Näide L2. Deformatsioonikiirus ja keeriselisus.

Kiiruste väli on EDRK-s antud kujul

$$\begin{cases} v_1 = 0, \\ v_2 = A[x_1x_2 - (x_3)^2]e^{-Bt}, \\ v_3 = A[(x_2)^2 - x_1x_3]e^{-Bt}, \end{cases} \tag{1}$$

kus A ja B on konstandid.

Leida:

1. deformatsioonikiiruse ja keeriselisuse tensorid d_{kl} ja w_{kl};
2. keerisvektor w_k ruumipunktis $\mathbf{p} = (1, 0, 3)$ hetkel $t = 0$;
3. pikenemise kiirus $d_{(\mathbf{n})}$ samas punktis ja samal hetkel suunas $\mathbf{n} = 3/5\mathbf{i}_1 - 4/5\mathbf{i}_2$;
4. voolujooned hetkel $t = 0$.

Lahendus

1. Deformatsioonikiiruse tensor $d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k})$ ja keeriselisuse tensor $w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k})$

$$[v_{k,l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{bmatrix} Ae^{-Bt}, \tag{2}$$

$$[d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -x_3 \\ x_2 & 2x_1 & 2(x_2 - x_3) \\ -x_3 & 2(x_2 - x_3) & -2x_1 \end{bmatrix} \frac{A}{2}e^{-Bt}, \tag{3}$$

$$[w_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & x_3 \\ x_2 & 0 & -2(x_2 + x_3) \\ -x_3 & 2(x_2 + x_3) & 0 \end{bmatrix} \frac{A}{2}e^{-Bt}, \tag{4}$$

2. Keerisvektor $w_k = e_{klm} w_{ml}$

$$[w_{kl}] = \frac{A}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kui } t = 0 \text{ ja } \mathbf{p} = (1, 0, 3). \tag{5}$$

$$\mathbf{w} = (6A, 3A, 0). \tag{6}$$

3. Pikenemise kiirus $d_{(\mathbf{n})} = \frac{1}{ds}\frac{Dds}{Dt} = d_{kl} n_k n_l$.

$$[d_{kl}] = \frac{A}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{kui } t = 0 \text{ ja } \mathbf{p} = (1, 0, 3). \tag{7}$$

$$d_{(\mathbf{n})} = \begin{cases} \dfrac{16A}{25}, & t = 0 \\ \dfrac{16A}{25} e^{-Bt}, & t \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

4. Voolujooned

$$\begin{cases} v_1 = 0, \\ v_2 = A[x_1 x_2 - (x_3)^2], \\ v_3 = A[(x_2)^2 - x_1 x_3], \end{cases} \quad \text{kui } t = 0. \tag{9}$$

Voolujoonte diferentsiaalvõrrandist

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \text{st., } \mathbf{v} = \varkappa d\mathbf{p} \tag{10}$$

Saame eksaktse ehk täisdiferentsiaaliga diferentsiaalvõrrandi

$$\underbrace{\left[(x_2)^2 - x_1 x_3\right]}_{M(x_2,x_3)} dx_2 + \underbrace{\left[-x_1 x_2 + (x_3)^2\right]}_{N(x_2,x_3)} dx_3 = 0. \tag{11}$$

Sellist tüüpi võrrandi korral leidub potentsiaal $F(x_2, x_3)$ nii, et

$$\frac{\partial F(x_2, x_3)}{\partial x_2} = M(x_2, x_3) \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial F(x_2, x_3)}{\partial x_3} = N(x_2, x_3). \tag{12}$$

Eksaktse diferentsiaalvõrrandi tunnuseks on

$$\frac{\partial M(x_2, x_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial N(x_2, x_3)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3}. \tag{13}$$

Võrrandi (11) üldlahend avaldub kujul[1]

$$F(x_2, x_3) = \int_{x_2^0}^{x_2} M(x_2, x_3)dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} N(x_2^0, x_3)dx_3 = C^*, \qquad (14)$$

kus x_1 on käsitletav parameetrina ja x_2^0 ja x_3^0 on suvaline punkt tasandil $x_1 = const$ ($x_2 - x_3$ tasandil). Seega võime valida $x_2^0 = x_3^0 = 0$, mille korra saame otsitava üldlahendi kujul

