TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MEHAANIKAINSTITUUT

Dünaamika kodutöö nr. 1

Mitmest lülist koosneva mehhanismi punktide kiiruste ja kiirenduste leidmine

variant ZZ

Lahendusnäide

Üliõpilane: Xxx Yyy
Üliõpilase kood: 020000
Õppejõud: prof. Andrus Salupere
Esitamise kuupäev: 10.11.2003.a.

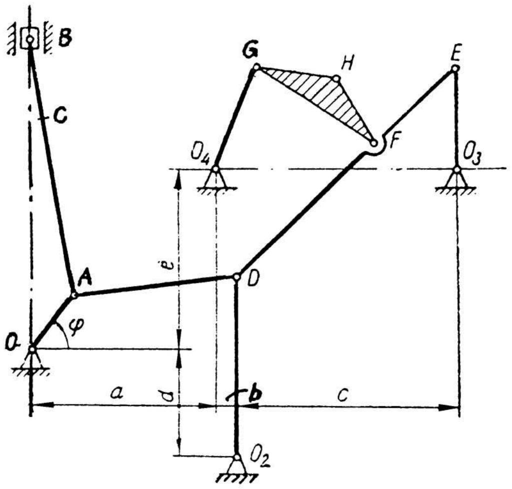
Tallinn 2003

Antud:

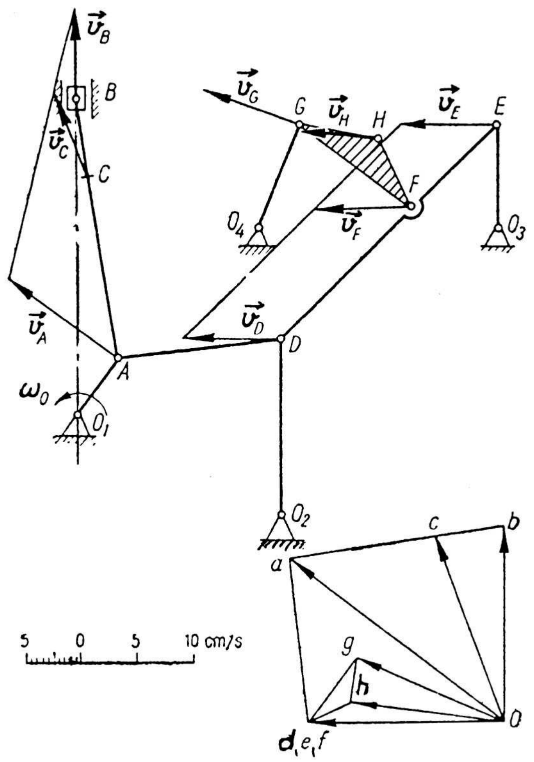
1. mehhanismi skeem antud asendis (joon. 1);
2. lähteandmed (tabel 1).

Tabel 1

φ kraadides	Kaugused [cm]					Lülide pikkused [cm]											
	a	b	c	d	e	O_1A	AB	AC	AD	O_2D	DE	DF	O_3E	FG	GH	FH	O_4G
52	32	4	39	19	32	12	46	32	29	32	53	34	18	25	14	14	20



Joonis 1: Mehhanismi skeem.



Joonis 2: Kiiruste plaan.

LAHENDUS

1. Punktide kiiruste ja mehhanismi lülide nurkkiiruste leidmine kiiruste plaani abil.

a) Punktide kiiruste leidmine. Valime mastaabi ja joonestame mehhanismi skeemi (joon. 2). Arvutame vända O_1A sõrme A kiiruse mooduli:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 \quad \text{cm/s}.$$

Vektor $\mathbf{v}_A$ on risti vändaga O_1A ning selle pöörlemise suunas. Punktide B, D, E, F, ja G kiiruste sihid on määratud mehhanismi skeemiga: $\mathbf{v}_B || O_1B$, $\mathbf{v}_D \perp O_2D$ jne. (joon. 2).

Koostame *kiiruste plaani.* Valime suvalise punkti O kiiruste plaani prooluseks. Tõmbame vektori $\overline{Oa}$, mis kujutab punkti A kiirust valitud mastaabis. Punkti B kiiruse leidmiseks tõmbame läbi kiiruste plaani pooluse O kiirusega $\mathbf{v}_B$ paralleelse sirge ning, läbi punkti a aga kepsuga AB ristuva sirge. Saame punkti b. Vektor $\overline{Ob}$ kujutab punkti B kiirust. Mõõdame selle pikkuse ja kasutades kiiruste mastaapi, leiame, et $v_B = 17,5 \quad \mathrm{cm/s}$.

