

Peatükk 3

Pinge

Märkus: See peatükk kattub minu õppeaine „Elastsusõpetus” loengukonspetsi teise peatükiga, mille lõppu on lisatud kahe näiteülesande vastused koos lahendusviidetega.

3.1. Jõud ja pinged

3 - 2

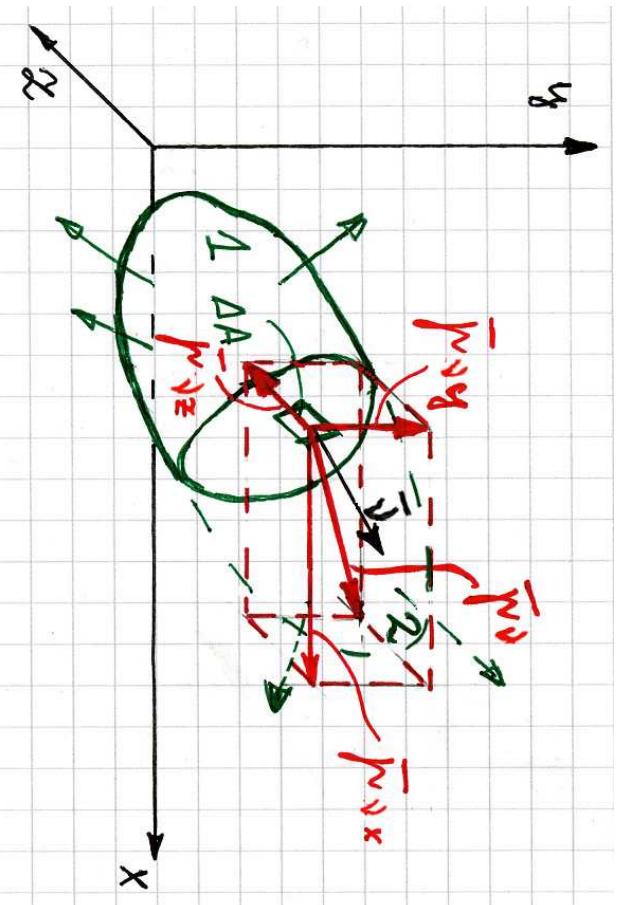
3.1 Jõud ja pinged

Kehale mõjuvad välisjõud saab jagada kahte rühma.

1. *Pindjõud ehk kontaktjõud* on põhjustatud keha kontaktist teiste kehade või keskkondadega. Näiteks survejõud, mis mõjuvad vette asetatud kehale või vundamendi surve pinnasele jne.
 - Pindjõu dimensioon: $1\text{N}/\text{m}^2$
 - Kui pind, millel jõud mõjub on väike võrreldes keha mõõtemetega (keha välispinnaga), siis võib sellist jõudu lugeda koondatud jõuks, st. summaarne jõud loetakse rakendatuks tihete punkti.
2. *Mahujõud ehk ruumjõud* mõjuvad igale keha punktile. Näiteks gravitatsioonijõud (keha kaal) või elektromagnetilised jõud või inertsjõud.
 - Mahujõu dimensioon: $1\text{N}/\text{m}^3$
 - Mõnedes õpikutes käsitletakse mahujõu asemel massjõudu. Vastav dimensioon $1\text{N}/\text{kg}$

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 3.1).



Joonis 3.1: Pingvektori \mathbf{p}_ν koordinaattelgedel xyz suunalised komponendid.

