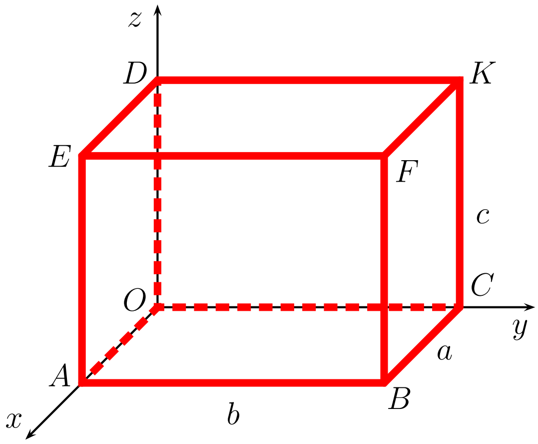
Kodutöö nr.1

Ruumilise jõusüsteemi taandamine lihtsaimale kujule

Ülesanne

Taandada antud jõusüsteem lihtsaimale kujule. Risttahuka (joonis 1.) mõõdud ning jõudude moodulid ja suunad on antud tabelis 1.



Joonis 1: Risttahukas

Nõutav lahenduskäik

1. Valida sobiv mõõtkavaja teha joonis, kuhu kanda mõjuvad jõud. Soovitav on valida nurk xOy võrdseks 135^o ja x teljel vähendada mõõtmeid suhtega 1:2.

2. Taandada antud jõusüsteem koordinaatide algusse O. Leida jõusüsteemi peavektor $\mathbf{R}$ ja peamoment $\mathbf{M}_O$. Tulemused kanda joonisele.

3. Leida jõusüsteemi vähim peamoment $\mathbf{M}^*$.

4. Peavektori $\mathbf{R}$ ja vähima peamomendi $\mathbf{M}^*$ põhjal otsustage milline on jõusüsteemi lihtsaim kuju (dünaam, resultant, jõupaar või tasakaalus jõusüsteem).

   - Kui jõusüsteem taandub dünaamiks siis tuleb: (i) leida tsentraaltelje võrrand; (ii) määrata tsentraaltelje ja koordinaattasandite lõikepunktid; (iii) kanda tsentraaltelg joonisele; (iv) kanda peavektor $\mathbf{R}$ ja vähim peamoment $\mathbf{M}^*$ tsentraalteljele.
   - Kui jõusüsteem taandub resultandiks siis tuleb: (i) leida tsentraaltelje võrrand; (ii) määrata tsentraaltelje ja koordinaattasandite lõikepunktid; (iii) kanda tsentraaltelg joonisele; (iv) kanda peavektor $\mathbf{R}$ tsentraalteljele.
   - Kui jõusüsteem taandub jõupaariks siis tuleb kanda jõupaar joonisele lugedes ta rakendatuks koordinaatide algusse

Tabel 1: Algandmed

Variandi nr.	Mõõtmed [cm]			Süsteemi jõud											
				$\mathbf{F}_1$			$\mathbf{F}_2$			$\mathbf{F}_3$			$\mathbf{F}_4$		
	a	b	c	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund
1.	60	30	20	4	F	FD	6	A	AE	8	B	BA	10	D	DC
2.	30	40	40	20	A	AC	24	O	OD	10	K	KB	10	O	OA
3.	20	10	10	4	B	BO	2	C	CK	8	E	ED	10	O	OE
4.	30	40	20	15	A	AB	20	K	KC	10	E	EO	12	F	FD
5.	20	20	20	8	O	OE	12	D	DC	8	K	KC	10	B	BO
6.	30	40	20	8	A	AO	4	E	EO	6	F	FB	20	D	DF
7.	30	40	40	10	B	BK	16	C	CO	20	D	DF	12	A	$A0$
8.	20	30	10	10	O	OK	10	B	BF	10	D	DK	15	K	KB
9.	30	40	30	10	A	AC	20	K	KB	15	D	DO	10	B	BC
10.	10	10	20	10	A	AC	15	O	OD	5	K	KE	10	E	EA
11.	10	40	30	8	A	AE	12	C	CF	20	O	OK	16	K	KD
12.	40	80	60	6	A	AD	20	F	FA	10	C	CK	8	D	DK
13.	20	20	20	8	O	OB	6	C	CK	6	E	EK	8	D	DO
14.	20	50	80	40	B	BA	30	O	OD	20	B	BK	20	D	DC
15.	40	20	40	15	E	EA	10	F	FD	15	B	BK	10	D	DK
16.	30	30	30	6	O	OC	10	B	BK	20	K	KO	12	E	EA
17.	15	15	20	30	E	EB	40	B	BK	10	O	OC	30	D	DO
18.	10	15	20	10	A	AC	10	K	KC	8	D	DE	12	O	OK
19.	20	15	15	10	C	CA	20	D	DF	10	K	KC	10	O	OA
20.	20	20	20	10	A	AD	20	B	BO	10	K	KB	15	D	DF
21.	20	20	20	10	O	OE	8	B	BE	6	K	KF	8	D	DK
22.	40	20	20	30	O	OA	12	E	EB	5	C	CD	12	D	DK
23.	50	20	20	10	O	OB	5	F	FB	8	K	KD	10	B	BK
24.	30	40	40	40	A	AD	20	K	KE	30	B	BF	10	B	BC
25.	30	20	20	10	A	AC	20	B	BA	15	K	KE	10	D	DK

