

Näide L2. Deformatsioonikiirus ja keeriselsus.

Kiiruste väli on EDRK-s antud kujul

$$\begin{cases} v_1 = 0, \\ v_2 = A[x_1x_2 - (x_3)^2]e^{-Bt}, \\ v_3 = A[(x_2)^2 - x_1x_3]e^{-Bt}, \end{cases} \quad (1)$$

kus A ja B on konstandid.

Leida:

1. deformatsioonikiiruse ja keeriselsuse tensorid d_{kl} ja w_{kl} ;
2. keerisvektor w_k ruumipunkti $\mathbf{p} = (1, 0, 3)$ hetkel $t = 0$;
3. pikenemise kiirus $d^{(\mathbf{n})}$ samas punktis ja samal hetkel suunas $\mathbf{n} = 3/5\mathbf{i}_1 - 4/5\mathbf{i}_2$;
4. voolujooned hetkel $t = 0$.

Deformatsioonikiirus ja keeriselsus

Lahendus

1. Deformatsioonikiiruse tensor $d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k})$ ja keeriselsuse tensor $w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k})$

$$[v_{k,l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{bmatrix} A e^{-Bt}, \quad (2)$$

$$[d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -x_3 \\ x_2 & 2x_1 & 2(x_2 - x_3) \\ -x_3 & 2(x_2 - x_3) & -2x_1 \end{bmatrix} \frac{A}{2} e^{-Bt}, \quad (3)$$

$$[w_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & x_3 \\ x_2 & 0 & -2(x_2 + x_3) \\ -x_3 & 2(x_2 + x_3) & 0 \end{bmatrix} \frac{A}{2} e^{-Bt}, \quad (4)$$

2. Keerisvektor $w_k = e_{kl}w_{ml}$

$$[w_{kl}] = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kui } t = 0 \text{ ja } \mathbf{p} = (1, 0, 3). \quad (5)$$

$$\mathbf{w} = (6A, 3A, 0). \quad (6)$$

3. Pikenemise kiirus $d_{(\mathbf{n})} = \frac{1}{ds} \frac{Dds}{Dt} = d_{kl}n_k n_l$.

$$[d_{kl}] = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{kui } t = 0 \text{ ja } \mathbf{p} = (1, 0, 3). \quad (7)$$

$$d_{(\mathbf{n})} = \begin{cases} \frac{16A}{25}, & t = 0 \\ \frac{16A}{25} e^{-Bt}, & t \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$

4. Voolujooned

$$\begin{cases} v_1 = 0, \\ v_2 = A[x_1 x_2 - (x_3)^2], \\ v_3 = A[(x_2)^2 - x_1 x_3], \end{cases} \quad \text{kui } t = 0. \quad (9)$$

Voolujoonte diferentsiaalvõrrandist

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \text{st.}, \quad \mathbf{v} = \varkappa d\mathbf{p} \quad (10)$$

Saame eksaktse ehk täisdiferentsiaaliga diferentsiaalvõrrandi

$$\underbrace{[(x_2)^2 - x_1 x_3]}_{M(x_2, x_3)} dx_2 + \underbrace{[-x_1 x_2 + (x_3)^2]}_{N(x_2, x_3)} dx_3 = 0. \quad (11)$$

Sellist tüüpi võrrandi korral leidub potentsiaal $F(x_2, x_3)$ nii, et

$$\frac{\partial F(x_2, x_3)}{\partial x_2} = M(x_2, x_3) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F(x_2, x_3)}{\partial x_3} = N(x_2, x_3). \quad (12)$$

Eksaktse diferentsiaalvõrrandi tunnuseks on

$$\frac{\partial M(x_2, x_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial N(x_2, x_3)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3}. \quad (13)$$

Võrrandi (11) tildlahend avaldub kujul¹

$$F(x_2, x_3) = \int_{x_2^0}^{x_2} M(x_2, x_3) dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} N(x_2^0, x_3) dx_3 = C^*, \quad (14)$$

kus x_1 on käsitletav parameetrimina ja x_2^0 ja x_3^0 on suvaline punkt tasandil $x_1 = \text{const}$ ($x_2 = x_3$ tasandil). Seega võime valida $x_2^0 = x_3^0 = 0$, mille korral saame otsitava tildlahendi kujul