Põhjendus: Teame, et $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$, kus $\mathbf{v}_{BA}$ on punkti B kiirus punkti A suhtes. Kuna punkt B pöörleb koos kepsuga ümber punkti A, siis on $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$. Kiiruste plaanil kujutab seda kiirust vektor $\overline{ab}$, st. tegelikult $\mathbf{v}_{BA} = \overline{ab}$ (arvestades muidugi mõõtkava). Seega

$$ab = v_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB. \qquad (*)$$

Punkti C kiiruse määrab kiiruste plaani lõik Oc. Kiiruste plaani punkti c leidmiseks rakendatakse järgmist mõttekäiku. Teame, et

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} \quad \text{ja} \quad v_{CA} = \omega_A B \cdot AC = ac. \qquad (**)$$

Avaldiste (*) ja (**) põhjal on seega kiiruste plaani punkt c määratud võrdusega

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC},$$

st. punkt c peab jagama kiiruste plaanil lõigu ab samas suhtes, milles jagab punkt C lõigu AB mehhanismi skeemil. Kasutades kiiruste mastaapi leiame, et $v_C = 17,5\mathrm{cm/s}$. Jätkame kiiruste plaani ehitamist eelpool toodud põhimõtteid rakendades ja leiame punktide D, E, F, G ja H kiirused. Tulemused on toodud tabelis 2.

Tabel 2

Arvutusmeetod	Punktide kiirused cm/s							
	A	B	C	D	E	F	G	H
Kiiruste plaani abil	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8	14,4
Hetkeliste kiiruste tsentrite abil	24	17,3	17,5	17,4	17,4	17,4	14,6	14,1

b) Mehhanismi lülide nurkkiiruste leidmine.

Kuna kiiruse plaani lõik ab kujutab punkti B kiirust tema pöörlemisel ümber punkti A kui pooluse, siis vastavalt avaldisele (*) kepsu AB nurkkiirus

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB} = \frac{19,5}{46} = 0,424 \quad \mathrm{s}^{-1}.$$

Analoogiliselt leiame lülide AD, DE ja FGB nurkkiirused:

$$\begin{aligned} \omega_{AD} &= \frac{ad}{AD} = \frac{14,5}{29} = 0,5 \quad \mathrm{s}^{-1}, \\ \omega_{DE} &= \frac{de}{DE} = \frac{0}{DE} = 0, \\ \omega_{FGH} &= \frac{fg}{FG} = \frac{6,8}{25} = 0,272 \quad \mathrm{s}^{-1}. \end{aligned} \qquad (**)$$

Nurkkiiruse ω_{FGH} võib leida ka järgmisel viisil:

$$\omega_{FGH} = \frac{gh}{GH} = \frac{fh}{FH}.$$

Tabel 3

Arvutusmeetod	Lülide nurkkiirused s^{-1}						
	AB	AD	DE	O_2D	O_3E	FGH	O_4G
Kiiruste plaani abil	0,424	0,500	0	0,547	0,972	0,272	0,740
Hetkeliste kiiruste tsentrite abil	0,421	0,505	0	0,544	0,967	0,278	0,730

Kuna punkt D pöörleb koos vändaga O_2D ümber punkti O_2, siis

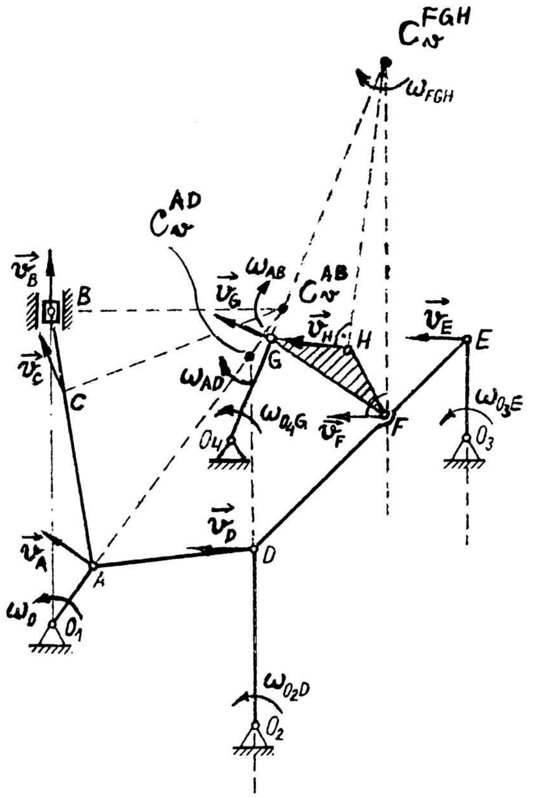
$$\omega_{O_2D} = \frac{v_D}{O_2D} = \frac{17,5}{32} = 0,547 \quad s^{-1}.$$

