

Tallinna Tehnikaülikool  
Mehaanikainstituut  
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

# DÜNAAMIKA ÜLESANDED

Tallinn 2003/2004/2005

## Eessõna

Käesolev ülesannete kogu on mõeldud kasutamiseks eeskätt Tallinna Tehnikaülikooli tehnilise füüsika eriala üliõpilastele dünaamika kursuse (EMR5170 ja EMR0020) õppimisel. Kogu koostamisel on kasutatud praktiliselt kõiki «Dünaamika Programmi» kirjanduse loetelus toodud õpikuid ja metoodilisi abimaterjale. Põhiosa ülesandeist pärineb siiski E. Topniku poolt koostatud ülesannete kogust<sup>1</sup>. Mitmed ülesanded on pärit ka Tartu Ülikooli teoreetilise mehaanika kateedris koostatud teoreetilise mehaanika ülesannete kogust<sup>2</sup>. Valdava osa ülesannete puhul pole antud kogu koostaja teinud ülesannete tekstis sisulisi muutusi ega pretendeeri seega ka autorlusele. Teatud osa ülesandeid on aga originaalsed või esitatud oluliselt modifitseeritud kujul. Ülesannete valikul on silmas peetud tüüpilisi kontrolltöodes ja eksamil kasutatavaid ülesandeid. Valdav osa ülesandeid on varustatud vastustega. Vastused puuduvad vaid osadel analüütilise mehaanika ülesannetel, mis käsitlevad D'Alembert'i printsiipi ja Lagrange'i teist liiki võrrandeid.

Andrus Salupere

---

<sup>1</sup>E. Topnik (koostaja). Teoreetilise mehaanika harjutusülesanded. Tallinn, 1988.

<sup>2</sup>H. Kull, K. Soonets ja I. Vainikko (koostajad). Teoreetilise mehaanika ülesannete kogu. Tartu, 1987.

# 1 Kinemaatika

## 1.1 Punkti kinemaatika

**1.1.** Punkti liikumisseadus on esitatud kujul

$$\begin{cases} x = t \text{ [m]}, \\ y = \frac{t^2}{2} \text{ [m]}, \\ z = t \text{ [m]}. \end{cases}$$

Leida selle punkti kiirus, normaal- ja puutekiirendus ning trajektoori kõverusraadius hetkel  $t = 1$  s.

*Vastus:*  $v_1 = \sqrt{3}$ ;  $a_{1n} = \sqrt{2/3}$ ;  $a_{1t} = \sqrt{1/3}$ ;  $\rho_1 = 3\sqrt{1,5}$ .

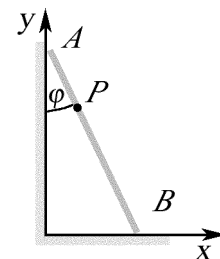
**1.2.** Punkt liigub ringjoonel raadiusega 0,5 m. Tema puutekiirendus muutub vastavalt seadusele  $a_t = 3t^2 - 4$   $[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$ , algkiirus  $v_0 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$  ja algkoordinaat  $s_0 = 0$  m. Leida selle punkti kiirus ja kiirendus hetkel  $t_1 = 2$  s ning liikumisseadus.

*Vastus:*  $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $a_1 = 8\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;  $s = 0,25t^4 - 2t^2 + 2t$  [m].

**1.3.** Punkt liigub mööda sirgjoont. Tema kiirus muutub vastavalt seadusele  $\dot{s} = 3t^2 - 6t$   $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ . Punkti algkoordinaat  $s_0 = 0$ . Leida punkti asukoht (koordinaat)  $s_1$ , tema poolt läbitud tee  $s_T$ , kiirus ja kiirendus hetkel  $t_1 = 3,5$  s.

*Vastus:*  $s_1 = 6,125$  m;  $s_T = 14,125$  m;  $v_1 = 15,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $a_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**1.4.** Tala  $AB$  pikkusega 0,6 m toetub ühe otsaga põrandale ja teise vastu vertikaalset seina. Nurk seina ja tala vahel muutub vastavalt seadusele  $\varphi = 4t$  [rad]. Leida tala ülemisest otsast 0,2 m kaugusel oleva punkti liikumisseadus ning kiirus ja kiirendus hetkel kui tala on jõudnud põrandale.



*Vastus:*  $x_P = 0,2 \sin 4t$  [m];  $y_P = 0,4 \cos 4t$  [m];  
 $v_1 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $a_1 = 3,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

**1.5.** Punkti liikumisseadus on  $s = 3te^{2t}$  [m]. Tema kiiruse ja kiirenduse vaheline nurk on kogu liikumise vältel  $30^\circ$ . Leida kiiruse, kiirenduse ja trajektoori kõverusraadiuse muutumise seadused.

*Vastus:*  $v = 3e^{2t}(1 + 2t)$   $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ ;  $a = \frac{24}{\sqrt{3}}e^{2t}(1 + t)$   $[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$ ;  $\rho = \frac{3\sqrt{3}e^{2t}(1 + 2t)^2}{4(1 + t)}$  [m].

**1.6.** Punkti kiirendus muutub vastavalt seadusele

$$\begin{cases} a_x = 3t^2 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \\ a_y = 6t \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]. \end{cases}$$

Punkti algkoordinaadid on  $x_0 = 0$  ja  $y_0 = 5$  [m] ning algkiirus  $v_{0x} = 2 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$  ja  $v_{0y} = -1 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ , leida tema liikumisseadus ja trajektoori kõverusraadius hetkel  $t_1 = 1$  s.

*Vastus:*  $x = 2t + 0,25t^4$  [m];  $y = 5 - t + t^3$  [m];  $\rho_1 = 3,91$  m.

**1.7.** Punkt hakkab liikuma paigalseisust ühtlaselt kiirenevalt. Hetkel  $t_1 = 6$  s on tema kiirus  $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Leida punkti kiirus ja läbitud teepikkus hetkel  $t_2 = 10$  s.

*Vastus:*  $v_2 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $s_2 = 250$  m.

**1.8.** Kahurist tulistatakse kaks mürsku. Mõlema algkiirus on  $400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Sihtmärk asub 12 km kaugusel ja mõlemad mürsud peavad tabama märki samaaegselt. Leida vastavad laskenurgad ning laskude vaheline intervall. Õhutakistust mitte arvestada.

*Vastus:*  $\vartheta_1 = 66,3^\circ$ ;  $\vartheta_2 = 23,7^\circ$ ;  $\Delta t = 41,92$  s.

