Näide D1. Lagrange'i-Descartes'i ja Euleri-Descartes'i ristkoordinaadid ühtivad alghetkel, s.t., $t = t_0$ puhul $z^k = Z^K$ kui $k = K$. Euleri koordinaadid $x^k = z^k$ ja Lagrange'i koordinaadid $X^K = Z^K$. Siirdeväli on esitatud kujul

$$\begin{cases} z^1 = Z^1, \\ z^2 = Z^2 + AZ^3, \\ z^3 = Z^3 + AZ^2, \end{cases} \qquad (1)$$

kus $A = const.$ $(0 < A < 1)$.

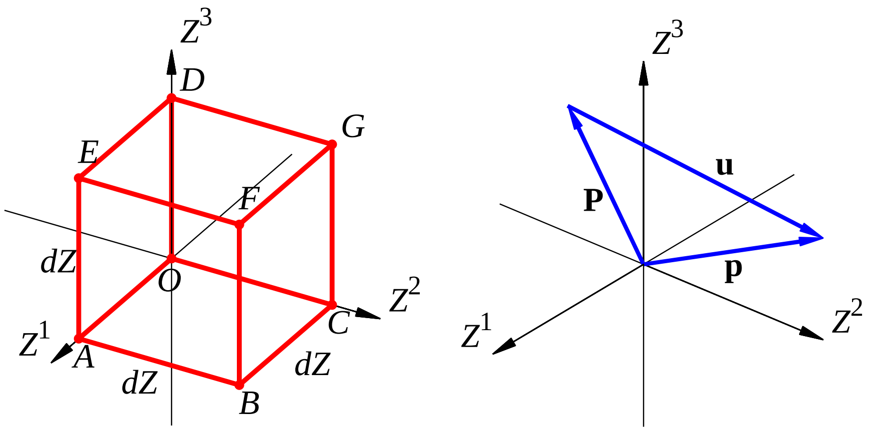
Leida:

1. Siirdevektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides.
2. Millisteks kujunditeks deformeeruvad (Z^2, Z^3) tasandil asuv ring $(Z^2)^2 + (Z^3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$ ja elementaarkuup servapikkusega $dZ^1 = dZ^2 = dZ^3 = dZ$. Esitada vastavad joonised kui $A = 1/2$.
3. Leida Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid.
4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.
5. Joonistada materiaalne ja ruumiline deformatsiooniellipsoid.
6. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid, suhtelised pikenemised ja pöörded ning algse täisnurga muutus $Z^2 - Z^3$ tasandis.
7. Pöördetensor $R^k{}_K$.
8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariandid.

Lahendus

Teisenduse (1) pöörteisendus on

$$\begin{cases} Z^1 = z^1, \\ Z^2 = (z^2 - Az^3)/(1 - A^2), \\ Z^3 = (z^3 - Az^2)/(1 - A^2). \end{cases} \qquad (2)$$



Joonis 1: Algne kuup (a) ja siirdevektor (b).

1. Siire Kuna alghetkel LDRK ja EDRK ühtivad, siis $\mathbf{i}_k = \mathbf{I}_K$ kui $k = K$ ja siirdevektor

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{u} = U^K \mathbf{G}_K = u^k \mathbf{g}_k = \mathbf{p} - \mathbf{P} = z^k \mathbf{i}_k - Z^K \mathbf{I}_K. \qquad (3)$$

Seega siirdevektori komponendid LK-s

$$\begin{cases} U^1 = z^1 - Z^1 \overset{(1)}{=} 0, \\ U^2 = z^2 - Z^2 \overset{(1)}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = AZ^3, \\ U^3 = z^3 - Z^3 \overset{(1)}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = AZ^2, \end{cases} \qquad (4)$$

ja EK-s

$$\begin{cases} u^1 = z^1 - Z^1 \overset{(2)}{=} 0, \\ u^2 = z^2 - Z^2 \overset{(2)}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{A(z^3 - Az^2)}{1 - A^2}, \\ u^3 = z^3 - Z^3 \overset{(2)}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{A(z^2 - Az^3)}{1 - A^2}. \end{cases} \tag{5}$$

2a. Ring. Algse ringjoone võrrand on $(Z^2)^2+(Z^3)^2 = (1-A^2)^{-1}$. Asendame siia $Z^K = Z^K(z^1, z^2, z^3)$ pöördteisendusest (2).

