

Näide K2: Deformatsiooni analüüs

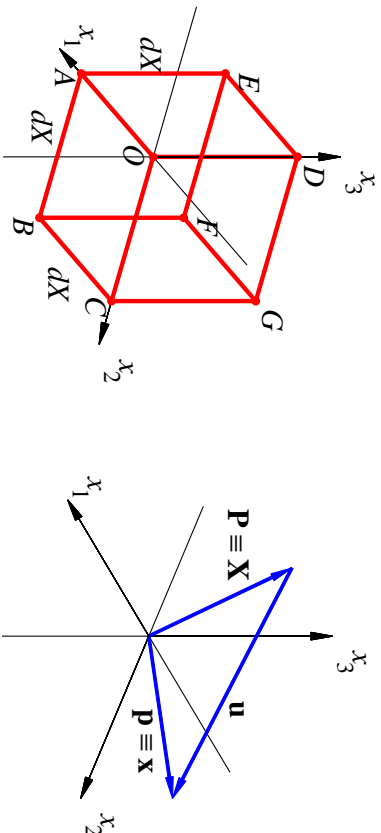
Pideva keskkonna liikumine on kirjeldatud teisendusega

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = AX_2 + X_3, \end{cases} \quad \text{kus } A = \text{const.} \quad (0 < A < 1). \quad (1)$$

Leida:

- Siirdevektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides.
- Millisteks kujunditeks deformeeruvad (X_2, X_3) tasandil asuv ring $(X_2)^2 + (X_3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$ ja elementaarkuup servapikusega $dX_1 = dX_2 = dX_3 = dX$. Esitada vastavad joonised kui $A = 1/2$.
- Leida Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensiorid.
- Deformatsioonitensiorite peaväärtused ja peasuunad.
- Joonistada materiaalne ja ruumiline deformatsioonielipsoid.
- Elementaarakuubi servade ja diagonaalide pikenenemiskoeffitsendid, suhtelised pikenedemised ja pöörded ning algse täisnurga muutus $X_2 - X_3$ tasandis.
- Pöördetensor R_{kK} .
- Greeni deformatsioonitensiori C_{KL} invariantidid.

Deformatsiooni analüüs



Joonis 1: Algne kuup ja siirdevektor.

Lahendus

Teisenduse (1) pööriteisendus on

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1 - A^2), \\ X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1 - A^2). \end{cases} \quad (2)$$

1. Siire

Siirdevektor

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K = u_k \mathbf{i}_k = \mathbf{p} - \mathbf{P} = x_k \mathbf{i}_k - X_K \mathbf{I}_K. \quad (3)$$

Seega siirdevektori komponendid LK-s

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 \stackrel{(1)}{=} 0, \\ U_2 = x_2 - X_2 \stackrel{(1)}{=} \dots\dots\dots = AX_3, \\ U_3 = x_3 - X_3 \stackrel{(1)}{=} \dots\dots\dots = AX_2, \end{cases} \quad (4)$$

ja EK-s

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 \stackrel{(2)}{=} 0, \\ u_2 = x_2 - X_2 \stackrel{(2)}{=} \dots\dots\dots = \frac{A(x_3 - Ax_2)}{1 - A^2}, \\ u_3 = x_3 - X_3 \stackrel{(2)}{=} \dots\dots\dots = \frac{A(x_2 - Ax_3)}{1 - A^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Deformatsiooni analüüs

4

2a. Ring. Algse ringjoone võrrand on $(X_2)^2 + (X_3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$. Asendame siia $X_K = X_K(x_1, x_2, x_3)$ pöördteisendusest (2).

$$\begin{aligned} \frac{(x_2 - Ax_3)^2}{(1 - A^2)^2} + \frac{(x_3 - Ax_2)^2}{(1 - A^2)^2} &= \frac{1}{1 - A^2} \\ \dots & \end{aligned} \quad (6)$$

$$(1 + A^2)(x_2)^2 - 4Ax_2x_3 + (1 + A^2)(x_3)^2 = 1 - A^2.$$

See on ellipsi võrrand. Ellipsi joonistamiseks pöörame koordinaattelgi nurga $\pi/4$ võrra¹. Toome sisse uued koordinaadid v_1, v_2 , st. pöörame koordinaate x_1, x_2 .