**1.9.** Keha visatakse algkiirusega  $v_0$  horisontaalist nurga  $\alpha$  võrra ülespoole. Leida 1) lennukõrgus, 2) lennukaugus, 3) trajektoori kõverusraadius trajektoori kõrgeimas punktis ja mahalangemise hetkel, 4) trajektoori ilmutatud võrrand ( $y = f(x)$ ). Õhutakistust mitte arvestada.

*Vastus:*  $h = (v_0^2 \sin^2 \alpha)/(2g)$ ;  $l = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g$ ;  $\rho_1 = (v_0^2 \cos^2 \alpha)/g$ ;  
 $\rho_2 = v_0^2/(g \cos \alpha)$ ;  $y = x \tan \alpha - (gx^2)/(2v_0^2 \cos^2 \alpha)$ .

**1.10.** Punkt liigub ringjoonel raadiusega 0,5 m. Tema algkiirus  $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ja liikumine on ühtlaselt kiirenev. Hetkel  $t_1 = 3$  s on läbitud teepikkus  $s_1 = 24$  m. Leida punkti kiirus ja kiirendus sel hetkel.

*Vastus:*  $v_1 = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $a_1 = 392,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**1.11.** Keha visatakse kõrguselt  $h_0 = 20$  m algkiirusega  $v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  horisontaali suhtes nurga  $30^\circ$  võrra ülespoole. Leida keha lennukaugus. Õhutakistust mitte arvestada.

*Vastus:*  $l = 60\sqrt{3}$  m.

## 1.2 Jäiga keha pöörlemine

**1.12.** Keha pöörleb ümber  $z$ -telje ja tema nurkkiirus muutub vastavalt seadusele  $\omega_z = 16t^2 \left[\frac{1}{s}\right]$ . Leida pöörlemisteljest 0,1 m kaugusel oleva punkti kiirus ja kiirendus hetkel kui nurk punkti kiiruse ja kiirenduse vahel on  $45^\circ$  ning keha pöörlemise võrrand kui algpöördenurk  $\varphi_0 = 3$  rad.

*Vastus:*  $v_1 = 0,4 \frac{m}{s}$ ;  $a_1 = 1,6\sqrt{2} = 2,26 \frac{m}{s^2}$ ;  $\varphi = 3 + \frac{16}{3}t^3$  rad.

**1.13.** 10 cm raadiusega ratta algnurkkiirus on 100 pöoret minutis ning ta pöörleb ühtlaselt aeglustuvalt nurkkiirendusega  $\pi/9 \frac{1}{s^2}$ . Leida 1) ratta servapunkti kiirendus hetkel  $t_1 = 5$  s ja 2) mitu pöoret teeb ratas seiskumiseni.

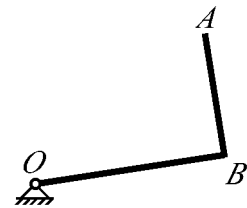
*Vastus:*  $a_1 = 7,62 \frac{m}{s}$ ;  $\varphi_2 = 25$  pöoret

**1.14.** Keha pöörleb ümber  $z$ -telje ja tema nurkkiirendus muutub vastavalt seadusele  $\alpha_z = 2\pi^2 \sin \pi t \left[\frac{1}{s^2}\right]$ . Leida keha nurkkiirus ja pöördenurk hetkel  $t_1 = 2/3$  s, kui algnurkkiirus  $\omega_0 = 0$  ja algpöördenurk  $\varphi_0 = 2$  rad.

*Vastus:*  $\omega_1 = 3\pi \frac{1}{s}$ ;  $\varphi_1 = 4,45$  rad

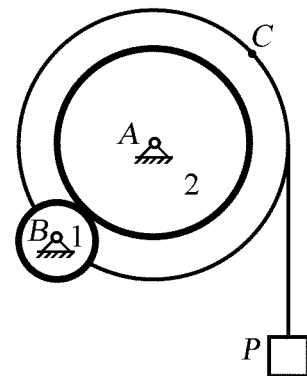
**1.15.** Täisnurkne murtud varras  $ABO$  pöörleb ümber punkti  $O$  päripäeva ühtlaselt aeglustuvalt nurkkiirendusega  $4 \frac{rad}{s^2}$ .  $AB = 0,3$  m ja  $OB = 0,4$  m. Leida punkti  $A$  kiirus ja kiirendus hetkel kui varda nurkkiirus on  $2 \left[\frac{rad}{s}\right]$ .

*Vastus:*  $v = 1 \frac{m}{s}$ ;  $a = 2,83 \frac{m}{s^2}$



**1.16.** Mootoriga ühendatud hammasratas 1 paneb pöörlema trumliga ühendatud hammasratta 2 (raadiused vastavalt 0,1; 0,4 ja 0,3 m). Raskust  $P$  hakatakse tõstma konstantse kiirendusega (alghetkel asub  $P$  põrandal). Kui raskus on jõudnud 0,8 m kõrgusele, on tema kiirus  $2 \frac{m}{s}$ . Leida trumli servapunkti  $C$  kiirendus ning hammasratta 1 nurkkiirus ja nurkkiirendus sel hetkel.

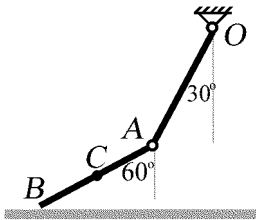
*Vastus:*  $a_1^C = 10,31 \frac{m}{s^2}$ ;  $\omega_1 = 15 \frac{1}{s}$ ;  $\alpha_1 = 18,75 \frac{1}{s^2}$ .



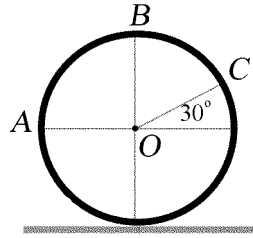
### 1.3 Jäiga keha tasapinnaline liikumine

**1.17.** Varras  $OA$  pöörleb antud hetkel vastupäeva nurkkiirusega  $\omega$ ,  $OA = AB = l$  ja  $AC = 0,5AB$ . Leida punktide  $B$  ja  $C$  kiirused ning lüli  $AB$  nurkkiirus.

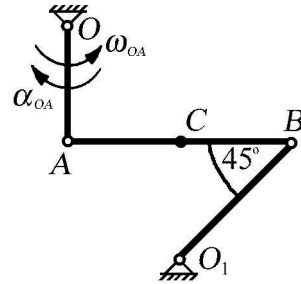
$$\text{Vastus: } v_B = \frac{\omega l}{\sqrt{3}}; \quad v_C = \frac{\sqrt{3}\omega l}{2}; \quad \omega_{AB} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}.$$



Ülesanne 1.17.



