \tilde{e}_{kl} .

- Deformatsioonitensorite diagonaalelemendid ($k = l$ või $K = L$) iseloomustavad normaaldeformatsioone ja elemendid, mille indeksid pole võrdsed nihkedeformatsioone (vrd. tugevusõpetusest tuntud suurustega ε_x ja γ_{xy}).

*4.7. Kiirus ja kiirendus**4 - 34***4.7 Kiirus ja kiirendus****4.7.1 Materiaalne tuletis**

Pideva keskkonna mehaanikas on dünaamiliste protsesside kirjeldamise puhul vaja leida materiaalsete punktidega seotud füüsikaliste suuruste (skalaaride, vektorite ja tensorite) muutumise kiirust²¹, st., tuleb leida tuletisi aja järgi skalaaridest, vektoritest ja tensoritest (mis on funktsioonid kas materiaalsetest või ruumilistest koordinaatidest) mingis fikseeritud materiaalses punktis. Siinjuures tuleb arvesse võtta nii muutus, mis on seotud fikseeritud ruumpunktiga (lokaalne muutus), kui materiaalse punkti liikumisest põhjustatud muutus (konvektiivne muutus).

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nimetatakse operatsiooni

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (4.47)$$

²¹Ik. time rate

Kui vektorfunktsiooni \mathbf{f} argumentideks on LK, s.t.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = F_K(\mathbf{X}, t)\mathbf{I}_K, \quad (4.48)$$

siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial F_K}{\partial t} \mathbf{I}_K. \quad (4.49)$$

Näide: Nii leitakse materiaalsel tuletist liikumisest.

Keerukam on lugu siis, kui \mathbf{f} on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_k. \quad (4.50)$$

Nüüd (kuna \mathbf{i}_k on konstantsed)

$$\dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \mathbf{i}_k, \quad (4.51)$$

sest \mathbf{x} on läbi liikumisseaduse LK \mathbf{X} funktsioon.

4.7. Kiirus ja kiirendus

Sageli esitatakse materiaalne tuletis vektorist kujul

$$\dot{\mathbf{f}} = f_k \mathbf{i}_k \equiv \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{i}_k, \quad (4.52)$$

kus suurust

$$\frac{Df_k}{Dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{f_{k,i}} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k,i} \dot{x}_i \quad (4.53)$$

nimetatakse materiaalseks tuletiseks vektori \mathbf{f} komponendist f_k . Esimest liiget va-
lemites (4.51) ja (4.53) nimetatakse *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muutusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti timbruses).

Materiaalne tuletis skalaarist. Vaatleme skalaarfunktsiooni $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$. *Materiaalne tuletis skalaarist* on defineeritud kujul

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}_{\Phi_{,i}} \dot{x}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi_{,i} \dot{x}_i. \quad (4.54)$$

Näide: Tähistagu skalaar Φ materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev temperatuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.

4.7.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

Kiirus on teatavasti kohavektori esimene tuletis aja järgi. Kui materiaalse punkti kohavektor on $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k$, siis tema kiirus on defineeritud kujul

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (4.55)$$

Kuna baasivektorid \mathbf{i}_k ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{x}_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k. \quad (4.56)$$

Kui tähistada $\mathbf{v} = v_k\mathbf{i}_k$, siis

$$v_k \equiv \dot{x}_k \equiv \frac{\partial x_k}{\partial t} \equiv \frac{Dx_k}{Dt}. \quad (4.57)$$

4.7. Kiirus ja kiirendus

Kuna kohavektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \quad (4.58)$$

ja \mathbf{P} ei sõltu ajast (sageli tähistab $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X}$ punkti kohavektorit alghetkel), siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (4.59)$$

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul $\mathbf{u} = U_K\mathbf{I}_K$, kus $U_K = U_K(\mathbf{X}, t)$. Nüüd

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U_K}{\partial t}\mathbf{I}_K, \\ \text{ehk} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{v} = V_K\mathbf{I}_K, \quad \text{kus } V_K = \frac{\partial U_K}{\partial t}.$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

Euleri koordinaadid. Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis $\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k$, kus $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$. Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x}=\text{const}} = \frac{Du_k}{Dt} \mathbf{i}_k \equiv \left[\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l} v_l \right] \mathbf{i}_k,$$

ehk

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{i}_k, \quad \text{kus } v_k = \frac{Du_k}{Dt} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l} v_l.$$

Seega, tilaltoodud lähenemist kasutades saame kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

Teiselt poolt, kui on teada materiaalse punkti kiirus LKs, siis kasutades liikumis-seadust $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, saame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (4.62)$$

