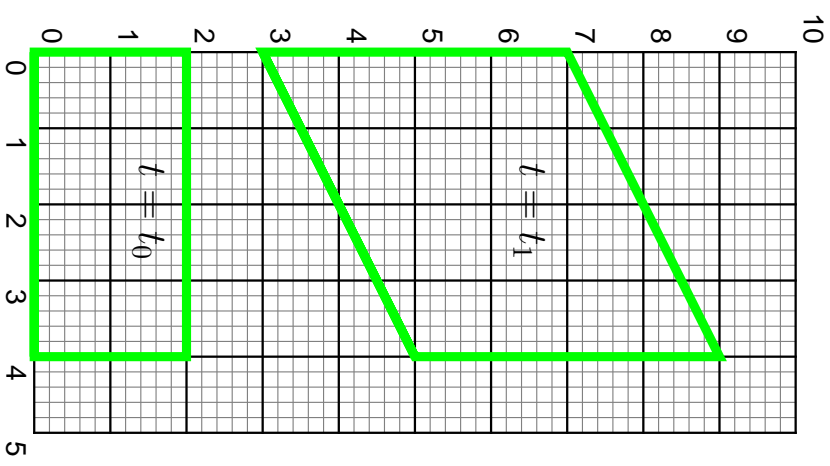


Näide K1: deformatsioonitensorige ja siirdevektorite leidmine

Pidev keskkond liigub tasapinnaliselt. Tema asend hetkel $t = t_0$ ja $t = t_1$ on kujutatud joonisel.

- Tuua sisse EDRK ja LDRK, ning vastavad baasivektorid.
- Kirjeldada keskkonna liikumise.
- Leida deformatsioonigradiendid.
- Leida “uued baasivektorid” \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K .
- Leida Cauchy, Greeni, Fingeri, Piola, Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorigid.
- Leida siirdevektori \mathbf{u} komponendid nii EK-s kui LK-s.



Joonis 1. Deformatsioon

Deformatsioonitensorige ja siirdevektorite leidmine

- Alghetkel $t = t_0$ langevad EK ja LK kokku, st. $x_k \equiv X_K$ ja $\mathbf{i}_k \equiv \mathbf{I}_K$, kui $k = K$.
- Hetkel $t = t_1$ on LK deformeerunud koos keskkonnaga — LK nullpunkt asub ruumipunktis $(0, 3)$ ja ristkoordinaadid on muutunud kaldkoordinaatideks.
- Liikumisseadus:

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = 0, 5X_1 + 2X_2 + 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = -0, 25x_1 + 0, 5x_2 - 1, 5. \end{cases} \quad (2)$$

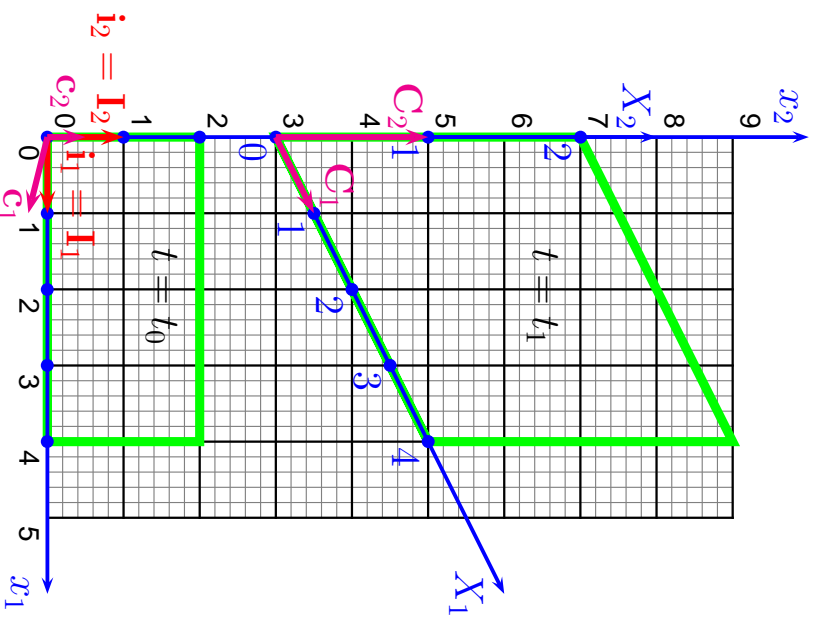
- Kontroll:

