

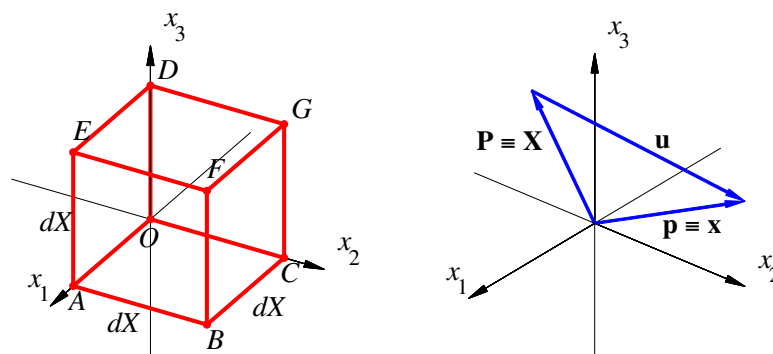
Näide K2: Deformatsiooni analüüs

Pideva keskkonna liikumine on kirjeldatud teisendusega

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = AX_2 + X_3, \end{cases} \quad \text{kus } A = \text{const. } (0 < A < 1). \quad (1)$$

Leida:

1. Siirdevektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides.
2. Millisteks kujunditeks deformeeruvad (X_2, X_3) tasandil asuv ringjoon $(X_2)^2 + (X_3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$ ja elementaarkuup servapikkusega $dX_1 = dX_2 = dX_3 = dX$. Esitada vastavad joonised kui $A = 1/2$.
3. Leida Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid.
4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.
5. Joonistada materiaalne ja ruumiline deformatsiooniellipsoid.
6. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoeffitsendid, suhtelised pikenedemised ja pöörded ning algse täisnurga muutus $X_2 - X_3$ tasandis.
7. Pöördetensor R_{kK} .
8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariantid.



Joonis 1: Algne kuup ja siirdevektor.

Lahendus

Teisenduse (1) pöörteisendus on

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1 - A^2), \\ X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1 - A^2). \end{cases} \quad (2)$$

1. Siire

Siirdevektor

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K = u_k \mathbf{i}_k = \mathbf{p} - \mathbf{P} = x_k \mathbf{i}_k - X_K \mathbf{I}_K. \quad (3)$$

Seega siirdevektori komponendid LK-s

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 \stackrel{(1)}{=} 0, \\ U_2 = x_2 - X_2 \stackrel{(1)}{=} \dots\dots\dots = AX_3, \\ U_3 = x_3 - X_3 \stackrel{(1)}{=} \dots\dots\dots = AX_2, \end{cases} \quad (4)$$

ja EK-s

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 \stackrel{(2)}{=} 0, \\ u_2 = x_2 - X_2 \stackrel{(2)}{=} \dots\dots\dots = \frac{A(x_3 - Ax_2)}{1 - A^2}, \\ u_3 = x_3 - X_3 \stackrel{(2)}{=} \dots\dots\dots = \frac{A(x_2 - Ax_3)}{1 - A^2}. \end{cases} \quad (5)$$

2a. Ring. Algse ringjoone võrrand on $(X_2)^2 + (X_3)^2 = (1 - A^2)^{-1}$. Asendame siia $X_K = X_K(x_1, x_2, x_3)$ pöördteisendusest (2).

$$\frac{(x_2 - Ax_3)^2}{(1 - A^2)^2} + \frac{(x_3 - Ax_2)^2}{(1 - A^2)^2} = \frac{1}{1 - A^2} \quad (6)$$

...

$$(1 + A^2)(x_2)^2 - 4Ax_2x_3 + (1 + A^2)(x_3)^2 = 1 - A^2.$$

See on ellipsi võrrand. Ellipsi joonistamiseks pöörame koordinaattelgi nurga $\pi/4$ võrra¹. Toome sisse uued koordinaadid v_1, v_2 , st. pöörame koordinaate x_1, x_2 .