Märkused

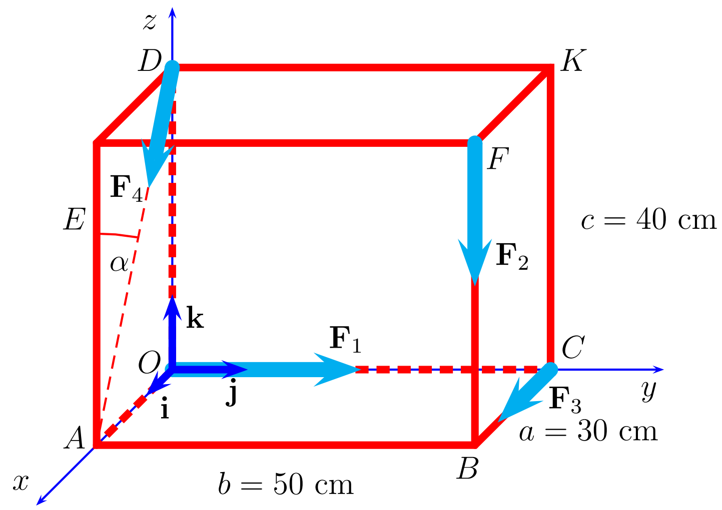
- Kui $M^* >= 0$, siis on vektorid $\mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}^*$ samasuunalised, kui aga $M^* >= 0$, siis vastassuunalised.
- Kui $M^* = 0$ ja $R \neq 0$, siis taandub jõusüsteem resultandiks, mille mõjusirgeks on tsentraaltelg, kusjuures antud juhul on jõukruvi parameeter $p = 0$
- Kui $\mathbf{R} = 0$ puhul $\mathbf{M}_O \neq 0$, siis taandub jõusüsteem jõupaariks, mis lugeda rakendatuks punkti O.
- Kui $\mathbf{R} = \mathbf{M}_O = 0$, siis on jõusüsteem tasakaalus.

Lahendusnäide

Andmed: $a = 30$ cm; $b = 50$ cm; $c = 40$ cm.

Tabel 2: Algandmed näitele

Jõu moodul	Rakenduspunkt	Suund
$F_1 = 10$ N	O	OC
$F_2 = 4$ N	F	FB
$F_3 = 4$ N	C	CB
$F_4 = 10$ N	D	DA



Joonis 2: Risttahuks ja talle mõjuvad jõud

1) Joonis ja jõusüsteem. Valime sobiva mõõtkava, joonestame risttahuka ja kanname mõjuvad jõud joonisele (joonis 2)

2) Jõusüsteemi peavektor R ja peamoment $\mathbf{M}_O$ (taandamistsentriks on koordinaatide algus). Jõusüsteemi peavektori

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$$

leidmiseks on meil vaja teada nurka α, täpsemalt öeldes $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ —

$$AD = \sqrt{a^2 + c^2} = 50 \text{ cm}; \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}; \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Jõusüsteemi peavektori projektsioonid koordinaattelgedel ja peavektori moodul:

$$\begin{cases} R_x = F_3 + F_4 \sin\alpha = 10 \text{ N}, \\ R_y = F_1 = 10 \text{ N}, \\ R_z = -F_2 - F_4\cos\alpha = -12 \text{ N}, \\ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 18.55 \text{ N}. \end{cases}$$