$$\begin{cases} v_2 = (x_2 + x_3)/\sqrt{2}, \\ v_3 = (x_3 - x_2)/\sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = (v_2 - v_3)/\sqrt{2}, \\ x_3 = (v_2 + v_3)/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (7)$$

¹Teist järku joone võrrandi üldkuju on $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

Kui pöörata telgi nurga α võrra, kus α avaldatakse võrrandi

$b \tan^2 \alpha + (a - c) \tan \alpha - b = 0$ positiivsest lahendist, saame tulemuseks teist järku joone võrrandi kujul: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Asendades (7) võrrandisse (6) saame pärast mõningaid teisendusi

$$(1 - A)^2(v_2)^2 + (1 + A)^2(v_3)^2 = 1 - A^2$$

Vimasele saab anda kuju

$$\frac{(v_2)^2}{\frac{1+A}{1-A}} + \frac{(v_3)^2}{\frac{1-A}{1+A}} = 1. \quad (8)$$

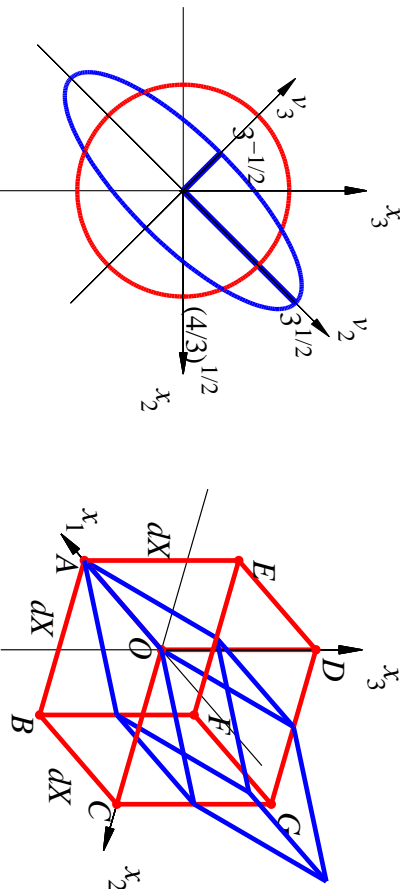
Kui $A = 1/2$, siis algse ringi võrrand saab kuju

$$(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4/3 \quad (9)$$

ja ellipsi võrrand

$$\frac{(v_2)^2}{3} + \frac{(v_3)^2}{\frac{1}{3}} = 1. \quad (10)$$

Seega, algse ringi raadius $r = 2/\sqrt{3} = 1,155$ ja ellipsi poolteljed $a = \sqrt{3} = 1,732$ ning $b = 1/\sqrt{3} = 0,577$



Joonis 2: Deformeerunud ring ja deformeerunud kuup.

2b. Kuup. Kuubi deformeerunud kuju leidmiseks on mitu erinevat võimalust. I)

Leiame näiteks kuubi servade siirded.

a) serv $OA : X_2 = X_3 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_2 = U_3 = 0,$

b) serv $OC : X_1 = X_3 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_2 = 0, U_3 = AX_2,$

c) serv $OD : X_1 = X_2 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_3 = 0, U_2 = AX_3,$

d) serv $AB : X_1 = dX, X_3 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_2 = 0, U_3 = AX_2,$

e) serv $FG : X_2 = dX, X_3 = dX \xrightarrow{(4)} U_1 = 0, U_2 = U_3 = AdX,$ jne.