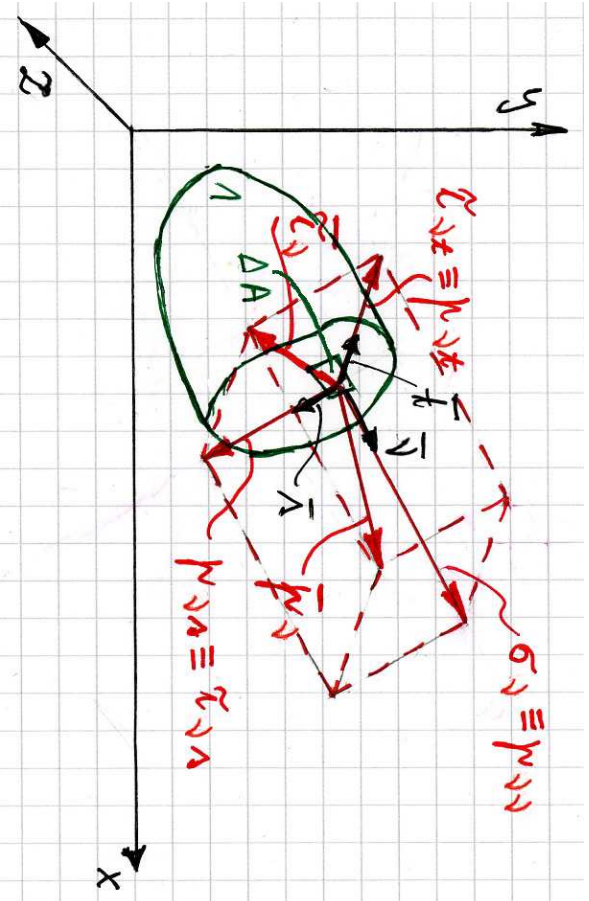
3.1. Jõud ja pinged

3 - 4

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga $\boldsymbol{\nu}$. Mõjugu väikesel pinnal ΔA sisejõud $\Delta \mathbf{S}$. Suhet $\Delta \mathbf{S} / \Delta A$ võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal ΔA . ✓
- Kui minna piirile $\Delta A \rightarrow 0$, saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$*

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (3.1)$$

- Üldjuhul vektorite $\boldsymbol{\nu}$ ja \mathbf{p} suunad ei tihhti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingvektori asemel tema projektsioone koordinaattelgedel $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$, mis omakorda määravad ära pingvektori \mathbf{p}_ν koordinaattelgedel xyz sihilised komponendid (vt. joon. 3.1). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pingekomponendi mõjumise sihti.

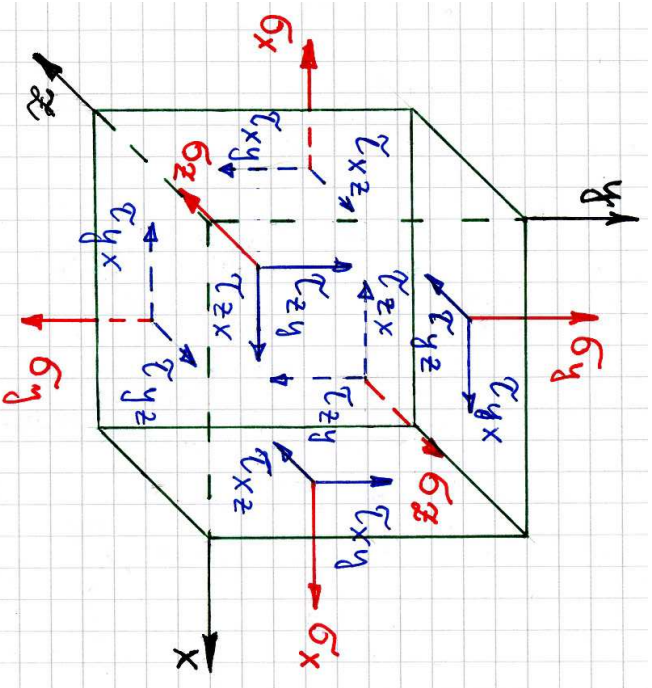


Joonis 3.2: Pingvektori P_n lahutamise normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga ν mõjuva pingvektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*: $P_\nu = \sigma_\nu + \tau_\nu$. Nihkepinge τ_ν lahutatakse tavaliselt veelkord kaheks komponendiks: $\tau_\nu = \tau_{\nu s} + \tau_{\nu t}$ (vt. joon. 3.2, kus $P_{\nu n} \equiv \sigma_\nu$, $P_{\nu s} \equiv \tau_{\nu s}$ ja $P_{\nu t} \equiv \tau_{\nu t}$).

3.1. Jõud ja pinged

Kui lõike pind on paralleelne koordinaatasanditega, siis kasutatakse indeksi ν asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks x .