4.7. Kiirus ja kiirendus

4 - 40

Kiirendus

Materiaalse punkti kiirendus on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (4.63)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A_K \mathbf{I}_K, \quad A_K = \frac{\partial V_K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_K}{\partial t^2} \quad (4.64)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{i}_k, \quad a_k = \frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} \underbrace{v_l}_{\dot{x}_l} \quad (4.65)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

Märkused

- (i) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ määrab *kiiruse välja* ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ omakorda *kiirenduse välja*).
- (a) Punkti, kus $\mathbf{v} = 0$, nimetatakse *stagneerunud punktiks*²².
- (b) Kui kiirus ei sõltu ajast, st., $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, siis nimetatakse sellist liikumist *statsionaarseks liikumiseks*²³. See määratlus kehtib suvalise vektorvälja jaoks.
- (c) Liikumist, mille puhul vaid üks kiirusvektori komponent erineb nullist ja sõltub seejuures vaid vastavast ruumikoordinaadist nimetatakse *ühemõotmeliseks liikumiseks*²⁴ — näiteks $v_1 = v_1(x_1, t)$ ja $v_2 = v_3 = 0$.
- (d) Liikumist, mille puhul üks kiirusvektori komponent on null ja kaks kiirusvektori komponenti on nullist erinevad ning sõltuvad seejuures vastavatest ruumikoordinaatidest, nimetatakse *tasapinnaliseks liikumiseks*²⁵ — näiteks $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$, $v_3 = 0$.

²²1.k. stagnation point, 1d. stagnum – seisev vesi²³1.k. steady motion²⁴1.k. lineal motion²⁵1.k. plane motion

4.7. Kiirus ja kiirendus

4 - 42

- (ii) Lagrange'i kirjelduse puhul on (analoogselt punkti kinemaatikaga) antud kiirusega liikuv materiaalne punkt identifitseeritav. Euleri kirjelduse puhul selline analoogia punkti kinemaatikaga puudub. Siin on antud kiiruste välja puhul, hetkel t , teada kiirusvektor igas ruumipunktis, kuid pole teada, milline materiaalne punkt asub vaadeldavas ruumipunktis.

4.7.3 Deformatsioonikiirus ja keeriselisus

Vedelike liikumise uurimise juures omavad suurt tähtsust deformatsioonikiiruse tensor ja keeriselisuse tensor. Saab näidata, et joonelemendi pikkuse ruudu ds^2 muutumise kiirus

$$\frac{D}{Dt} (ds^2) = 2d_{kl} dx_k dx_l, \quad (4.66)$$

kus tensorit

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}), \quad (4.67)$$

nimetatakse *Euleri deformatsioonikiiruse tensoriks*.

Defineerime lisaks (*Cauchy*) *keeriselisuse tensori*²⁶

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}) \quad (4.68)$$

Viimase kahe valemiga põhjal

$$v_{k,l} = d_{kl} + w_{kl} \quad (4.69)$$

Kaldsümmeetrilisest tensorist w_{kl} saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*²⁷

$$w_k = e_{klm} w_{ml} = e_{klm} v_{m,l} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (4.70)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{ja} \quad \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (4.71)$$

²⁶I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

²⁷Suurus e_{klm} on tuntud kui permutatsioonisümbol ja ta võib sõltuvalt indeksite klm väärtusest omandada väärtusi 1, -1, 0. Vt. põhjalikumalt minu pideva keskkonna mehaanika loengukonspetsi 3. peatükist § 2.2.5.

Peatükk 5

Deformeeruva keskkonna dünaamika

Dünaamika on mehaanika osa, mis uurib materiaalsete keskkondade liikumist välismõjude (välisjõudude) toimel. Uuritavaks materiaalseks keskkonnaks võib olla nii tahke keha, gaas kui vedelik. Üheks vaadeldavaid materiaalseid keskkondi iseloomustavaks suuruseks on *inerts*. Inertsiga seotud mõõduks on mass.

5.1 Mass

Mass on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon M ei sõltu ei pikkuse dimensioonist L ega aja dimensioonist T . Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon ρ , mida nimetatakse *massi tiheduseks*. Sel juhul keha kogu mass

$$\mathfrak{M} = \int_v \rho dv, \quad (5.1)$$

Kuna pideva massijaotusega keskkonnas $\mathfrak{M} \rightarrow 0$ kui $v \rightarrow 0$, siis $0 < \rho < \infty$.

