

Näide L2 Kiiruste väli on EDRK-s antud kujul

$$\begin{cases} v^1 = 0, \\ v^2 = A[z^1 z^2 - (z^3)^2] e^{-Bt}, \\ v^3 = A[(z^2)^2 - z^1 z^3] e^{-Bt}, \end{cases} \quad (1)$$

kus A ja B on konstandid. Euleri koordinaadid $x^k \equiv z^k$.

Leida:

1. deformatsioonikiiruse ja keeriselisuse tensorid d_{kl} ja w_{kl} ;
2. keerisvektor w^k ruumipunktis $\mathbf{p} = (1, 0, 3)$ hetkel $t = 0$;
3. pikenemise kiirus $d_{(\mathbf{n})}$ samas punktis ja samal hetkel suunas $\mathbf{n} = 3/5\mathbf{i}_1 - 4/5\mathbf{i}_2$;
4. voolujooned hetkel $t = 0$.

Lahendus

1. Deformatsioonikiiruse tensor $d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k;l} + v_{l;k})$ ja keeriselisuse tensor $w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k;l} - v_{l;k})$

$$[v_{k;l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z^2 & z^1 & -2z^3 \\ -z^3 & 2z^2 & -z^1 \end{bmatrix} A e^{-Bt}, \quad (2)$$

$$[d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & z^2 & -z^3 \\ z^2 & 2z^1 & 2(z^2 - z^3) \\ -z^3 & 2(z^2 - z^3) & -2z^1 \end{bmatrix} \frac{A}{2} e^{-Bt}, \quad (3)$$

$$[w_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & -z^2 & z^3 \\ z^2 & 0 & -2(z^2 + z^3) \\ -z^3 & 2(z^2 + z^3) & 0 \end{bmatrix} \frac{A}{2} e^{-Bt}, \quad (4)$$

2. Keerisvektor $w^k = \epsilon^{klm} w_{ml}$

$$[w_{kl}] = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kui } t = 0 \text{ ja } \mathbf{p} = (1, 0, 3). \quad (5)$$

$$\mathbf{w} = (6A, 3A, 0). \quad (6)$$

3. Pikenemise kiirus $d_{(\mathbf{n})} = \frac{1}{ds} \frac{Dds}{Dt} = d_{kl} n^k n^l$.

$$[d_{kl}] = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{kui } t = 0 \text{ ja } \mathbf{p} = (1, 0, 3). \quad (7)$$

$$d_{(\mathbf{n})} = \begin{cases} \frac{16A}{25}, & t = 0 \\ \frac{16A}{25} e^{-Bt}, & t \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$

4. Voolujooned

$$\begin{cases} v^1 = 0, \\ v^2 = A[z^1 z^2 - (z^3)^2], \\ v^3 = A[(z^2)^2 - z^1 z^3], \end{cases} \quad \text{kui } t = 0. \quad (9)$$

Voolujoonte diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{dz^1}{v^1} = \frac{dz^2}{v^2} = \frac{dz^3}{v^3} = \frac{1}{\mathcal{A}}, \quad \text{st., } \mathbf{v} = \mathcal{A} d\mathbf{p} \quad (10)$$

Saame eksaktse ehk täisdiferentsiaaliga diferentsiaalvõrrandi

$$\underbrace{[(z^2)^2 - z^1 z^3]}_M dz^2 + \underbrace{[-z^1 z^2 + (z^3)^2]}_N dz^3 = 0. \quad (11)$$

Viimase üldlahend avaldub kujul

$$\int_{z_0^2}^{z^2} M(z^2, z^3) dz^2 + \int_{z_0^3}^{z^3} N(z_0^2, z^3) dz^3 = C, \quad (12)$$

kust $z_0^2 = z_0^3 = 0$ puhul saame

$$\underbrace{(z^2)^3 + (z^3)^3 - 3z^1 z^2 z^3 + C}_g = 0. \quad (13)$$

Võrrandi (11) v.p. on g täisdiferentsiaal.

Kui $C = 0$ ja $z^1 > 0$, siis nimetatakse vaadeldavat kõverat Descartes'i leheks.

Järgnevatel joonistel on kujutatud kiiruste väli ning voolujooned $z^1 = 0$, $z^1 = 1$ ja $z^1 = 3$ jaoks.