$$\begin{cases} v_2 = (x_2 + x_3)/\sqrt{2}, \\ v_3 = (x_3 - x_2)/\sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = (v_2 - v_3)/\sqrt{2}, \\ x_3 = (v_2 + v_3)/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (7)$$

¹Teist järku joone võrrandi üldkuju on $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

Kui pöörata telgi nurga α võrra, kus α avaldatakse võrrandi

$b \tan^2 \alpha + (a - c) \tan \alpha - b = 0$ positiivsest lahendist, saame tulemuseks teist järku joone võrrandi kujul: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Asendades (7) võrrandisse (6) saame pärast mõningaid teisendusi

$$(1 - A)^2(v_2)^2 + (1 + A)^2(v_3)^2 = 1 - A^2$$

Viimasele saab anda kuju

$$\frac{(v_2)^2}{\frac{1+A}{1-A}} + \frac{(v_3)^2}{\frac{1-A}{1+A}} = 1. \quad (8)$$

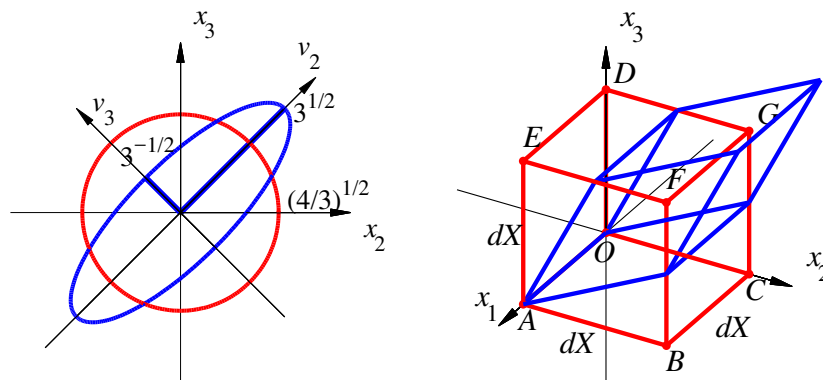
Kui $A = 1/2$, siis algse ringi võrrand saab kuju

$$(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4/3 \quad (9)$$

ja ellipsi võrrand

$$\frac{(v_2)^2}{3} + \frac{(v_3)^2}{\frac{1}{3}} = 1. \quad (10)$$

Seega, algse ringi raadius $r = 2/\sqrt{3} = 1,155$ ja ellipsi poolteljed $a = \sqrt{3} = 1,732$ ning $b = 1/\sqrt{3} = 0,577$



Joonis 2: Deformeerunud ring ja deformeerunud kuup.

2b. Kuup. Kuubi deformeerunud kuju leidmiseks on mitu erinevat võimalust. I) Leiame näiteks kuubi servade siirded.

- serv OA : $X_2 = X_3 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_2 = U_3 = 0$,
- serv OC : $X_1 = X_3 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_2 = 0, U_3 = AX_2$,
- serv OD : $X_1 = X_2 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_3 = 0, U_2 = AX_3$,
- serv AB : $X_1 = dX, X_3 = 0 \xrightarrow{(4)} U_1 = U_2 = 0, U_3 = AX_2$,
- serv FG : $X_2 = dX, X_3 = dX \xrightarrow{(4)} U_1 = 0, U_2 = U_3 = AdX$, jne.

II) Samahästi võiks leida tippude siirded:

a) tipp O : koordinaadid enne deformatsiooni

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$$

siire $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0$ ja

koordinaadid peale deformatsiooni $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$;

b) tipp B : koordinaadid enne deformatsiooni

$$X_1 = dX, X_2 = dX, X_3 = 0 \rightarrow (4) \rightarrow$$

siire $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = AdX$ ja

koordinaadid peale deformatsiooni $x_1 = dX, x_2 = dX, x_3 = AdX$; jne.

III) Deformeerunud kuubi tippude koordinaatide leidmiseks võib kasutada ka liikumisseadust (1).