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus

Globaalne massi jäävuse aksioom: keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_\circ d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (5.2)$$

5.1. Mass

5 - 46

Kuna $dv = j d\mathcal{V}$, kus

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \right|$$

siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_\circ - \rho j) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_v (\rho - \rho_\circ j^{-1}) dv = 0. \quad (5.3)$$

Lokaalse massi jäävuse aksioomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses tibruses. Valemite (5.3) põhjal saame

$$\rho_\circ = \rho j = \quad \text{või} \quad \rho = \rho_\circ j^{-1}. \quad (5.4)$$

Avaldisi (5.4) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = \int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} \right] dv = 0. \quad (5.5)$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksioom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \quad (5.6)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*.

Avaldised (5.4) ja (5.6) esitavad tiheduse ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (5.4) on mugavam kasutada tahke keha mehaanikas, (5.6) aga vedelike ja gaaside puhul.

5.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

5.2 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulka*¹ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} v_k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} \quad (5.7)$$

kusjuures baasivektorid \mathbf{i}_k saab integraali ette tuua vaid seetõttu, et me kasutame sirgjoonelisi koordinaate. Kuna pideva massijaotuse puhul $d\mathfrak{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi².

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline moment*³ \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (5.8)$$

¹Ik. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

²Pisukest segadust võib põhjustada mahu (ruumala) tähistus v ja kiirusvektori komponentide tähistus v_k . Samas, neid ei tohi mitte mingil juhul segamini ajada.

³Ik. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus⁴

Liikumishulga muutumise kiirus võrdub kehale mõjuvate jõudude peavektoriga:

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} v_k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}_k \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} v_k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}_K. \quad (5.9)$$

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus⁵

Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale mõjuvate jõudude peamomendiga (mõlemad momendid peavad olema võetud tiheduse ja sama ruumipunkti suhtes) —

$$\dot{\mathcal{H}}_o = \mathcal{M}_o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^k \quad (5.10)$$

Valemitega (5.9) ja (5.10) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseadusteks* ning nad kujutavad endast Newtoni seaduste laiendust punktmassilt keskkonnale.

⁴Ik. principle of balance of momentum

⁵Ik. principle of balance of moment of momentum

5.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

5 - 50

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus⁶

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline energia*⁷

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \delta_{kl} \int_{\mathfrak{M}} v_k v_l d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v_k v_k d\mathfrak{M}. \quad (5.11)$$

Energia jäävuse seadus. Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude töö ja keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud energiatega summa muutumise kiirusega —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}. \quad (5.12)$$

Siin \mathcal{K} on kineetiline energia, \mathcal{E} – siseenergia, \mathcal{W} – välisjõudude töö ajahiklus ja \mathcal{U}_{α} – ajahiklus muundunud energiatega mehaanikaline ekvivalent. *Seeja eeldame, et energiad on aditiivsed.*

⁶Ik. principle of conservation of energy

⁷Ik. kinetic energy

Suurused \mathcal{K} , \mathcal{W} ja \mathcal{M}_α on selgelt määratletavad, siseenergia \mathcal{E} on aga ebamäärasem ja teda võib vaadelda kui võrrandi (5.12) tasakaalustavat liiget. Ta on nn. oleku funktsioon ja sõltub olekut väljendavatest muutujatest⁸.

Kui on teada siseenergia tihedus ε (ühikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{M}} \varepsilon d\mathcal{M} \equiv \int_v \rho \varepsilon dv. \quad (5.13)$$

⁸Ik. constitutive variables

5.3. Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

5 - 52

5.3 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Kui rakendada globaalseid tasakaaluaksioome suvalisele (lõpmata väikesele) mahule, saame liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused, mis komponentkujul (koordinaatkujul) avalduvad järgmiselt

$$\begin{aligned} t_{lk;l} + \rho (f_k - a_k) &= 0, \\ t_{k;l} &= t_{lk}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

t_{kl} on siin pingetensor, a_k – kiirendus ja f_k – mahujõud.

Lokaalse tasakaalu seadusi kujul kujul (5.14) nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks*.

Cauchy liikumisseadused on 3. peatükis esitatud tasakaaluvõrrandite analoogiks.