Analoogiliselt leiame väntade O_3E ja O_4G nurkkiirused:

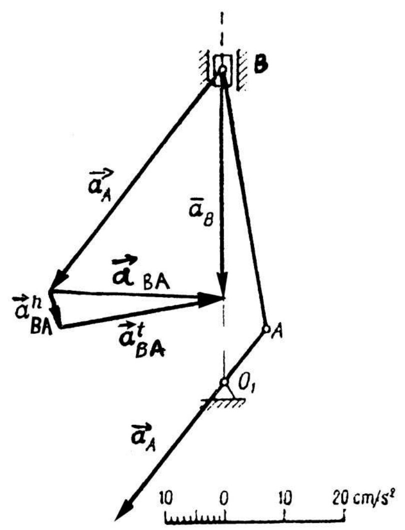
$$\omega_{O_3E} = \frac{v_E}{O_3E} = \frac{17,5}{18} = 0,972 \quad s^{-1},$$
$$\omega_{O_4G} = \frac{v_G}{O_4G} = \frac{14,8}{20} = 0,740 \quad s^{-1}.$$

Saadud nurkkiirused on toodud tabelis 3.

2. Punktide kiiruste ja mehhanismi lülide nurkkiiruste leidmine hetkeliste kiiruste tsentrite abil.



Joonis 3: Hetkelised kiiruse tsentrid.



Joonis 4: Punkti B kiirenduse graafiline leidmine.

Definitsioon ütleb, et hetkeline kiiruste tsenter on selline vaadeldava kehaga seotud punkt, mille kiirus on antud hetkel võrdne nulliga.

a) Mehhanismi lülide hetkeliste kiiruste tsentrite asukohtade leidmine. Joonestame mehhanismi skeemi valitud mastaabis (Joon. 3). Lülid O_1A, O_2D, O_3E ja O_4G pöörlevad liikumatute tsentrite O_1, O_2, O_3 ja O_4 ümber. Järelikult on punktide A, D, E ja G kiirused risti vastavalt lülidega O_1A, O_2D, O_3E ja O_4G. Lüli AB hetkeline kiiruste tsenter C_v^{AB} leitakse järgmiselt. Läbi punkti A tõmmatakse ristsirge kiirusvektoriga $\mathbf{v}_A$ ja läbi punkti B ristsirge kiirusvektoriga $\mathbf{v}_B$. Nende kahe sirge lõikepunkt ongi kepsu AB hetkeline kiiruste tsenter C_v^{AB}. Analoogiliselt leitakse hetkeliste kiiruste tsentrite C_v^{AD} ja C_v^{FGH} asukohad lülidele AD ja FGH. Lüli DE hetkeline kiiruste tsenter asub lõpmatuses.

b) Punktide kiiruste leidmine. Punkti A kiirus $v_A = \omega_0 \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 \quad \text{cm/s}$. Lüli AB punktide kiirused on võrdelised nende punktide kaugustega hetkelisest kiiruste tsentrist C_v^{AB}:

$$\frac{v_A}{AC_v^{AB}} = \frac{v_B}{BC_v^{AB}} = \frac{v_C}{CC_v^{AB}} = \omega_{AB}.$$

Punktide kaugused hetkelisest kiiruste tsentrist mõõdetakse jooniselt. Pikkuste mastaapi kasutades saame:

$$AC_v^{AB} = 57 \text{ cm}, \qquad BC_v^{AB} = 41 \text{ cm}, \qquad CC_v^{AB} = 41,5 \text{ cm},$$

Leiame punktide B ja C kiirused:

$$v_B = v_A \frac{BC_v^{AB}}{AC_v^{AB}} = 24 \cdot \frac{41}{57} = 17,3 \text{ cm/s},$$
$$v_C = v_A \frac{CC_v^{AB}}{AC_v^{AB}} = 24 \cdot \frac{41,5}{57} = 17,5 \text{ cm/s}$$