Ülesanne 1.18.



Ülesanne 1.19.

**1.18.** Ratas raadiusega  $r = 1$  m veereb ilma libisemata mööda horisontaalset pinda. Tema keskpunkti kiirus  $v_O = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ja kiirendus  $a_O = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Leida punktide  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kiirused ja kiirendused.

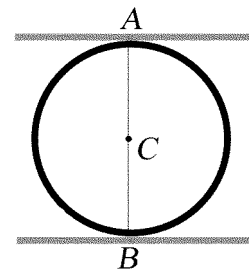
$$\text{Vastus: } v_A = 16,97 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad v_B = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad v_C = 20,78 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$a_A = 156,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad a_B = 145,99 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad a_C = 134,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

**1.19.** Vänt  $OA$  pöörleb antud hetkel ümber punkti  $O$  nurkkiirusega  $\omega_{OA} = 3 \frac{1}{\text{s}}$  ja nurkkiirendusega  $\alpha_{OA} = 2 \frac{1}{\text{s}^2}$ .  $OA = 0,2$  m;  $AB = 0,4$  m;  $AC = CB$  ja  $O_1B = 0,3$  m. Leida punktide  $B$  ja  $C$  kiirendused ning lülide  $AB$  ja  $O_1B$  nurkkiirendused sel hetkel.

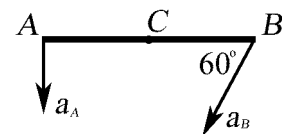
$$\text{Vastus: } a_B = 2,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad a_C = 0,86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \alpha_{AB} = 9,74 \frac{1}{\text{s}^2}; \quad \alpha_{O_1B} = 1,87 \frac{1}{\text{s}^2}.$$

**1.20.** Silinder raadiusega  $r = 0,125$  m asub kahe horisontaalse plaadi vahel. Ülemine plaat liigub kiirenevalt paremale. Antud hetkel on tema kiirus  $0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ja kiirendus  $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Alumine plaat liigub antud hetkel aeglustuvalt vasakule kiirusega  $0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ja kiirendusega  $0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Leida 1) silindri nurkkiirendus ja 2) silindri punkti  $B$ , mis on vaadeldaval hetkel on kontaktis alumise plaadiga, kiirendus.



$$\text{Vastus: } \alpha = 0,40 \frac{1}{\text{s}^2}; \quad a_B = 1,04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**1.21.** Varras  $AB$  pikkusega  $0,5$  m liigub tasapinnaliselt. Otsa  $A$  kiirendus  $a_A = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  on risti vardaga ja otsa  $B$  kiirendus  $a_B = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  moodustab vardaga nurga  $60^\circ$ . Leida varda keskpunkti  $C$  kiirendus ja varda nurkkiirendus.



$$\text{Vastus: } a_C = 0,242 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \alpha_{AB} = 0,12 \frac{1}{\text{s}^2}$$

## 1.4 Liitliikumine

**1.22.** Ring raadiusega 60 cm pöörleb ümber telje  $AB$  nurkkiirusega  $4 \frac{1}{s}$  ja nurkkiirendusega  $2 \frac{1}{s^2}$ . Ringi äärel liigub punkt  $P$  vastavalt seadusele  $OP = s = 2\pi(35 - t^2)$  [cm]. Loomuliku koordinaadi  $s$  nullpunkt ja positiivne ning negatiivne suund on näidatud joonisel. Leida punkti absoluutne kiirus ja absoluutne kiirendus hetkel  $t_1 = 5$  s.

Vastus:  $v_1 = 3,65 \frac{m}{s}$ ;  $a_1 = 14,86 \frac{m}{s^2}$ .

**1.23.** Vänt  $OA$  pikkusega 0,5m pöörleb joonise tasapinnas ümber punkti  $O$ . Antud hetkel on vända nurkkiiruse ja nurkkiirenduse moodulid  $\omega_{OA} = 3 \frac{1}{s}$  ja  $\alpha_{OA} = 5 \frac{1}{s^2}$ . Punktis  $A$  on vända külge kinnitatud ratas raadiusega 0,2m, mis pöörleb vända suhtes jääva nurkkiirusega  $\omega_1 = 4 \frac{1}{s}$ . Leida punkti  $P$  kiirus ja kiirendus antud hetkel kui  $AP \perp OA$ .

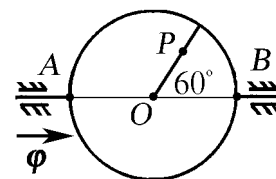
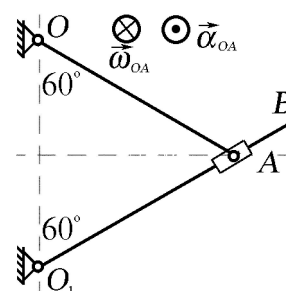
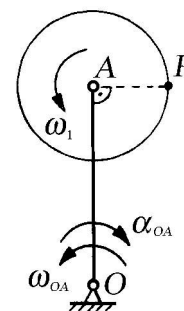
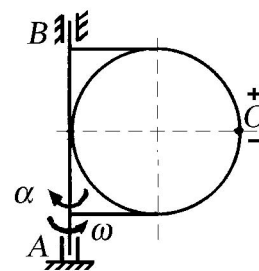
Vastus:  $v_P = 2,05 \frac{m}{s}$ ;  $a_P = 9,14 \frac{m}{s^2}$ .

**1.24.** Vända  $OA$  pikkus on 0,2 m. Tema külge on punktis  $A$  liigendi abil kinnitatud liugur, mis saab libiseda vändal  $O_1B$ . Joonisel kujutatud hetkel on vända  $OA$  nurkkiirus  $\omega_{OA} = 4 \frac{1}{s}$  ja nurkkiirendus  $\alpha_{OA} = 6 \frac{1}{s^2}$ . Leida vända  $O_1B$  nurkkiirendus sel hetkel.

Vastus:  $\alpha_{O_1B} = 3 \frac{1}{s^2}$ .

