

Näide L1. Kiirus, kiirendus, deformatsioonikiirus ja keerilisus

Pideva keskkonna liikumisseadus on esitatud kujul

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 \cosh t + X_3 \sinh t, \\ x_3 = X_2 \sinh t + X_3 \cosh t. \end{cases} \quad (1)$$

Lagrange'i-Descartes'i ja Euleri-Descartes'i ristkoordinaadid ühtivad alghetkel, s.t., $t = t_0$ puhul $x_k = X_k$ kui $k = K$.

Leida:

1. kiirus- ja kiirendusvektori komponendid Lagrange'i ja Euleri koordinaatides siirete kaudu;
2. kiirusväljale vastavad voolujooned ja trajektorid;
3. Euleri ja Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensorid $d_{k,l}$ ja \dot{E}_{KL} ;
4. keeriselisuse tensor w_{kl} .

Kiirus, kiirendus, deformatsioonikiirus ja keerilisus

Lahendus

1. Pöördteisendus

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = x_2 \cosh t - x_3 \sinh t, \\ X_3 = -x_2 \sinh t + x_3 \cosh t. \end{cases} \quad (2)$$

2. Siire $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}$

(a) LK

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = X_2(\cosh t - 1) + X_3 \sinh t, \\ U_3 = X_2 \sinh t + X_3(\cosh t - 1) \end{cases} \quad (3)$$

(b) EK

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = x_2(1 - \cosh t) + x_3 \sinh t, \\ u_3 = x_2 \sinh t + x_3(1 - \cosh t) \end{cases} \quad (4)$$

3. Kiirus ja kiirendus

- (a) LK korral kasutame loengukonspetti valemeid (3.203) ja (3.207)¹.

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = X_2 \sinh t + X_3 \cosh t, \\ V_3 = X_2 \cosh t + X_3 \sinh t. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = X_2 \cosh t + X_3 \sinh t, \\ A_3 = X_2 \sinh t + X_3 \cosh t. \end{cases} \quad (6)$$

- (b) EK korral kasutame loengukonspetti valemteid (3.204) ja (3.208).

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = x_3 \\ v_3 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = x_2 \\ a_3 = x_3 \end{cases} \quad (7)$$

- (c) Avaldiste (7) kontrollimiseks võrdleme avaldise (5) ja (6) liikumisseadusega (1). On selge, et valemite (5)₂ ja (1)₃ paremad pooled langevad kokku, jne.

¹Siin ja edaspidi 2010. a. loengukonspetti numeratsioon

4. Voolujooned ja trajektoidid

- (a) Voolujooned on diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = \frac{1}{\varkappa} \quad (8)$$

integraalkõverad

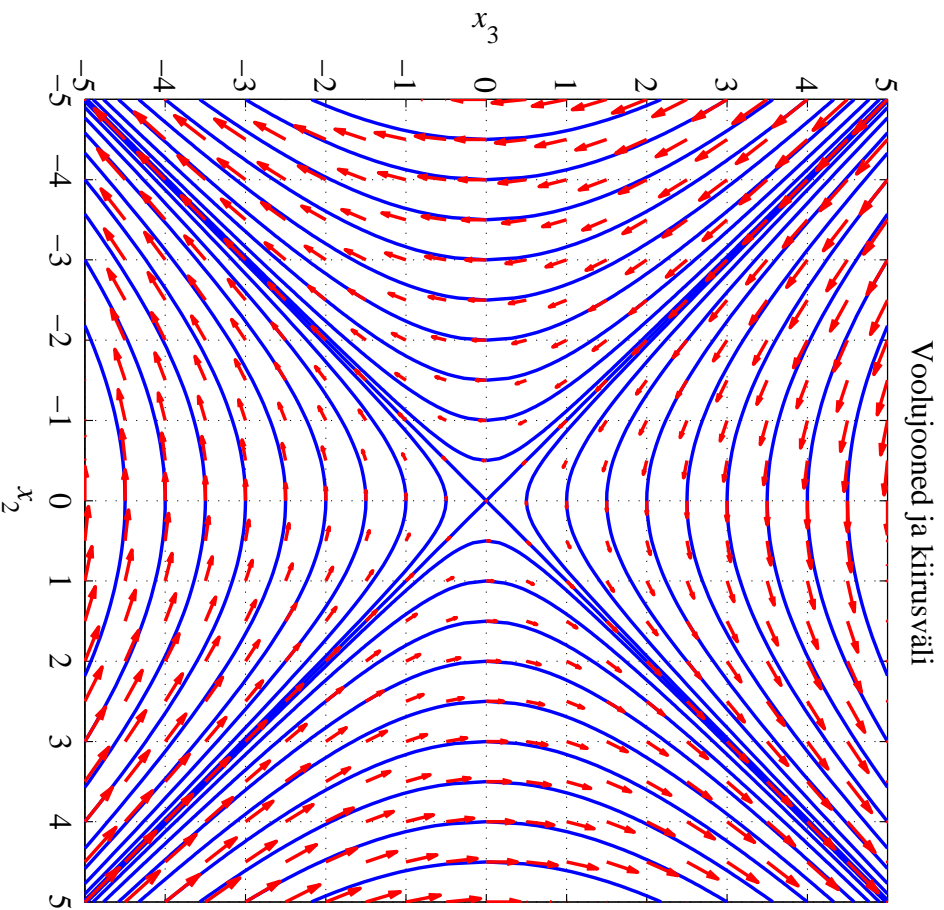
$$x_3 = \pm \sqrt{(x_2)^2 + (x_3^0)^2 - (x_2^0)^2}. \quad (9)$$