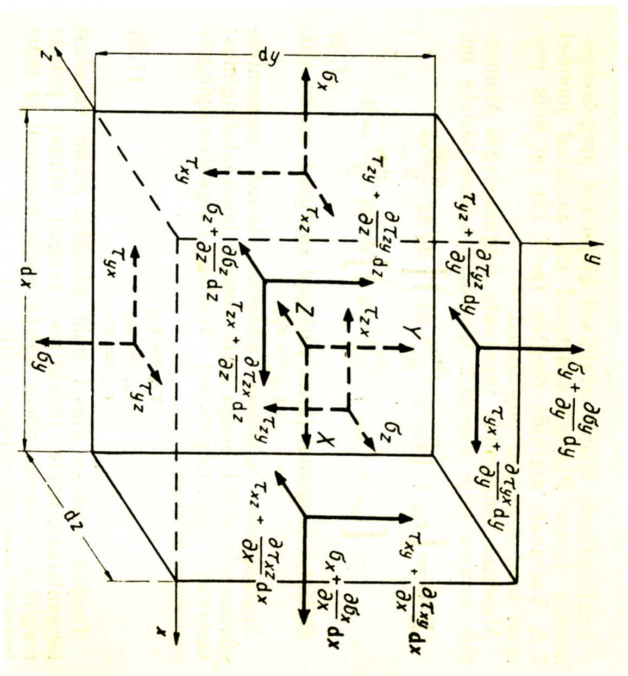


Märgireeglid: joonis 3.3.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 3.3: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

3.2 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid



Joonis 3.4: Elementaarriisttahukas

Välisjõudude toimel tahkes kehas tekivad pinged pole tildjuhul konstantsed, vaid võivad omada igas keha punktis erinevaid väärtusi:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), & \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z), \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z), & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vaatleme välisjõudude mõju all tasakaalus olevast kehast välja lõigatud elementaarriisttahukat (joon. 3.4). Igal risttahuka tahul mõjub 3 pingekomponenti \Rightarrow kokku 18 pingekomponenti.

3.2. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Olgu punktis koordinaatidega x, y, z normaalpinge väärtus $\sigma_x(x, y, z)$. Kasutades Taylori rittaarendust¹ (säilitades seejuures vaid esimest järku väikesed suurused) võime kirjutada

†

$$\begin{aligned} \sigma_x(x + dx, y + dy, z + dz) &= \sigma_x(x, y, z) + \\ & \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Viimase avaldise (3.3) põhjal $\sigma_x(x + dx, y, z) = \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx$.
- Teiste pingekomponentide jaoks saab tuletada analoogilised valemid.
- Kehale mõjuvate mahujõudude projektsioonid tähistame X, Y, Z (NB! mahujõu dimensioon on 1 N/m³).

¹Ühe muutuja funktsiooni korral $f(x + dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) dx^k$

Keha on tasakaalus, järelikult peab ka elementaarristahukas olema tasakaalus. Seega peavad risttahukale mõjuvate jõudude peavektor ja peamoment olema võrdsed nulliga.

Tasakaaluvõrrandite koostamiseks leiame esiteks risttahukale mõjuvad jõud, projektseerime nad x -teljele ja võrrutame saadu nulliga:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Avame sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga $dV = dx dy dz$:

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ühe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude pro-

3.2. Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

3 - 10

jektisioone y - ja z -teljel:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui ma-hujõudude projektisioonid sisaldavad inertsiõudusid, saab viimste abil lahendada ka dünaamika ülesandeid. ✓

Järgnevalt leiame momendid ristahuka keskpunkti läbiiva x -telje suhtes ja võrrutame tulemuse nulliga:

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \\ & \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Avame sulud:

$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dz \frac{dy^2}{2} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy \frac{dz^2}{2}}_{\text{kõrgemat järku väikesed liikmed} \approx 0} = 0. \quad (3.8)$$