II) Samahästi võiks leida tippude siirded:

a) tipp O : koordinaadid enne deformatsiooni

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$$

siire $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0$ ja

koordinaadid peale deformatsiooni $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$;

b) tipp B : koordinaadid enne deformatsiooni

$$X_1 = dX, X_2 = dX, X_3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$$

siire $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = AdX$ ja

koordinaadid peale deformatsiooni $x_1 = dX, x_2 = dX, x_3 = AdX$; jne.

III) Deformeerunud kuubi tippude koordinaatide leidmiseks võib kasutada ka liikumisseadust (1).

3. Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid (DT)

$$\text{Cauchy DT: } c_{kl} = X_{K,k} X_{K,l} \quad \text{Greeni DT: } C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L} \quad (11)$$

$$\text{Lagrange'i DT: } 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} \quad \text{Euleri DT: } 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}$$

Kõigepealt on vaja leida deformatsioonigradiendid:

$$X_{K,k} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad x_{k,K} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (12)$$

3a. Cauchy DT $c_{kl} = X_{K,k} X_{K,l}$

$$c_{11} = (X_{1,1})^2 + (X_{2,1})^2 + (X_{3,1})^2 = \dots$$

$$c_{22} = (X_{1,2})^2 + (X_{2,2})^2 + (X_{3,2})^2 = \dots$$

$$c_{33} = (X_{1,3})^2 + (X_{2,3})^2 + (X_{3,3})^2 = \dots$$

$$c_{12} = c_{21} = X_{1,1} X_{1,2} + X_{2,1} X_{2,2} + X_{3,1} X_{3,2} = \dots$$

$$c_{23} = c_{32} = X_{1,2} X_{1,3} + X_{2,2} X_{2,3} + X_{3,2} X_{3,3} = \dots$$

$$c_{13} = c_{31} = 0$$

$$[c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

3b. Greeni DT $C_{KL} = x_{k,K}x_{k,L}$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1; & C_{22} &= 1 + A^2; & C_{33} &= 1 + A^2; \\ C_{12} &= C_{21} = C_{13} = C_{31} = 0; & C_{23} &= C_{32} = 2A \end{aligned}$$

$$[C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

3c. Lagrange'i DT $2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}$

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3d. Euleri DT $2e_{kl} = \delta_{kl} - C_{kl}$

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} & \frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & \frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Deformatsiooni analüüs

4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.

4a. Greeni deformatsioonitensor C_{KL} . Kasutame konspetsi valenit (3.104)²

$$(C_{KL} - C\delta_{KL})N_L = 0. \quad (17)$$

Peaväärtused C määratakse karakteristlikust võrrandist

$$\begin{aligned} |C_{KL} - C\delta_{KL}| &= \begin{vmatrix} 1-C & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2-C & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2-C \end{vmatrix} = \\ &= (1-C) \left[(1+A^2-C)^2 - 4A^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Viimase lahendid on (pärast ümbernumerdamist $C_1 \geq C_2 \geq C_3$)

$$C_1 = (1+A)^2; \quad C_2 = 1; \quad C_3 = (1-A)^2. \quad (19)$$

Igale peaväärtusele C_α vastab peasuund $\mathbf{N}_\alpha \equiv (N_{1\alpha}, N_{2\alpha}, N_{3\alpha})$, mille määramiseks saame avaldise (17) põhjal kolm võrrandit:

$$\begin{cases} (C_{11} - C_\alpha)N_{1\alpha} + C_{12}N_{2\alpha} + C_{13}N_{3\alpha} = 0, \\ C_{21}N_{1\alpha} + (C_{22} - C_\alpha)N_{2\alpha} + C_{23}N_{3\alpha} = 0, \\ C_{31}N_{1\alpha} + C_{32}N_{2\alpha} + (C_{33} - C_\alpha)N_{3\alpha} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

