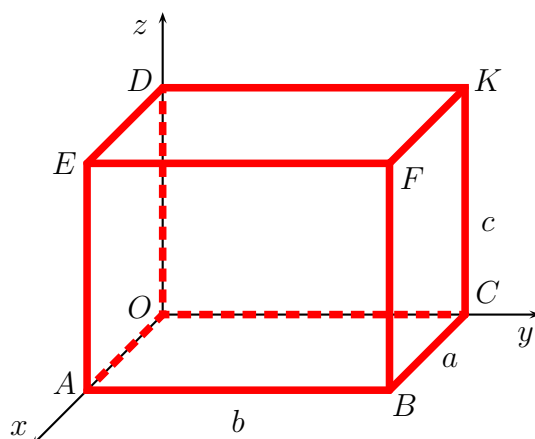


Kodutöö nr.1

Ruumilise jõusüsteemi taandamine lihtsaimale kujule

Ülesanne

Taandada antud jõusüsteem lihtsaimale kujule. Risttahuka (joonis 1.) mõõdud ning jõudude moodulid ja suunad on antud tabelis 1.



Joonis 1: Risttahukas

Nõutav lahenduskäik

1. Valida sobiv mõõtkavaja teha joonis, kuhu kanda mõjuvad jõud. Soovitav on valida nurk xOy võrdseks 135° ja x teljel vähendada mõõtmeid suhtega 1:2.
2. Taandada antud jõusüsteem koordinaatide algusse O . Leida jõusüsteemi peavektor \mathbf{R} ja peamoment \mathbf{M}_O . Tulemused kanda joonisele.
3. Leida jõusüsteemi vähim peamoment \mathbf{M}^* .
4. Peavektori \mathbf{R} ja vähima peamomendi \mathbf{M}^* põhjal otsustage milline on jõusüsteemi lihtsaim kuju (dünaam, resultant, jõupaar või tasakaalus jõusüsteem).
 - Kui jõusüsteem taandub dünaamiks siis tuleb: (i) leida tsentraaltelje võrrand; (ii) määrata tsentraaltelje ja koordinaattasandite lõikepunkt; (iii) kanda tsentraaltelg joonisele; (iv) kanda peavektor \mathbf{R} ja vähim peamoment \mathbf{M}^* tsentraalteljele.
 - Kui jõusüsteem taandub resultandiks siis tuleb: (i) leida tsentraaltelje võrrand; (ii) määrata tsentraaltelje ja koordinaattasandite lõikepunkt; (iii) kanda tsentraaltelg joonisele; (iv) kanda peavektor \mathbf{R} tsentraalteljele.
 - Kui jõusüsteem taandub jõupaariks siis tuleb kanda jõupaar joonisele lugedes ta rakendatuks koordinaatide algusse

