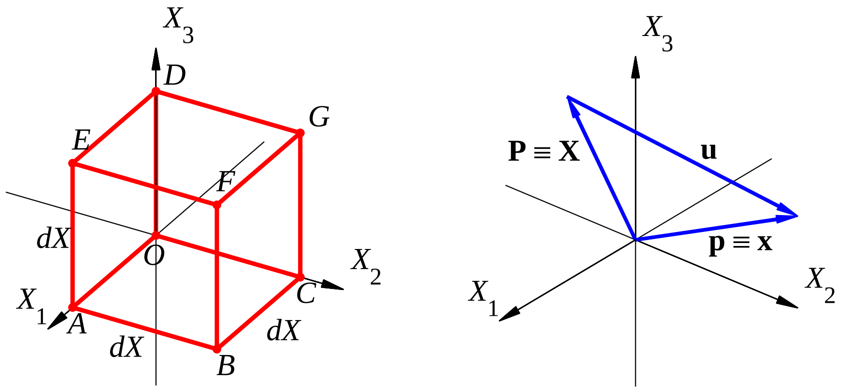
Näide K2: Deformatsiooni analüüs

Pideva keskkonna liikumine on kirjeldatud teisendusega

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = AX_2 + X_3, \end{cases} \qquad \text{kus} \quad A = const. \ (0 < A < 1). \tag{1}$$

Leida:

1. Siirdevektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides.
2. Millisteks kujunditeks deformeeruvad (X_2, X_3) tasandil asuv ring $(X_2)^2 + (X_3)^2 = (1-A^2)^{-1}$ ja elementaarkuup servapikkusega $dX_1 = dX_2 = dX_3 = dX$. Esitada vastavad joonised kui $A = 1/2$.
3. Leida Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid.
4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.
5. Joonistada materiaalne ja ruumiline deformatsiooniellipsoid.
6. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid, suhtelised pikenemised ja pöörded ning algse täisnurga muutus $X_2 - X_3$ tasandis.
7. Pöördetensor R_{kK}.
8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariandid.



Joonis 1: Algne kuup ja siirdevektor.

Lahendus

Teisenduse (1) pöörteisendus on

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1 - A^2), \\ X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1 - A^2). \end{cases} \tag{2}$$

1. Siire

Siirdevektor

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K = u_k \mathbf{i}_k = \mathbf{p} - \mathbf{P} = x_k \mathbf{i}_k - X_K \mathbf{I}_K. \tag{3}$$

Seega siirdevektori komponendid LK-s

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 \overset{(1)}{=} 0, \\ U_2 = x_2 - X_2 \overset{(1)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots = AX_3, \\ U_3 = x_3 - X_3 \overset{(1)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots = AX_2, \end{cases} \tag{4}$$

ja EK-s

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 \overset{(2)}{=} 0, \\ u_2 = x_2 - X_2 \overset{(2)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dfrac{A(x_3 - Ax_2)}{1 - A^2}, \\ u_3 = x_3 - X_3 \overset{(2)}{=} \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dfrac{A(x_2 - Ax_3)}{1 - A^2}. \end{cases} \tag{5}$$

2a. Ring. Algse ringjoone võrrand on $(X_2)^2 + (X_3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$. Asendame siia $X_K = X_K(x_1, x_2, x_3)$ pöördteisendusest (2).

$$\frac{(x_2 - Ax_3)^2}{(1 - A^2)^2} + \frac{(x_3 - Ax_2)^2}{(1 - A^2)^2} = \frac{1}{1 - A^2}$$

$$\dots \tag{6}$$

$$(1 + A^2)(x_2)^2 - 4Ax_2x_3 + (1 + A^2)(x_3)^2 = 1 - A^2.$$

See on ellipsi võrrand. Ellipsi joonistamiseks pöörame koordinaattelgi nurga $\pi/4$ võrra[1]. Toome sisse uued koordinaadid v_1, v_2, st. pöörame koordinaate x_1, x_2.