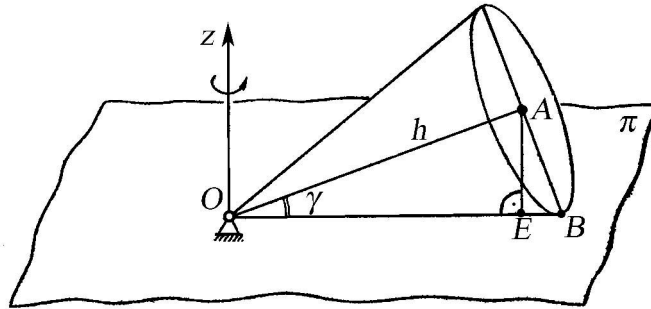
**1.25.** Ketas pöörleb ümber telje  $AB$  vastavalt võrrandile  $\varphi = 3t^2$  [rad]. Ketta raadiusel liigub punkt  $P$  vastavalt seadusele  $OP = s = 8t^2$  [cm]. Leida punkti  $P$  absoluutne kiirus ja absoluutne kiirendus hetkel  $t_1 = 2$  s.

Vastus:  $v_P = 3,34 \frac{m}{s}$ ;  $a_P = 40,69 \frac{m}{s^2}$ .



## 1.5 Jäiga keha sfääriline liikumine

**1.26.** Koonus kõrgusega  $h$  ja põhja raadiusega  $r$  veereb libisemata mööda tasapinda  $\pi$ , kusjuures koonuse tipp  $O$  jääb paigale. Teades, et ühe täispöörde tegemiseks ümber  $z$ -telje kulub  $T$  sekundit ja et koonuse telg  $OA$  pöörleb ümber  $z$ -telje jääva nurkkiirusega, määrata: 1) nurkkiirus, millega koonus pöörleb ümber oma telje  $OA$ ; 2) koonuse pöörlemise nurkkiirendus; 3) punkti  $A$  kiirus ja kiirendus.



Vastus:  $\omega_r = (2\pi\sqrt{h^2 + r^2})/(Tr)$ ;  $\alpha = (4\pi^2 h)/(T^2 r)$ ;  
 $v_A = (2\pi h^2)/(T\sqrt{h^2 + r^2})$ ;  $a_A = (4\pi^2 h^2)/(T^2\sqrt{h^2 + r^2})$ .



## 2 Klassikaline dünaamika ehk punktmasside ja jäikade kehade dünaamika

### 2.1 Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet

**2.1.** Kraana trossi otsas ripub keha kaaluga  $P$ . Leida tõmme trossis kui keha liigub kiirendusega  $a$  1) üles, 2) alla.

$$\text{Vastus: } 1) T = P\left(1 + \frac{a}{g}\right); \quad 2) T = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

**2.2.** Kehale massiga  $m$  [kg] mõjub jõud  $F = \sin t$  [N]. Leida keha liikumisseadus kui tema algkoordinaat  $x_0 = 1$  m ja algkiirus  $v_0 = -1$   $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\text{Vastus: } x = 1 + \frac{1}{m}[(1 - m)t - \sin t] \text{ [m]}$$

**2.3.** Punktmass massiga  $m$  liigub keskkonnas, kus takistusjõud on võrdeline kiirusega, võrdetegur on  $k$ . Leida punktmassi kiiruse sõltuvus koordinaadist, kiiruse sõltuvus ajast ja liikumisseadus kui tema algkoordinaat on null ning algkiirus  $1$   $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

$$\text{Vastus: } \dot{x} = 1 - \frac{k}{m}x; \quad \dot{x} = e^{-\frac{k}{m}t}; \quad x = \frac{m}{k}[1 - e^{-\frac{k}{m}t}]$$

**2.4.** Kuul läbis seina paksusega  $h$ . Tema kiirus seina sisenemisel oli  $v_1$  ja seinast väljumisel  $v_2$ . Leida seina läbimiseks kulunud aeg  $t_h$ , eeldades et takistusjõud oli võrdeline kiiruse ruuduga.

$$\text{Vastus: } t_h = \frac{h(v_1 - v_2)}{v_1 v_2 \ln \frac{v_1}{v_2}}$$

**2.5.** Matemaatiline pendel koosneb väikesest raskest kehast kaaluga  $P$  ja kaalutust niidist pikkusega  $l$ . Leida: 1) Tõmme niidis sõltuvana kiirusest  $v$  ja kaldenurgast  $\varphi$ , st.  $T(v, \varphi)$ ; 2) millist minimaalset kiirust peab keha omama, et niit oleks pingul kui pendli kaldenurk  $90^\circ < \varphi < 270^\circ$ , st.,  $v_{\min}(\varphi)$ .

$$\text{Vastus: } T = P \left( \frac{v^2}{lg} + \cos \varphi \right); \quad v_{\min} = \sqrt{-lg \cos \varphi}$$

**2.6.** Keha kaaluga  $P$  visatakse vertikaalselt üles algkiirusega  $v_0$ . Keskkonna takistusjõud  $R = k^2 P v^2$  ( $k$  on tuntud suurus). Kui kõrgele keha tõuseb ja kui kaua selleks aega kulub?

$$\text{Vastus: } h^* = \frac{\ln(1 + k^2 v_0^2)}{2gk^2}; \quad t^* = \frac{\arctan kv_0}{kg}.$$

**2.7.** Punktmass massiga  $m$  liigub  $x - y$  tasandil. Talle mõjub  $x$  telje sihiline jõud  $F = bt^2$  ( $b > 0$ ) ja tema algkiirus  $v_0$  moodustab  $x$  teljega nurga  $\alpha$ . Leida punkti trajektoori ilmutatud võrrand.

$$\text{Vastus: } x = y \cot \alpha + \frac{by^4}{12mv_0^4 \sin^4 \alpha}.$$

**2.8.** Keha langeb Kuule kõrguselt  $h$ . Talle mõjub vaid gravitatsioonijõud, mis on pöördvõrdeline keha kauguse ruuduga Kuu tsentrist. Millise kiirusega jõuab keha Kuu pinnale kui Kuu raadius on  $R$ , keha algkiirus on null ja raskuskiirendus Kuu pinnal on  $g$ .

$$\text{Vastus: } v = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

**2.9.** Keha massiga  $m$  visatakse kiirusega  $v_0$  horisontaali suhtes nurga  $\lambda$  võrra ülespoole. Leida keha liikumisseadus kui õhutakistus on võrdeline kiirusega ja võrdetegur on  $b$ .

$$\text{Vastus: } x = \frac{mv_0}{b} \cos \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right]; \quad y = \frac{m}{b} \left[ \left( \frac{mg}{b} + v_0 \sin \lambda \right) \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) - gt \right]$$