$$\begin{gathered} \frac{(z^2 - Az^3)^2}{(1 - A^2)^2} + \frac{(z^3 - Az^2)^2}{(1 - A^2)^2} = \frac{1}{1 - A^2} \\ \ldots \\ (1 + A^2)(z^2)^2 - 4Az^2z^3 + (1 + A^2)(z^3)^2 = 1 - A^2. \end{gathered} \tag{6}$$

See on ellipsi võrrand. Ellipsi joonistamiseks pöörame koordinaattelgi nurga $\pi/4$ võrra[1]. Toome sisse uued koordinaadid, st. pöörame koordinaate z_1, z_2.

$$\begin{cases} v^2 = (z^2 + z^3)/\sqrt{2}, \\ v^3 = (z^3 - z^2)/\sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = (v^2 - v^3)/\sqrt{2}, \\ z^3 = (v^2 + v^3)/\sqrt{2}. \end{cases} \tag{7}$$

Asendades (7) võrrandisse (6) saame pärast mõningaid teisendusi

$$(1 - A)^2(v^2)^2 + (1 + A)^2(v^3)^2 = 1 - A^2$$

[1]Teist järku joone võrrandi üldkuju on $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f = 0$. Kui pöörata telgi nurga α võrra, kus α avaldadakse võrrandi $b\tan^2\alpha + (a - c)\tan\alpha - b = 0$ positiivsest lahendist, saame tulemuseks teist järku joone võrrandi kujul: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Viimasele saab anda kuju

$$\frac{(v^2)^2}{\frac{1+A}{1-A}} + \frac{(v^3)^2}{\frac{1-A}{1+A}} = 1. \tag{8}$$

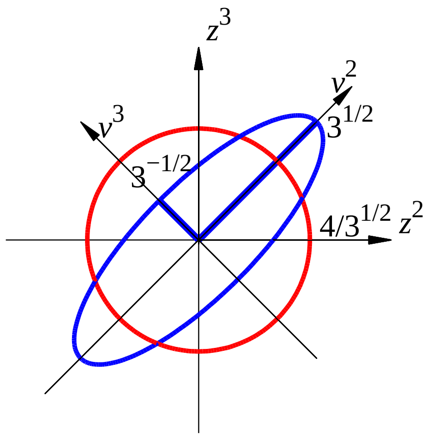
Kui $A = 1/2$, siis algse ringi võrrand saab kuju

$$(z^2)^2 + (z^3)^2 = 4/3 \tag{9}$$

ja ellipsi võrrand

$$\frac{(v^2)^2}{3} + \frac{(v^3)^2}{\frac{1}{3}} = 1. \tag{10}$$

Seega, algse ringi raadius $r = 2/\sqrt{3} = 1,155$ ja ellipsi pooltelјed $a = \sqrt{3} = 1,732$ ning $b = 1/\sqrt{3} = 0,577$



Joonis 2: Deformeerunud ring.

2b. Kuup. Peame leidma siirdevektori komponendid U^K, mis väljendavad siirdeid, mille saab materiaalne punkt, mis alghetkel asus ruumipunktis $z^k = Z^K$. Esiteks leiame kuubi servade siirded.

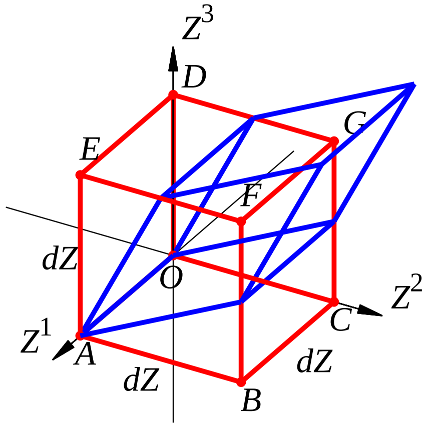
a) serv $OA : Z^2 = Z^3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^2 = U^3 = 0$
b) serv $OC : Z^1 = Z^3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^2 = 0, U^3 = AZ^2$
c) serv $OD : Z^1 = Z^2 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^3 = 0, U^2 = AZ^3$
d) serv $AB : Z^1 = dZ, Z^3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = U^2 = 0, U^3 = AZ^2$
e) serv $FG : Z^2 = dZ, Z^3 = dZ \overset{(4)}{\Rightarrow} U^1 = 0, U^2 = U^3 = AdZ$
jne.