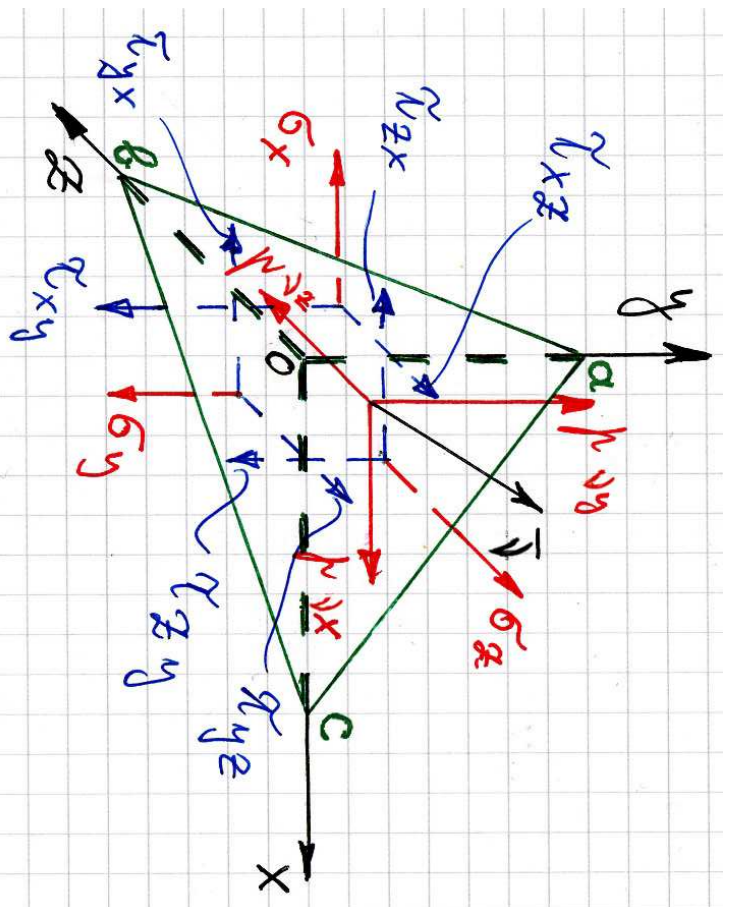
Pärast kõrgemat järku väikeste liikmete hülgamist saame $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, mis on tuntud *nihkepingete paarsuse seadusena*. Leides analoogiliselt momendid y - ja z -telje suhtes saame kokkuvõttes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (3.9)$$

Tänu nihkepingete paarsusele väheneb tundmatute pingekomponentide arv üheksalt kuuele. Nende määramiseks on meil aga ainult kolm tasakaaluvõrrandit. Seega on tegu staatiliselt määramata tulesandega ja me vajame lisavõrrandeid, mis võtaks arvesse materjali füüsikalisi omadusi.

3.3. Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal

3 - 12



Joonis 3.5: Pinged kaldpinnal

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 3.5 kujutatud kaldpinna abc orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suuna-koosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \quad (3.10)$$

Koos koordinaatpindadega moodustub tetraeeder $Oabc$. Tähistame kaldpinna abc pindala dA . Tetraeedri teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinuste:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \quad A_{Obc} = dA \cdot m, \quad A_{Oac} = dA \cdot n. \quad (3.11)$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 3.5 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud X, Y, Z , mida pole joonisel näidatud. Projekteerime tetraeedrile mõjuvad jõud x -teljele:

$$\begin{aligned} p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} + X dV = \\ p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n + X dV = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Jagame viimase avaldise pindalaga dA , hülgame viimase liikme kui kõrgemat

3.3. Pinged kaldpinnal, rajatingimused keha pinnal

3 - 14

järku väikese² ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \quad (3.13)$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised pingvektori \mathbf{p}_ν ülejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku saame

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (3.14)$$

Valemid (3.14) võimaldavad leida mis tahes kaldpinnal mõjuva pingevektori \mathbf{p}_ν komponente kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pingekomponendid koordinaatpindadel $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$

Kui pind abc ühtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (3.14) *rajatingimusi (ääretingimusi) keha pinnal*.

² $\lim_{dA \rightarrow 0} (dV/dA) = 0$

3.4 Peapinged, pinge invariantidid

Kuna vaadeldav tetraeeder on lõpmata väike, siis tegelikult võimaldavad valemid (3.14) määrata pingeid keha mis tahes punkti läbival mis tahes kaldpinnal kui on teada pinnanormaal ν ja pinged (pingekomponendid $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$) seda punkti läbivatel koordinaattasanditel.

Pinnal normaaliga ν mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks σ_ν ja nihkepingeks τ_ν . Kui on teada pingevektori \mathbf{p}_ν komponendid ja normali ν suunakoosinused, siis saame leida

$$\sigma_\nu = p_{\nu x}l + p_{\nu y}m + p_{\nu z}n. \quad (3.15)$$

✓

Kasutades valemeid (3.14) saab σ_ν omakorda avaldada koordinaattasandeil mõjuvate pingete kaudu. Nihkepinge τ_ν kujutab endast pingevektori \mathbf{p}_ν projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (3.16)$$

3.4. Peapinged, pinge invariantidid

On selge, et nii \mathbf{p}_ν , kui σ_ν ja τ_ν sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge $\tau_\nu = 0$ ja normaalpinge $\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu$. Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks*.