## 2.2 Punktmassi relatiivse liikumise põhivõrrand

**2.10.** Vagun liigub kiirusega  $v_0$ . Vagunil asub kast kaaluga  $P$ . Leida kasti relatiivse liikumise seadus kui vagunit hakatakse pidurdama konstantse kiirendusega  $a$ . Hõõrdetegur kasti ja vaguni vahel on  $\mu$ . Millise vahemaa läbib kast vagunil kuni vaguni seiskumiseni?

$$\text{Vastus: } \xi = 0,5(a - \mu g)t^2; \quad \xi^* = \frac{0,5(a - \mu g)v_0^2}{a^2}.$$

## 2.3 Dünaamika üldteoreemid

**2.11.** Vertikaalselt langev taldrik kaaluga 4 N kukkus põrandale neljaks killuks. Üks kild kaaluga 1 N leiti kukkumiskohast 0,8 m kirde pool, teine kaaluga 0,7 N — 2 m lõuna pool ja kolmas kaaluga 1,5 N — 1,2 m loode pool. Kuhu lendas neljas kild?

$$\text{Vastus: } \Delta x_4 = 0,884 \text{ m}; \quad \Delta y_4 = -0,548 \text{ m}.$$

**2.12.** Hõõrdevabal vankril kaaluga 1 kN istub poiss kaaluga 0,4 kN. Vankri ees on samasugune tühi vanker. Poiss lükkab tühja vankri eemale. Kui palju on liikunud poisiga vanker 1) hetkeks kui vankrite vaheline kaugus on 1 m ja 2) hetkeks kui tühi vanker on liikunud 1m?

$$\text{Vastus: } 1) \Delta x_1 = -0,417 \text{ m}; \quad 2) \Delta x_1 = -0,714 \text{ m}.$$

**2.13.** Paadis kaaluga  $G$  on poiss kaaluga  $P$  ja tõmbab nööriiga lähemale parve kaaluga  $W$ . Kui palju liigub parv paadiga kohtumiseni kui algul oli paadi ja parve vahekaugus  $l$ ?

$$\text{Vastus: } d = \frac{(G + P)l}{G + P + W}.$$

**2.14.** Parve pikkus on  $l$  ja kaal  $P$ . Parve ühes otsas seisab inimene kaaluga  $G$ . Kui kiiresti hakkab liikuma parv kui inimene hakkab liikuma piki parve relatiivse kiirusega  $v$ ? Kui palju on liikunud parv kui inimene on jõudnud parve teise otsa?

$$\text{Vastus: } |u| = \frac{Gv}{P + G}; \quad |d| = \frac{Gl}{P + G}.$$

**2.15.** Tuletõrjevoolikust väljub veejuga kiirusega  $v$ . Joa ristlõike pindala on  $S$ , tihedus  $\rho$  ning ta moodustab horisontaaliga nurga  $\alpha$ . Leida veejoa surve vertikaalsele seinale, jättes arvestamata raskusjõu mõju joa kujule ning eeldades, et seinaga kokku puutudes liigub vesi edasi mööda seinu.

$$\text{Vastus: } F_x = \rho S v^2 \cos \alpha.$$

**2.16.** Piljardikuul tabas kahte kõrvuti seisvat ja samasugust kuuli kiirusega  $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Üks tabamuse saanud kuulidest hakkas liikuma kiirusega  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  löögikuuli suhtes vasakule  $60^\circ$  nurga all, teine kiirusega  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  paremale  $30^\circ$  nurga all. Millise kiirusega ja mis suunas liikus löögikuul peale põrget?

$$\text{Vastus: } v = 9,96 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \gamma = 15,47^\circ$$

**2.17.** Prisma kaaluga  $60 \text{ N}$  asub siledal horisontaalsel pinnal. Tema küljes oleva ploki kaal on  $5 \text{ N}$ , 3. keha kaal  $20 \text{ N}$  ja 4. keha kaal  $15 \text{ N}$ . Kui palju liigub prisma kui 3. keha laskub  $10 \text{ cm}$  võrra?

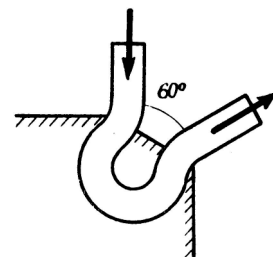
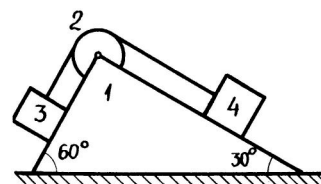
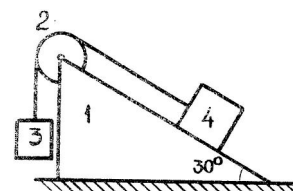
$$\text{Vastus: } 1,3 \text{ cm}.$$

**2.18.** Prisma kaal on  $G$  ja ta asub siledal horisontaalsel pinnal. Tema küljes oleva ploki kaal on  $P$  ning 3. ja 4. keha kaal vastavalt  $W$  ja  $Q$ . Leida prisma kiirus kui kolmas keha hakkab laskuma kiirusega  $u$  prisma suhtes.

$$\text{Vastus: } v_1 = \frac{W + \sqrt{3}Q}{2(G + P + W + Q)}u.$$

**2.19.** Torus läbimõõduga  $6 \text{ cm}$  voolab vesi kiirusega  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Leida toe dünaamiline reaktsioon.

$$\text{Vastus: } F_x = 22,04 \text{ N}; \quad F_y = 38,17 \text{ N}; \quad F = 44,08 \text{ N}.$$



**2.20.** Ühtlase horisontaalse ketta kaal on  $G$  ja raadius  $r$  ning alghetkel  $t = 0$  pöörleb ta nurkkiirusega  $\omega_0$ . Ketta serval seisab punktmass kaaluga  $W$ . Leida ketta nurkkiiruse ja nurkkiirenduse muutumise seadused kui punktmass hakkab liikuma mööda ketta äärt pöörlemisele vastassuunas vastavalt seadusele  $s = ct^3$  (s.o. relatiivse liikumise seadus).

$$\text{Vastus: } \omega = \omega_0 + \frac{6cWt^2}{r(G + 2W)}; \quad \alpha = \frac{12cWt}{r(G + 2W)}.$$

**2.21.** Ühtlane toru  $AB$  pöörleb ümber vertikaalse telje. Toru pikkus on  $l$ , kaal  $G$  ning inertsiraadius pöörlemistelje suhtes  $i$ . Torus liigub kuulike kaaluga  $W$ . Hetkel kui kuulike on otsast  $A$  kaugusel  $d$ , on toru nurkkiirus  $\omega_0$ . Leida toru nurkkiirus hetkel kui kuulike on jõudnud toru otsa  $B$ .

$$\text{Vastus: } \omega = \frac{3Wd^2 + 4Gi^2}{3Wl^2 + 4Gi^2}\omega_0.$$

**2.22.** Süsteem koosneb kolmest kehast. Esimese kaal on  $W$  ja kolmanda kaal  $P$ . Ühtlase ploki kaal on  $G$  ja raadius  $r$ . Kaldpinna kaldenurk on  $\gamma$ . Leida ploki nurkkiirendus eeldades, et 1. keha hakkab liikuma alla. Hõõret mitte arvestada.

