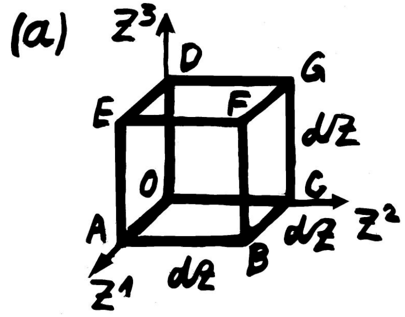
Näide D1 Lagrange'i-Descartes'i ja Euleri-Descartes'i ristkoordinaadid ühtivad alghetkel, s.t., $t = t_0$ puhul $z^k = Z^K$ kui $k = K$. Euleri koordinaadid $x^k = z^k$ ja Lagrange'i koordinaadid $X^K = Z^K$. Siirdeväli on esitatud kujul

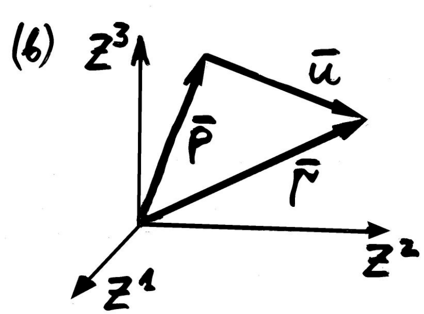
$$\begin{cases} z^1 = Z^1, \\ z^2 = Z^2 + AZ^3, \\ z^3 = Z^3 + AZ^2, \end{cases} \tag{1}$$

kus $A = const.$ $(0 < A < 1)$.

Leida:

1. Siirdevektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides.
2. Millisteks kujunditeks deformeeruvad (Z^2, Z^3) tasandil asuv ring $(Z^2)^2 + (Z^3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$ ja elementaarkuup servapikkusega $dZ^1 = dZ^2 = dZ^3 = dZ$. Esitada vastavad joonised kui $A = 1/2$.
3. Leida Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid.
4. Deformatsioonitensorite C_{KL} ja E_{KL} peaväärtused ja peasuunad.
5. Joonistada materiaalne ja ruumiline deformatsiooniellipsoid.
6. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid, servade suhtelised pikenemised ja pöörded.
7. Pöördetensor $R^k{}_K$.
8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariandid.





Joonis 1: Algne kuup (a) ja siirdevektor (b).

Lahendus. Teisenduse (1) pöörteisendus on

$$\begin{cases} Z^1 = z^1, \\ Z^2 = (z^2 - Az^3)/(1 - A^2), \\ Z^3 = (z^3 - Az^2)/(1 - A^2). \end{cases} \tag{2}$$

1. Siire

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K = u^k \mathbf{g}_k = \mathbf{p} - \mathbf{P} = z^k \mathbf{i}_k - Z^K \mathbf{I}_K \tag{3}$$

Kuna LDRK ja EDRK ühtivad, siis $\mathbf{i}_k = \mathbf{I}_K$ kui $k = K$. Seega

$$\begin{cases} U^1 = z^1 - Z^1 \overset{(1)}{=} 0, \\ U^2 = z^2 - Z^2 \overset{(1)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = AZ^3, \\ U^3 = z^3 - Z^3 \overset{(1)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = AZ^2, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u^1 = z^1 - Z^1 \overset{(2)}{=} 0, \\ u^2 = z^2 - Z^2 \overset{(2)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dfrac{A(z^3 - Az^2)}{1-A^2}, \\ u^3 = z^3 - Z^3 \overset{(2)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dfrac{A(z^2 - Az^3)}{1-A^2}. \end{cases} \tag{5}$$

2a. Ring. Algse ringjoone võrrand on $(Z^2)^2+(Z^3)^2 = (1-A^2)^{-1}$. Asendame siia $Z^K = Z^K(\mathbf{z})$ pöördteisendusest (2).

$$\frac{(z^2 - Az^3)^2}{(1-A^2)^2} + \frac{(z^3 - Az^2)^2}{(1-A^2)^2} = \frac{1}{1-A^2}$$

$$\dots \tag{6}$$

$$(1+A^2)(z^2)^2 - 4Az^2z^3 + (1+A^2)(z^3)^2 = 1 - A^2.$$

See on ellipsi võrrand. Ellipsi joonistamiseks pöörame koordinaattelgi nurga $\pi/4$ võrra[1]. Toome sisse uued koordinaadid, st. pöörame koordinaate z_1, z_2.