Punkti D kiiruse leidmiseks kasutame võrdust

$$\frac{v_A}{AC_v^{AD}} = \frac{v_D}{DC_v^{AD}} = \omega_{AD}, \quad \text{kust} v_D = v_A \frac{DC_v^{AD}}{AC_v^{AD}} = 24 \cdot \frac{34,5}{47,5} = 17,4 \text{cm/s}.$$

Kuna lüli DE hetkeline kiiruste tsenter asetseb lõpmatuses, siis $v_E = v_F = v_D = 17,4$ cm/s. Punktide G ja H kiiruste leidmiseks on meil võrdused

$$\frac{v_F}{FC_v^{FGH}} = \frac{v_G}{GC_v^{FGH}} = \frac{v_H}{HC_v^{FGH}} = \omega_{FGH},$$

kust

$$v_G = v_F \frac{GC_v^{FGH}}{FC_v^{FGH}} = 17,4 \cdot \frac{52,8}{62,7} = 14,6 \text{ cm/s},$$
$$v_H = v_F \frac{HC_v^{FGH}}{FC_v^{FGH}} = 17,4 \cdot \frac{50,8}{62,7} = 14,1 \text{ cm/s}.$$

Saadud kiirused (kiirusvektorite moodulid) on toodud tabelis 2.

Samaaegselt punktide kiirusvektorite moodulite leidmisega leiame ka nende kiiruste ja mehhanismi lülide pöörlemise nurkkiiruste suunad. Näiteks punkti A kiiruse suuna ja hetkelise kiiruste tsentri C_v^{AB} asukoha järgi otsustame, et lüli AB pöörleb päripäeva. Seepärast on punkti B kiiruse suund mehhanismi antud asendi puhul üles. Analoogiliselt määrame mehhanismi teiste lülide pöörlemise nurkkiiruste ja teiste punktide kiiruste suunad. Näiteks punkti A kiirusvektori suund määrab nurkkiiruse ω_{AD} suuna, punkti F kiirusvektori suund aga nurkkiiruse ω_{FGH} suuna jne. (vt. joon. 3).

c) Mehhanismi lülide nurkkiiruste leidmine. Lülide AB ja AD nurkkiirused leitakse valemitest

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v^{AB}} = \frac{24}{57} = 0,421\ \mathrm{s}^{-1},$$
$$\omega_{AD} = \frac{v_A}{AC_v^{AD}} = \frac{24}{47,5} = 0,505\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Lüli O_2D nurkkiirus leitakse punkti D kiiruse järgi:

$$\omega_{O_2D} = \frac{v_D}{O_2D} = \frac{17,4}{32} = 0,544\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Lüli DE nurkkiirus võrdub mehhanismi antud asendi puhul nulliga, sest antud lüli hetkeline kiiruste tsenter asetseb käesoleval juhul lõpmatuses

$$\omega_{DE} = 0.$$

Analoogiliselt leiame mehhanismi ülejäänud lülide nurkkiirused:

$$\omega_{O_3E} = \frac{v_E}{O_3E} = \frac{17,4}{18} = 0,967\ \mathrm{s}^{-1},$$
$$\omega_{FGH} = \frac{v_F}{FC_v^{FGH}} = \frac{17,4}{62,7} = 0,278\ \mathrm{s}^{-1},$$
$$\omega_{O_4G} = \frac{v_G}{O_4G} = \frac{14,6}{20} = 0,730\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Saadud nurkkiiruste väärtused on toodud tabelis 2.

***3. Punktide A, B ja D kiirenduste ning lülide AB ja BD nurkkiirenduste graafiline leidmine*[1].**

a) Kiirenduste $\mathbf{a}_A$ ja $\mathbf{a}_B$ ning nurkkiirenduse α_{AB} graafiline leidmine (joon. 4). Lüli AB punkti B kiirenduse leidmiseks kasutame valemit

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t,$$

st. valime punkti A pooluseks ja avaldame punkti B kiirenduse läbi tema kiirenduse. Sel juhul, teatavasti, võrdub punkti B kiirendus geomeetrilise summaga, kus esimene liidetav ($\mathbf{a}_A$) on punkti A kiirendus ja teiseks liidetavaks ($\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$) punkti B kiirendus tema liikumisel ümber punkti A kui pooluse. Kuna vänt O_1A pöörleb ühtlaselt, siis on punkti A puutekiirendus võrdne nulliga ja

$$a_A = a_A^n = O_1A \cdot \omega_0^2 = 12 \cdot 2^2 = 48 \quad \mathrm{cm/s}^2.$$

Valime kiirenduste mastaabi ja joonestame vektori $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n$ (joon. 4).