$$(X_1, X_2) = (2, 2) \xrightarrow{(1)} (x_1, x_2) = (2, 8),$$

$$(X_1, X_2) = (4, 2) \xrightarrow{(1)} (x_1, x_2) = (4, 9),$$

$$(x_1, x_2) = (2, 8) \xrightarrow{(2)} (X_1, X_2) = (2, 2),$$

$$(x_1, x_2) = (4, 9) \xrightarrow{(2)} (X_1, X_2) = (4, 2).$$



Joonis 2. Deformatsioon, koordinaadid ja baasivektorid

- Deformatsioonigradiendid

$$[x_{k,K}] \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}, \quad [X_{K,k}] \stackrel{(2)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

- Uued baasivektorid:

$$\mathbf{c}_k = X_{K,k} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K = x_{k,K} \mathbf{i}_k \quad (4)$$

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \dots\dots\dots = \mathbf{I}_1 - 0,25\mathbf{I}_2, \\ \mathbf{c}_2 = \dots\dots\dots = 0,5\mathbf{I}_2, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1 = \dots\dots\dots = \mathbf{i}_1 + 0,5\mathbf{i}_2, \\ \mathbf{C}_2 = \dots\dots\dots = 2\mathbf{i}_2. \end{cases} \quad (6)$$

- Baasivektorite muutumine: võrrelge joonist 2 ja loengukonsepti jooniseid lk. 3-19 ja 3-20.

Deformatsioonitensooride ja siirdevektorite leidmine

- Materiaalses punktis $X_1 = X_2 = 0$ rakendatud vektorid \mathbf{c}_1 ja \mathbf{c}_2 deformeeruvad hetkeks $t = t_1$ EDRK baasivektoriteks \mathbf{i}_1 ja \mathbf{i}_2 .

$$\begin{cases} (x_1, x_2) = (0; 0) \rightarrow (x_1, x_2) = (0; 3); \\ (x_1, x_2) = (1; -0,25) \rightarrow (x_1, x_2) = (1; 3); \\ (x_1, x_2) = (0; 0,5) \rightarrow (x_1, x_2) = (0; 4); \end{cases} \quad (7)$$

- Materiaalse punkti kohavektor alghetkel $t = t_0$

$$\mathbf{P} = X_1 \mathbf{I}_1 + X_2 \mathbf{I}_2 = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 \quad (8)$$

- Materiaalse punkti kohavektor hetkel $t = t_1$

$$\mathbf{P} = X_1 \mathbf{C}_1 + X_2 \mathbf{C}_2 \stackrel{(2),(6)}{=} \dots\dots\dots = x_1 \mathbf{i}_1 + (x_2 - 3) \mathbf{i}_2. \quad (9)$$

Kui $(x_1, x_2) = (4; 9)$, siis

$$\mathbf{P} = \dots\dots\dots = 4\mathbf{i}_1 + 6\mathbf{i}_2 \quad (10)$$

esitab materiaalse punkti $(X_1, X_2) = (4; 2)$ kohavektori \mathbf{P} Euleri koordinaatides x_k hetkel $t = t_1$.

- Vektorite teisedamine.