Peatükk 6

Olekuvõrrandid

6.1. Üldistatud Hooke'i seadus

6 - 54

6.1 Üldistatud Hooke'i seadus

6.1.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

Klassikalises (lineaarses) elastsusteoorias kehtib *üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige üldisemal juhul saab vastavad seosed esitada kujul¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}T_{xy} + C_{15}T_{yz} + C_{16}T_{zx} \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}T_{xy} + C_{25}T_{yz} + C_{26}T_{zx} \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}T_{xy} + C_{35}T_{yz} + C_{36}T_{zx} \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}T_{xy} + C_{45}T_{yz} + C_{46}T_{zx} \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}T_{xy} + C_{55}T_{yz} + C_{56}T_{zx} \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}T_{xy} + C_{65}T_{yz} + C_{66}T_{zx} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

¹Sellisel kujul on pingete ja deformatsioonide vahelised seosed esitand näiteks õpikutes R. Eek, L. Poverus, Ehitrusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 ja V. I. Samul, Osnovõ Teorii Uprugosti i Plastitšnosti /Elastsus- ja plastsussteooria alused/, Moskva, Vöšaja Škola, 1982.

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju) ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti, mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil ja on kasutuses ka tugevusõpetuses. Need kaks konstanti on Youngi moodul E ja Poissoni koefitsient (Poissoni tegur) ν

- Tõmme-surve (x -telje sihis).
 - Elastuskonstant ehk Youngi moodul E : $\varepsilon_x = \sigma_x/E$
 - Poissoni koefitsient ν : $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$
- Nihe (xy tasandis).
 - Nihkeelastsusmoodul G : $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (6.2)$$

Kuna nihkeelastsusmoodul G on avaldatav E ja ν kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

6.1. Üldistatud Hooke'i seadus

6 - 56

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Pinge $\sigma_x > 0$ põhjustab pikenemist x -telje sihis ja lühenemist y - ja z -telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel $\sigma_y > 0$ ja $\sigma_z > 0$. Seega on summaarne suhteline pikenemine x -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (6.3)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s.t., τ_{xy} põhjustab vaid nihet γ_{xy} , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (6.4)$$

6.1.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (6.4)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1-2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma}. \quad (6.5)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1-2\nu)I_1^\sigma}{E}. \quad (6.6)$$

Suurust $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* ja ta on ühtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse ruumpaisumismooduli K ja keskmise pinge σ_0 ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (6.7)$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (6.8)$$

6.1. Üldistatud Hooke'i seadus

6.1.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (6.4)₁ paremale poolele ja lahutame avaldise (6.4)₁ paremast poolst suuruse $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (6.9)$$

Avaldades (6.6)-st invarianti $I_1^\sigma = E\theta/(1-2\nu)$, saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1-2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1+\nu} \quad (6.10)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (6.11)$$

saame valemist (6.10)₂ $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$.

Leides analoogilised avaldised σ_y ja σ_z jaoks ning avaldades seostest (6.4) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (6.12)$$

Kasutades viimaseid valemeid leiame seose pingetensori ja deformatsioonitensori esimese invariandi vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^{\sigma}} = 3\lambda\theta + 2\mu(\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{\theta}), \quad \text{kust} \quad I_1^{\sigma} = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (6.13)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (6.14)$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (6.15)$$

6.1. Üldistatud Hooke'i seadus

6 - 60

Üldistatud Hooke'i seadus tensorikujul:

$$t_{kl} = \lambda_e \mathbf{I}_e \delta_{kl} + 2\mu_e e_{kl}, \quad (6.16)$$

kus λ_e ja μ_e on *Lamé konstandid*, mille seos tugevusõpetusest tuntud Youngi mooduli E , Poissoni teguri ν ning nihkeelastusmooduliga G on järgmine:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G \quad (6.17)$$

ning I_e on Euleri deformatsioonitensori e_{kl} esimene invariant.

Mittelineaarne olekuvõrrand (võrreldes eelmisega on säilitatud kõrgemat järku liikmeid)

$$\begin{aligned} t_{kl} = & \left[\alpha_e + (\lambda_e - \alpha_e) \mathbf{I}_e + \left(3l_e + m_e - \lambda_e - \frac{\alpha_e}{2} \right) (\mathbf{I}_e)^2 + (m_e + n_e - 2\alpha_e) \mathbf{I}_e + \right. \\ & + \dots \left. \right] \delta_{kl} + [2(\mu_e - \alpha_e) - (m_e + n_e + 2\lambda_e + 2\mu_e - 2\alpha_e) \mathbf{I}_e + \dots] e_{kl} + \\ & + (-4\mu_e + n_e + \dots) e_{km} e_{ml}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Elastusteoorias on kombeks nimetada eelmistes valemites esinevaid konstante järgmiselt α — esimest järku elastsuskonstant; λ, μ — teist järku elastsuskonstandid; l, m, n — kolmandat järku elastsuskonstandid.

6.1.4 Stokesi vedelik ja Newtoni vedelik

Elmistes alajaotustes vaatesime elastseid materjale, st. materjale, kus pinge sõltus vaid deformatsioonist. Taoliste materjalide puhul on tähtis teatud deformatsioonimeerumata olek, mida nimetatakse loomulikuks olekuks. Selline käitumine on tavaliselt omane tahkistele (tahketele kehadele).