Peapingete ja peasuundade leidmise protseduur.

- Tähistame otsitava peapinge σ ja talle vastava pinnanormaali suunakoosinused l, m, n .
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

koos lisatingimusega

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (3.18)$$

★

- Meid huvitab selle VS-i mittetriivaalne lahend (l, m, n pole korruga nullid). See tingimus on täidetud kui karakteristiklik determinant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

- Viimasest saadakse omakorda karakteristiklik võrrand

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0, \quad (3.20)$$

kus suuruseid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (3.21)$$

nimetatakse *pinge invariantideks*³.

³Täpsemalt öeldes nimetatakse neid pingetensori invariantideks. Tensori mõiste juurde tuleme õige pea.

3.4. Peapinged, pinge invariantidid

3 - 18

- Uuritaval juhul on kuupvõrrandil (3.20) kolm reaalarvulist lahendit, mis \surd järjestatakse kahanevas järjekorras $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget kordanööda võrrandisüsteemi (3.17), (3.18). Tulenusena saame igale peapingele σ_i vastava peasuuna suunakoosinused $l_i, m_i, n_i, i = 1, 2, 3$.
- Peasuundade praktilise leidmise juurde tuleme tagasi alajaotuses 3.6.

Sõltuvalt kuupvõrrandi lahendite väärtustest, saab eristada kolme juhtu:

1. Kui kõik kolm peapinget on erinevad, siis saadakse võrrandisüsteemi (3.17), (3.18) lahendamisel kolm ristuvat ühikvektorit.
2. Kui kõik kolm peapinget on võrdsed, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind. Praktilistel kaalutustel valitakse tavaliselt ristuvate pindade kolmik, mis omakorda määrab omavahel ristuvate peasuundade kolmiku.

3. Kui kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis saame määrata selle kolmandale peapingele vastava peasuuna, mis omakorda määrab peapinge. Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suundade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

Kasutades peapingeid saame pinge invariantid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (3.22)$$

- Pinge invariantid on sõltumatud koordinaatide xyz valikust.
- Kuna invariantid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

3.5. Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja kuus nihkepinget $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada 3×3 (tasandilisesannete korral 2×2) tabelina nagu matrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal (vt. valemid (3.14)).

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tenseoreid.

1. *Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus. Näited: mass, tihedus, temperatuur.

2. *Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund. Vektori iga komponent on samuti seotud tihede suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihete indekseid. Näited: jõud, pinnanormaal, kiirus, siire.
3. *Teist järku tensori* iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda ja tema tähistamisel kasutatakse kahte indekseid. Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.
- Vektoreid võib nimetada esimest järku tenseoriks ja skalaare nullindat järku tenseoriks.

Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada 3×3 maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga 3×3 maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.

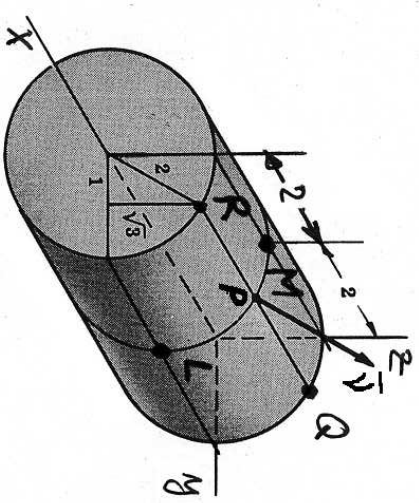
3.5. Pingetensor

- Pärast kordinaat teisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.
 - * Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
 - * Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks kordinaatsüsteemi valikust.
 - * Näide. Vektor ning kaks kordinaatsüsteemi xy ja $x'y'$, mille vaheline nurk on θ .
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga). Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

3.6 Ülesanded

Ülesanne 1. Pingus keha punktides on antud pingetensoriga (Descartes'i ristkoordinaatides)

$$S = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$



Leida pingevektor), mis mõjub silindri külgpinnal $y^2 + z^2 = 4$ punktides P, Q, R, L ja M ning silindri otspindade punktides Q ja R . Lahutage pingektor normaal- ja nihkepingeks.