3. Cauchy, Greeni, Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid (DT)

$$\begin{aligned} \text{Cauchy DT: } \quad c_{kl} &= X_{K,k} X_{K,l} & \text{Greeni DT: } \quad C_{KL} &= x_{k,K} x_{k,L} \\ \text{Lagrange'i DT: } \quad 2E_{KL} &= C_{KL} - \delta_{KL} & \text{Euleri DT: } \quad 2e_{kl} &= \delta_{kl} - c_{kl} \end{aligned} \quad (11)$$

Kõigepealt on vaja leida deformatsioonigradiendid:

$$[X_{K,k}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (12)$$

3a. Cauchy DT $c_{kl} = X_{K,k} X_{K,l}$

$$c_{11} = (X_{1,1})^2 + (X_{2,1})^2 + (X_{3,1})^2 = \dots$$

$$c_{22} = (X_{1,2})^2 + (X_{2,2})^2 + (X_{3,2})^2 = \dots$$

$$c_{33} = (X_{1,3})^2 + (X_{2,3})^2 + (X_{3,3})^2 = \dots$$

$$c_{12} = c_{21} = X_{1,1} X_{1,2} + X_{2,1} X_{2,2} + X_{3,1} X_{3,2} = \dots$$

$$c_{23} = c_{32} = X_{1,2} X_{1,3} + X_{2,2} X_{2,3} + X_{3,2} X_{3,3} = \dots$$

$$c_{13} = c_{31} = 0$$

$$[c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & -\frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{1+A^2}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

3b. Greeni DT $C_{KL} = x_{k,K}x_{k,L}$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1; \quad C_{22} = 1 + A^2; \quad C_{33} = 1 + A^2; \\ C_{12} &= C_{21} = C_{13} = C_{31} = 0; \quad C_{23} = C_{32} = 2A \end{aligned}$$

$$[C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

3c. Lagrange'i DT $2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}$

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3d. Euleri DT $2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}$

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} & \frac{2A}{(1-A^2)^2} \\ 0 & \frac{2A}{(1-A^2)^2} & \frac{A^2(A^2-3)}{(1-A^2)^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

4. Deformatsioonitensorite peaväärtused ja peasuunad.

4a. Greeni deformatsioonitensor C_{KL} . Kasutame konspekti valemit (3.104)²

$$(C_{KL} - C\delta_{KL})N_L = 0. \quad (17)$$

Peaväärtused C määratakse karakteristlikust võrrandist

$$\begin{aligned} |C_{KL} - C\delta_{KL}| &= \begin{vmatrix} 1 - C & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 - C & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 - C \end{vmatrix} = \\ &= (1 - C) \left[(1 + A^2 - C)^2 - 4A^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Viimase lahendid on (pärast ümbernummerdamist $C_1 \geq C_2 \geq C_3$)

$$C_1 = (1 + A)^2; \quad C_2 = 1; \quad C_3 = (1 - A)^2. \quad (19)$$

Igale peaväärtusele C_α vastab peasuund $\mathbf{N}_\alpha \equiv (N_{1\alpha}, N_{2\alpha}, N_{3\alpha})$, mille määramiseks saame avaldise (17) põhjal kolm võrrandit:

$$\begin{cases} (C_{11} - C_\alpha)N_{1\alpha} + C_{12}N_{2\alpha} + C_{13}N_{3\alpha} = 0, \\ C_{21}N_{1\alpha} + (C_{22} - C_\alpha)N_{2\alpha} + C_{23}N_{3\alpha} = 0, \\ C_{31}N_{1\alpha} + C_{32}N_{2\alpha} + (C_{33} - C_\alpha)N_{3\alpha} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