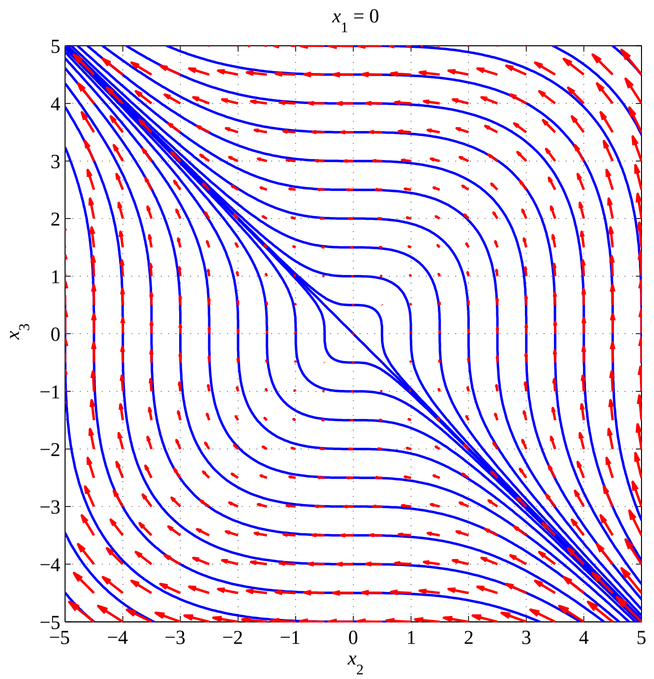
$$\underbrace{(x_2)^3 + (x_3)^3 - 3x_1x_2x_3}_{F(x_2,x_3)} = C. \qquad (15)$$

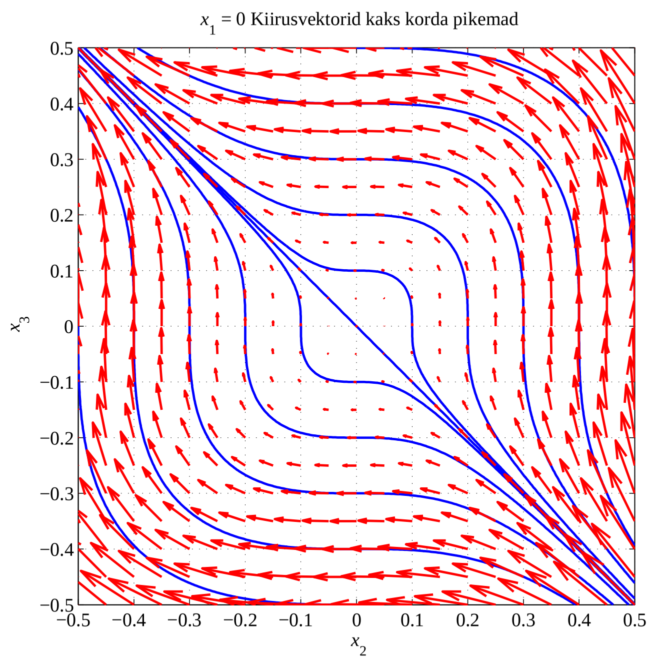
Võrrandi (11) v.p. on $F(x_2, x_3)$ täisdiferentsiaal. Lahendi (15) graafikud ongi otsitavaid voolujooni esitavad integraalkõverad. Kui $C = 0$ ja $x_1 > 0$, siis nimetatakse vaadeldavat kõverat Descartes'i leheks.

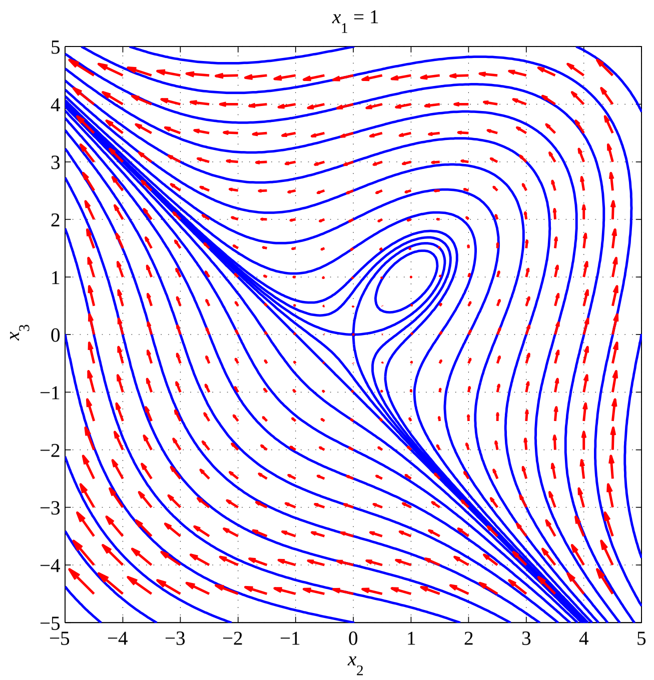
Järgnevatel joonistel on kujutatud kiiruste väli ning voolujooned $x_1^0 = 0$, $x_1^0 = 1$ ja $x_1^0 = 3$ jaoks. Konstandid $C = (x_2^0)^3 + (x_3^0)^3 - 3x_1^0x_2^0x_3^0$ on leitud EK x_1, x_2, x_3 fikseeritud väärtuste x_1^0, x_2^0, x_3^0 jaoks. Teisisõnu, fikseerides