Lahendamisel tuleb kasutada valemeid (3.14), (3.15) ja (3.16).

Järgmisel kolmel leheküljel toodud ülesande 1 lahenduses tuleb valemite viidete juures „näha” (2. ...) asemel (3. ...)

3.6. Ülesanded

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

Silinder $x^2 + z^2 = 4$ all $\Phi = x^2 + z^2 - 4 = 0$
 silindri normaal: $\bar{J}^* = \text{grad } \Phi = \dots = (0, 2y, 2z)$
 ühiknormaal $\bar{J} = \bar{J}^* / |\bar{J}^*|$; $|\bar{J}^*| = 2\sqrt{y^2 + z^2}$

Pinge miinimal normaalgiga \bar{J} : $\bar{p}_N = \bar{J} \cdot \bar{S}$ Nõrde valem $(2, 4y)$
) Punkt $P = (2, 1, \sqrt{3}) \rightarrow \bar{J}^ = (0, 2, 2\sqrt{3}) \rightarrow |\bar{J}^*| = 4 \Rightarrow \bar{J} = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$

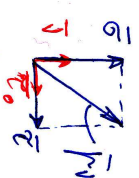
$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{p}_N = (2, 5; 3, \sqrt{3}) ; |\bar{p}_N| = 4, 2\sqrt{2}$$

Normaalpinge $\bar{\sigma} = \bar{p}_N \cdot \bar{J} = 3$ a.o. \bar{p}_N proge lktseon normaali \bar{J} silind

Nt. Jätkud $\bar{\sigma} = 3 \cdot (0; 1/2; \sqrt{3}/2)$ $\bar{p}_a \quad \sigma = 3$

Nt. Nihkepinge $\bar{\tau} = \bar{p}_N - \bar{\sigma} = (2, 5; 3; \sqrt{3}) - 3 \cdot (0; 1/2; \sqrt{3}/2) = \dots = (2, 5; 1, 5; -\sqrt{3}/2)$

vastav moodul $|\bar{\tau}| = \sqrt{p_N^2 - \sigma^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 5, 04$



*) punkt $Q = (0, 1, \sqrt{3})$ $\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ NB! Kärgpinna punkt
 Kõik nurgad on sama, mis punktis P

*) punkt $R = (4, 1, \sqrt{3})$ / Kärgpinna punkt /
 $\bar{S} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ Kõik nurgad on sama, mis p.-des P ja Q

*) punkt $L = (2, 2, 0) \rightarrow \bar{J} = (0, 1, 0)$ $\bar{S} = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $\bar{\mu} = \bar{J} \cdot \bar{S} = (20, 0, 0) \Rightarrow \mu = 20$ $\bar{\sigma} = \bar{\mu}$ & $\sigma = 0$ vt. joonis!

*) punkt $M = (2, 0, 2) \rightarrow \bar{J} = (0, 0, 1)$ $\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
 $\bar{\mu} = \bar{J} \cdot \bar{S} = (0, 4, 0)$ $\mu = 4$

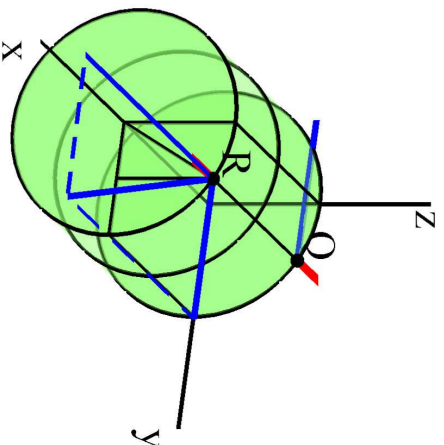
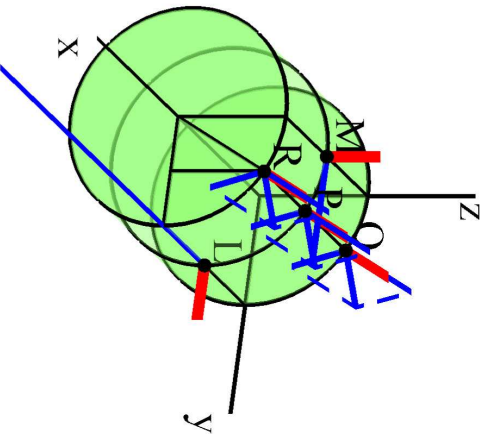
$\bar{\sigma} = \bar{\mu}$ $\sigma = 0$ vt. joonis!