Tippude siirded:

a) tipp O: koordinaadid enne deformatsiooni
$z^1 = Z^1 = 0,\ z^1 = Z^2 = 0,\ z^1 = Z^3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$
siire $U^1 = 0,\ U^2 = 0,\ U^3 = 0$ ja
koordinaadid peale deformatsiooni $z^1 = 0,\ z^2 = 0,\ z^3 = 0$;

b) tipp B: koordinaadid enne deformatsiooni
$z^1 = Z^1 = dZ,\ z^1 = Z^2 = dZ,\ z^1 = Z^3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$
siire $U^1 = 0,\ U^2 = 0,\ U^3 = A$ ja
koordinaadid peale deformatsiooni $z^1 = dZ,\ z^2 = dZ,\ z^3 = A$;

jne.



Joonis 3: Deformeerunud kuup.

3. Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid (DT)

$$
\begin{aligned}
c_{kl} &= G_{KL} X^K{}_{,k} X^L{}_{,l} && \text{Cauchy DT,}\\
C_{KL} &= g_{kl} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} && \text{Greeni DT,}\\
2E_{KL} &= C_{KL} - G_{KL} && \text{Lagrange'i DT,}\\
2e_{kl} &= g_{kl} - c_{kl} && \text{Euleri DT.}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Meil $X^K \equiv Z^K$, $x^k \equiv z^k$, $\mathbf{g}_k = \mathbf{i}_k = \mathbf{G}_K = \mathbf{I}_K$.
Seega $G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}$ ja $g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}$.

3a. Cauchy DT $\quad c_{kl} = \delta_{KL} Z^K{}_{,k} Z^L{}_{,l}$

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= (Z^1{}_{,1})^2 + (Z^2{}_{,1})^2 + (Z^3{}_{,1})^2 = \dots\\
c_{22} &= (Z^1{}_{,2})^2 + (Z^2{}_{,2})^2 + (Z^3{}_{,2})^2 = \dots\\
c_{33} &= (Z^1{}_{,3})^2 + (Z^2{}_{,3})^2 + (Z^3{}_{,3})^2 = \dots\\
c_{12} &= c_{21} = Z^1{}_{,1} Z^1{}_{,2} + Z^2{}_{,1} Z^2{}_{,2} + Z^3{}_{,1} Z^3{}_{,2} = \dots\\
c_{23} &= c_{32} = Z^1{}_{,2} Z^1{}_{,3} + Z^2{}_{,2} Z^2{}_{,3} + Z^3{}_{,2} Z^3{}_{,3} = \dots\\
c_{13} &= c_{31} = 0
\end{aligned}
$$

$$
[c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix}
\tag{12}
$$

3b. Greeni DT $\quad C_{KL} = \delta_{kl} z^k{}_{,K} z^l{}_{,L}$

$$
\begin{aligned}
&C_{11} = 1;\quad C_{22} = 1 + A^2;\quad C_{33} = 1 + A^2;\\
&C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = 0;\quad C_{23} = C_{32} = 2A
\end{aligned}
$$

$$
[C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix}
\tag{13}
$$

3c. Lagrange'i DT

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

3d. Euleri DT

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} & \frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & \frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.

4a. Greeni deformatsioonitensor $\boldsymbol{C_{KL}}$. Kuna meil on kasutusel DRK, siis $C^K{}_L = C_{KL}$ ja võrrand (2.189) saab kuju

$$(C_{KL} - C\delta_{KL})\, N^L = 0. \tag{16}$$

Peaväärtused C määratakse karakteristlikust võrrandist

$$|C_{KL} - C\delta_{KL}| = \begin{vmatrix} 1-C & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2-C & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2-C \end{vmatrix} = \tag{17}$$
$$= (1-C)\left[\left(1+A^2-C\right)^2 - 4A^2\right] = 0.$$

Viimase lahendid on (pärast ümbernummerdamist $C_1 \geq C_2 \geq C_3$)

$$C_1 = (1+A)^2; \quad C_2 = 1; \quad C_3 = (1-A)^2. \tag{18}$$

Igale peaväärtusele C_α vastab peasuund $\mathbf{N}_\alpha \equiv (N^1{}_\alpha, N^2{}_\alpha, N^3{}_\alpha)$, mille määramiseks saame avaldise (28) põhjal kolm võrrandit:

$$\begin{cases} (C_{11} - C_{\underline{\alpha}})\, N^1{}_{\underline{\alpha}} + C_{12}N^2{}_{\underline{\alpha}} + C_{13}N^3{}_{\underline{\alpha}} = 0, \\ C_{21}N^1{}_{\underline{\alpha}} + (C_{22} - C_{\underline{\alpha}})\, N^2{}_{\underline{\alpha}} + C_{23}N^3{}_{\underline{\alpha}} = 0, \\ C_{31}N^1{}_{\underline{\alpha}} + C_{32}N^2{}_{\underline{\alpha}} + (C_{33} - C_{\underline{\alpha}})\, N^3{}_{\underline{\alpha}} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

i) Peasuund $\mathbf{N}_1$. Peaväärtusele $C_1 = (1+A)^2$ vastava peasuuna $\mathbf{N}_1 \equiv (N^1{}_1, N^2{}_1, N^3{}_1)$ leidmiseks saab VS (19) kuju

$$\begin{cases} \left[1-(1+A)^2\right] N^1{}_1 = 0, \\ \left[1+A^2-(1+A)^2\right] N^2{}_1 + 2AN^3{}_1 = 0, \\ 2AN^2{}_1 + \left[1+A^2-(1+A)^2\right] N^3{}_1 = 0, \end{cases} \tag{20}$$

kust saame

$$\begin{cases} N^1{}_1 = 0, \\ -2AN^2{}_1 + 2AN^3{}_1 = 0, \\ 2AN^2{}_1 - 2AN^3{}_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^1{}_1 = 0, \\ N^2{}_1 = N^3{}_1. \end{cases} \tag{21}$$

Nüüd tuleb rakendada tingimust, et $\mathbf{N}_1$ on ühikvektor, st., $(N^1{}_1)^2 + (N^2{}_1)^2 + (N^3{}_1)^2 = 1$. Seega $N^2{}_1 = N^3{}_1 = \pm 1/\sqrt{2}$ ja

$$\mathbf{N}_1 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{22}$$

ii) Peasuund $\mathbf{N}_2$. Peaväärtuse $C_2 = 1$ puhul saab VS (19) kuju

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ A^2N^2{}_2 + 2AN^3{}_2 = 0, \\ 2AN^2{}_2 + A^2N^3{}_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow N^2{}_2 = N^3{}_2 = 0. \tag{23}$$

Kuna ka $\mathbf{N}_2$ peab olema ühikvektor, siis

$$\mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)\,. \tag{24}$$

iii) Peasuund $\mathbf{N}_3$. Peasuuna $\mathbf{N}_3$ leidmiseks kasutame peaväärtust $C_3 = (1-A)^2$, mille puhul VS (19) saab kuju

$$\begin{cases} \left[1-(1-A)^2\right] N^1{}_3 = 0, \\ \left[1+A^2-(1-A)^2\right] N^2{}_3 + 2AN^3{}_3 = 0, \\ 2AN^2{}_3 + \left[1+A^2-(1-A)^2\right] N^3{}_3 = 0, \end{cases} \tag{25}$$

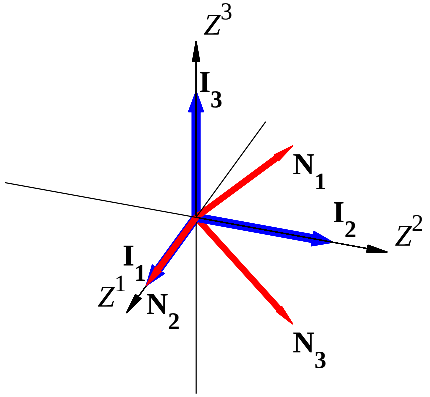
kust saame

$$\begin{cases} N^1{}_3 = 0, \\ 2AN^2{}_3 + 2AN^3{}_3 = 0, \\ 2AN^2{}_3 + 2AN^3{}_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^1{}_3 = 0, \\ N^2{}_3 = -N^3{}_3. \end{cases} \tag{26}$$

Tingimusest $|\mathbf{N}_3| = 1$, saame nüüd, et

$$\mathbf{N}_3 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{27}$$

Valemite (22)–(30) põhjal on iga peasuuna puhul võimalik valida kahe vektori vahel. Tegelikult tuleb silmas pidada, et peasuunad peavad moodustama parema käe kolmiku. Seega, kahe peasuuna puhul võime valida ükskõik kumma kahest leitud vektorist, kuid kolmas peasuund peab olema valitud nii, et kokku moodustuks parema käe kolmik. Näiteks, kui valime $\mathbf{N}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\mathbf{N}_2 = (1,0,0)$, siis peab $\mathbf{N}_3$ vastama tingimusele $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, mis antud juhul tähendab, et $\mathbf{N}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 4).