²Siin ja edaspidi 2010. a. konspekti numeratsioon

i) **Peasuund \mathbf{N}_1 .** Peaväärtusele $C_1 = (1 + A)^2$ vastava peasuuna $\mathbf{N}_1 \equiv (N_{11}, N_{21}, N_{31})$ leidmiseks saab VS (20) kuju

$$\begin{cases} [1 - (1 + A)^2] N_{11} = 0, \\ [1 + A^2 - (1 + A)^2] N_{21} + 2AN_{31} = 0, \\ 2AN_{21} + [1 + A^2 - (1 + A)^2] N_{31} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

kust saame

$$\begin{cases} N_{11} = 0, \\ -2AN_{21} + 2AN_{31} = 0, \\ 2AN_{21} - 2AN_{31} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{11} = 0, \\ N_{21} = N_{31}. \end{cases} \quad (22)$$

Nüüd tuleb rakendada tingimust, et \mathbf{N}_1 on ühikvektor, st., $(N_{11})^2 + (N_{21})^2 + (N_{31})^2 = 1$. Seega $N_{21} = N_{31} = \pm 1/\sqrt{2}$ ja

$$\mathbf{N}_1 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (23)$$

ii) **Peasuund \mathbf{N}_2 .** Peaväärtuse $C_2 = 1$ puhul saab VS (20) kuju

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ A^2 N_{22} + 2AN_{32} = 0, \\ 2AN_{22} + A^2 N_{32} = 0, \end{cases} \Rightarrow N_{22} = N_{32} = 0. \quad (24)$$

Kuna ka \mathbf{N}_2 peab olema ühikvektor, siis

$$\mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0). \quad (25)$$

iii) **Peasuund \mathbf{N}_3 .** Peasuuna \mathbf{N}_3 leidmiseks kasutame peaväärtust $C_3 = (1 - A)^2$, mille puhul VS (20) saab kuju

$$\begin{cases} [1 - (1 - A)^2] N_{13} = 0, \\ [1 + A^2 - (1 - A)^2] N_{23} + 2AN_{33} = 0, \\ 2AN_{23} + [1 + A^2 - (1 - A)^2] N_{33} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

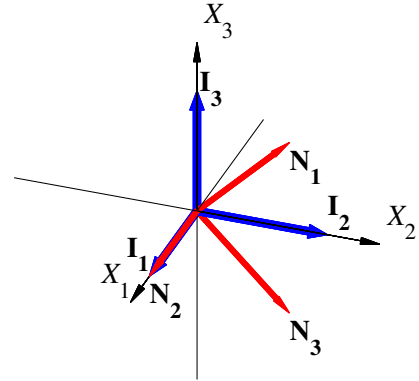
kust saame

$$\begin{cases} N_{13} = 0, \\ 2AN_{23} + 2AN_{33} = 0, \\ 2AN_{23} + 2AN_{33} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{13} = 0, \\ N_{23} = -N_{33}. \end{cases} \quad (27)$$

Tingimusest $|\mathbf{N}_3| = 1$, saame nüüd, et

$$\mathbf{N}_3 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (28)$$

Valemite (23)–(28) põhjal on iga peasuuna puhul võimalik valida kahe vektori vahel. Tegelikult tuleb silmas pidada, et peasuunad peavad moodustama parema käe kolmiku. Seega, kahe peasuuna puhul võime valida ükskõik kumma kahest leitud vektorist, kuid kolmas peasuund peab olema valitud nii, et kokku moodustuks parema käe kolmik. Näiteks, kui valime $\mathbf{N}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ja $\mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$, siis peab \mathbf{N}_3 vastama tingimusele $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, mis antud juhul tähendab, et $\mathbf{N}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 3).



Joonis 3: Greeni deformatsioonitensori C_{KL} peasuunad (peavektorid \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_3 asuvad $X_2 - X_3$ tasandil).

4b. Cauchy deformatsioonitensor c_{kl} .