Tabel 1: Algardmed

Variandi nr.	Mõõtmised [cm]			Süsteemi jõud											
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	F₁			F₂			F₃			F₄		
				Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund	Moodul [N]	Rakenduspunkt	Suund
1.	60	30	20	4	<i>F</i>	<i>FD</i>	6	<i>A</i>	<i>AE</i>	8	<i>B</i>	<i>BA</i>	10	<i>D</i>	<i>DC</i>
2.	30	40	40	20	<i>A</i>	<i>AC</i>	24	<i>O</i>	<i>OD</i>	10	<i>K</i>	<i>KB</i>	10	<i>O</i>	<i>OA</i>
3.	20	10	10	4	<i>B</i>	<i>BO</i>	2	<i>C</i>	<i>CK</i>	8	<i>E</i>	<i>ED</i>	10	<i>O</i>	<i>OE</i>
4.	30	40	20	15	<i>A</i>	<i>AB</i>	20	<i>K</i>	<i>KC</i>	10	<i>E</i>	<i>EO</i>	12	<i>F</i>	<i>FD</i>
5.	20	20	20	8	<i>O</i>	<i>OE</i>	12	<i>D</i>	<i>DC</i>	8	<i>K</i>	<i>KC</i>	10	<i>B</i>	<i>BO</i>
6.	30	40	20	8	<i>A</i>	<i>AO</i>	4	<i>E</i>	<i>EO</i>	6	<i>F</i>	<i>FB</i>	20	<i>D</i>	<i>DF</i>
7.	30	40	40	10	<i>B</i>	<i>BK</i>	16	<i>C</i>	<i>CO</i>	20	<i>D</i>	<i>DF</i>	12	<i>A</i>	<i>AO</i>
8.	20	30	10	10	<i>O</i>	<i>OK</i>	10	<i>B</i>	<i>BF</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>	15	<i>K</i>	<i>KB</i>
9.	30	40	30	10	<i>A</i>	<i>AC</i>	20	<i>K</i>	<i>KB</i>	15	<i>D</i>	<i>DO</i>	10	<i>B</i>	<i>BC</i>
10.	10	10	20	10	<i>A</i>	<i>AC</i>	15	<i>O</i>	<i>OD</i>	5	<i>K</i>	<i>KE</i>	10	<i>E</i>	<i>EA</i>
11.	10	40	30	8	<i>A</i>	<i>AE</i>	12	<i>C</i>	<i>CF</i>	20	<i>O</i>	<i>OK</i>	16	<i>K</i>	<i>KD</i>
12.	40	80	60	6	<i>A</i>	<i>AD</i>	20	<i>F</i>	<i>FA</i>	10	<i>C</i>	<i>CK</i>	8	<i>D</i>	<i>DK</i>
13.	20	20	20	8	<i>O</i>	<i>OB</i>	6	<i>C</i>	<i>CK</i>	6	<i>E</i>	<i>EK</i>	8	<i>D</i>	<i>DO</i>
14.	20	50	80	40	<i>B</i>	<i>BA</i>	30	<i>O</i>	<i>OD</i>	20	<i>B</i>	<i>BK</i>	20	<i>D</i>	<i>DC</i>
15.	40	20	40	15	<i>E</i>	<i>EA</i>	10	<i>F</i>	<i>FD</i>	15	<i>B</i>	<i>BK</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>
16.	30	30	30	6	<i>O</i>	<i>OC</i>	10	<i>B</i>	<i>BK</i>	20	<i>K</i>	<i>KO</i>	12	<i>E</i>	<i>EA</i>
17.	15	15	20	30	<i>E</i>	<i>EB</i>	40	<i>B</i>	<i>BK</i>	10	<i>O</i>	<i>OC</i>	30	<i>D</i>	<i>DO</i>
18.	10	15	20	10	<i>A</i>	<i>AC</i>	10	<i>K</i>	<i>KC</i>	8	<i>D</i>	<i>DE</i>	12	<i>O</i>	<i>OK</i>
19.	20	15	15	10	<i>C</i>	<i>CA</i>	20	<i>D</i>	<i>DF</i>	10	<i>K</i>	<i>KC</i>	10	<i>O</i>	<i>OA</i>
20.	20	20	20	10	<i>A</i>	<i>AD</i>	20	<i>B</i>	<i>BO</i>	10	<i>K</i>	<i>KB</i>	15	<i>D</i>	<i>DF</i>
21.	20	20	20	10	<i>O</i>	<i>OE</i>	8	<i>B</i>	<i>BE</i>	6	<i>K</i>	<i>KF</i>	8	<i>D</i>	<i>DK</i>
22.	40	20	20	30	<i>O</i>	<i>OA</i>	12	<i>E</i>	<i>EB</i>	5	<i>C</i>	<i>CD</i>	12	<i>D</i>	<i>DK</i>
23.	50	20	20	10	<i>O</i>	<i>OB</i>	5	<i>F</i>	<i>FB</i>	8	<i>K</i>	<i>KD</i>	10	<i>B</i>	<i>BK</i>
24.	30	40	40	40	<i>A</i>	<i>AD</i>	20	<i>K</i>	<i>KE</i>	30	<i>B</i>	<i>BF</i>	10	<i>B</i>	<i>BC</i>
25.	30	20	20	10	<i>A</i>	<i>AC</i>	20	<i>B</i>	<i>BA</i>	15	<i>K</i>	<i>KE</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>
26.	30	40	20	10	<i>E</i>	<i>EB</i>	12	<i>O</i>	<i>OC</i>	10	<i>C</i>	<i>CK</i>	8	<i>K</i>	<i>KB</i>
27.	30	20	40	8	<i>O</i>	<i>OE</i>	6	<i>C</i>	<i>CB</i>	4	<i>D</i>	<i>DK</i>	4	<i>A</i>	<i>AF</i>
28.	10	14	40	4	<i>O</i>	<i>OE</i>	10	<i>F</i>	<i>FE</i>	16	<i>C</i>	<i>CK</i>	8	<i>K</i>	<i>KE</i>
29.	30	30	40	8	<i>B</i>	<i>BK</i>	10	<i>D</i>	<i>DC</i>	9	<i>C</i>	<i>CO</i>	6	<i>O</i>	<i>OA</i>
30.	40	20	30	10	<i>A</i>	<i>AO</i>	5	<i>B</i>	<i>BO</i>	10	<i>K</i>	<i>KB</i>	5	<i>D</i>	<i>DE</i>