$$\begin{cases} v^2 = (z^2 + z^3)/\sqrt{2}, \\ v^3 = (z^3 - z^2)/\sqrt{2}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z^2 = (v^2 - v^3)/\sqrt{2}, \\ z^3 = (v^2 + v^3)/\sqrt{2}. \end{cases} \tag{7}$$

Asendades (7) võrrandisse (6) saame pärast mõningaid teisendusi

$$(1-A)^2(v^2)^2 + (1+A)^2(v^3)^2 = 1 - A^2$$

[1]Teist järku joone võrrandi üldkuju on $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$. Kui pöörata telgi nurga α võrra, kus α avaldadakse võrrandi $b\tan^2\alpha + (a-c)\tan\alpha - b = 0$ positiivsest lahendist, saame tulemuseks teist järku joone võrrandi kujul: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Viimasele saab anda kuju

$$\frac{(v^2)^2}{\frac{1+A}{1-A}} + \frac{(v^3)^2}{\frac{1-A}{1+A}} = 1. \tag{8}$$

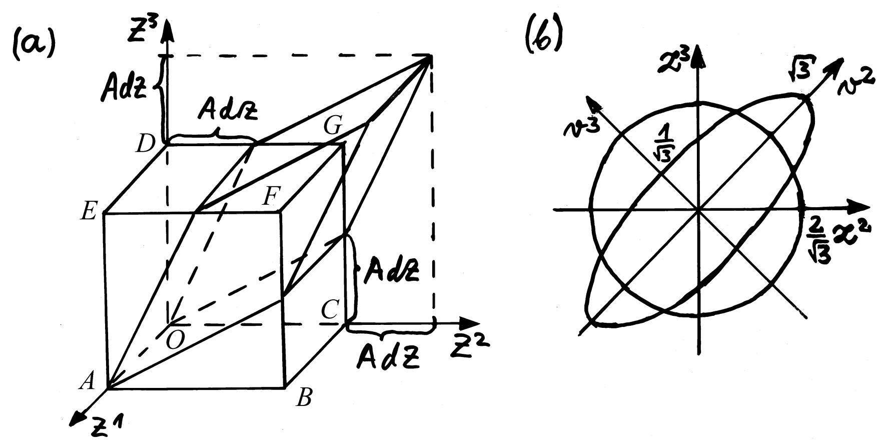
Kui $A = 1/2$, siis algse ringi võrrand saab kuju

$$(z^2)^2 + (z^3)^2 = 4/3 \tag{9}$$

ja ellipsi võrrand

$$\frac{(v^2)^2}{3} + \frac{(v^3)^2}{\frac{1}{3}} = 1. \tag{10}$$

Seega, algse ringi raadius $r = 2/\sqrt{3} = 1,155$ ja ellipsi poolteljed $a = \sqrt{3} = 1,732$ ning $b = 1/\sqrt{3} = 0,577$



Joonis 2: Deformeerunud ring (a) ja kuup (b).

2b. Kuup. Vaatleme kuubi servade siirdeid (sama tulemuse saame vaadeldes tippe). Seega peame leidma siirdevektori komponendid U^K, mis väljendavad siirdeid, mille saab materiaalne punkt, mis alghetkel asus ruumipunktis $z^k = Z^K$.

a) serv $Z^2 = Z^3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^2 = U^3 = 0$
b) serv $Z^1 = Z^3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^2 = 0, U^3 = AZ^2$
c) serv $Z^1 = Z^2 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^3 = 0, U^2 = AZ^3$
d) serv $Z^1 = dZ, Z^3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^2 = 0, U^3 = AZ^2$
e) serv $Z^2 = dZ, Z^3 = dZ \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = 0, U^2 = U^3 = AdZ$
jne.

3. Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid (DT)

$$\begin{aligned} c_{kl} &= G_{KL} X^K{}_{,k} X^L{}_{,l} && \text{Cauchy DT,} \\ C_{KL} &= g_{kl} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} && \text{Greeni DT,} \\ 2E_{KL} &= C_{KL} - G_{KL} && \text{Lagrange'i DT,} \\ 2e_{kl} &= g_{kl} - c_{kl} && \text{Euleri DT.} \end{aligned} \tag{11}$$

Meil $X^K \equiv Z^K$, $x^k \equiv z^k$, $\mathbf{g}_k = \mathbf{i}_k = \mathbf{G}_K = \mathbf{I}_K$.
Seega $G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}$ ja $g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}$.

3a. Cauchy DT

$$\begin{aligned} c_{11} &= (Z^1{}_{,1})^2 + (Z^2{}_{,1})^2 + (Z^3{}_{,1})^2 = \ldots \\ c_{22} &= (Z^1{}_{,2})^2 + (Z^2{}_{,2})^2 + (Z^3{}_{,2})^2 = \ldots \\ c_{33} &= (Z^1{}_{,3})^2 + (Z^2{}_{,3})^2 + (Z^3{}_{,3})^2 = \ldots \\ c_{12} &= c_{21} = Z^1{}_{,1} Z^1{}_{,2} + Z^2{}_{,1} Z^2{}_{,2} + Z^3{}_{,1} Z^3{}_{,2} = \ldots \\ c_{23} &= c_{32} = Z^1{}_{,2} Z^1{}_{,3} + Z^2{}_{,2} Z^2{}_{,3} + Z^3{}_{,2} Z^3{}_{,3} = \ldots \\ c_{13} &= c_{31} = 0 \end{aligned}$$

$$[c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

3b. Greeni DT

$$\begin{aligned} &C_{11} = 1;\ \ C_{22} = 1 + A^2;\ \ C_{33} = 1 + A^2; \\ &C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = 0;\ \ C_{23} = C_{32} = 2A \end{aligned}$$

$$[C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

3c. Lagrange'i DT

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

3d. Euleri DT

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} & \frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & \frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

4. Tensorite $\boldsymbol{C_{KL}}$ ja $\boldsymbol{E_{KL}}$ peaväärtused ja peasuunad.

4a. Tensor $\boldsymbol{C_{KL}}$. Kuna meil on kasutusel DRK, siis $C^K{}_L = C_{KL}$ ja võrrand (2.189) saab kuju

$$(C_{KL} - C\delta_{KL})\, N^L = 0 \tag{16}$$

ning peaväärtused C määratakse võrrandist

$$\begin{aligned} |C_{KL} - C\delta_{KL}| &= \begin{vmatrix} 1-C & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2-C & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2-C \end{vmatrix} \\ &= (1-C)\left[\left(1+A^2-C\right)^2 - 4A^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Viimase lahendid on (pärast ümbernummerdamist $C_1 \geq C_2 \geq C_3$)

$$C_1 = (1+A)^2; \quad C_2 = 1 \quad C_3 = (1-A)^2. \tag{18}$$

Igale peaväärtusele C_α vastab peasuund $\mathbf{N}_\alpha \equiv (N^1{}_\alpha, N^2{}_\alpha, N^3{}_\alpha)$, mille määramiseks saame avaldise (16) põhjal kolm võrrandit:

$$\begin{cases} (C_{11} - C_{\underline{\alpha}})\, N^1{}_{\underline{\alpha}} + C_{12} N^2{}_{\underline{\alpha}} + C_{13} N^3{}_{\underline{\alpha}} = 0, \\ C_{21} N^1{}_{\underline{\alpha}} + (C_{22} - C_{\underline{\alpha}})\, N^2{}_{\underline{\alpha}} + C_{23} N^3{}_{\underline{\alpha}} = 0, \\ C_{31} N^1{}_{\underline{\alpha}} + C_{32} N^2{}_{\underline{\alpha}} + (C_{33} - C_{\underline{\alpha}})\, N^3{}_{\underline{\alpha}} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

i) Peasuund $\mathbf{N}_1$. Peaväärtusele $C_1 = (1+A)^2$ vastava peasuuna $\mathbf{N}_1 \equiv (N^1{}_1, N^2{}_1, N^3{}_1)$ leidmiseks saab VS (19) kuju

$$\begin{cases} \left[1 - (1+A)^2\right] N^1{}_1 = 0, \\ \left[1 + A^2 - (1+A)^2\right] N^2{}_1 + 2AN^3{}_1 = 0, \\ 2AN^2{}_1 + \left[1 + A^2 - (1+A)^2\right] N^3{}_1 = 0, \end{cases} \tag{20}$$

kust saame

$$\begin{cases} N^1{}_1 = 0, \\ -2AN^2{}_1 + 2AN^3{}_1 = 0, \\ 2AN^2{}_1 - 2AN^3{}_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^1{}_1 = 0, \\ N^2{}_1 = N^3{}_1. \end{cases} \tag{21}$$