Joonis 4: Greeni deformatsioonitensori C_{KL} peasuunad (peavektorid $\mathbf{N}_1$ ja $\mathbf{N}_3$ asuvad $Z^2 - Z^3$ tasandil).

4b. Cauchy deformatsioonitensor c_{kl}. Nüüd tuleb lähtuda võrrandist

$$(c_{kl} - c\delta_{kl})\, n^l = 0. \tag{28}$$

Eelnenuga analoogiline protseduur annab tulemuseks

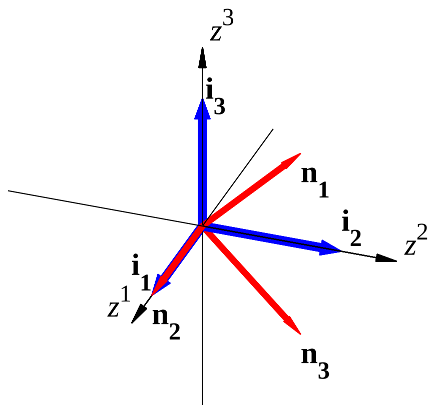
$$c_1 = (1+A)^{-2}; \quad c_2 = 1; \quad c_3 = (1-A)^{-2}. \tag{29}$$

Peaväärtuste järjestamise juures tuleb silmas pidada, et esimesele peaväärtusele c_1 peab vastama suurim peapikenemine λ_1 ja kolmandale vähim, st. $C_\alpha = 1/c_\alpha = \lambda_\alpha^2$.

Selgub, et antud ülesande korral Cauchy ja Greeni deformatsioonitensori peasuunad ühtivad, seega

$$\mathbf{n}_1 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{n}_2 = (\pm 1, 0, 0), \quad \mathbf{n}_3 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{30}$$

Viimastest võime valida eelnevaga analoogilise kolmiku $\mathbf{n}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{n}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{n}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 5).



Joonis 5: Cauchy deformatsioonitensori c_{kl} peasuunad (peavektorid $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_3$ asuvad $z^2 - z^3$ tasandil).

4c. Lagrange'i deformatsioonitensori $\boldsymbol{E_{KL}}$ peaväärtused ja peasuunad määratakse võrrandist

$$\left(E_{KL} - E\delta_{KL}\right) N^L = 0, \tag{31}$$

kust saame

$$E_1 = \frac{A}{2}(A+2), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{A}{2}(A-2). \tag{32}$$

Peaväärtuste järjestamisel tuleb jällegi silmas pidada, et suurimale peapikenemisele λ_1 vastaks esimene peaväärtus E_1 ja vähimale kolmas. Siinjuures tuleb lähtuda seostest $C_\alpha = {\lambda_\alpha}^2$ ja $E_\alpha = {\lambda_\alpha}^2 - 1$. Lagrange'i deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Greeni deformatsikoonitensori peasuundadega.

Kontroll.
Kasutame valemit (2.188) $2E = C - 1$. Seega $2E_1 = (1+A)^2 - 1 = A(A+2)$, $2E_2 = 1 - 1 = 0$ ja $2E_3 = (1-A)^2 - 1 = A(A-2)$.

4d. Euleri deformatsioonitensori $\boldsymbol{e_{kl}}$ peaväärtused määratakse seosest $2e = 1 - c$, seega

$$\begin{aligned} e_1 &= 0,5(1-c_1) = \frac{A(2+A)}{2(1-A)^2}, \\ e_2 &= 0,5(1-c_2) = 0, \\ e_3 &= 0,5(1-c_3) = -\frac{A(2-A)}{2(1-A)^2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Euleri deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Cauchy deformatsikoonitensori peasuundadega.