Eeldusel, et liikumissedus on esitatud lineaarse koordinaatteisendusena, kehtivad seosed:

$$x_k = x_{k,K} X_K, \quad X_K = X_{K,k} x_k, \quad \text{ehk} \quad [\mathbf{x}] = [x_{k,K}] \cdot [\mathbf{X}], \quad [\mathbf{X}] = [X_{K,k}] \cdot [\mathbf{x}], \quad (11)$$

kus x_k ja X_K on vastavalt vektorite \mathbf{x} ja \mathbf{X} komponendid. Siinjuures on \mathbf{X} nn. deformeerumata vektor ehk LK-s esitatud vektor ja \mathbf{x} on nn. deformeerunud vektor, mis on vaadeldaval juhul on rakendatud ruumipunkti $(x_1, x_2) = (0, 3)$ ja on esitatud EK-s.

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{x} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{x} = \dots = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{X} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} & \rightarrow & \mathbf{X} = \dots = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (13)$$

Deformatsioonitensoorite ja siirdevektorite leidmine

- Cauchy ja Greeni deformatsioonitensoidid:

$$c_{kl} = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l, \quad C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L. \quad (14)$$

$$c_{11} = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \frac{17}{16}, \quad c_{12} = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = -\frac{1}{8}, \quad c_{22} = \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \frac{1}{4}, \quad (15)$$

$$C_{11} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_1 = \frac{5}{4}, \quad C_{12} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = 1, \quad C_{22} = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_2 = 4. \quad (16)$$

$$[c_{kl}] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 17 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad [C_{KL}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

- Kontroll

$$c_{kl} = X_{K,k} X_{K,l}, \quad C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}, \quad (18)$$

Maatriksitena

$$[c_{kl}] = [X_{K,k}]^T \cdot [X_{K,l}] = \dots = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[C_{KL}] = [x_{k,K}]^T \cdot [x_{k,L}] = \dots = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (20)$$

- Fingeri ja Piola deformatsioonitensordid:

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}, \quad C_{KL}^{-1} = X_{K,k} X_{L,k}, \quad (21)$$

Maatriksitena

$$[c_{kl}^{-1}] = [x_{k,K}] \cdot [x_{l,K}]^T = \dots = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$[C_{KL}^{-1}] = [X_{K,k}] \cdot [X_{L,k}]^T = \dots = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

- Kontroll

$$c_{kl}^{-1} c_{lm} = \delta_{km}, \quad C_{KL}^{-1} C_{LM} = \delta_{KM}. \quad (24)$$

Maatriksitena

$$[c_{kl}] \cdot [c_{lm}^{-1}] = \dots = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[C_{KL}] \cdot [C_{LM}^{-1}] = \dots = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (26)$$

Deformatsioonitensorite ja siirdevektorite leidmine

- Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensordid:

$$2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}, \quad 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}. \quad (27)$$

- Maatriksitena

$$[e_{kl}] = \dots = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[E_{KL}] = \dots = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \quad (29)$$

- Siirdevektori komponendid EK-s ja LK-s

Siirdevektor: $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}$, (30)

$$u_k = x_k - X_K(\mathbf{x}), \quad U_K = x_k(\mathbf{X}) - X_K, \quad k = K. \quad (31)$$

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 \stackrel{(2)}{=} \dots\dots\dots = 0 \\ u_2 = x_2 - X_2 \stackrel{(2)}{=} \dots\dots\dots = 0, 25x_1 + 0, 5x_2 + 1, 5 \end{cases} \quad (32)$$

Kontroll: $(x_1, x_2) = (4, 9) \rightarrow u_2 = \dots\dots\dots = 7$ (33)

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 \stackrel{(1)}{=} \dots\dots\dots = 0 \\ U_2 = x_2 - X_2 \stackrel{(1)}{=} \dots\dots\dots = 0, 5X_1 + X_2 + 3 \end{cases} \quad (34)$$

Kontroll: $(X_1, X_2) = (4, 2) \rightarrow U_2 = \dots\dots\dots = 7$ (35)

- Lisakontroll

$$\begin{cases} U_2 = u_2(\mathbf{X}) = \dots \\ u_2 = U_2(\mathbf{x}) = \dots \end{cases} \quad (36)$$