²Siin ja edaspidi 2010. a. konspetsi numeratsioon

i) Peasund \mathbf{N}_1 . Peaväärtusele $C_1 = (1 + A)^2$ vastava peasuuna $\mathbf{N}_1 \equiv (N_{11}, N_{21}, N_{31})$ leidmiseks saab VS (20) kuju

$$\begin{cases} [1 - (1 + A)^2] N_{11} = 0, \\ [1 + A^2 - (1 + A)^2] N_{21} + 2AN_{31} = 0, \\ 2AN_{21} + [1 + A^2 - (1 + A)^2] N_{31} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

kust saame

$$\begin{cases} N_{11} = 0, \\ -2AN_{21} + 2AN_{31} = 0, \Rightarrow \begin{cases} N_{11} = 0, \\ N_{21} = N_{31}. \end{cases} \\ 2AN_{21} - 2AN_{31} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

Nüüd tuleb rakendada tingimust, et \mathbf{N}_1 on ühikvektor, st., $(N_{11})^2 + (N_{21})^2 + (N_{31})^2 = 1$. Seega $N_{21} = N_{31} = \pm 1/\sqrt{2}$ ja

$$\mathbf{N}_1 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (23)$$

ii) Peasund \mathbf{N}_2 . Peaväärtuse $C_2 = 1$ puhul saab VS (20) kuju

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ A^2 N_{22} + 2AN_{32} = 0, \Rightarrow N_{22} = N_{32} = 0. \\ 2AN_{22} + A^2 N_{32} = 0, \end{cases} \quad (24)$$

Kuna ka \mathbf{N}_2 peab olema ühikvektor, siis

$$\mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0). \quad (25)$$

iii) Peasund \mathbf{N}_3 . Peasuuna \mathbf{N}_3 leidmiseks kasutame peaväärtust $C_3 = (1 - A)^2$, mille puhul VS (20) saab kuju

$$\begin{cases} [1 - (1 - A)^2] N_{13} = 0, \\ [1 + A^2 - (1 - A)^2] N_{23} + 2AN_{33} = 0, \\ 2AN_{23} + [1 + A^2 - (1 - A)^2] N_{33} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

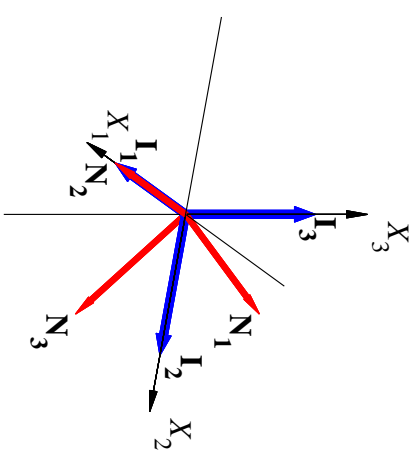
kust saame

$$\begin{cases} N_{13} = 0, \\ 2AN_{23} + 2AN_{33} = 0, \Rightarrow \begin{cases} N_{13} = 0, \\ N_{23} = -N_{33}. \end{cases} \\ 2AN_{23} + 2AN_{33} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

Tingimusest $|\mathbf{N}_3| = 1$, saame nüüd, et

$$\mathbf{N}_3 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (28)$$

Valemite (23)–(28) põhjal on iga peasuna puhul võimalik valida kahe vektori vahel. Tegelikult tuleb silmas pida, et peasunad peavad moodustama parema käe kolmiku. Seega, kahe peasuna puhul võime valida ükskõik kumma kahest leitud vektorist, kuid kolmas peasuund peab olema valitud nii, et kokku moodustuks parema käe kolmik. Näiteks, kui valime $\mathbf{N}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ja $\mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$, siis peab \mathbf{N}_3 vastama tingimusele $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, mis annud juhul tähendab, et $\mathbf{N}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (vt. joon. 3).



Joonis 3: Greeni deformatsioonitensori C_{kl} peasunad (peavektorid \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_3 asuvad $X_2 - X_3$ tasandil).

Deformatsiooni analüüs

4b. Cauchy deformatsioonitensor C_{kl} .