Nüüd tuleb lähtuda võrrandist

$$(c_{kl} - c\delta_{kl})n_l = 0. \quad (29)$$

Eelnenuga analoogiline protseduur annab tulemuseks

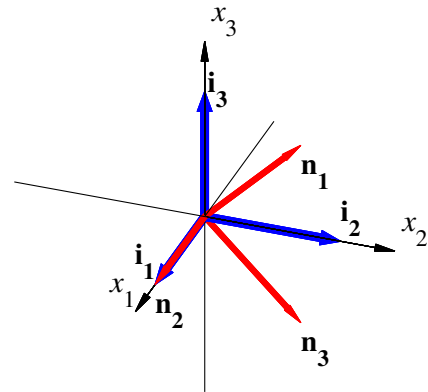
$$c_1 = (1+A)^{-2}; \quad c_2 = 1; \quad c_3 = (1-A)^{-2}. \quad (30)$$

Peaväärtuste järjestamise juures tuleb silmas pidada, et esimesele peaväärtusele c_1 peab vastama suurim peapikenemine λ_1 ja kolmandale vähim, st. $C_\alpha = 1/c_\alpha = \lambda_\alpha^2$.

Selgub, et antud ülesande korral Cauchy ja Greeni deformatsioonitensori peasuunad ühtivad, seega

$$\mathbf{n}_1 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{n}_2 = (\pm 1, 0, 0), \quad \mathbf{n}_3 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (31)$$

Viimastest võime valida eelnevaga analoogilise kolmiku $\mathbf{n}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (vt. joon. 4).



Joonis 4: Cauchy deformatsioonitensori c_{kl} peasuunad (peavektorid \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_3 asuvad $x_2 - x_3$ tasandil).

4c. Lagrange'i deformatsioonitensori E_{KL} peaväärtused ja peasuunad saab määrata võrrandist

$$(E_{KL} - E\delta_{KL}) N_L = 0, \quad (32)$$

kust saame

$$E_1 = \frac{A}{2}(A + 2), \quad E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{A}{2}(A - 2). \quad (33)$$

Peaväärtuste järjestamisel tuleb jällegi silmas pidada, et suurimale peapikenemisele λ_1 vastaks esimene peaväärtus E_1 ja vähimale kolmas. Siinjuures tuleb lähtuda seostest $C_\alpha = \lambda_\alpha^2$ ja $2E_\alpha = \lambda_\alpha^2 - 1$. Lagrange'i deformatsioonitensori peasuunad ühtivad Greeni deformatsioonitensori peasuundadega.

Kontroll.

Konspekti valemi (3.105) põhjal $2E_\alpha = C_\alpha - 1$. Seega $2E_1 = (1 + A)^2 - 1 = A(A + 2)$, $2E_2 = 1 - 1 = 0$ ja $2E_3 = (1 - A)^2 - 1 = A(A - 2)$.

4d. Euleri deformatsioonitensori e_{kl} peaväärtused saab määrata seosest $2e = 1 - c$, seega

$$\begin{aligned} e_1 = 0, 5(1 - c_1) &= \frac{A(2 + A)}{2(1 - A)^2}, & e_2 = 0, 5(1 - c_2) &= 0, \\ e_3 = 0, 5(1 - c_3) &= -\frac{A(2 - A)}{2(1 - A)^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Loomulikult võib Euleri deformatsioonitensori peasuunad määrata ka võrrandist $(e_{kl} - e\delta_{kl}) n_l = 0$. Samast võrrandist määratakse ka Euleri deformatsioonitensori peasuunad.

5. Deformatsiooniellipsoidid Ruumiline deformatsiooniellipsoid on esitatud valemiga (3.112) ja materiaalne valemiga (3.115)

$$C_\alpha (dX_\alpha)^2 = ds^2 = k^2, \quad c_\alpha (dx_\alpha)^2 = dS^2 = K^2. \quad (35)$$

Kui $A = 1/2$, siis

$$\begin{cases} C_1 = (1 + A)^2 = \frac{9}{4}, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = (1 - A)^2 = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad c_\alpha \stackrel{=}{=} \frac{1}{C_\alpha} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{4}{9}, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 4, \end{cases} \quad (36)$$

Kui valida $t = t_0$ puhul $dS = ds = K = k$, siis avalduvad pooltelgede pikkused järgmiselt:

Ruumiline:

$$a_\alpha^s = \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}}$$

$$a_1^s = \frac{2}{3}k; \quad a_2^s = k; \quad a_3^s = 2k.$$

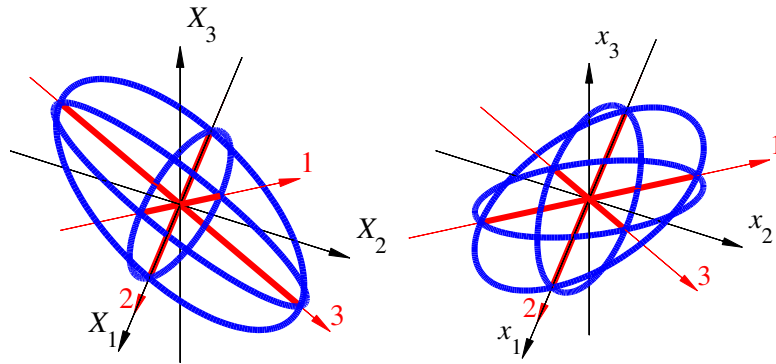
Materiaalne:

$$a_\alpha^m = \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{c_\alpha}} = k\sqrt{C_\alpha}$$

$$a_1^m = \frac{3}{2}k; \quad a_2^m = k; \quad a_3^m = \frac{1}{2}k.$$

Deformatsiooniellipsoidide pooltelgede orientatsioon on määratud deformatsioonitensorite neasuundadega — ruumilise deformatsiooniellipsoidi pooltelgedele

vastavad \mathbf{N}_α ja materiaalse omadele \mathbf{n}_α (võrdle jooniseid 3–5).



Joonis 5: Ruumiline ja materiaalne deformatsiooniellipsoid.

6. Pikenemine ja pööre

6a. Elementaarkuubi servade ja diagonaalide pikenemiskoeffitsendid (vt. joonis 2). Konspekti valemite (3.71) ja tensori C_{KL} definitsiooni (3.36) põhjal avaldub pikenemiskoeffitsent suunas \mathbf{N} järgmiselt:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N_KN_L} = \sqrt{x_{k,K}x_{k,L}N_KN_L}. \quad (37)$$

Peasuundade puhul $\Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha}$. Lihtsuse mõttes leiame pikenemiskoeffitsentide ruudud $\Lambda_{(\mathbf{N})}^2$.

1) **Serv OA:** $OA \parallel X_1$ on 2. peasihis³, seega

$$\Lambda_{(OA)}^2 \equiv \Lambda_{(1)}^2 \equiv \Lambda_2^2 = C_2 = 1. \quad (38)$$

2) **Serv OC.** Leiame $\Lambda_{(OC)}^2 \equiv \Lambda_{(2)}^2$ kahel erineval moel, arvestades, et $\mathbf{N}_{(OC)} = \mathbf{I}_2 = (0, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(2)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + A^2dX^2}{dX^2} = 1 + A^2, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(2)}^2 &= C_{22} \cdot 1 \cdot 1 = 1 + A^2, \end{aligned} \quad (39)$$

³Täpsustame jällegi tähistusi: $\Lambda_{(K)}$ tähistab pikenemiskoeffitsenti koordinaadi X_K sihis ja Λ_α on peapikenemine neasuunas α .

3) **Serv OD.** Joonise 2 põhjal

$$\Lambda_{(OD)}^2 \equiv \Lambda_{(3)}^2 = \Lambda_{(2)}^2 = 1 + A^2. \quad (40)$$

4) **Diagonaal OG** on 1. peasihis, st., $\mathbf{N}_{(OG)} = \mathbf{N}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Leiame pikenemiskoeffitsendi $\Lambda_{(OG)}$ jällegi kolmel erineval moel:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OG)}^2 &\equiv \Lambda_1^2 = C_1 = (1 + A)^2, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OG)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2(dX + AdX)^2}{dX^2 + dX^2} = (1 + A)^2, \\ \text{iii)} \quad \Lambda_{(OG)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = C_{22} \cdot \frac{1}{2} + C_{33} \cdot \frac{1}{2} + 2C_{23} \cdot \frac{1}{2} = (1 + A)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

5) **Diagonaal DC** on 3. peasuunas, seega

$$\Lambda_{(DC)}^2 \equiv \Lambda_3^2 = C_3 = (1 - A)^2. \quad (42)$$

6) **Diagonaal OE** pole ei telje- ega peasihiline.