$$\begin{cases} v_2 = (x_2 + x_3)/\sqrt{2}, \\ v_3 = (x_3 - x_2)/\sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = (v_2 - v_3)/\sqrt{2}, \\ x_3 = (v_2 + v_3)/\sqrt{2}. \end{cases} \tag{7}$$

[1]Teist järku joone võrrandi üldkuju on $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.
Kui pöörata telgi nurga α võrra, kus α avaldadakse võrrandi
$b \tan^2 \alpha + (a - c) \tan \alpha - b = 0$ positiivsest lahendist, saame tulemuseks teist järku joone võrrandi kujul: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Asendades (7) võrrandisse (6) saame pärast mõningaid teisendusi

$$(1-A)^2(v_2)^2+(1+A)^2(v_3)^2=1-A^2$$

Viimasele saab anda kuju

$$\frac{(v_2)^2}{\frac{1+A}{1-A}}+\frac{(v_3)^2}{\frac{1-A}{1+A}}=1. \tag{8}$$

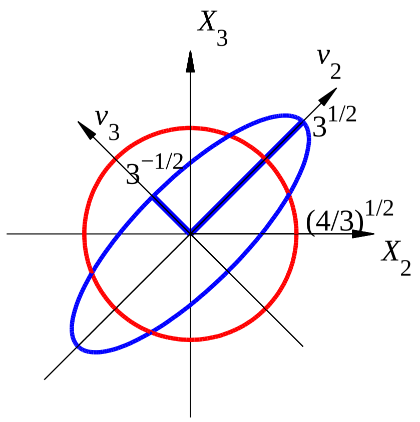
Kui $A=1/2$, siis algse ringi võrrand saab kuju

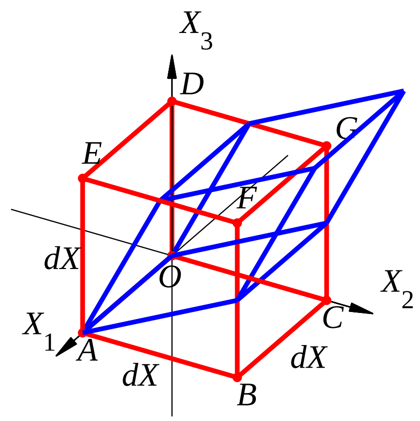
$$(x_2)^2+(x_3)^2=4/3 \tag{9}$$

ja ellipsi võrrand

$$\frac{(v_2)^2}{3}+\frac{(v_3)^2}{\frac{1}{3}}=1. \tag{10}$$

Seega, algse ringi raadius $r=2/\sqrt{3}=1,155$ ja ellipsi pooltelјed $a=\sqrt{3}=1,732$ ning $b=1/\sqrt{3}=0,577$





Joonis 2: Deformeerunud ring ja deformeerunud kuup.

2b. Kuup. Kuubi deformeerunud kuju leidmiseks on mitu erinevat võimalust. I) Leiame näiteks kuubi servade siirded.

a) serv $OA: X_2=X_3=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U_1=U_2=U_3=0$,

b) serv $OC: X_1=X_3=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U_1=U_2=0, U_3=AX_2$,

c) serv $OD: X_1=X_2=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U_1=U_3=0, U_2=AX_3$,

d) serv $AB: X_1=dX, X_3=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} U_1=U_2=0, U_3=AX_2$,

e) serv $FG: X_2=dX, X_3=dX \overset{(4)}{\Rightarrow} U_1=0, U_2=U_3=AdX$, jne.

II) Samahästi võiks leida tippude siirded:

a) tipp O: koordinaadid enne deformatsiooni
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$
siire $U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = 0$ ja
koordinaadid peale deformatsiooni $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$;

b) tipp B: koordinaadid enne deformatsiooni
$X_1 = dX,\ X_2 = dX,\ X_3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$
siire $U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = AdX$ ja
koordinaadid peale deformatsiooni $x_1 = dX,\ x_2 = dX,\ x_3 = AdX$; jne.

III) Deformeerunud kuubi tippude koordinaatide leidmiseks võib kasutada ka liikumisseadust (1).

3. Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid (DT)

$$\begin{array}{llll} \text{Cauchy DT:} & c_{kl} = X_{K,k}X_{K,l} & \text{Greeni DT:} & C_{KL} = x_{k,K}x_{k,L} \\ \text{Lagrange'i DT:} & 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} & \text{Euleri DT:} & 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} \end{array} \tag{11}$$

Kõigepealt on vaja leida deformatsioonigradiendid:

$$X_{K,k} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \qquad x_{k,K} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{12}$$

3a. Cauchy DT $\quad c_{kl} = X_{K,k}X_{K,l}$

$$c_{11} = (X_{1,1})^2 + (X_{2,1})^2 + (X_{3,1})^2 = \dots$$
$$c_{22} = (X_{1,2})^2 + (X_{2,2})^2 + (X_{3,2})^2 = \dots$$
$$c_{33} = (X_{1,3})^2 + (X_{2,3})^2 + (X_{3,3})^2 = \dots$$
$$c_{12} = c_{21} = X_{1,1}X_{1,2} + X_{2,1}X_{2,2} + X_{3,1}X_{3,2} = \dots$$
$$c_{23} = c_{32} = X_{1,2}X_{1,3} + X_{2,2}X_{2,3} + X_{3,2}X_{3,3} = \dots$$
$$c_{13} = c_{31} = 0$$

$$[c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

3b. Greeni DT $\quad C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}$

$$C_{11} = 1;\quad C_{22} = 1 + A^2;\quad C_{33} = 1 + A^2;$$
$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = 0;\quad C_{23} = C_{32} = 2A$$

$$[C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

3c. Lagrange'i DT $\quad 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}$

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

3d. Euleri DT $\quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}$

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} & \frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & \frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.

4a. Greeni deformatsioonitensor $\boldsymbol{C_{KL}}$. Kasutame konspekti valemit (3.104)[2]

$$(C_{KL} - C\delta_{KL})\, N_L = 0. \tag{17}$$

Peaväärtused C määratakse karakteristlikust võrrandist

$$|C_{KL} - C\delta_{KL}| = \begin{vmatrix} 1 - C & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 - C & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 - C \end{vmatrix} = \\ = (1 - C)\left[\left(1 + A^2 - C\right)^2 - 4A^2\right] = 0. \tag{18}$$

Viimase lahendid on (pärast ümbernummerdamist $C_1 \geq C_2 \geq C_3$)

$$C_1 = (1 + A)^2;\quad C_2 = 1;\quad C_3 = (1 - A)^2. \tag{19}$$

Igale peaväärtusele C_α vastab peasuund $\mathbf{N}_\alpha \equiv (N_{1\alpha}, N_{2\alpha}, N_{3\alpha})$, mille määramiseks saame avaldise (17) põhjal kolm võrrandit:

$$\begin{cases} (C_{11} - C_{\underline{\alpha}})\, N_{1\underline{\alpha}} + C_{12} N_{2\underline{\alpha}} + C_{13} N_{3\underline{\alpha}} = 0, \\ C_{21} N_{1\underline{\alpha}} + (C_{22} - C_{\underline{\alpha}})\, N_{2\underline{\alpha}} + C_{23} N_{3\underline{\alpha}} = 0, \\ C_{31} N_{1\underline{\alpha}} + C_{32} N_{2\underline{\alpha}} + (C_{33} - C_{\underline{\alpha}})\, N_{3\underline{\alpha}} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

[2]Siin ja edaspidi 2010. a. konspekti numeratsioon

i) Peasuund $\mathbf{N}_1$. Peaväärtusele $C_1 = (1+A)^2$ vastava peasuuna $\mathbf{N}_1 \equiv (N_{11}, N_{21}, N_{31})$ leidmiseks saab VS (20) kuju

$$\begin{cases} \left[1-(1+A)^2\right] N_{11} = 0, \\ \left[1+A^2-(1+A)^2\right] N_{21} + 2AN_{31} = 0, \\ 2AN_{21} + \left[1+A^2-(1+A)^2\right] N_{31} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

kust saame

$$\begin{cases} N_{11} = 0, \\ -2AN_{21} + 2AN_{31} = 0, \\ 2AN_{21} - 2AN_{31} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{11} = 0, \\ N_{21} = N_{31}. \end{cases} \tag{22}$$