Nüüd tuleb lähtuda võrrandist

$$(c_{kl} - c\delta_{kl}) n_l = 0. \quad (29)$$

Eelnenuga analoogiline protseduur annab tulemuseks

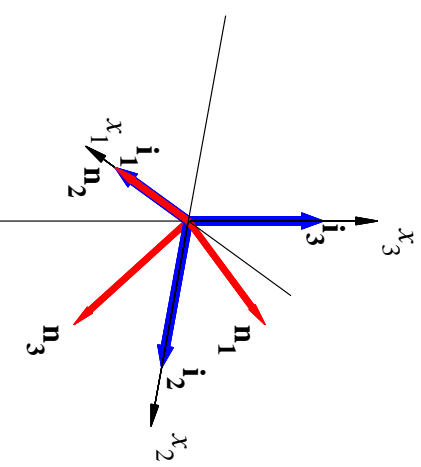
$$c_1 = (1+A)^{-2}; \quad c_2 = 1; \quad c_3 = (1-A)^{-2}. \quad (30)$$

Peaväärtuste järjestamise juures tuleb silmas pida, et esimesele peaväärtusele c_1 peab vastama suurim peapikenemine λ_1 ja kolmandale vähim, st. $C_\alpha = 1/c_\alpha = \lambda_\alpha^2$.

Selgub, et antud ülesande korral Cauchy ja Greeni deformatsioonitensori peasunnad ühtivad, seega

$$\mathbf{n}_1 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{n}_2 = (\pm 1, 0, 0), \quad \mathbf{n}_3 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (31)$$

Viimastest võime valida eelnevaga analoogilise kolmiku $\mathbf{n}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (vt. joon. 4).



Joonis 4: Cauchy deformatsioonitensori c_{kl} peasunad (peavektorid \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_3 asuvad $x_2 - x_3$ tasandil).

4c. Lagrange'i deformatsioonitensori E_{KL} peaväärtused ja peasuunad saab määrata võrrandist

$$(E_{KL} - E\delta_{KL})N_L = 0, \quad (32)$$

kust saame

$$E_1 = \frac{A}{2}(A+2), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{A}{2}(A-2). \quad (33)$$

Peaväärtuste järjestamisel tuleb jällegi silmas pidades, et suurimale peapikemisele λ_1 vastaks esimene peaväärtus E_1 ja vähimale kolmas. Siinjuures tuleb lähtuda seostest $C_\alpha = \lambda_\alpha^2$ ja $E_\alpha = \lambda_\alpha^2 - 1$. Lagrange'i deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Greeni deformatsioonitensori peasuundadega.

Kontroll.

Konspetsi valem (3.105) põhjal $2E = C - 1$. Seega $2E_1 = (1+A)^2 - 1 = A(A+2)$, $2E_2 = 1 - 1 = 0$ ja $2E_3 = (1 - A)^2 - 1 = A(A - 2)$.

4d. Euleri deformatsioonitensori e_{kl} peaväärtused saab määrata seosest $2e = 1 - c$, seega

$$\begin{aligned} e_1 = 0, 5(1 - c_1) &= \frac{A(2 + A)}{2(1 - A)^2}, & e_2 = 0, 5(1 - c_2) &= 0, \\ e_3 = 0, 5(1 - c_3) &= -\frac{A(2 - A)}{2(1 - A)^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Euleri deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Cauchy deformatsioonitensori peasuundadega.

Loomulikult võib Euleri deformatsioonitensori peasuunad määrata ka võrrandist $(e_{kl} - e\delta_{kl})n_l = 0$

5. Deformatsiooniellipsoidid Ruumiline deformatsiooniellipsoid on esitatud valemiga (3.112) ja materiaalne valemiga (3.115)

$$C_\alpha (dX_\alpha)^2 = ds^2 = k^2, \quad c_\alpha (dx_\alpha)^2 = dS^2 = K^2. \quad (35)$$

Kui $A = 1/2$, siis

$$\begin{cases} C_1 = (1 + A)^2 = \frac{9}{4}, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = (1 - A)^2 = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad c_\alpha = 1/C_\alpha \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4}{9}, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 4, \end{cases} \quad (36)$$