Märkused

- Kui $M^* > 0$, siis on vektorid \mathbf{R} ja \mathbf{M}^* samasuunalised, kui aga $M^* < 0$, siis vastasuunalised.
- Kui $M^* = 0$ ja $R \neq 0$, siis taandub jõusüsteem resultandiks, mille mõjusirgeks on tsentraaltelg, kusjuures antud juhul on jõukruvi parameeter $p = 0$.

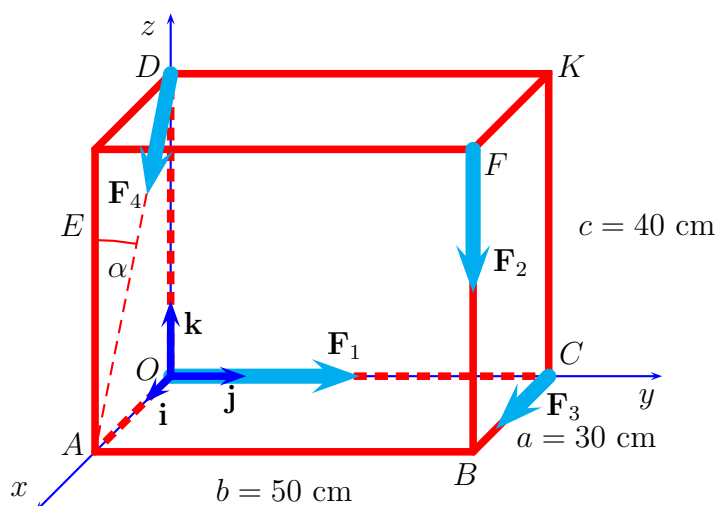
- Kui $\mathbf{R} = 0$ puhul $\mathbf{M}_O \neq 0$, siis taandub jõusüsteem jõupaariks, mis lugeda rakedatuks punkti O .
- Kui $\mathbf{R} = \mathbf{M}_O = 0$, siis on jõusüsteem tasakaalus.

Lahendusnäide

Andmed: $a = 30$ cm; $b = 50$ cm; $c = 40$ cm.

Tabel 2: Algandmed näitele

Jõu moodul	Rakenduspunkt	Suund
$F_1 = 10$ N	O	OC
$F_2 = 4$ N	F	FB
$F_3 = 4$ N	C	CB
$F_4 = 10$ N	D	DA



Joonis 2: Risttahuks ja talle mõjuvad jõud

1) **Joonis ja jõusüsteem.** Valime sobiva mõõtkava, joonestame risttahuka ja kanname mõjuvad jõud joonisele (joonis 2)

2) **Jõusüsteemi peavektor \mathbf{R} ja peamoment \mathbf{M}_O (taandamistsentriks on koordinaatide algus).** Jõusüsteemi peavektori

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}$$

leidmiseks on meil vaja teada nurka α , täpsemalt öeldes $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ —

$$AD = \sqrt{a^2 + c^2} = 50 \text{ cm}; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Jõusüsteemi peavektori projektsioonid koordinaattelgedel ja peavektori moodul:

$$\begin{cases} R_x = F_3 + F_4 \sin \alpha = 10 \text{ N}, \\ R_y = F_1 = 10 \text{ N}, \\ R_z = -F_2 - F_4 \cos \alpha = -12 \text{ N}, \\ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 18.55 \text{ N}. \end{cases}$$