Nüüd tuleb rakendada tingimust, et $\mathbf{N}_1$ on ühikvektor, st., $(N_{11})^2 + (N_{21})^2 + (N_{31})^2 = 1$. Seega $N_{21} = N_{31} = \pm 1/\sqrt{2}$ ja

$$\mathbf{N}_1 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{23}$$

ii) Peasuund $\mathbf{N}_2$. Peaväärtuse $C_2 = 1$ puhul saab VS (20) kuju

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ A^2 N_{22} + 2AN_{32} = 0, \\ 2AN_{22} + A^2 N_{32} = 0, \end{cases} \Rightarrow N_{22} = N_{32} = 0. \tag{24}$$

Kuna ka $\mathbf{N}_2$ peab olema ühikvektor, siis

$$\mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0). \tag{25}$$

iii) Peasuund $\mathbf{N}_3$. Peasuuna $\mathbf{N}_3$ leidmiseks kasutame peaväärtust $C_3 = (1-A)^2$, mille puhul VS (20) saab kuju

$$\begin{cases} \left[1-(1-A)^2\right] N_{13} = 0, \\ \left[1+A^2-(1-A)^2\right] N_{23} + 2AN_{33} = 0, \\ 2AN_{23} + \left[1+A^2-(1-A)^2\right] N_{33} = 0, \end{cases} \tag{26}$$

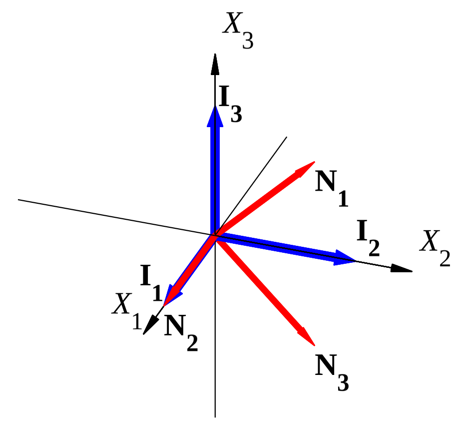
kust saame

$$\begin{cases} N_{13} = 0, \\ 2AN_{23} + 2AN_{33} = 0, \\ 2AN_{23} + 2AN_{33} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{13} = 0, \\ N_{23} = -N_{33}. \end{cases} \tag{27}$$

Tingimusest $|\mathbf{N}_3| = 1$, saame nüüd, et

$$\mathbf{N}_3 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{28}$$

Valemite (23)–(28) põhjal on iga peasuuna puhul võimalik valida kahe vektori vahel. Tegelikult tuleb silmas pidada, et peasuunad peavad moodustama parema käe kolmiku. Seega, kahe peasuuna puhul võime valida ükskõik kumma kahest leitud vektorist, kuid kolmas peasuund peab olema valitud nii, et kokku moodustuks parema käe kolmik. Näiteks, kui valime $\mathbf{N}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$, siis peab $\mathbf{N}_3$ vastama tingimusele $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, mis antud juhul tähendab, et $\mathbf{N}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 3).



Joonis 3: Greeni deformatsioonitensori C_{KL} peasuunad (peavektorid $\mathbf{N}_1$ ja $\mathbf{N}_3$ asuvad $X_2 - X_3$ tasandil).

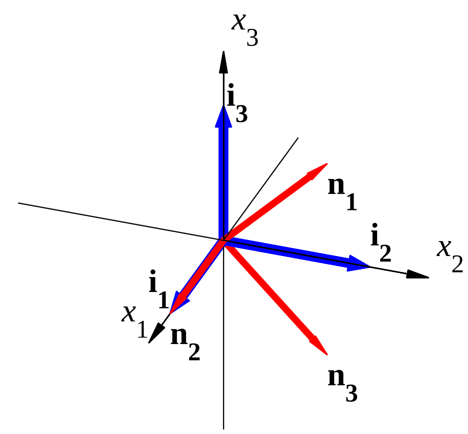
4b. Cauchy deformatsioonitensor c_{kl}. Nüüd tuleb lähtuda võrrandist