Ühikvektor $\mathbf{N}_{(OE)} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OE)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{2dX^2 + A^2dX^2}{dX^2 + dX^2} = 1 + \frac{A^2}{2}, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OE)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = \dots \end{aligned} \quad (43)$$

7) **Diagonaal OF** . Analoogselt eelmisega, $\mathbf{N}_{(OF)} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + 2(1+A)^2dX^2}{3dX^2} = 1 + \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = \dots \end{aligned} \quad (44)$$

8) **Diagonaal DB** . Nüüd, $\mathbf{N}_{(DB)} = (1, 1, -1)/\sqrt{3}$ ja

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dX^2 + 2(1-A)^2dX^2}{3dX^2} = 1 - \frac{4A}{3} + \frac{2A^2}{3}, \\ \text{ii)} \quad \Lambda_{(OF)}^2 &= C_{KL}N_KN_L = \dots \end{aligned} \quad (45)$$

9) Ülejäänud servade ja diagonaalide pikenemiskoeffitsendid on võrdsed juba leitudega.

Kontroll. $\Lambda_{(K)}^2 = C_{\underline{K}\underline{K}}$ ja Λ_1 ning Λ_3 on ekstremaalsed kõigi $\Lambda_{(N)}$ seast.

6b. Suhteline pikenemine⁴.

$$E_{(N)} = \epsilon_{(n)} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(N)} - 1. \quad (46)$$

Seega

$$\begin{cases} E_{(1)} = 1 - 1 = 0, & E_{(2)} = E_{(3)} = \sqrt{1 + A^2} - 1, \\ E_1 = (1 + A) - 1 = A, & E_2 = E_{(1)} = 0, & E_3 = (1 - A) - 1 = -A. \end{cases} \quad (47)$$

Suhtelisel pikenemisel $E_{(X_K)} \equiv E_{(K)}$ puudub nii otsene seos Lagrange'i deformatsioonitensoriga E_{KL} kui on pikenemiskoeffitsendi $\Lambda_{(K)}$ ja Greeni deformatsioonitensori C_{KL} vahel.

⁴i) Suhtelist pikenemist $E_{(N)} = \epsilon_{(n)}$ ei tohi segi ajada tensori E_{KL} peaväärtustega E_α : $2E_\alpha = C_\alpha - 1 = \Lambda_{(N)}^2 - 1$.

ii) Analoogiliselt pikenemiskoeffitsentidega tähistab E_α suhtelist pikenemist peasuunas α ja $E_{(K)}$ suhtelist pikenemist koordinaadi X_K suunas.

Valemite (3.78) põhjal

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + E_{(K)})^2 - 1 = \Lambda_{(K)}^2 - 1,$$

ehk

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = \frac{ds_{(K)}^2 - dS_{(K)}^2}{dS_{(K)}^2}.$$

Teatavasti on viimane tuntud 1D juhul kui Lagrange'i deformatsioon.

6c. Kuubi servade ja diagonaalide pööre.

Arvutamiseks on (vähemalt) kaks võimalust: (i) läbi deformeerunud kuubi geometria ja (ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise.

Arvutuste juures on võetud $A = 0,5$ ja vastused on kraadides.

1) Serv OA ei pöördu, seega $\beta_{OA} = 0$.