Nüüd tuleb rakendada tingimust, et $\mathbf{N}_1$ on ühikvektor, st., $(N^1{}_1)^2 + (N^2{}_1)^2 + (N^3{}_1)^2 = 1$. Seega $N^2{}_1 = N^3{}_1 = \pm 1/\sqrt{2}$ ja

$$\mathbf{N}_1 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{22}$$

ii) Peasuund $\mathbf{N}_2$. Peaväärtuse $C_2 = 1$ puhul saab VS (19) kuju

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ A^2 N^2{}_2 + 2AN^3{}_2 = 0, \\ 2AN^2{}_2 + A^2 N^3{}_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow N^2{}_2 = N^3{}_2 = 0. \tag{23}$$

Kuna ka $\mathbf{N}_2$ peab olema ühikvektor, siis

$$\mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0). \tag{24}$$

iii) Peasuund $\mathbf{N}_3$. Peasuuna $\mathbf{N}_3$ leidmiseks kasutame peaväärtust $C_3 = (1-A)^2$, mille puhul VS (19) saab kuju

$$\begin{cases} \left[1 - (1-A)^2\right] N^1{}_3 = 0, \\ \left[1 + A^2 - (1-A)^2\right] N^2{}_3 + 2AN^3{}_3 = 0, \\ 2AN^2{}_3 + \left[1 + A^2 - (1-A)^2\right] N^3{}_3 = 0, \end{cases} \tag{25}$$

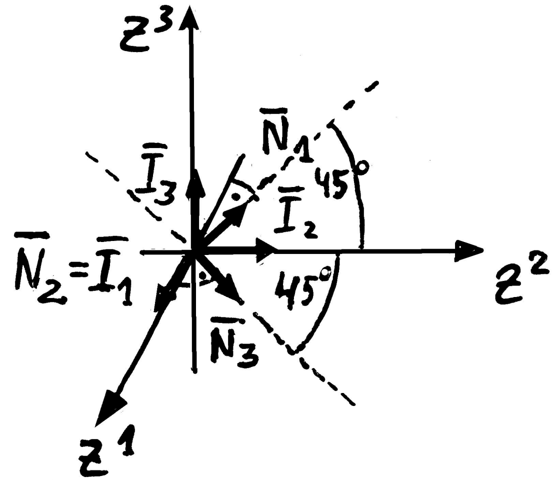
kust saame

$$\begin{cases} N^1{}_3 = 0, \\ 2AN^2{}_3 + 2AN^3{}_3 = 0, \\ 2AN^2{}_3 + 2AN^3{}_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^1{}_3 = 0, \\ N^2{}_3 = -N^3{}_3. \end{cases} \tag{26}$$

Tingimusest $|\mathbf{N}_3| = 1$, saame nüüd, et

$$\mathbf{N}_3 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{27}$$

Valemite (22)–(27) põhjal on iga peasuuna puhul võimalik valida kahe vektori vahel. Tegelikult tuleb silmas pidada, et peasuunad peavad moodustama parema käe kolmiku. Seega, kahe peasuuna puhul võime valida ükskõik kumma kahest leitud vektorist, kuid kolmas peasuund peab olema valitud nii, et kokku moodustuks parema käe kolmik. Näiteks, kui valime $\mathbf{N}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$, siis peab $\mathbf{N}_3$ vastama tingimusele $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, mis antud juhul tähendab, et $\mathbf{N}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 3).



Joonis 3: Greeni deformatsioonitensori peasuunad C_{KL} (peavektorid $\mathbf{N}_1$ ja $\mathbf{N}_3$ asuvad $Z^2 - Z^3$ tasandil).