$$(c_{kl} - c\delta_{kl})\, n_l = 0. \tag{29}$$

Eelnenuga analoogiline protseduur annab tulemuseks

$$c_1 = (1+A)^{-2}; \quad c_2 = 1; \quad c_3 = (1-A)^{-2}. \tag{30}$$

Peaväärtuste järjestamise juures tuleb silmas pidada, et esimesele peaväärtusele c_1 peab vastama suurim peapikenemine λ_1 ja kolmandale vähim, st. $C_\alpha = 1/c_\alpha = \lambda_\alpha^2$.



Joonis 4: Cauchy deformatsioonitensori c_{kl} peasuunad (peavektorid $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_3$ asuvad $x_2 - x_3$ tasandil).

Selgub, et antud ülesande korral Cauchy ja Greeni deformatsioonitensori peasuunad ühtivad, seega

$$\mathbf{n}_1 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{n}_2 = (\pm 1, 0, 0), \quad \mathbf{n}_3 = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{31}$$

Viimastest võime valida eelnevaga analoogilise kolmiku $\mathbf{n}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 4).

4c. Lagrange'i deformatsioonitensori $\boldsymbol{E_{KL}}$ peaväärtused ja peasuunad saab määrata võrrandist

$$(E_{KL} - E\delta_{KL})\, N_L = 0, \tag{32}$$

kust saame

$$E_1 = \frac{A}{2}(A+2), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{A}{2}(A-2). \tag{33}$$

Peaväärtuste järjestamisel tuleb jällegi silmas pidada, et suurimale peapikenemisele λ_1 vastaks esimene peaväärtus E_1 ja vähimale kolmas. Siinjuures tuleb lähtuda seostest $C_\alpha = {\lambda_\alpha}^2$ ja $E_\alpha = {\lambda_\alpha}^2 - 1$. Lagrange'i deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Greeni deformatsioonitensori peasuundadega.

Kontroll.

Konspekti valemi (3.105) põhjal $2E = C-1$. Seega $2E_1 = (1+A)^2-1 = A(A+2)$, $2E_2 = 1 - 1 = 0$ ja $2E_3 = (1-A)^2 - 1 = A(A-2)$.

4d. Euleri deformatsioonitensori $\boldsymbol{e_{kl}}$ peaväärtused saab määrata seosest $2e = 1 - c$, seega

$$\begin{aligned} &e_1 = 0,5(1-c_1) = \frac{A(2+A)}{2(1-A)^2}, \qquad e_2 = 0,5(1-c_2) = 0, \\ &e_3 = 0,5(1-c_3) = -\frac{A(2-A)}{2(1-A)^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Euleri deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Cauchy deformatsioonitensori peasuundadega.

Loomulikult võib Euleri deformatsioonitensori peasuunad määrata ka võrrandist $(e_{kl} - e\delta_{kl})\, n_l = 0$

5. Deformatsiooniellipsoidid Ruumiline deformatsiooniellipsoid on esitatud valemiga (3.112) ja materiaalne valemiga (3.115)

$$C_\alpha \left(dX_\alpha\right)^2 = ds^2 = k^2, \qquad c_\alpha \left(dx_\alpha\right)^2 = dS^2 = K^2. \tag{35}$$

Kui $A = 1/2$, siis

$$\begin{cases} C_1 = (1+A)^2 = \dfrac{9}{4}, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = (1-A)^2 = \dfrac{1}{4}, \end{cases} \overset{c_\alpha = 1/C_\alpha}{\Longrightarrow} \begin{cases} c_1 = \dfrac{4}{9}, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 4, \end{cases} \tag{36}$$

Kui valida $t = t_0$ puhul $dS = ds = K = k$, siis avalduvad pooltelgede pikkused järgmiselt:

Ruumiline:

$$a^s_\alpha = \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}}$$

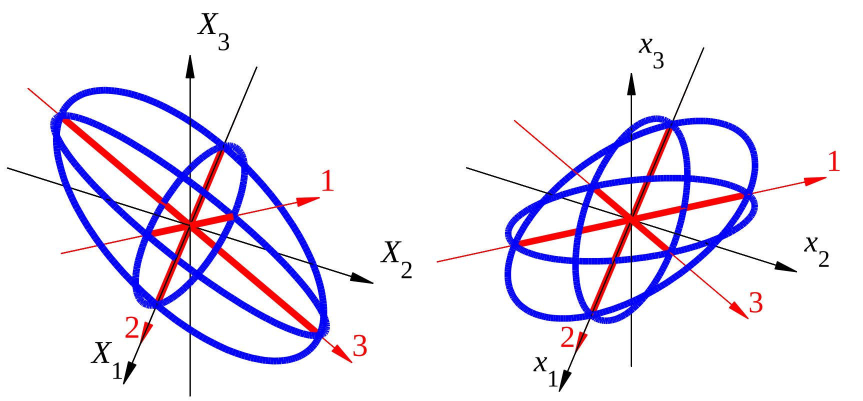
$$a^s_1 = \frac{2}{3}k;\ a^s_2 = k;\ a^s_3 = 2k.$$

Materiaalne:

$$a^m_\alpha = \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{c_\alpha}} = k\sqrt{C_\alpha}$$

$$a^m_1 = \frac{3}{2}k;\ a^m_2 = k;\ a^m_3 = \frac{1}{2}k.$$

Deformatsiooniellipsoidide pooltelgede orientatsioon on määratud deformatsioonitensorite peasuundadega — ruumilise deformatsiooniellipsoidi pooletelgedele vastavad $\mathbf{N}_\alpha$ ja materiaalse omadele $\mathbf{n}_\alpha$ (võrdle jooniseid 3–5).



Joonis 5: Ruumiline ja materiaalne deformatsiooniellipsoid.

6. Pikenemine ja pööre

6a. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid (vt. joonis 2). Konspekti valemite (3.71) ja tensori C_{KL} definitsiooni (3.36) põhjal avaldub pikenemiskoefitsent suunas $\mathbf{N}$ järgmiselt:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N_K N_L} = \sqrt{x_{k,K}x_{k,L}N_K N_L}. \tag{37}$$

Peasuundade puhul $\Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha}$. Lihtsuse mõttes leiame pikenemiskoefitsentide ruudud $\Lambda^2_{(\mathbf{N})}$.

1) Serv *OA*: $OA \parallel X_1$ on 2. peasihis[3], seega

$$\Lambda^2_{(OA)} \equiv \Lambda^2_{(1)} \equiv \Lambda^2_2 = C_2 = 1. \tag{38}$$

2) Serv *OC*. Leiame $\Lambda^2_{(OC)} \equiv \Lambda^2_{(2)}$ kahel erineval moel, arvestades, et $\mathbf{N}_{(OC)} = \mathbf{I}_2 = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \Lambda^2_{(2)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + A^2dX^2}{dX^2} = 1 + A^2, \\ &\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(2)} = C_{22}\cdot 1\cdot 1 = 1 + A^2, \end{aligned} \tag{39}$$

[3]Täpsustame jällegi tähistusi: $\Lambda_{(K)}$ tähistab pikenemiskoefitsenti koordinaadi X_K sihis ja Λ_α on peapikenemine peasuunas α.

3) Serv *OD*. Joonise 2 põhjal

$$\Lambda^2_{(OD)} \equiv \Lambda^2_{(3)} = \Lambda^2_{(2)} = 1 + A^2. \tag{40}$$

4) Diagonaal *OG* on 1. peasihis, st.,$\mathbf{N}_{(OG)} = \mathbf{N}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Leiame pikenemiskoefitsendi $\Lambda_{(OG)}$ jällegi kolmel erineval moel:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OG)} \equiv \Lambda^2_1 = C_1 = (1+A)^2, \\ &\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OG)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2(dX + AdX)^2}{dX^2 + dX^2} = (1+A)^2, \\ &\text{iii)} \quad \Lambda^2_{(OG)} = C_{KL}N_K N_L = C_{22}\cdot\frac{1}{2} + C_{33}\cdot\frac{1}{2} + 2C_{23}\cdot\frac{1}{2} = (1+A)^2. \end{aligned} \tag{41}$$