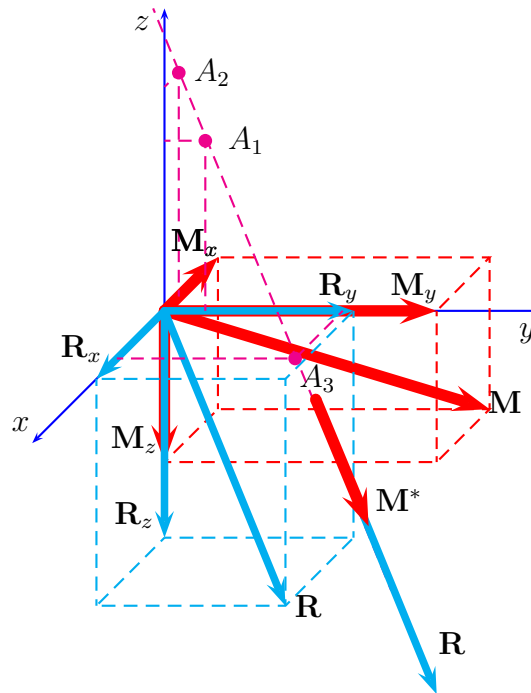
Peamomendi

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

projektsioonid koordinaattelgedel (momendid koordinaattelgede suhtes) ja moodul:

$$\begin{cases} M_x = -F_2 b = -2 \text{ Nm} \\ M_y = F_2 a + (F_4 \sin \alpha) c = 3.6 \text{ Nm} \\ M_z = -F_3 b = -2 \text{ Nm} \\ M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 4.58 \text{ Nm} \end{cases}$$

Tulemused kanname joonisele (joonis 3).



Joonis 3: Jõusüsteemi peavektor, peamoment, tsentraaltelg ja dünaam. NB! Peavektor, peamoment ja tsentraaltelg on esitatud erinevates mõõtkavades.

3) Jõusüsteemi vähim peamoment:

$$M^* = M_O \cos(\mathbf{R}, M_O) = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O}{R} = 2.157 \text{ Nm}$$

4) **Jõusüsteemi lihtsaim kuju.** Kuna vähim peamoment $\mathbf{M}^* \neq 0$ siis järelikult ka skalaarkorrutis $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$ ja vaadeldav jõusüsteem taandub dünaamikiks ehk jõukruviks ning meil tuleb määrata tsentraaltelg.

Arvestades, et jõukruvi parameeter $p = \frac{M^*}{R} = 0.116$ m leiame tsentraaltelje võrrandist

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = \frac{M^*}{R} = p$$

kolm tasandi võrrandit:

a)

$$M_x - (yR_z - zR_y) = pR_x \quad \Rightarrow \quad 12y + 10z = 3.163;$$

b)

$$M_y - (zR_x - xR_z) = pR_y \quad \Rightarrow \quad 12x + 10z = 2.437;$$

c)

$$M_z - (xR_y - yR_x) = pR_z \quad \Rightarrow \quad 10x - 10y = -0.6047.$$

Kontroll. Viimastest võrrandest vaid 2 on lineaarselt sõltumatud. Avaldades näiteks võrrandist c) $x = y - 0.06047$ ja pannes selle tulemuse võrrandisse b) saame tulemuseks $12y + 10z = 3.163$, s.o. võrrandi a).

Tsentraaltelg on määratud kui võrranditega a) ja b) esitatud tasandite lõikejoon¹.

Tsentraaltelje lõikepunktid koordinaattasanditega (ühikuks on sentimeeter):

$$A_1 : x_1 = 0 \rightarrow b) \Rightarrow z_1 = 24.4 \rightarrow a) \Rightarrow y_1 = 6.1$$

$$A_2 : y_2 = 0 \rightarrow a) \Rightarrow z_2 = 31.6 \rightarrow b) \Rightarrow x_2 = -6.1$$

$$A_3 : z_3 = 0 \rightarrow a) \Rightarrow y_3 = 26.4; \quad z_3 = 0 \rightarrow b) \Rightarrow x_3 = 20.3$$

Märgime punktid A_1, A_2 ja A_3 joonisele ning tõmbame läbi nende sirge, mis ongi tsentraalteljeks. Lõpuks kanname jõusüsteemi, peavektori \mathbf{R} ja vähima peamomendi \mathbf{M}^* tsentraalteljele (joonis 3). Kuna antud juhul $\mathbf{M}^* > 0$ (seega ka $p > 0$), siis on \mathbf{R} ja \mathbf{M}^* samasuunalised ja meil on nn. parema käe jõukruvi.

¹Loomulikult on samaväärsed ka kõik teised võrrandite a), a) ja c) kombinatsioonid.