5. Deformatsiooniellipsoidid Ruumiline deformatsiooniellipsoid on esitatud valemiga (2.197)

$$C_\alpha \left(dX^\alpha\right)^2 = ds^2 = k^2 \tag{34}$$

ja materiaalne valemiga (2.200)

$$c_\alpha \left(dx^\alpha\right)^2 = dS^2 = K^2. \tag{35}$$

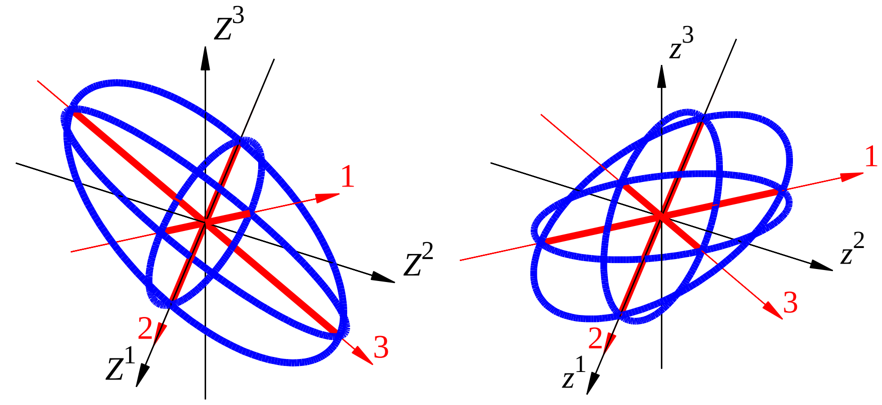
Kui $A = 1/2$, siis

$$\begin{cases} C_1 = (1+A)^2 = \dfrac{9}{4}, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = (1-A)^2 = \dfrac{1}{4}, \end{cases} \overset{c_\alpha = 1/C_\alpha}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{4}{9}, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 4, \end{cases} \tag{36}$$

Kui valida $t = t_0$ puhul $dS = ds = K = k$, siis avalduvad pooltelgede pikkused järgmiselt.

Ruumiline:	Materiaalne:
$a_\alpha^R = \dfrac{k}{\sqrt{C_\alpha}}$	$a_\alpha^M = \dfrac{K}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \dfrac{k}{\sqrt{c_\alpha}} = k\sqrt{C_\alpha}$
$a_1^R = \dfrac{2}{3}k;\ a_2^R = k;\ a_3^R = 2k.$	$a_1^M = \dfrac{3}{2}k;\ a_2^M = k;\ a_3^M = \dfrac{1}{2}k.$

Deformatsiooniellipsoidide pooltelgede orientatsioon on määratud deformatsioonitensorite peasuundadega — ruumilise deformatsiooniellipsoidi pooletelgedele vastavad $\mathbf{N}_\alpha$ ja materiaalse omadele $\mathbf{n}_\alpha$.



Joonis 6: Ruumiline ja materiaalne deformatsiooniellipsoid.

6. Pikenemine ja pööre

6a. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid (vt. joonis 3). Valemite (2.151) ja tensori C_{KL} definitsiooni (2.83) põhjal avaldub pikenemiskoefitsent suunas $\mathbf{N}$ järgmiselt:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N^K N^L} = \sqrt{g_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}N^K N^L}. \tag{37}$$

Peasuundade puhul $\Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha}$. Lihtsuse mõttes leiame pikenemiskoefitsentide ruudud $\Lambda^2_{(\mathbf{N})}$. Meil teatavasti $X^K \equiv Z^K$ ja $x^k \equiv z^k$.

1) Serv $\boldsymbol{OA}$ on 2. peasihis, seega

$$\Lambda^2_{(OA)} \equiv \Lambda^2_{(Z^1)} \equiv \Lambda^2_{(2)} = C_2 = 1. \tag{38}$$

2) Serv $\boldsymbol{OC}$. Leiame $\Lambda^2_{(OC)} \equiv \Lambda^2_{(Z^2)}$ kolme erineval moel, arvestades, et $\mathbf{N}_{(OC)} = \mathbf{I}_2 = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && \Lambda^2_{(Z^2)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dZ^2 + A^2 dZ^2}{dZ^2} = 1 + A^2,\\
&\text{ii)} && \Lambda^2_{(Z^2)} = C_{22}\cdot 1 \cdot 1 = 1 + A^2,\\
&\text{iii)} && \Lambda^2_{(Z^2)} = \left(z^1{}_{,2}\right)^2 + \left(z^2{}_{,2}\right)^2 + \left(z^3{}_{,2}\right)^2 = 1 + A^2.
\end{aligned} \tag{39}$$

3) Serv $\boldsymbol{OD}$. Joonise 3 põhjal

$$\Lambda^2_{(OD)} \equiv \Lambda^2_{(Z^3)} = \Lambda^2_{(Z^2)} = 1 + A^2. \tag{40}$$