5) Diagonaal *DC* on 3. peasuunas, seega

$$\Lambda^2_{(DC)} \equiv \Lambda^2_3 = C_3 = (1-A)^2. \tag{42}$$

6) Diagonaal *OE* pole ei telje- ega peasihiline.
Ühikvektor $\mathbf{N}_{(OE)} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ ja

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OE)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2dX^2 + A^2 dX^2}{dX^2 + dX^2} = 1 + \frac{A^2}{2}, \\ &\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OE)} = C_{KL} N_K N_L = \dots \end{aligned} \tag{43}$$

7) Diagonaal *OF*. Analoogselt eelmisega, $\mathbf{N}_{(OF)} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OF)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + 2(1+A)^2 dX^2}{3dX^2} = 1 + \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ &\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OF)} = C_{KL} N_K N_L = \dots \end{aligned} \tag{44}$$

8) Diagonaal *DB*. Nüüd, $\mathbf{N}_{(DB)} = (1,1,-1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \Lambda^2_{(OF)} = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + 2(1-A)^2 dX^2}{3dX^2} = 1 - \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ &\text{ii)} \quad \Lambda^2_{(OF)} = C_{KL} N_K N_L = \dots \end{aligned} \tag{45}$$

9) Ülejäänud servade ja diagonaalide pikenemiskoefitsendid on võrdsed juba leitutega.

Kontroll. $\Lambda^2_{(K)} = C_{\underline{K}\,\underline{K}}$ ja Λ_1 ning Λ_3 on ekstremaalsed kõigi $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ seast.

6b. Suhteline pikenemine[4].

$$\mathrm{E}_{(\mathbf{N})} = \epsilon_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1. \tag{46}$$

Seega

$$\begin{cases} \mathrm{E}_{(1)} = 1 - 1 = 0, \ \mathrm{E}_{(2)} = \mathrm{E}_{(3)} = \sqrt{1 + A^2} - 1, \\ \mathrm{E}_1 = (1 + A) - 1 = A, \ \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_{(1)} = 0, \ \mathrm{E}_3 = (1 - A) - 1 = -A. \end{cases} \tag{47}$$

Suhtelisel pikenemisel $\mathrm{E}_{(X_K)} \equiv \mathrm{E}_{(K)}$ puudub nii otsene seos Lagrange'i deformatsioonitensoriga E_{KL} kui on pikenemiskoefitsendi $\Lambda_{(K)}$ ja Greeni deformatsioonitensori C_{KL} vahel.

[4]i) Suhtelist pikenemist $\mathrm{E}_{(\mathbf{N})} = \epsilon_{(\mathbf{n})}$ ei tohi segi ajada tensori E_{KL} peaväärtustega E_α: $2E_\alpha = C_\alpha - 1 = \Lambda^2_{(\mathbf{N})} - 1$.
ii) Analoogiliselt pikenemiskoefitsentidega tähistab E_α suhtelist pikenemist peasuunas α ja $\mathrm{E}_{(K)}$ suhtelist pikenemist koordinaadi X_K suunas.

Valemite (3.78) põhjal

$$2E_{\underline{K}\,\underline{K}} = \left(1 + \mathrm{E}_{(K)}\right)^2 - 1 = \Lambda^2_{(K)} - 1,$$

ehk

$$2E_{\underline{K}\,\underline{K}} = \frac{ds^2_{(K)} - dS^2_{(K)}}{dS^2_{(K)}}.$$

Teatavasti on viimane tuntud 1D juhul kui Lagrange'i deformatsioon.

6c. Kuubi servade ja diagonaalide pööre.

Arvutamiseks on (vähemalt) kaks võimalust: (i) läbi deformeerunud kuubi geomeetria ja (ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise.

Arvutusete juures on võetud $A = 0,5$ ja vastused on kraadides.

1) Serv OA ei pöördu, seega $\beta_{OA} = 0$.