4b. Tensor $\boldsymbol{E_{KL}}$. Nüüd lähtume võrrandist

$$(E_{KL} - E\delta_{KL})\, N^L = 0. \tag{28}$$

Eelnenuga analoogne protseduur annab tulemuseks[2]

$$E_1 = \frac{A}{2}(A+2), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{A}{2}(A-2). \tag{29}$$

Kontroll.
Kasutame valemit (2.188) $2E = C - 1$. Seega $2E_1 = (1+A)^2 - 1 = A(A+2)$, $2E_2 = 1 - 1 = 0$ ja $2E_3 = (1-A)^2 - 1 = A(A-2)$.

Cauchy deformatsioonitensori peaväärtused $c_\alpha = 1/C_\alpha = 1/{\lambda_\alpha}^2$ on saadud valemi (2.203) abil.

[2]Kuna $C_\alpha = {\lambda_\alpha}^2$ ja $E_\alpha = {\lambda_\alpha}^2 - 1$, siis tuleb peaväärtuste E_α järjestamisel silmas pidada seda, et E_1 vastaks suurim pikenemiskoefitsent λ_1 ja E_3 vähim, st., λ_3.

5. Deformatsiooniellipsoidid Ruumiline deformatsiooniellipsoid on esitatud valemiga (2.197)

$$C_\alpha\,(dX^\alpha)^2 = ds^2 = k^2 \tag{30}$$

ja materiaalne valemiga (2.200)

$$c_\alpha\,(dx^\alpha)^2 = dS^2 = K^2. \tag{31}$$

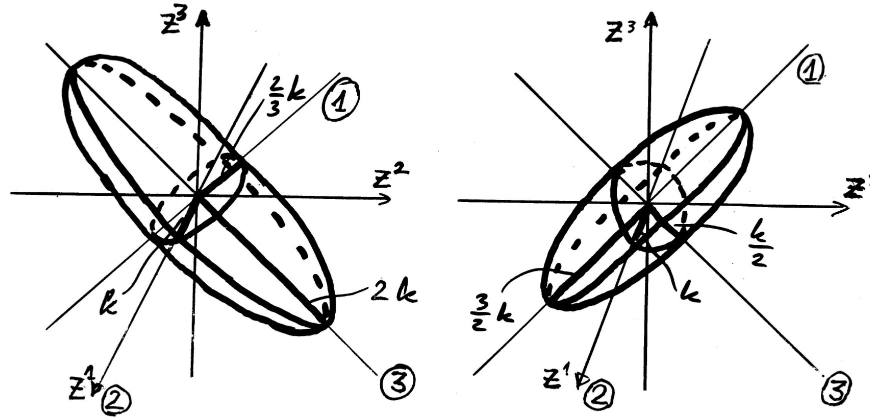
Kui $A = 1/2$, siis

$$\begin{cases} C_1 = (1+A)^2 = \dfrac{9}{4}, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = (1-A)^2 = \dfrac{1}{4}, \end{cases} \quad \overset{c_\alpha = 1/C_\alpha}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{4}{9}, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 4, \end{cases} \tag{32}$$

Kui valida $t = t_0$ puhul $dS = ds = K = k$, siis avalduvad pooltelgede pikkused järgmiselt.

Ruumiline:	Materiaalne:
$a_\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{C_\alpha}}$	$a_\alpha = \dfrac{K}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \dfrac{k}{\sqrt{c_\alpha}} = k\sqrt{C_\alpha}$
$a_1 = \dfrac{2}{3}k;\ a_2 = k;\ a_3 = 2k.$	$a_1 = \dfrac{3}{2}k;\ a_2 = k;\ a_3 = \dfrac{1}{2}k.$

Antud juhul peasuundade $\mathbf{n}_\alpha$ ja $\mathbf{N}_\alpha$ avaldised ühtivad, st.,
$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Seega võib võtta peasuunad $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha$.



Joonis 4: Ruumiline ja materiaalne deformatsiooniellipsoid.

6. Pikenemine ja pööre

6a. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid (vt. joonis 2). Valemite (2.151) ja tensori C_{KL} definitsiooni (2.83) põhjal avaldub pikenemiskoefitsent suunas $\mathbf{N}$ järgmiselt:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N^KN^L} = \sqrt{g_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}N^KN^L}. \qquad (33)$$

Peasuundade puhul $\Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha}$. Lihtsuse mõttes leiame pikenemiskoefitsentide ruudud $\Lambda^2_{(\mathbf{N})}$. Meil teatavasti $X^K \equiv Z^K$ ja $x^k \equiv z^k$.