Punkti B normaalkiirendus kepsu AB pöörlemisel ümber pooluse A on suunatud punktist B punkti A ja

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 46 \cdot 0,4^2 = 7,36 \quad \mathrm{cm/s}^2.$$

Kanname vektori $\mathbf{a}_A$ paralleellükkega punkti B. Vektori $\mathbf{a}_A$ lõpust tõmbame paralleelselt kepsuga AB vektori $\mathbf{a}_{BA}^n$. Viimase lõpust tõmbame kepsuga AB risti, st. puutekiirendusega $\mathbf{a}_{BA}^t$ paralleelse sirge. Selle sirge lõikepunkt liuguri B kiirenduse sihilise sirgega O_1B

[1] Ülesande tingimused näevad ette punktide A ja B kiirenduste ning lüli AB nurkkiirenduse leidmist. Näites leitakse siiski ka punkti D kiirendus ja lüli AD nurkkiirendus. Need vastavad käesolevas kodutöös esineda võivale teisele tüüpjuhtumile.

määrab vektorite $\mathbf{a}_B$, $\mathbf{a}^t_{BA}$ ja $\mathbf{a}_{BA}$ lõpp-punktid (liugur B saab liikuda vaid vertikaalselt ja seega määrab punkti B läbiv vertikaalsirge punkti B kiirenduse sihi). Jooniselt mõõtes saame:

$$a_B = 39 \quad \text{cm/s}^2; \qquad a^t_{BA} = 30 \quad \text{cm/s}^2.$$

Kuna $a^t_{BA} = AB \cdot \alpha_{AB}$, siis lüli AB nurkkiirendus

$$\alpha_{AB} = \frac{a^t_{BA}}{AB} = \frac{30}{46} = 0,652 \quad \text{s}^{-2}$$

b) Punkti D kiirenduse $\mathbf{a}_D$ *ja lüli AD nurkkiirenduse* α_{AD} *graafiline leidmine (joon. 5).* Punkt D on lülide O_2D ja AD ühine punkt. Võttes pooluseks punkti A, saame:

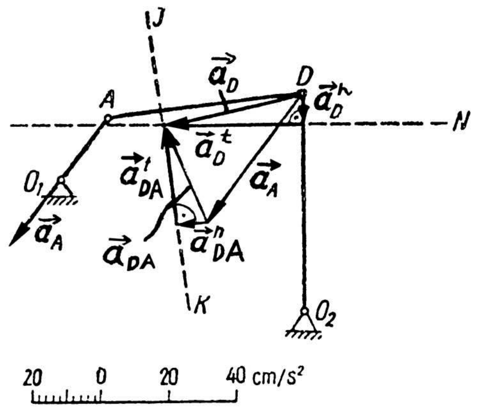
$$\mathbf{a}^n_D + \mathbf{a}^t_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}^n_{DA} + \mathbf{a}^t_{DA}$$

Punkti A kiirendus on varem leitud:

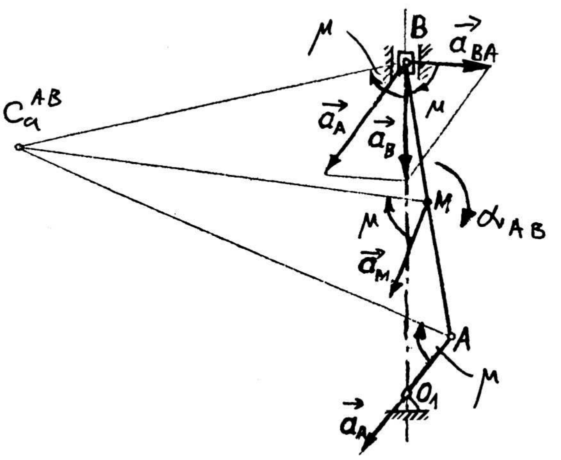
$$a_A = 48 \quad \text{cm/s}^2$$

Punkti D normaalkiirendus lüli AD pöörlemisel ümber punkti A kui pooluse on suunatud punktist D punkti A ja

$$a^n_{DA} = AD \cdot \omega^2_{AD} = 28,5 \cdot 0,5^2 = 7,1 \quad \text{cm/s}^2.$$



Joonis 5: Punkti D kiirenduse graafiline leidmine.



Joonis 6: Punkti M kiirenduse leidmine hetkelise kiirenduse tsentri abil.