4) Diagonaal $\boldsymbol{OG}$ on 1. peasihis, st., $\mathbf{N}_{(OG)} = \mathbf{N}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Leiame pikenemiskoefitsendi $\Lambda_{(OG)}$ jällegi kolmel erineval moel:

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && \Lambda^2_{(OG)} \equiv \Lambda^2_{(1)} = C_1 = (1+A)^2,\\
&\text{ii)} && \Lambda^2_{(OG)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2(dZ + A dZ)^2}{dZ^2 + dZ^2} = (1+A)^2,\\
&\text{iii)} && \Lambda^2_{(OG)} = C_{KL}N^K N^L = C_{22}\cdot\frac{1}{2} + C_{33}\cdot\frac{1}{2} + 2C_{23}\cdot\frac{1}{2} = (1+A)^2.
\end{aligned} \tag{41}$$

5) Diagonaal $\boldsymbol{DC}$ on 3. peasuunas, seega

$$\Lambda^2_{(DC)} \equiv \Lambda^2_{(3)} = C_3 = (1-A)^2. \tag{42}$$

6) Diagonaal $\boldsymbol{OE}$ pole ei telje- ega peasihiline. Ühikvektor $\mathbf{N}_{(OE)} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ ja

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && \Lambda^2_{(OE)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2dZ^2 + A^2 dZ^2}{dZ^2 + dZ^2} = 1 + \frac{A^2}{2},\\
&\text{ii)} && \Lambda^2_{(OE)} = C_{KL}N^K N^L = \ldots
\end{aligned} \tag{43}$$

7) Diagonaal $\boldsymbol{OF}$. Analoogselt eelmisega, $\mathbf{N}_{(OF)} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && \Lambda^2_{(OF)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dZ^2 + 2(1+A)^2 dZ^2}{3dZ^2} = 1 + \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3},\\
&\text{ii)} && \Lambda^2_{(OF)} = C_{KL}N^K N^L = \ldots
\end{aligned} \tag{44}$$

8) Diagonaal $\boldsymbol{DB}$. Nüüd, $\mathbf{N}_{(DB)} = (1,1,-1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OF)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dZ^2 + 2(1-A)^2 dZ^2}{3dZ^2} = 1 - \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ &\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OF)} = C_{KL} N^K N^L = \ldots \end{aligned} \tag{45}$$

9) Ülejäänud servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid on võrdsed juba leitutega.

Kontroll. $\Lambda^2_{(K)} \equiv \Lambda^2_{(Z^K)} = C_{\underline{K}\,\underline{K}}$ ja $\Lambda_{(1)}$ ning $\Lambda_{(3)}$ on ekstremaalsed kõigi $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ seast.

6b. Suhteline pikenemine. [2]

$$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1. \tag{46}$$

Seega

$$\begin{cases} E_{(Z^1)} = 1 - 1 = 0, \ E_{(Z^2)} = E_{(Z^3)} = \sqrt{1+A^2} - 1, \\ E_{(1)} = (1+A) - 1 = A, \ E_{(2)} = E_{(Z^1)} = 0, \ E_{(3)} = (1-A) - 1 = -A. \end{cases} \tag{47}$$

Suhtelisel pikenemisel $E_{(Z^K)} \equiv E_{(K)}$ puudub nii otsene seos Lagrange'i deformatsioonitensoriga E_{KL} kui on pikenemiskoefitsendi $\Lambda_{(K)}$ ja Greeni deformatsioonitensori C_{KL} vahel. Valemite (2.159) põhjal

$$2E_{\underline{K}\,\underline{K}} = \left(1 + E_{(K)}\right)^2 - 1 = \Lambda^2_{(K)} - 1.$$

Seega

$$2E_{\underline{K}\,\underline{K}} = \frac{ds^2_{(K)} - dS^2_{(K)}}{dS^2_{(K)}}.$$

[2]Suhtelist pikenemist ei tohi segi ajada tensori E_{KL} peaväärtustega E_α — $2E_\alpha = C_\alpha - 1 = \Lambda^2_{(\mathbf{N})} - 1$.

6c. Kuubi servade pööre. Arvutamiseks on (vähemalt) kolm võimalust: (i) läbi deformeerunud kuubi geomeetria, (ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise, (iii) valemi (2.217) abil.

Arvutusete juures on võetud $A = 0,5$ ja vastused on kraadides.

1) Serv OA ei pöördu, seega $\beta_{OA} = 0$.