$$\underbrace{(x_2)^3 + (x_3)^3 - 3x_1x_2x_3}_{F(x_2, x_3)} = C. \quad (15)$$

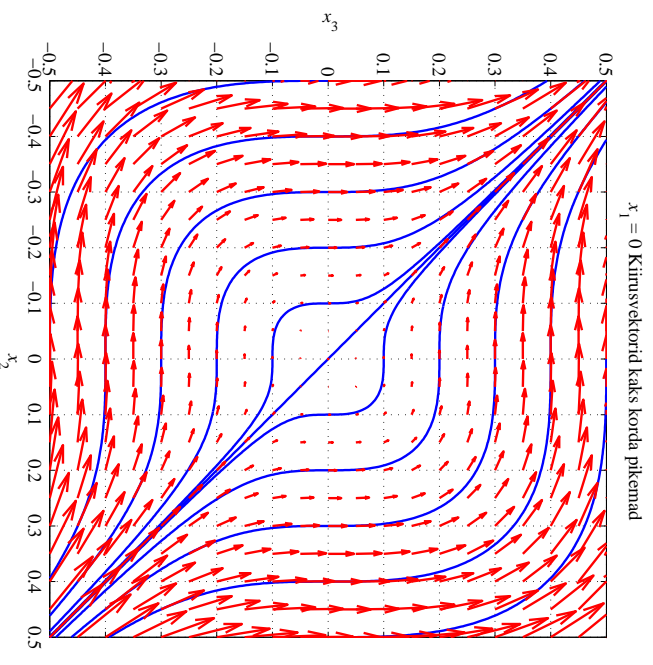
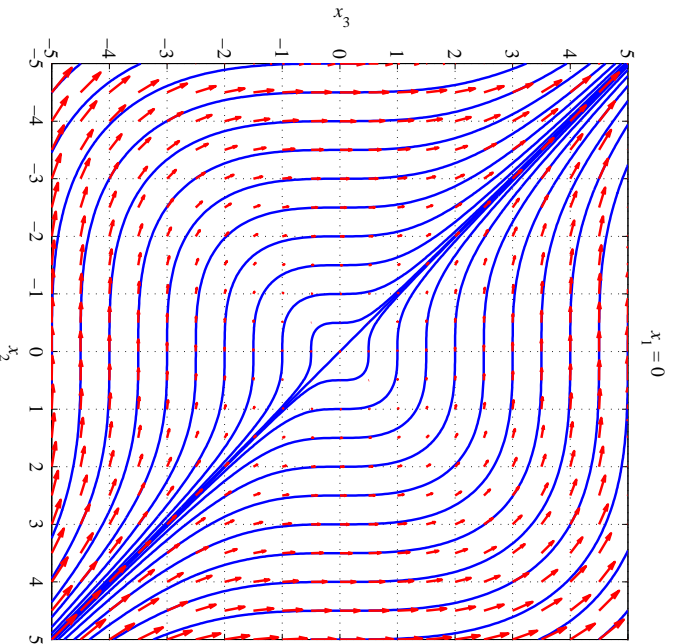
Võrrandi (11) v.p. on $F(x_2, x_3)$ täisdiferentsiaal. Lahendi (15) graafikud ongi otsitavaid voolujooni esitavad integraalkõverad. Kui $C = 0$ ja $x_1 > 0$, siis nimetatakse vaadeldavat kõverat Descartes'i leheks.

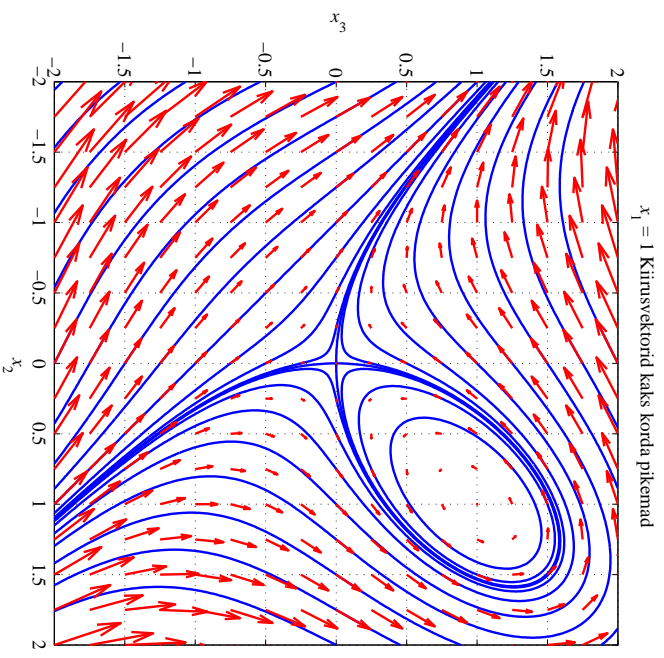
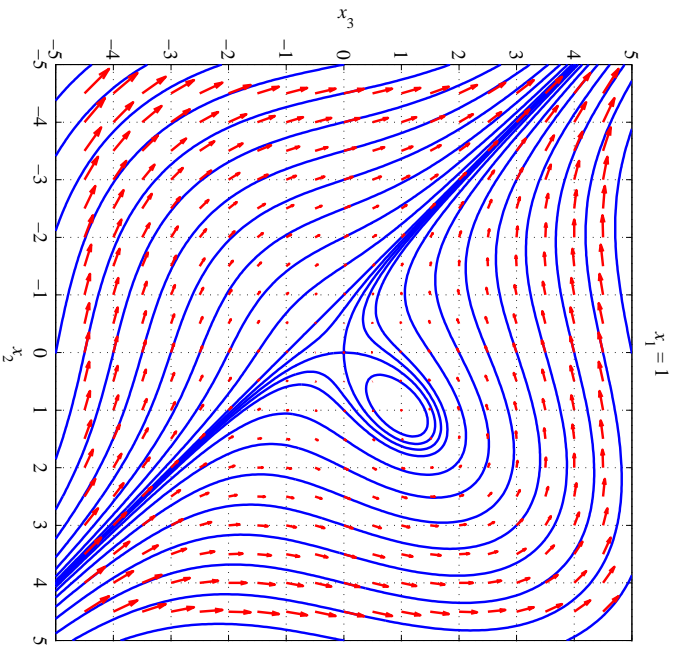
Järgnevatel joonistel on kujutatud kiiruste väli ning voolujooned $x_1^0 = 0$, $x_1^0 = 1$ ja $x_1^0 = 3$ jaoks. Konstandid $C = (x_2^0)^3 + (x_3^0)^3 - 3x_1^0x_2^0x_3^0$ on leitud EK x_1, x_2, x_3 fikseeritud väärtuste x_1^0, x_2^0, x_3^0 jaoks. Teisisõnu, fikseerides