Viimased esitavad hüperboolide parve.

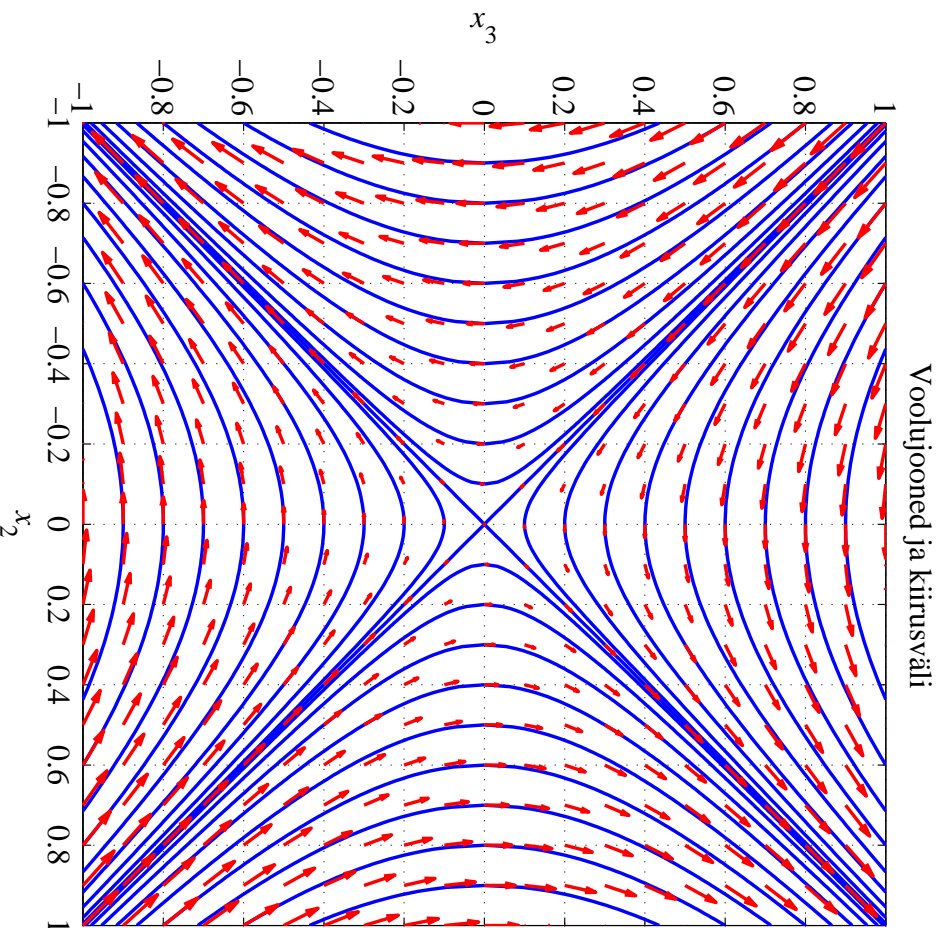
- (b) Trajektoidid ja voolujooned ühtivad, sest tegu on statsionaarse liikumisega.

- (c) Kontroll: elimineerides teisendusest (1) aja t saame jällegi hüperboolide parve (9).

- (d) Järgmisel kahel joonisel on esitatud voolujooned koos kiirusväljaga juhtudel $-5 \leq (x_2, x_3) \leq 5$ ja $-1 \leq (x_2, x_3) \leq 1$. Nagu näha, langevad voolujooned ja kiirusväljad kuju poolest kokku — erinevus on vaid maastaabis.



Voolujooned ja kiirusväli



Voolujooned ja kiirusväli

5. Deformatsioonikiiruse tensorid $d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k})$ ja $\dot{E}_{Kl} = \frac{1}{2}\dot{C}_{Kl} = d_{kl}x_k^Kx_l^L$.

$$[v_{k,l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$[\dot{E}_{Kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sinh t \cosh t & \sinh^2 t + \cosh^2 t \\ 0 & \sinh^2 t + \cosh^2 t & 2 \sinh t \cosh t \end{bmatrix}. \quad (11)$$

6. Keerilisuse tensor

$$[w_{kl}] = \left[\frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$