Tõmbame punktist D vastavas mastaabis pooluse kiirenduse $\mathbf{a}_A$. Vektori $\mathbf{a}_A$ lõpust tõmbame vektori $\mathbf{a}^n_{DA}$ paralleelselt lüliga DA. Läbi vektori $\mathbf{a}^n_{DA}$ tipu tõmbame sirge JK risti kepsuga AD, st. puutekiirenduse $\mathbf{a}^t_{DA}$ sihis. Teiselt poolt, punkti D, kui vända O_2D punkti normaalkiirendus

$$a^n_D = O_2D \cdot \omega^2_{O_2D} = 32 \cdot 0,5^2 = 8 \quad \text{cm/s}^2.$$

Tõmbame punktist D vektori $\mathbf{a}^n_D$ suunaga tsentrisse O_2. Läbi vektori $\mathbf{a}^n_D$ tipu tõmbame sirge LN risti lüliga O_2D, st. puutekiirenduse $\mathbf{a}^t_D$ sihis. Selle sirge ja sirge JK lõikepunkt määrab vektorite $\mathbf{a}_D$ $\mathbf{a}^t_{DA}$ ja $\mathbf{a}^t_D$ lõpp-punktid. Jooniselt mõõtes saame:

$$a_D = 42 \quad \text{cm/s}^2; \quad a^t_{DA} = 30 \quad \text{cm/s}^2.$$

Kuna $a^t_{DA} = AD \cdot \alpha_{AD}$, siis lüli AD nurkkiirendus

$$\alpha_{AD} = \frac{a^t_{DA}}{AD} = \frac{30}{29} = 1,03 \quad \mathrm{s}^{-2}$$

Lüli O_2D nurkkiirendus

$$\alpha_{O_2D} = \frac{a^t_D}{O_2D} = \frac{41}{32} = 1,281.$$

Tulemused on esitatud tabelis 4.

Tabel 4

Arvutusmeetod	Kiirendused cm/s^2		Nurkkiirendused s^{-2}		
	B	D	AB	AD	O_2D
Graafiline	24	17,5	17,5	17,5	17,5
Analüütiline	24	17,3	17,5	17,4	17,4

4. Punktide A, B ja D kiirenduste ning lülide AB ja BD nurkkiirenduste analüütiline leidmine.

Kiirenduste ja nurkkiirenduste analüütiline leidmine toimub loengu ja harjutustunni näidetega analoogiliselt. Vajalikud pikkused ja nurgad mõõdetakse jooniselt. Tulemused on esitatud tabelis 4.

5. Lüli AB hetkelise kiirenduste tsentri asukoha leidmine (joon.6).

Definitsioon järgi on hetkeline kiirenduste tsenter on selline vaadeldava kehaga seotud punkt, mille kiirendus on antud hetkel võrdne nulliga.

Võtame punkti A pooluseks. Siis punkti B kiirendus

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}.$$

Ehitame punktis B kiirenduste rööpküliku, mille diagonaaliks on vektor $\mathbf{a}_B$ ja üheks kü1jeks vektor $\mathbf{a}_A$. Rööpküliku külg $\mathbf{a}_{BA}$ kujutab punkti B kiirendust pöörlemisel ümber pooluse A. Kiirendus $\mathbf{a}_{BA}$ moodustab kepsuga AB nurga μ, mida võib jooniselt mõõta. Vektori $\mathbf{a}_{BA}$ suund pooluse A suhtes lubab määrata nurkkiirenduse α_{AB} suuna, mis käesoleval juhul on päripäeva. Ehitades vektoritele $\mathbf{a}_A$ ja $\mathbf{a}_B$ nurgaga μ võrdsed nurgad (samuti päripäeva) ning tõmmates punktidest A ja B kaks kiirt, leiame nende lõikepunkti C_a^{AB}, mis esitab lüli AB hetkelise kiirenduste tsentri.

6. Punkti M kiirenduse leidmine.

Leiame punkti M kiirenduse kasutades hetkelist kiirenduste tsentrit. Tasapinnalise kujundi punktide kiirendused on võrdelised nende punktide kaugustega hetkelisest kiirenduste tsentrist. Järelikult

$$a_M = a_A \frac{MC_a^{AB}}{AC_a^{AB}} = 48\frac{67.5}{77} = 42,1 \quad \mathrm{cms}^2.$$

Kaugused MC_a^{AB} ja AC_a^{AB} mõõdame jooniselt. Kiirendus $\mathbf{a}_M$ (joon. 6) moodustab sirgega MC_a^{AB} nurga μ. Selle vektori suund määratakse vastavalt nurkkiirendusele α_{AB}.