1) Serv *OA* on 2. peasihis, seega

$$\Lambda^2_{(OA)} \equiv \Lambda^2_{(Z^1)} \equiv \Lambda^2_{(2)} = C_2 = 1. \qquad (34)$$

2) Serv *OC*. Leiame $\Lambda^2_{(OC)} \equiv \Lambda^2_{(Z^2)}$ kolme erineval moel, arvestades, et $\mathbf{N}_{(OC)} = \mathbf{I}_2 = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \Lambda^2_{(Z^2)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dZ^2 + A^2dZ^2}{dZ^2} = 1 + A^2,\\
&\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(Z^2)} = C_{22}\cdot 1\cdot 1 = 1 + A^2,\\
&\text{iii)} \quad \Lambda^2_{(Z^2)} = \left(z^1{}_{,2}\right)^2 + \left(z^2{}_{,2}\right)^2 + \left(z^3{}_{,2}\right)^2 = 1 + A^2.
\end{aligned} \qquad (35)$$

3) Serv *OD*. Joonise 2 põhjal

$$\Lambda^2_{(OD)} \equiv \Lambda^2_{(Z^3)} = \Lambda^2_{(Z^2)} = 1 + A^2. \qquad (36)$$

4) Diagonaal *OG* on 1. peasihis, st.,
$\mathbf{N}_{(OG)} = \mathbf{N}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Leiame pikenemiskoefitsendi $\Lambda_{(OG)}$ jällegi kolmel erineval moel:

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OG)} \equiv \Lambda^2_{(1)} = C_1 = (1+A)^2,\\
&\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OG)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2(dZ + AdZ)^2}{dZ^2 + dZ^2} = (1+A)^2,\\
&\text{iii)} \quad \Lambda^2_{(OG)} = C_{KL}N^KN^L = C_{22}\cdot\frac{1}{2} + C_{33}\cdot\frac{1}{2} + 2C_{23}\cdot\frac{1}{2} = (1+A)^2.
\end{aligned} \qquad (37)$$

5) Diagonaal *DC* on 3. peasuunas, seega

$$\Lambda^2_{(DC)} \equiv \Lambda^2_{(3)} = C_3 = (1-A)^2. \qquad (38)$$

6) Diagonaal *OE* pole ei telje- ega peasihiline. Ühikvektor $\mathbf{N}_{(OE)} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ ja

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OE)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2dZ^2 + A^2dZ^2}{dZ^2 + dZ^2} = 1 + \frac{A^2}{2},\\
&\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OE)} = C_{KL}N^KN^L = \ldots
\end{aligned} \qquad (39)$$

7) Diagonaal *OF*. Analoogselt eelmisega, $\mathbf{N}_{(OF)} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)}\quad & \Lambda^2_{(OF)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dZ^2 + 2(1+A)^2 dZ^2}{3dZ^2} = 1 + \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ \text{ii)}\quad & \Lambda^2_{(OF)} = C_{KL} N^K N^L = \ldots \end{aligned} \tag{40}$$

8) Diagonaal *DB*. Nüüd, $\mathbf{N}_{(DB)} = (1,1,-1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)}\quad & \Lambda^2_{(OF)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dZ^2 + 2(1-A)^2 dZ^2}{3dZ^2} = 1 - \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ \text{ii)}\quad & \Lambda^2_{(OF)} = C_{KL} N^K N^L = \ldots \end{aligned} \tag{41}$$

9) Ülejäänud servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid on võrdsed juba leitutega.

Kontroll. $\Lambda^2_{(K)} \equiv \Lambda^2_{(Z^K)} = C_{\underline{K}\,\underline{K}}$ ja $\Lambda_{(1)}$ ning $\Lambda_{(3)}$ on ekstremaalsed kõigi $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ seast.