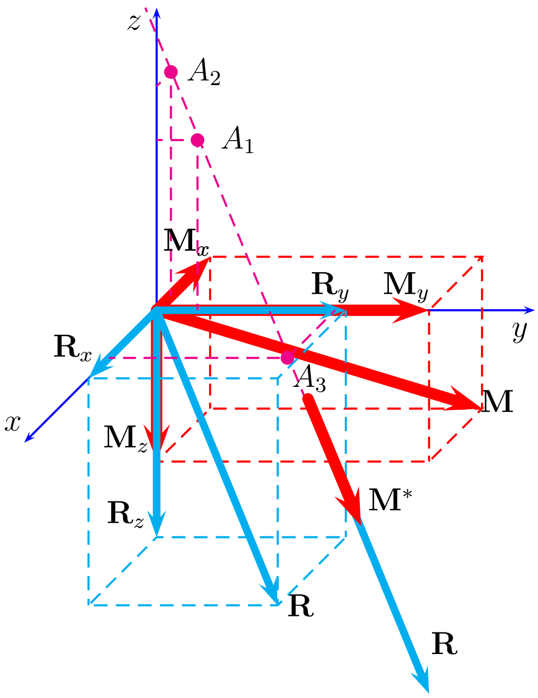
Peamomendi

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

projektsioonid koordinaattelgedel (momendid koordinaattelgede suhtes) ja moodul:

$$\begin{cases} M_x = -F_2 b = -2 \text{ Nm} \\ M_y = F_2 a + (F_4 \sin\alpha)c = 3.6 \text{ Nm} \\ M_z = -F_3 b = -2 \text{ Nm} \\ M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 4.58 \text{ Nm} \end{cases}$$

Tulemused kanname joonisele (joonis 3).



Joonis 3: Jõusüsteemi peavektor, peamoment, tsentraaltelg ja dünaam. NB! Peavektor, peamoment ja tsentraaltelg on esitatud erinevates mõõtkavades.

3) Vähima peamomendi moodul:

$$M^* = M_O \cos(\mathbf{R}, M_O) = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O}{R} = 2.157 \text{ Nm}$$

.

4) Jõusüsteemi lihtsaim kuju. Kuna vähim peamoment $\mathbf{M}^* \neq 0$ siis järelikult ka skalaarkorrutis $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$ ja vaadeldav jõusüsteem taandub dünaamiks ehk jõukruviks ning meil tuleb määrata tsentraaltelg.

Arvestades, et jõukruvi parameeter $p = \frac{M^*}{R} = 0.116$ m leiame tsentraaltelje võrrandist

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = \frac{M^*}{R} = p$$

kolm tasandi võrrandit:

a)

$$M_x - (yR_z - zR_y) = pR_x \qquad \Rightarrow \qquad 12y + 10z = 3.163;$$

b)

$$M_y - (zR_x - xR_z) = pR_y \qquad \Rightarrow \qquad 12x + 10z = 2.437;$$

c)

$$M_z - (xR_y - yR_x) = pR_z \qquad \Rightarrow \qquad 10x - 10y = -0.6047.$$

Kontroll. Viimastest võrrandeist vaid 2 on lineaarselt sõltumatud. Avaldades näiteks võrrandist c) $x = y - 0.06047$ ja pannes selle tulemuse võrrandisse b) saame tulemuseks $12y + 10z = 3.163$, s.o. võrrandi a).

Tsentraaltelg on määratud kui võrranditega a) ja b) esitatud tasandite lõikejoon[1].

Tsentraaltelje lõikepunktid koordinaattasanditega (ühikuks on sentimeeter):

$$\begin{aligned}
A_1 :&\quad x_1 = 0 \to b) \Rightarrow z_1 = 24.4 \to a) \Rightarrow y_1 = 6.1 \\
A_2 :&\quad y_2 = 0 \to a) \Rightarrow z_2 = 31.6 \to b) \Rightarrow x_2 = -6.1 \\
A_3 :&\quad z_3 = 0 \to a) \Rightarrow y_3 = 26.4; \;\; z_3 = 0 \to b) \Rightarrow x_3 = 20.3
\end{aligned}$$

Märgime punktid A_1, A_2 ja A_3 joonisele ning tõmbame läbi nende sirge, mis ongi tsentraalteljeks. Lõpuks kanname jõusüsteemi, peavektori $\mathbf{R}$ ja vähima peamomendi $\mathbf{M}^*$ tsentraalteljele (joonis 3). Kuna antud juhul $\mathbf{M}^* > 0$ (seega ka $p > 0$), siis on $\mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}^*$ samasuunalised ja meil on nn. parema käe jõukruvi.

[1] Loomulikult on samaväärsed ka kõik teised võrrandite a), a) ja c) kombinatsioonid.