Näide L1 Pideva keskkonna liikumisseadus on esitatud kujul

$$\begin{cases} z^1 = Z^1, \\ z^2 = Z^2 \cosh t + Z^3 \sinh t, \\ z^3 = Z^2 \sinh t + Z^3 \cosh t. \end{cases} \tag{1}$$

Lagrange'i-Descartes'i ja Euleri-Descartes'i ristkoordinaadid ühtivad alghetkel, s.t., $t = t_0$ puhul $z^k = Z^K$ kui $k = K$. Euleri koordinaadid $x^k \equiv z^k$ ja Lagrange'i koordinaadid $X^K \equiv Z^K$.

Leida:

1. kiirus- ja kiirendusvektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides siirete kaudu;
2. kiirusväljale vastavad voolujooned ja trajektorid;
3. Euleri ja Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensorid d_{kl} ja $\dot{E}_{KL}$;
4. keeriselisuse tensor w_{kl}.

Lahendus

1. Pöördteisendus

$$\begin{cases} Z^1 = z^1, \\ Z^2 = z^2 \cosh t - z^3 \sinh t, \\ Z^3 = -z^2 \sinh t + z^3 \cosh t. \end{cases} \tag{2}$$

2. Siire $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}$

   (a) LK

$$\begin{cases} U^1 = 0 \\ U^2 = Z^2(\cosh t - 1) + Z^3 \sinh t, \\ U^3 = Z^2 \sinh t + Z^3(\cosh t - 1) \end{cases} \tag{3}$$

   (b) EK

$$\begin{cases} u^1 = 0 \\ u^2 = z^2(1 - \cosh t) + z^3 \sinh t, \\ u^3 = z^2 \sinh t + z^3(1 - \cosh t) \end{cases} \tag{4}$$

3. Kiirus ja kiirendus

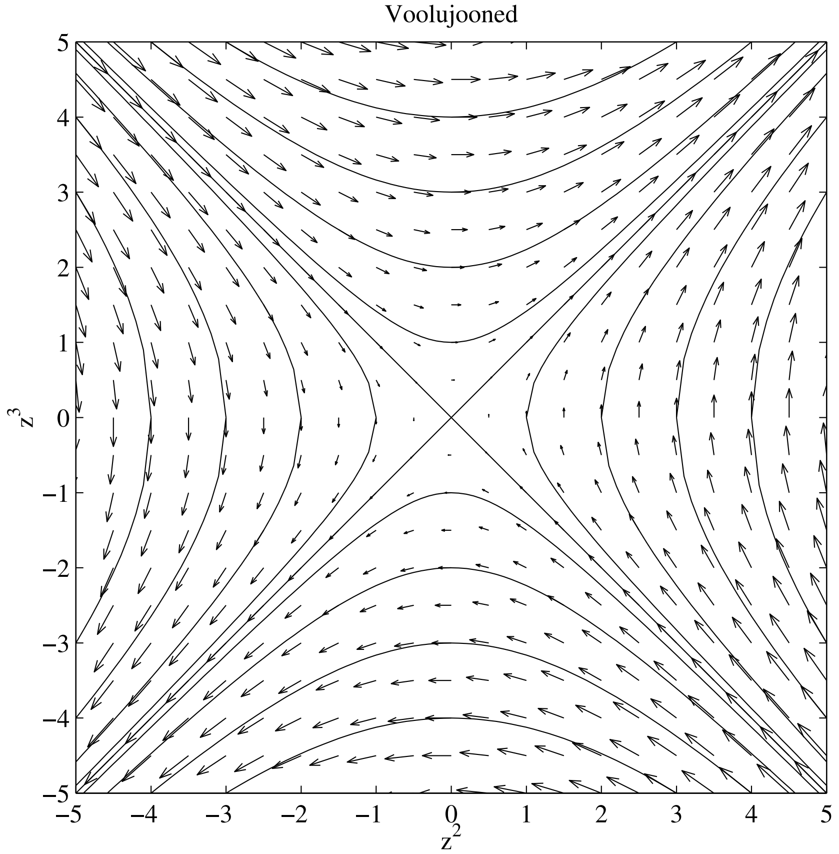
   (a) LK

$$\begin{cases} V^1 = 0 \\ V^2 = Z^2 \sinh t + Z^3 \cosh t, \\ V^3 = Z^2 \cosh t + Z^3 \sinh t. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} A^1 = 0 \\ A^2 = Z^2 \cosh t + Z^3 \sinh t, \\ A^3 = Z^2 \sinh t + Z^3 \cosh t. \end{cases} \tag{6}$$

   (b) EK

$$\begin{cases} v^1 = 0 \\ v^2 = z^3 \\ v^3 = z^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^1 = 0 \\ a^2 = z^2 \\ a^3 = z^3 \end{cases} \tag{7}$$



4. Voolujooned ja trajektoorid

   (a) Voolujooned on diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dz^1}{v^1} = \frac{dz^2}{v^2} = \frac{dz^3}{v^3} = \frac{1}{\varkappa} \tag{8}$$

   integraalkõverad

$$z^3 = \pm\sqrt{(z^2)^2 + (z_0^3)^2 - (z_0^2)^2}. \tag{9}$$

   Viimased esitavad hüperboolide parve.

   (b) Trajektoorid ja voolujooned ühtivad, sest tegu on statsionaarse liikumisega. Tõepoolest, ellimineerides teisendusest (1) aja t saame jällegi hüperboolide parve (9).

5. Deformatsioonikiiruse tensorid $d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k;l} + v_{l;k})$ ja $\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2}\dot{C}_{KL} = d_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L}$.

$$[v_{k,l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\left[\dot{E}_{KL}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sinh t\cosh t & \sinh^2 t + \cosh^2 t \\ 0 & \sinh^2 t + \cosh^2 t & 2\sinh t\cosh t \end{bmatrix}. \tag{11}$$

6. Keeriselisuse tensor

$$[w_{kl}] = \left[\frac{1}{2}(v_{k;l} - v_{l;k})\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$