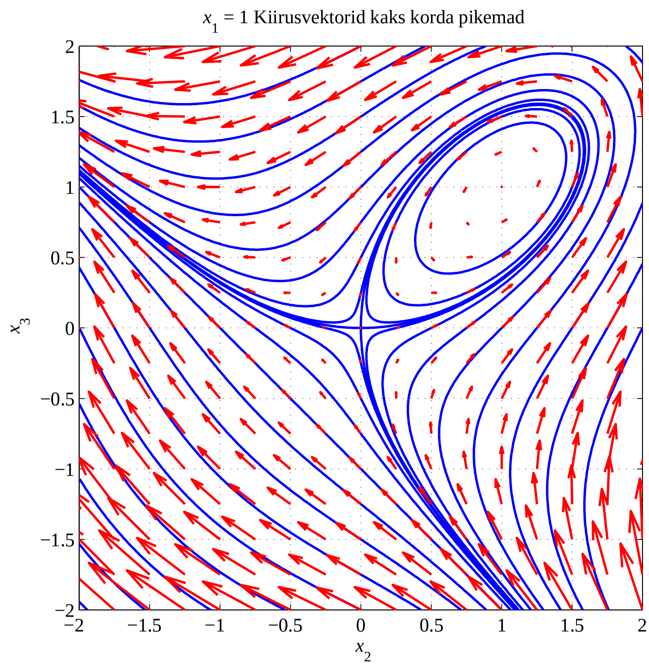
[1] See pole ainuke meetod üldlahendi leidmiseks. Otsi näiteks internetist "exact differential equation". Ettevaatust, Wikipedias on seda võrrandit suhteliselt segaselt käsitletud!

x_1^0, x_2^0 ja x_3^0 väärtused saame konstandile C sellise väärtuse, mille korral integraalkõver (15) läbib punkti (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

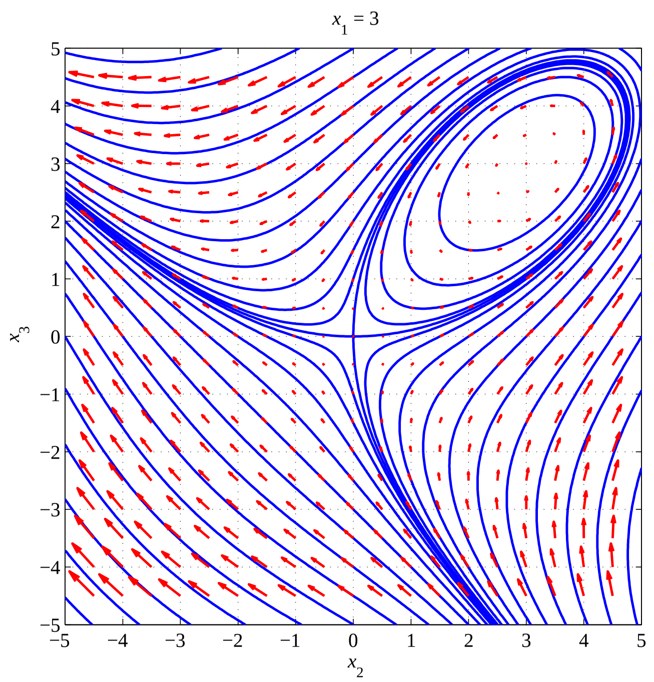


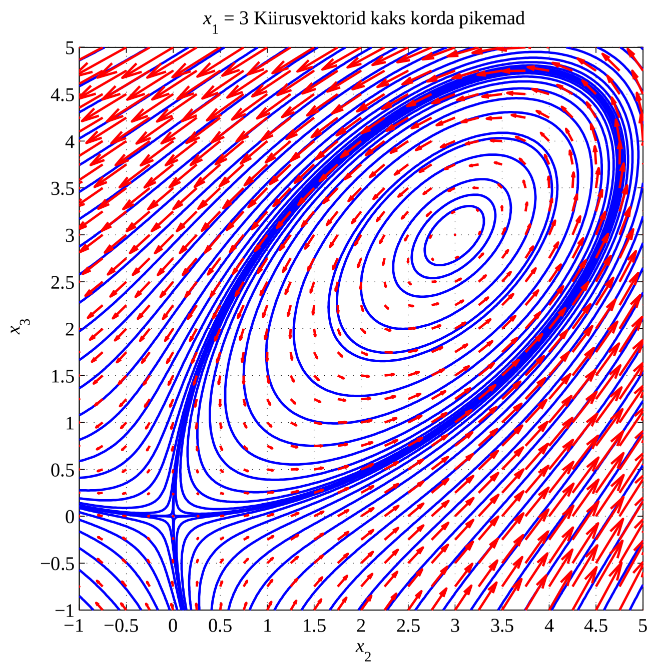






Punkti (0,0) läbivat kõverat nimetatakse Descartes'i leheks.





Punkti (0,0) läbivat kõverat nimetatakse Descartes'i leheks.