Teise tähtsa materjalide klassi moodustavad vedelikud. Tegelikult on kõik vedelikud *kokkusurutavaad ja viskoossed*. Kuna aga nimetatud omadused varieeruvad vedelike puhul väga suurtes piirides, siis on väga tihti võimalik vähemalt üht neist hüljata. Väga suur osa vedelikest on praktiliselt kokkusurumatud. Siin piirdumegi vaid kokkusurumatute vedelikega.

Viskoosete vedelike puhul on leitud, et pinged sõltuvad deformatsiooni kiirusest. Täpsemalt öeldes, pingetensor sõltub deformatsioonikiiruse tensorist. Sellist vedeliku nimetatakse *Stokesi vedelikuks*. Vedelikku, mille korral viskoossed efektid on hüljatud, nimetatakse *ideaalseks vedelikuks*.

6.1. Üldistatud Hooke'i seadus

Stokesi vedeliku olekuvõrrand on esitatav kujul

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + Dt_{kl}(d_{qs}), \quad Dt_{kl}(0) = 0. \quad (6.19)$$

kus p on hüdrostaatiline surve ja Dt_{kl} viskoosusest põhjustatud dissipatiivne pinge. Kui deformatsioonikiirus on null, on null ka vastav dissipatiivne pinge.

Aproksimatsioonid — lineaarne ja mittelineaarne.

1) Kui kokkusurumatu vedeliku olekuvõrrand on esitatud kujul

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\mu d_{kl}, \quad (6.20)$$

st., pinge Dt_{kl} ja deformatsioonikiiruse d_{kl} vaheline seos on lineaarne, siis nimetatakse teda *Newtoni vedelikuks*. Viimases nimetatakse kordajat $\mu \geq 0$ *viskoossuskoeffitsiendiks*.

2) Ruutpolünoom

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \alpha_1 d_{kl} + \alpha_2 d_{km} d_{ml}, \quad (6.21)$$

kus kordajad

$$\alpha_\gamma = \alpha_\gamma(\text{II}_d, \text{III}_d), \quad \gamma = 1, 2 \quad (6.22)$$

peavad rahuldama tingimusi

$$-2\alpha_1 \text{II}_d + \alpha_2 \text{III}_d \geq 0. \quad (6.23)$$

6.2 Elastusteooria põhivõrrandid (tahkiste jaoks)

1. *Tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid (3 võrrandit):*

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

ehk Cauchy 1. liikumisvõrrand

$$t_{lk,l} + \rho (f_k - a_k) = 0. \quad (6.25)$$

2. *Cauchy seosed (4.11) (6 võrrandit):*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \quad (6.26)$$

6.2. Elastusteooria põhivõrrandid (tahkiste jaoks)

või Euleri deformatsioonitensor

$$2e_{kl} = \delta_{kl} - X_{K,k} X_{K,l}, \quad (6.27)$$

või lõpmata väikeste deformatsioonide tensor

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (6.28)$$

või mõni muu deformatsioonitensor.

3. *Üldistatud Hooke'i seadus (6 võrrandit) nn. otsesel kujul:*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} T_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} T_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} T_{zx} \end{cases} \quad (6.29)$$

või nn. pöördekujul

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}, \end{cases} \quad (6.30)$$

või mõni muu olekuvõrrand.

Võrrandeid kokku 15 Tundmatud kokku 15: 6 pingetensori komponenti + 6 deformatsioonitensori komponenti + 3 siirdevektori komponenti.

Rajatingimused ehk ääretingimused ehk servatingimused võivad olla kolme põhitüüpi.

1. Keha välispinnal on antud pindjõud:

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (6.31)$$

2. Keha välispinnal on antud siirded. Põhimõtteliselt tähendab see seda, et on antud keha välispinna liikumisseadus.

3. Osal keha pinnast on antud siirded ja osal pindjõud.

Võib esineda veelgi komplitseeritumaid juhte, kus mingil osal keha pinnast on antud näiteks üks kolmest siirdekomponeendist ja kaks pindjõu komponenti.

6.2. Elastusteooria põhivõrrandid (tähtsiste jaoks)

Pidevustingimused.

Kui põhimuutujateks on valitud deformatsioonid või pinged, siis on tarvis arvestada ka pidevustingimusi:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (6.32)$$

Vedelike ja gaaside korral on miinmed põhivõrrandid (näiteks olekuvõrrandid) hoopis teistsugused.