6b. Suhteline pikenemine. [3]

$$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1. \tag{42}$$

Seega

$$\begin{cases} E_{(Z^1)} = 1 - 1 = 0,\ E_{(Z^2)} = E_{(Z^3)} = \sqrt{1 + A^2} - 1, \\ E_{(1)} = (1 + A) - 1 = A,\ E_{(2)} = E_{(Z^1)} = 0,\ E_{(3)} = (1 - A) - 1 = -A. \end{cases} \tag{43}$$

[3] Suhtelist pikenemist ei tohi segi ajada tensori E_{KL} peaväärtustega E_α — $2E_\alpha = C_\alpha - 1 = \Lambda^2_{(\mathbf{N})} - 1$.

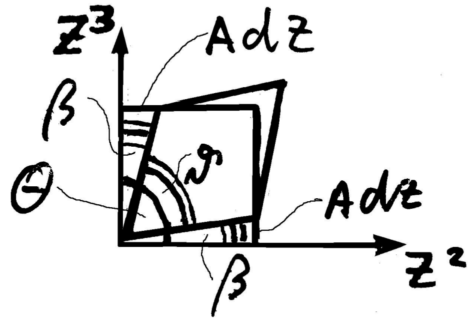
Suhtelisel pikenemisel $E_{(Z^K)} \equiv E_{(K)}$ puudub nii otsene seos Lagrange'i deformatsioonitensoriga E_{KL} kui on pikenemiskoefitsendi $\Lambda_{(K)}$ ja Greeni deformatsioonitensori C_{KL} vahel. Valemite (2.159) põhjal

$$2E_{\underline{K}\,\underline{K}} = \left(1 + E_{(K)}\right)^2 - 1 = \Lambda^2_{(K)} - 1.$$

Seega

$$2E_{\underline{K}\,\underline{K}} = \frac{ds^2_{(K)} - dS^2_{(K)}}{dS^2_{(K)}}.$$

6c. Pööre. On selge, et teljega Z^1 paralleelne kuubi serv deformatsiooni käigus ei pöördu ning servad, mis on paralleelsed Z^2 ja Z^3 teljega pöörduvad nurga $\beta = \arctan A$ võrra (joonis 5). Leiame Z^2 ja Z^3 telje vahelise täisnurga muudu.



Joonis 5: Kuubi servade pöörded ja algse täisnurga muutus.

$$\Gamma = \Theta - \vartheta = 2\beta. \tag{44}$$

Seega $\Gamma = 2\arctan A$. Teiselt poolt

$$\begin{aligned} \sin\Gamma = \cos\vartheta &= \frac{\delta_{23} + 2E_{23}}{\sqrt{(1 + 2E_{22})(1 + 2E_{33})}} = \\ &= \frac{0 + 2A}{\sqrt{(1 + 2\frac{A^2}{2})(1 + 2\frac{A^2}{2})}} = \frac{2A}{1 + A^2}. \end{aligned} \tag{45}$$

Kui $A = 1/2$, siis $\sin\Gamma = 4/5$ ja $\Gamma = 53,13^\circ$. Sama tulemuse annab ka $\Gamma = 2\arctan 0,5$.

7. Pöördetensor $R^k{}_K = n^k{}_\alpha N^\alpha{}_K$ pöörab Greeni deformatsioonitensori peasuunad $\mathbf{N}_\alpha$ Cauchy' deformatsioonitensori peasuundadeks $\mathbf{n}_\alpha$. DRK puhul kaassuunad $\mathbf{N}^\alpha{}_K = \mathbf{N}^K{}_\alpha$. Antud juhul peasuundade $\mathbf{n}_\alpha$ ja $\mathbf{N}_\alpha$ avaldised ühtivad, st.,
$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Seega kui valime peasuundadeks
$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,
siis pöördetensor

$$R^k{}_K = \delta^k{}_K. \tag{46}$$

Kui aga valida
$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{N}_1 = -(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = -\mathbf{N}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
siis saame hoopis teistsuguse pöördetensori —

$$R^k{}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariandid.

$$\mathrm{I}_C = C_1 + C_2 + C_3 = \ldots\ldots = 3 + 2A^2,$$

$$\mathrm{II}_C = C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = \ldots\ldots = 3 + A^4,$$

$$\mathrm{III}_C = C_1C_2C_3 = \ldots\ldots = (1 - A^2)^2. \tag{48}$$

Kui $A = 1/2$, siis $\mathrm{I}_C = 7/2$, $\mathrm{II}_C = 49/16$ ja $\mathrm{III}_C = 9/16$.