Kui valida $t = t_0$ puhul $dS = ds = K = k$, siis avalduvad pooltelgede pikkused järgmiselt:

Ruumiline:

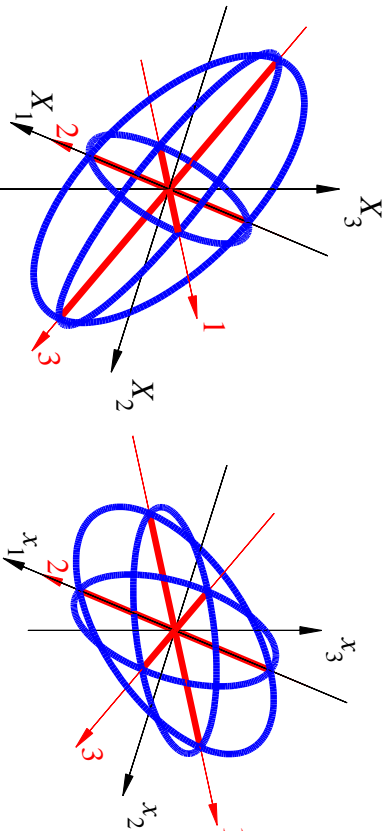
$$a_\alpha^s = \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}} \quad a_1^s = \frac{2}{3}k; \quad a_2^s = k; \quad a_3^s = 2k.$$

Materiaalne:

$$a_\alpha^m = \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}} = k\sqrt{C_\alpha} \quad a_1^m = \frac{3}{2}k; \quad a_2^m = k; \quad a_3^m = \frac{1}{2}k.$$

Deformatsiooni analüüs

Deformatsiooniellipsoidide pooltelgede orientatsioon on määratud deformatsioonitenensorite peasuundadega — ruumilise deformatsiooniellipsoidi pooltelgedele vastavad \mathbf{N}_α ja materiaalse omadele \mathbf{n}_α (võrdle jooniseid 3–5).



Joonis 5: Ruumiline ja materiaalne deformatsiooniellipsoid.

6. Pikenemine ja pööre

6a. Elementaar kuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoeffitsendid (vt. joonis 2). Konspেকti valemite (3.71) ja tensori C_{KL} defintsiooni (3.36) põhjal avaldub pikenemiskoeffitsent suunas \mathbf{N} järgmiselt:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KLN_KN_L}} = \sqrt{x_{k,K}x_{k,L}N_KN_L}. \quad (37)$$

Peasuundade puhul $\Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha}$. Lihtsuse mõttes leiame pikenemiskoeffitsentide ruudud $\Lambda_{(\mathbf{N})}^2$.

1) Serv OA : $OA \parallel X_1$ on 2. peasihis³, seega

$$\Lambda_{(OA)}^2 \equiv \Lambda_{(1)}^2 \equiv \Lambda_2^2 = C_2 = 1. \quad (38)$$

2) Serv OC . Leiame $\Lambda_{(OC)}^2 \equiv \Lambda_{(2)}^2$ kahel erineval moel, arvestades, et $\mathbf{N}_{(OC)} = \mathbf{I}_2 = (0, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(2)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + A^2dX^2}{dX^2} = 1 + A^2, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(2)}^2 &= C_{22} \cdot 1 \cdot 1 = 1 + A^2, \end{aligned} \quad (39)$$

³Täpsustame jällegi tähistusi: $\Lambda_{(\kappa)}$ tähistab pikenemiskoeffitsenti koordinaadi X_κ sihis ja Λ_α on peapikenemine peasuunas α .