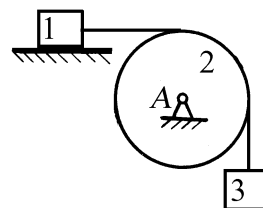
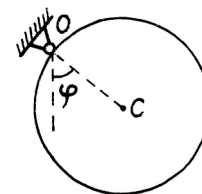
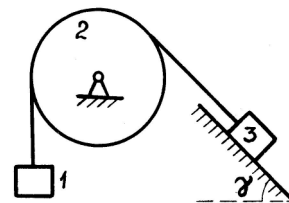
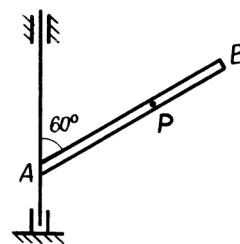
$$\text{Vastus: } \alpha = \frac{2g(W - P \sin \gamma)}{r(2W + G + 2P)}.$$

**2.23.** Ühtlane ketas kaaluga  $P$  ja raadiusega  $r$  saab pöörelda vertikaaltasapinnas ümber punkti  $O$  läbiva horisontaalse telje. Kettale anti tasakaaluasendis ( $\varphi = 0$ ) algnurkkiirus  $\omega_0$ . Leida ketta nurkkiirus ja nurkkiirendus pöördenurga  $\varphi$  funktsioonina ja maksimaalne tõusunurk  $\varphi_1$ .

$$\text{Vastus: } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{4g(1 - \cos \varphi)}{3r}}; \quad \alpha = -\frac{2g \sin \varphi}{3r}; \quad \varphi_1 = \arccos \left( 1 - \frac{3r\omega_0^2}{4g} \right).$$

**2.24.** Süsteem koosneb kolmest kehast kaaludega  $P_1$ ,  $P_2$  ja  $P_3$ . Ploki 2 raadius on  $r_2$  ja hõõrdetegur esimese keha ning horisontaalse pinna vahel on  $f$ . Alghetkel on süsteem paigal. Leida ploki 2 nurkkiirendus ja nurkkiirus sõltuvana tema pöördenurgast kui kolmas keha hakkab liikuma alla. Süsteem liigeda muutumatuks ja liigend punktis  $A$  hõõrdevabaks.

$$\text{Vastus: } \omega_2 = \sqrt{\frac{4g(P_3 - P_1 f)\varphi_2}{r_2(2P_1 + P_2 + 2P_3)}}; \quad \alpha_2 = \frac{2g(P_3 - P_1 f)}{r_2(2P_1 + P_2 + 2P_3)}.$$

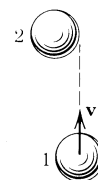


## 2.4 Põrge

**2.25.** Kuulike massiga 10 g langeb kiirusega 10 m/s vertikaali suhtes  $30^\circ$  nurga all vastu horisontaalset pinda. Põrketegur  $e = 0,5$ . Leida põrkenurk  $\beta$ , kuulikese kiirus peale põrget  $u$  ja põrkeimpulss  $S$ .

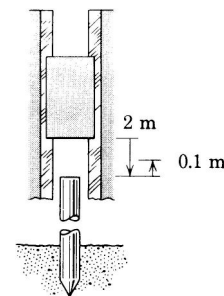
Vastus:  $\beta = 49,1^\circ$ ;  $u = 6,61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $S = 0,1299 \text{ Ns}$ .

**2.26.** Kuul 1 liigub joonisel näidatud suunas kiirusega 6 m/s ja põrkub paigalseisva kuuliga 2. Kuulide läbimõõdud ja massid on võrdsed. Põrketegur  $e = 0,6$ . Leida kuulide kiirused vahetult peale põrget. Mitu % kineetilist energiat läks põrkel kaduma?



Vastus:  $u_1 = 3,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $u_2 = 4,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $\Delta T/T_0 = 24\%$ .

**2.27.** Rammimisvasara mass on 800 kg ja ta lastakse kukkuda vaiale massiga 2400 kg 2 m kõrguselt. Vasar põrkab tagasi 0,1 m. Määrata 1) vaia kiirus vahetult peale põrget  $u_2$ ; 2) põrketegur  $e$ ; 3) kineetilise energia kadu põrkel (%).

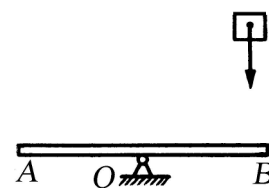


Vastus:  $u_2 = 2,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;  $e = 0,63$ ;  $\Delta T/T_0 = 45,1\%$ .

**2.28.** Vaatleme autot, mis liigub kiirusega 30 m/s ja sõidab vastu seinale. Pärast vaatlust selgus, et auto ninaosa oli lühenenud 0,5 m võrra. Hinnata maksimaalset põrkejõudu kui auto mass on 1 tonn.

Vastus:  $F_{\text{max}} \geq 1800 \text{ kN}$ .

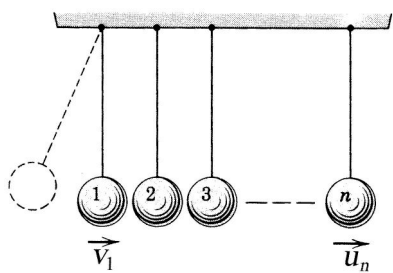
**2.29.** Tala  $AB$  kaal on  $G$  ja pikkus  $l$  ning ta on keskpunktis  $O$  kinnitatud liigendi külge. Tala otsale  $B$  lastakse kõrguselt  $h$  kukkuda keha kaaluga  $P$ . Määrata tala nurkkiirus vahetult peale põrget. Alghetkel oli tala paigal. Põrge lugeda absoluutselt mitteelastseks.



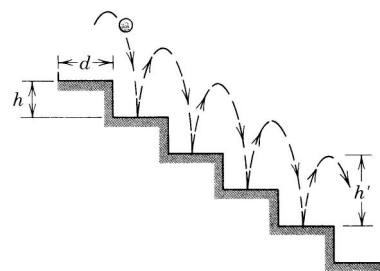
Vastus:  $\omega = \frac{6P\sqrt{2gh}}{l(3P + G)}$ .