2) Serv OC, $\beta_{OC} = 26,5651$

$$\overline{OC} = (0,1,0), \quad \overline{OC'} = (0,1,A), \quad |\overline{OC}| = 1, \quad |\overline{OC'}| = \sqrt{1+A^2}.$$

(i) läbi deformeerunud kuubi geomeetria,

$$\cos\beta_{OC} = \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OC}|} == 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \tag{48}$$

(ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise

$$\cos\beta_{OC} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OC'}}{|\overline{OC}| \cdot |\overline{OC'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \tag{49}$$

(iii) ...

3) Serv OD, $\beta_{OD} = 26,5651$

4) Diagonaal OB, $\beta_{OB} = 19,4712$

$$\overline{OB} = (1,1,0), \quad \overline{OB'} = (1,1,A), \quad |\overline{OB}| = \sqrt{2}, \quad |\overline{OB'}| = \sqrt{2+A^2}.$$

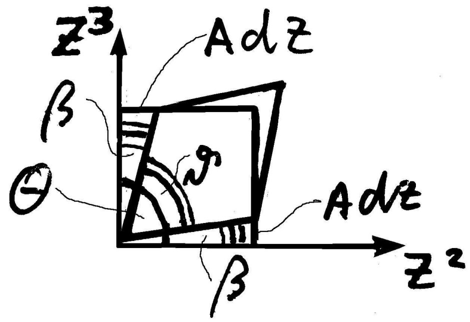
(i) läbi deformeerunud kuubi geomeetria,

$$\cos\beta_{OB} = \frac{|\overline{OB'}|}{|\overline{OB}|} = 0.89443, \quad \beta_{OB} = 26,5651. \tag{50}$$

5) Diagonaal OE, $\beta_{OE} = 19,4712$

6) Diagonaal OF, $\beta_{OF} = 10,025$

7) Diagonaal OG, $\beta_{OG} = 0$



Joonis 7: Algse täisnurga muutus.

6d. Algse täisnurga muut $Z_2 - Z_3$ tasandis — nihe. On selge, et teljega Z^1 paralleelne kuubi serv deformatsiooni käigus ei pöördu ning servad, mis on paralleelsed Z^2 ja Z^3 teljega pöörduvad nurga $\beta = \arctan A$ võrra (joonis 7). Leiame Z^2 ja Z^3 telje vahelise täisnurga muudu.

$$\Gamma = \Theta - \vartheta = 2\beta. \tag{51}$$

Seega $\Gamma = 2\arctan A$. Teiselt poolt

$$\sin\Gamma = \cos\vartheta = \frac{\delta_{23} + 2E_{23}}{\sqrt{(1+2E_{22})(1+2E_{33})}} = \\ = \frac{0+2A}{\sqrt{(1+2\frac{A^2}{2})(1+2\frac{A^2}{2})}} = \frac{2A}{1+A^2}. \tag{52}$$

Kui $A = 1/2$, siis $\sin\Gamma = 4/5$ ja $\Gamma = 53,13°$. Sama tulemuse annab ka $\Gamma = 2\arctan 0,5$.

7. Pöördetensor $R^k{}_K = n^k{}_\alpha N^\alpha{}_K$ pöörab Greeni deformatsioonitensori peasuunad $\mathbf{N}_\alpha$ Cauchy' deformatsioonitensori peasuundadeks $\mathbf{n}_\alpha$. DRK puhul kaassuunad $\mathbf{N}^\alpha{}_K = \mathbf{N}^K{}_\alpha$. Antud juhul peasuundade $\mathbf{n}_\alpha$ ja $\mathbf{N}_\alpha$ avaldised ühtivad, st.,
$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Seega kui valime peasuundadeks
$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,
siis pöördetensor

$$R^k{}_K = \delta^k{}_K. \tag{53}$$

Kui aga valida
$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{N}_1 = -(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ ja
$\mathbf{n}_3 = -\mathbf{N}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
siis saame hoopis teistsuguse pöördetensori —

$$R^k{}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

8. Greeni deformatsioonitensori $\boldsymbol{C_{KL}}$ invariandid.

$$\mathrm{I}_C = C_1 + C_2 + C_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3 + 2A^2,$$

$$\mathrm{II}_C = C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 3 + A^4,$$

$$\mathrm{III}_C = C_1C_2C_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (1 - A^2)^2. \tag{55}$$

Kui $A = 1/2$, siis $\mathrm{I}_C = 7/2$, $\mathrm{II}_C = 49/16$ ja $\mathrm{III}_C = 9/16$.