2) Serv OC (vt. joonis 6), $\beta_{OC} = 26,5651$

$$\overline{OC} = (0, 1, 0)dX, \quad \overline{OC'} = (0, 1, A)dX, \quad |\overline{OC}| = dX, \quad |\overline{OC'}| = \sqrt{1 + A^2}dX.$$

(i) läbi deformeerunud kuubi geometria,

$$\cos \beta_{OC} = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OC'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \quad (48)$$

(ii) läbi algse kuubi ja deformeerunud kuubi servasihiliste vektorite skalaarkorrutise

$$\cos \beta_{OC} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OC'}}{|\overline{OC}| \cdot |\overline{OC'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OC} = 26,5651. \quad (49)$$

3) Serv OD, $\beta_{OD} = 26,5651$

4) Diagonaal OB, $\beta_{OB} = 19,4712$

$$\overline{OB} = (1, 1, 0)dX, \quad \overline{OB'} = (1, 1, A)dX, \quad |\overline{OB}| = \sqrt{2}dX, \quad |\overline{OB'}| = \sqrt{2 + A^2}dX.$$

läbi deformeerunud kuubi geomeetria,

$$\cos \beta_{OB} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OB'}|} = 0.89443, \quad \beta_{OB} = 26,5651. \quad (50)$$

5) Diagonaal OE, $\beta_{OE} = 19,4712$

6) Diagonaal OF, $\beta_{OF} = 10,025$

7) Diagonaal OG, $\beta_{OG} = 0$

6d. Algse täisnurga muut $X_2 - X_3$ tasandis — nihe. On selge, et teljega X_1 paralleelne kuubi serv deformatsiooni käigus ei pöördu ning servad, mis on paralleelsed X_2 ja X_3 teljega pöörduvad nurga $\beta = \arctan A$ võrra (joonis 6). Leiame X_2 ja X_3 telje vahelise täisnurga muudu.

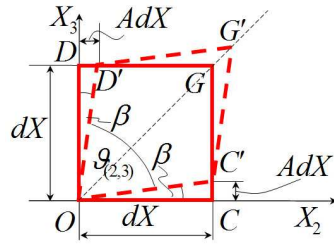
$$\Gamma_{(2,3)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(2,3)} = 2\beta = 2 \arctan A. \quad (51)$$

Seega $A = 1/2$ korral $\Gamma_{(2,3)} = 2 \arctan 0,5 = 53,13^\circ$.

Teiselt poolt valemi (3.81) põhjal

$$\cos \vartheta_{(2,3)} = \frac{C_{23}}{\sqrt{C_{22}C_{33}}} = \frac{2A}{1 + A^2} \quad (52)$$

ja valemi (51) põhjal $\sin \Gamma_{(2,3)} = \cos \vartheta_{(2,3)}$. Kui $A = 1/2$, siis $\sin \Gamma = 4/5$ ja $\Gamma = 53,13^\circ$.



Joonis 6: Algse täisnurga muutus.

7. Pöördetensor $R_{kK} = n_{k\alpha}N_{\alpha K}$ pöörab Greeni deformatsioonitensori peasuunad \mathbf{N}_α Cauchy' deformatsioonitensori peasuundadeks \mathbf{n}_α . Antud juhul peasuundade \mathbf{n}_α ja \mathbf{N}_α avaldised ühtivad, st., $\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (\pm 1, 0, 0)$ ja $\mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Seega kui valime peasuundadeks

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{N}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0) \text{ ja } \mathbf{n}_3 = \mathbf{N}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

siis pöördetensor

$$R_{kK} = \delta_{kK}. \tag{53}$$

Kui aga valida

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{N}_1 = -(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{n}_2 = \mathbf{N}_2 = (1, 0, 0) \text{ ja } \mathbf{n}_3 = -\mathbf{N}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

siis saame hoopis teistsuguse pöördetensori —

$$R_{kK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

8. Greeni deformatsioonitensori C_{KL} invariandid.

$$\begin{aligned} I_C &= C_1 + C_2 + C_3 = \dots\dots\dots = 3 + 2A^2, \\ II_C &= C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = \dots\dots\dots = 3 + A^4, \\ III_C &= C_1C_2C_3 = \dots\dots\dots = (1 - A^2)^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Kui $A = 1/2$, siis $I_C = 7/2$, $II_C = 49/16$ ja $III_C = 9/16$.