**2.30.** Võrdse massi ja võrdse läbimõõduga  $n$  kuulikest, on riputatud joonisel kujutatud viisil (kuulikeste massikeskmed asuvad ühel sirgel ja tasakaaluasendis kuulikesed peaaegu puutuvad üksteist). Kui 1. kuulike lastakse lahti kriipsjoontega kujutatud asendist, siis on tema kiirus vahetult enne põrget 2. kuulikesega  $v_1$ . Määrata kiirus  $u_n$ , millega liigub viimane kuulike vahetult peale põrget. Põrketegur on  $e$ .

Vastus:  $u_n = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} v_1$ .



Ülesanne 2.30.



Ülesanne 2.31.

**2.31.** Määrata pörketegur, mis lubab pallil põrgata joonisel näidatud viisil. Trepiastme laius on  $d$  ja kõrgus  $h$  ning pall põrkab kõigilt astmetelt tagasi kõrgusele  $h'$ . Milline peab olema palli horisontaalne kiirus  $v_x$ , et pall maanduks alati trepiastme keskel?

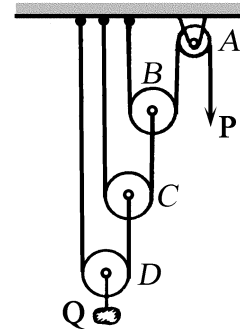
Vastus: 
$$e = \sqrt{\frac{h'}{h' + h}}; \quad v_x = \frac{\sqrt{\frac{g}{2}}d}{\sqrt{h'} + \sqrt{h' + h}}.$$

### 3 Analüütiline mehaanika

#### 3.1 Virtuaalsiirete printsiip

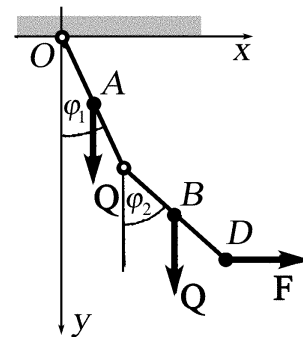
**3.32.** Polüspast koosneb paigalseisvast plokist  $A$  ja kolmest liikuvast plokist  $B, C$  ja  $D$ . Kui suur jõud  $P$  tasakaalustab ploki  $D$  külge riputatud raskuse  $Q$ ? Plokkide kaalu mitte arvestada.

Vastus:  $P = Q/8$ .

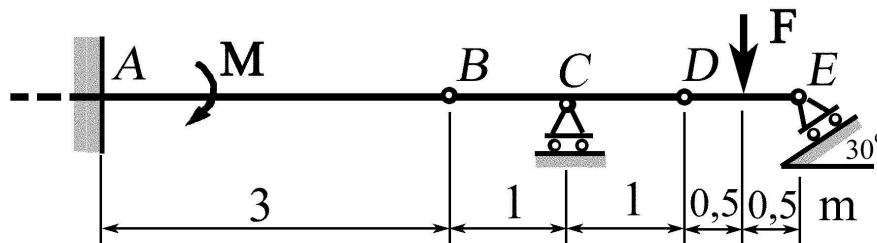


**3.33.** Kaks ühesugust varrast, kumbki kaaluga  $Q$  on ühendatud liigendi abil. Ülemine varras saab pöörelda ümber liikumatu punkti  $O$ , teise varra vabasse otsa on aga rakendatud horisontaalne jõud, mis hoiab kogu süsteemi vertikaaltasapinnas tasakaalus. Määrata nurgad  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  kui  $F = Q$ .

Vastus:  $\varphi_1 = 33^\circ 40'$ ;  $\varphi_2 = 63^\circ 26'$ .



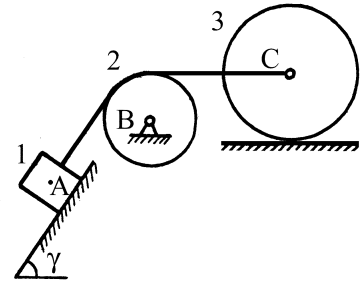
**3.34.** Leida liittala toereaktsioonid, kasutades virtuaalsiirete printsiipi.  $M = 20$  kNm ja  $F = 10$  kN.



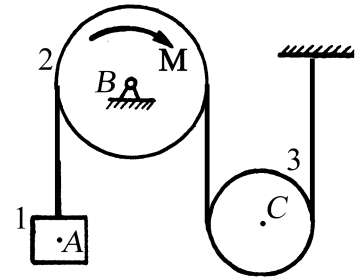
Vastus:  $F_{Ay} = 5$  kN;  $F_{Ax} = 5/\sqrt{3}$  kN;  $M_A = 5$  kNm;  $F_C = 10$ ;  $F_E = 10/\sqrt{3}$ .

### 3.2 D'Alembert'i printsiip

**3.35.** Keha 1 kaal on  $P$ . Ta asub kaldpinnal kaldenurgaga  $\gamma$ . Hõõrdetegur kaldpinna ja 1. keha vahel on  $f$ . Teise keha kaal on  $G$  ja raadius  $r$ . Kolmanda keha kaal on  $W$  ja raadius  $R$  ning ta veereb ilma libisemata mööda horisontaalset pinda. Leida ploki 2 nurkkiirendus, tõmbed nööris kehade 1 ja 2 vahel ning kehade 2 ja 3 vahel, liigendi  $B$  dünaamiline reaktsioon ning pindade kogureaktsioonid  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{1f}$  ja  $\mathbf{R}_3 = \mathbf{N}_3 + \mathbf{F}_{3f}$ . Veerehõõret mitte arvestada, liigend punktis  $B$  lugeda hõõrdevabaks ning nööri ei libise ploki 2.

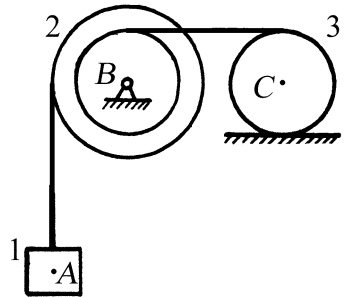


**3.36.** Keha 1 kaal  $P = 20$  N. Ühtlaste plokkide 2 ja 3 kaalud ning raadiused on vastavalt  $G = 30$  N ja  $W = 50$  N ning  $R = 0,5$  m ja  $r = 0,25$  m. Süsteemi paneb liikuma teisele kehale rakendatud jõupaari moment  $M = 10$  Nm. Leida ploki 2 nurkkiirendus ja tõmme nööris kehade 2 ja 3 vahel (raskuskirendus  $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ).