Deformatsiooni analüüs

3) Serv OD . Joonise 2 põhjal

$$\Lambda_{(OD)}^2 \equiv \Lambda_{(3)}^2 = \Lambda_{(2)}^2 = 1 + A^2. \quad (40)$$

4) Diagonaal OG on 1. peasihis, st., $\mathbf{N}_{(OG)} = \mathbf{N}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Leiame pikenemiskoeffitsendi $\Lambda_{(OG)}$ jällegi kolmel erineval moel:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OG)}^2 &\equiv \Lambda_1^2 = C_1 = (1 + A)^2, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OG)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2(dX + AdX)^2}{dX^2 + dX^2} = (1 + A)^2, \\ \text{iii)} \quad \Lambda_{(OG)}^2 &= C_{KLN_KN_L} = C_{22} \cdot \frac{1}{2} + C_{33} \cdot \frac{1}{2} + 2C_{23} \cdot \frac{1}{2} = (1 + A)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

5) Diagonaal DC on 3. peasuunas, seega

$$\Lambda_{(DC)}^2 \equiv \Lambda_3^2 = C_3 = (1 - A)^2. \quad (42)$$

6) **Diagonaal OE** pole ei telje- ega peasihiline.

Ühikvektor $\mathbf{N}_{(OE)} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OE)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2dX^2 + A^2dX^2}{dX^2 + dX^2} = 1 + \frac{A^2}{2}, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OE)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = \dots \end{aligned} \quad (43)$$

7) **Diagonaal OF** . Analoogselt eelmisega, $\mathbf{N}_{(OF)} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + 2(1+A)^2dX^2}{3dX^2} = 1 + \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = \dots \end{aligned} \quad (44)$$

8) **Diagonaal DB** . Nüüd, $\mathbf{N}_{(DB)} = (1, 1, -1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + 2(1-A)^2dX^2}{3dX^2} = 1 - \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Deformatsiooni analüüs

9) Ülejäänud servade ja diagonaalide pikenemiskoeffitsendid on võrdsed juba leitudega.

Kontroll. $\Lambda_{(K)}^2 = C_{\underline{K}\underline{K}}$ ja Λ_1 ning Λ_3 on ekstremaalsed kõigi $\Lambda_{(N)}$ seast.

6b. Suheline pikenemine⁴.

$$E_{(N)} = \epsilon_{(n)} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(N)} - 1. \quad (46)$$

Seega

$$\begin{cases} E_{(1)} = 1 - 1 = 0, & E_{(2)} = E_{(3)} = \sqrt{1 + A^2} - 1, \\ E_1 = (1 + A) - 1 = A, & E_2 = E_{(1)} = 0, & E_3 = (1 - A) - 1 = -A. \end{cases} \quad (47)$$

Suhtelisel pikenemisel $E_{(X_K)} \equiv E_{(K)}$ puudub nii otsene seos Lagrange'i deformatsioonitensoriga E_{KL} kui on pikenemiskoeffitsendi $\Lambda_{(K)}$ ja Greeni deformatsiooni-tensori C_{KL} vahel.

⁴i) Suhteist pikenemist $E_{(N)} = \epsilon_{(n)}$ ei tohi segi ajada tensori E_{KL} peaväärtustega E_α : $2E_\alpha = C_\alpha - 1 = \Lambda_{(N)}^2 - 1$.

ii) Analoogiliselt pikenemiskoeffitsentidega tähistab E_α suhtelist pikenemist peasuunas α ja $E_{(K)}$ suhtelist pikenemist koordinaadi X_K suunas.

Valemite (3.78) põhjal

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + E_{(K)})^2 - 1 = \Lambda_{(K)}^2 - 1,$$

ehk

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = \frac{ds_{(K)}^2 - dS_{(K)}^2}{dS_{(K)}^2}.$$

Teatavasti on viimane tuntud 1D juhul kui Lagrange'i deformatsioon.

Deformatsiooni analüüs

6c. Kuubi servade ja diagonaalide pööre.

Arvutamiseks on (vähemalt) kaks võimalust: (i) läbi deformeerunud kuubi geometria ja (ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise.

Arvutustete juures on võetud $A = 0,5$ ja vastused on kraadides.

1) Serv OA ei pöördunud, seega $\beta_{OA} = 0$.