2) Serv OC (vt. joonis 6), $\beta_{OC} = 26,5651$

$$\overline{OC} = (0,1,0)dX, \quad \overline{OC'} = (0,1,A)dX, \quad \left|\overline{OC}\right| = dX, \quad \left|\overline{OC'}\right| = \sqrt{1 + A^2}dX.$$

(i) läbi deformeerunud kuubi geomeetria,

$$\cos\beta_{OC} = \frac{\left|\overline{OC}\right|}{\left|\overline{OC'}\right|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \tag{48}$$

(ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise

$$\cos\beta_{OC} = \frac{\overline{OC}\cdot\overline{OC'}}{\left|\overline{OC}\right|\cdot\left|\overline{OC'}\right|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \tag{49}$$

3) Serv OD, $\beta_{OD} = 26,5651$

4) Diagonaal OB, $\beta_{OB} = 19,4712$

$$\overline{OB} = (1,1,0)dX, \quad \overline{OB'} = (1,1,A)dX, \quad |\overline{OB}| = \sqrt{2}dX, \quad |\overline{OB'}| = \sqrt{2+A^2}dX.$$

läbi deformeerunud kuubi geomeetria,

$$\cos\beta_{OB} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OB'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OB} = 26,5651. \tag{50}$$

5) Diagonaal OE, $\beta_{OE} = 19,4712$

6) Diagonaal OF, $\beta_{OF} = 10,025$

7) Diagonaal OG, $\beta_{OG} = 0$

6d. Algse täisnurga muut $X_2 - X_3$ tasandis — nihe. On selge, et teljega X_1 paralleelne kuubi serv deformatsiooni käigus ei pöördu ning servad, mis on paralleelsed X_2 ja X_3 teljega pöörduvad nurga $\beta = \arctan A$ võrra (joonis 6). Leiame X_2 ja X_3 telje vahelise täisnurga muudu.

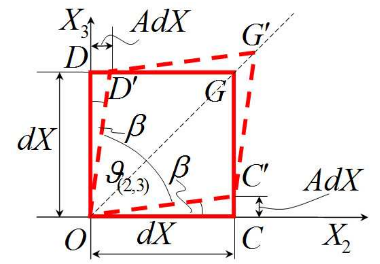
$$\Gamma_{(2,3)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(2,3)} = 2\beta = 2\arctan A. \tag{51}$$

Seega $A = 1/2$ korral $\Gamma_{(2,3)} = 2\arctan 0,5 = 53,13^\circ$.

Teiselt poolt valemi (3.81) põhjal

$$\cos\vartheta_{(2,3)} = \frac{C_{23}}{\sqrt{C_{22}C_{33}}} = \frac{2A}{1+A^2} \tag{52}$$

ja valemi (51) põhjal $\sin\Gamma_{(2,3)} = \cos\vartheta_{(2,3)}$. Kui $A = 1/2$, siis $\sin\Gamma = 4/5$ ja $\Gamma = 53,13^\circ$.



Joonis 6: Algse täisnurga muutus.

7. Pöördetensor $R_{kK} = n_{k\alpha}N_{\alpha K}$ pöörab Greeni deformatsioonitensori peasuunad $\mathbf{N}_\alpha$ Cauchy' deformatsioonitensori peasuundadeks $\mathbf{n}_\alpha$. Antud juhul peasuundade $\mathbf{n}_\alpha$ ja $\mathbf{N}_\alpha$ avaldised ühtivad, st., $\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)$ ja $\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Seega kui valime peasuundadeks
$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ ja $\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,
siis pöördetensor

$$R_{kK} = \delta_{kK}. \tag{53}$$

Kui aga valida
$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{N}_1 = -(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ ja $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{N}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
siis saame hoopis teistsuguse pöördetensori —

$$R_{kK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariandid.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_C &= C_1 + C_2 + C_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3 + 2A^2, \\ \mathrm{II}_C &= C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 3 + A^4, \\ \mathrm{III}_C &= C_1C_2C_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (1 - A^2)^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Kui $A = 1/2$, siis $\mathrm{I}_C = 7/2$, $\mathrm{II}_C = 49/16$ ja $\mathrm{III}_C = 9/16$.