Vastus:  $\alpha_2 = 9,3 \frac{1}{\text{s}^2}$ ;  $T_{2-3} = 16,28$  N.

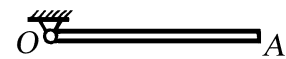
**3.37.** Keha 1 kaal on  $P$ . Teise keha kaal on  $G$ , raadiused  $R$  ja  $r$  ning inertsiraadius keskpunkti  $B$  suhtes  $i$ . Kolmanda keha kaal on  $W$  ja raadius  $r$  ning ta veereb ilma libisemata mööda horisontaalset pinda. Veeretakistustegur on  $\kappa$ . Leida keha 1 kiirendus ja horisontaalse pinna kogureaktsioon.



Vastus:  $a_A$  avaldada kineetilise energia teoreemist;

$$N_3 = W; \quad F_{3f} = \frac{W}{r} \left[ \frac{\kappa}{2} - \frac{r^2 a_A}{8Rg} \right].$$

**3.38.** Ühtlase varda  $OA$  pikkus on  $l$  ja kaal  $G$  ning ta on otsast  $O$  kinnitatud liigendiga. Alghetkel hoitakse varrast paigal horisontaalses asendis. Leida liigendi  $O$  dünaamiline reaktsioon kui varras hakkab omakaalu tõttu pöörduma alla.



Vastus:  $F_{Ox} = -\frac{9G \sin 2\varphi}{8}$ ;  $F_{Oy} = G \left( 1 + \frac{3 \sin^2 \varphi}{2} - \frac{3 \cos^2 \varphi}{4} \right)$ .



### 3.3 Lagrange'i teist liiki võrrandid

**3.39.** Joonisel kujutatud mehaaniline süsteem koosneb kahest ühtlasest rattast. Neist esimese kaal on  $G$  ja raadius  $R$  ning teise kaal  $P$  ja raadius  $r$ . Leida teise ratta keskpunkti  $B$  kiirendus.

$$\text{Vastus: } a_B = \frac{2g(G + P)}{3G + 2P}$$

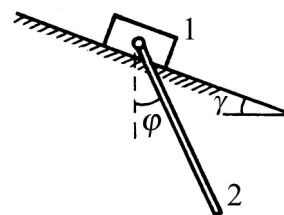
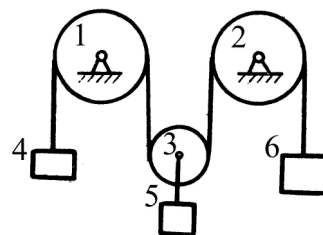
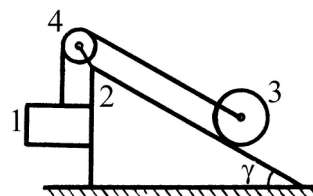
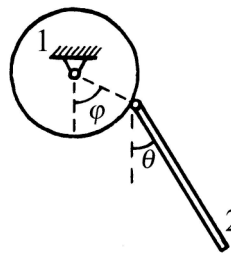
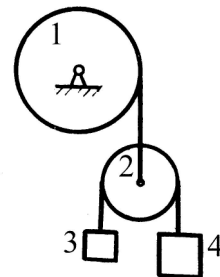
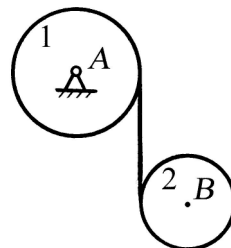
**3.40.** Joonisel kujutatud süsteem koosneb kahest ühtlasest plokist ja kahest raskusest. esimese ploki kaal on  $G$  ja raadius  $R$  ning teisel vastavalt  $W$  ja  $r$ . Raskuste 3 ja 4 kaalud on vastavalt  $P$  ja  $Q$ . Koostada vaadeldava süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid.

**3.41.** Joonisel kujutatud süsteem koosneb ühtlasest kettast ning tema külge liigendiga kinnitatud ühtlasest vardast. Ketta kaal on  $G$  ning raadius  $r$  ja ta on keskpunktis kinnitatud liigendiga, varda kaal on  $P$  ja pikkus  $l$ . Koostada vaadeldava süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid.

**3.42.** Joonisel kujutatud süsteem koosneb koosneb kehast 1 kaaluga  $P$ , ühtlasest prismast kaaluga  $G$  ja kaldenurgaga  $\gamma$ , ühtlasest silindrist kaaluga  $W$  ja raadiusega  $r$  ning kergest plokist 4. Leida süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid. Hõõret mitte arvestada ja eeldada, et silinder veereb mööda prisma ilma libisemata.

**3.43.** Joonisel kujutatud süsteem koosneb koosneb kolmest ühtlasest plokist (1–3) ja kolmest raskusest (4–6), mille kaalud on vastavalt  $G_i, i = 1, \dots, 6$ . Plokkide 1 ja 2 raadiused on  $R$  ning ploki 3 raadius  $r$ . Leida süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid.

**3.44.** Keha 1 külge on liigendiga kinnitatud ühtlane varras. Keha 1 kaal on  $G$  ning ta liigub kaldpinnal kaldenurgaga  $\gamma$ , varda kaal on  $P$  ja pikkus  $l$ . Leida süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid. Hõõret mitte arvestada.



# Sisukord

<b>Eessõna</b>	<b>1</b>
<b>1 Kinemaatika</b>	<b>2</b>
1.1 Punkti kinemaatika . . . . .	2
1.2 Jäiga keha pöörlemine . . . . .	4
1.3 Jäiga keha tasapinnaline liikumine . . . . .	5
1.4 Liitliikumine . . . . .	6
1.5 Jäiga keha sfääriline liikumine . . . . .	7
<b>2 Klassikaline dünaamika ehk punktmasside ja jäikade kehade dünaamika</b>	<b>8</b>
2.1 Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet . . . . .	8
2.2 Punktmassi relatiivse liikumise põhivõrrand . . . . .	9
2.3 Dünaamika üldteoreemid . . . . .	9
2.4 Põrge . . . . .	12
<b>3 Analüütiline mehaanika</b>	<b>14</b>
3.1 Virtuaalsiirete printsiip . . . . .	14
3.2 D'Alembert'i printsiip . . . . .	15
3.3 Lagrange'i teist liiki võrrandid . . . . .	16