2) Serv OC (vt. joonis 6), $\beta_{OC} = 26,5651$

$$\overline{OC} = (0, 1, 0)dX, \quad \overline{OC'} = (0, 1, A)dX, \quad |\overline{OC}| = dX, \quad |\overline{OC'}| = \sqrt{1 + A^2}dX.$$

(i) läbi deformeerunud kuubi geometria,

$$\cos \beta_{OC} = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OC'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \quad (48)$$

(ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise

$$\cos \beta_{OC} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OC'}}{|\overline{OC}| \cdot |\overline{OC'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \quad (49)$$

3) Serv OD, $\beta_{OD} = 26,5651$

4) Diagonaal OB, $\beta_{OB} = 19,4712$

$$\overline{OB} = (1, 1, 0)dX, \quad \overline{OB'} = (1, 1, A)dX, \quad |\overline{OB}| = \sqrt{2}dX, \quad |\overline{OB'}| = \sqrt{2 + A^2}dX.$$

läbi deformeerunud kuubi geometria,

$$\cos \beta_{OB} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OB'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OB} = 26,5651. \quad (50)$$

5) Diagonaal OE, $\beta_{OE} = 19,4712$

6) Diagonaal OF, $\beta_{OF} = 10,025$

7) Diagonaal OG, $\beta_{OG} = 0$

Deformatsiooni analüüs

6d. Algse täisnurga muut $X_2 - X_3$ tasandis — nihke. On selge, et teljega X_1 paralleelne kuubi serv deformatsiooni käigus ei pöördu ning servad, mis on paralleelsed X_2 ja X_3 teljega pöörduvad nurga $\beta = \arctan A$ võrra (joonis 6). Leiame X_2 ja X_3 telje vahelise täisnurga muudu.

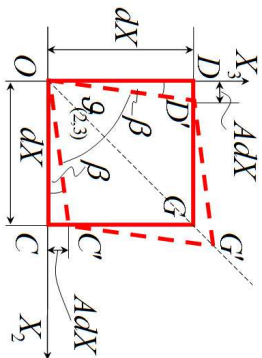
$$\Gamma_{(2,3)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(2,3)} = 2\beta = 2 \arctan A. \quad (51)$$

Seega $A = 1/2$ korral $\Gamma_{(2,3)} = 2 \arctan 0,5 = 53,13^\circ$.

Teiselt poolt valemi (3.81) põhjal

$$\cos \vartheta_{(2,3)} = \frac{C_{23}}{\sqrt{C_{22}C_{33}}} = \frac{2A}{1 + A^2} \quad (52)$$

ja valemi (51) põhjal $\sin \Gamma_{(2,3)} = \cos \vartheta_{(2,3)}$. Kui $A = 1/2$, siis $\sin \Gamma = 4/5$ ja $\Gamma = 53,13^\circ$.



Joonis 6: Algse täisnurga muutus.

7. Pöördetensor $R_{kK} = n_{k\alpha} N_{\alpha K}$ pöörab Greeni deformatsioonitensori peasuunad \mathbf{N}_α Cauchy' deformatsioonitensori peasuundadeks \mathbf{n}_α . Antud juhul peasuundade \mathbf{n}_α ja \mathbf{N}_α avaldised ühtivad, st., $\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)$ ja $\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Seega kui valime peasuundadeks

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0) \text{ ja } \mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

siis pöördetensor

$$R_{kK} = \delta_{kK}. \tag{53}$$

Kui aga valida

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{N}_1 = -(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0) \text{ ja } \mathbf{n}_3 = -\mathbf{N}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

siis saame hoopis teistsuguse pöördetensori —

$$R_{kK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariantid.

$$\begin{aligned} I_C &= C_1 + C_2 + C_3 = \dots = 3 + 2A^2, \\ II_C &= C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = \dots = 3 + A^4, \\ III_C &= C_1C_2C_3 = \dots = (1 - A^2)^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Kui $A = 1/2$, siis $I_C = 7/2$, $II_C = 49/16$ ja $III_C = 9/16$.