¹See pole ainuke meetod tildlahendi leidmiseks. Otsi näiteks internetist "exact differential equation". Ettevaatust, Wikipedias on seda võrrandit suhteliselt segaselt käsitletud!

Deformatsiooni kiirus ja keerilisus

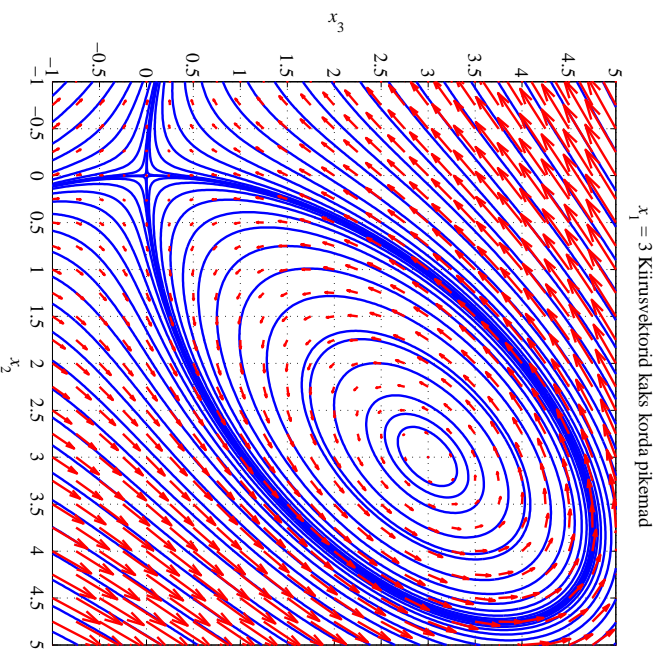
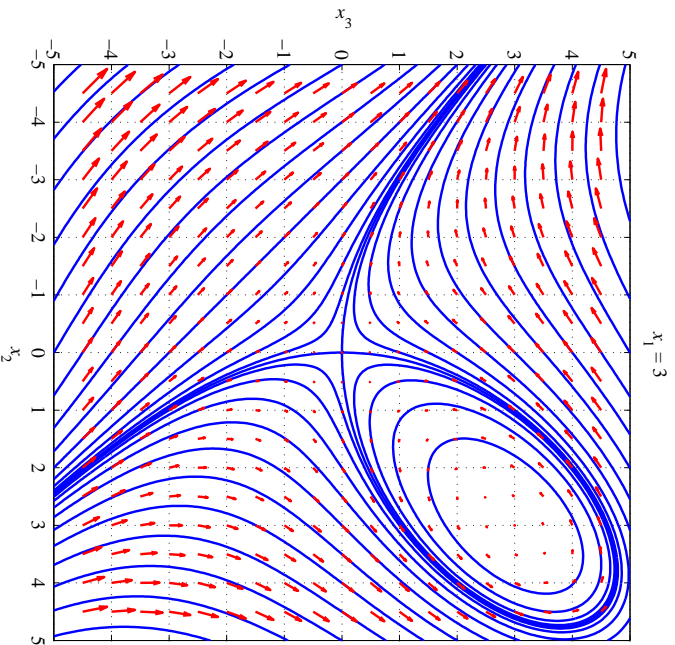
x_1^0, x_2^0 ja x_3^0 väärtused saame konstandile C sellise väärtuse, mille korral integraalkõver (15) läbib punkti (x_1^0, x_2^0, x_3^0) .





$x_1 = 1$ Kiirusvektorid kaks korda pikemad

Punkti $(0,0)$ läbivat kõverat nimetatakse Descartes'i leheks.



$x_1 = 3$ Kiirusvektorid kaks korda pikemad

Punkti $(0,0)$ läbivat kõverat nimetatakse Descartes'i leheks.