*) Punkt $Q = (0, 1, \sqrt{3})$ otspunkt $\Rightarrow \bar{J} = (-1, 0, 0)$
 \bar{S} on kahe kaardid $\bar{\mu} = (0, -5, 0) \Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{\mu}$ & $\sigma = 0$

*) Punkt $R = (4, 1, \sqrt{3})$ otspunkt. \bar{S} on kaardid, $\bar{J} = (1, 0, 0)$
 $\bar{\mu} = (12, 5, 0) \Rightarrow \bar{\sigma} = (0, 5, 0)$

3.6. Ülesanded

Pinged silindri külgpindadel. Pinged silindri otspindadel.



Ülesanne 2. Leida peapinged ja peasuunad pingetensorile

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ülesannet 2 on võimalik lahendada kahel põhimõtteliselt erineval viisil.

A. «Käitsi.»»

1. Tuleb koostada võrrandisüsteem (3.17) ja vastav karakteristlik determinant.
2. Karakteristlikku determinandi abil tuleb moodustada karakteristlik võrrand ja leida selle lahendid. Viimased ongi peapinged, mis tuleb järjestada kahanevas järjekorras ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).
3. Peapinged σ_i ($i = 1, 2, 3$) tuleb asendada üksahaaval võrrandisüsteemi (3.17).
 - (a) Iga peapinge σ_i jaoks saate kolm võrrandit. Kuna neist vaid kaks on lineaarselt sõltumatud, siis tuleb neist välja valida suvalised kaks, millese tuleb asendada $n_i = 1$ ja leida vastavad l_i ja m_i . Tulemusena saate vektori $\mathbf{N}_i^* = (l_i^*, m_i^*, n_i^*)$, mis määrab peapingele σ_i vastava peasuuna.

3.6. Ülesanded

3 - 28

- (b) Järgmise sammuna tuleb saadud vektor \mathbf{N}^* normeerida, s.t. leida vastav tihikvektor $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i^* / |\mathbf{N}_i^*|$.
4. Peale peasuundade leidmist tuleb kontrollida, kas nad moodustavad parema käe kolmiku, s.t. kas $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

- Kui $\mathbf{N}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ja $\mathbf{N}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, siis

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{array} \right| \end{array} \right\}.$$

B. «Arvutiga»»

1. Sisestada pingetensori maatriks.
2. Leida peaväärtused ja peasuunad. Harilikult on selleks käsk `eig` (*eigenvalues*).
3. Järjestada peaväärtused ja peasuunad ümber nii, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Kuna peaväärtustega koos tuleb ümberjärjestada ka peavektorid, siis tuleb tihiti muuta arvutist saadud peavektori \mathbf{N}_3 orientatsioon selliseks, et $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

Sel leheküljel toodud ülesande 2 lahenduses tuleb valenite viidete juures „näha”

(2. ...) asemel (3. ...)

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix} \quad (2, 14) \rightarrow \begin{cases} (-1-\sigma)l - 16m - 2n = 0 \\ -16l + 5m - 14n = 0 \\ -2l - 14m + (14-\sigma)n = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Karakteristliku
determinant

Karakteristliku
kuupvõrrand

$$\begin{vmatrix} -1-\sigma & -16 & -2 \\ -16 & 5-\sigma & -14 \\ -2 & -14 & 14-\sigma \end{vmatrix} = 0 \dots \Rightarrow \sigma^3 - 18\sigma^2 - 405\sigma + 4374 = 0 \quad (20)$$

(20) \rightarrow kolm lahendust $\sigma = [-18; 27; 9] \rightarrow$

\rightarrow kolm peavärget $\sigma_1 = 27, \sigma_2 = 9, \sigma_3 = -18$; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ \checkmark

$\sigma_i \leftrightarrow$ peavormid \bar{N}_i : $\sigma_1 = 27 \rightarrow (20) \rightarrow \bar{N}_1 = (1/3, -2/3, 2/3)$

$\sigma_2 \rightarrow (20) \rightarrow \bar{N}_2 = (-2/3, 1/3, 2/3)$ $\sigma_3 \rightarrow (20) \rightarrow \bar{N}_3 = (2/3, 2/3, 1/3)$

Peavormide kolmnurk kontroll: $\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$