Näide P1. Piola-Kirchoffi pingetensorid

Pideva keskkonna deformatsiooni kirjeldab siirdeväli

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = X_3 + AX_2. \end{cases}$$

Cauchy pingetensor ruumipunktis $(1, 1, 1)$ on

$$\left[t_{kl}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Leida sellele vastavad pingetensorite T_{Kl} ja T_{KL}, st. esimese ja teise Piola-Kirchoffi pingetensori, maatriksid. Milline materiaalne punkt on vaadeldaval hetkel, st. peale deformatsiooni, ruumipunktis $(1, 1, 1)$?

Lahenduskäik ja vastused.

Kuna $T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl}$ ja $T_{KL} = T_{Kl}X_{L,l}$, siis on kõigepealt vaja leida pöördteisendus $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, jakobiaan $j = \det(x_{k,K})$ ja deformatsioonigradiendid $x_{k,K}$ ja $X_{K,k}$.

1) Pöördteisendus

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = \dfrac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2}, \\ X_3 = \dfrac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2} \end{cases}$$

2) Deformatsioonigradiendid

$$\left[X_{K,k}\right] = \frac{1}{1 - A^2} \begin{bmatrix} 1 - A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A \\ 0 & -A & 1 \end{bmatrix}; \qquad \left[x_{k,K}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}$$

3) Jakobiaan $j = 1 - A^2$

4) Esimene Piola-Kirchoffi pingetensor $T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl}$

$$[T_{Kl}] = \begin{bmatrix} 2(1-A^2) & 3(1-A^2) & 0 \\ 3 & -1-A & 1-4A \\ -3A & 1+A & 4-A \end{bmatrix}$$

5) Teine Piola-Kirchoffi pingetensor $T_{KL} = T_{Kl}X_{L,l}$

$$[T_{KL}] = \frac{1}{1-A^2}\begin{bmatrix} 2(1-A^2)^2 & 3(1-A^2) & -3A(1-A^2) \\ 3(1-A^2) & -1-2A+4A^2 & 1-3A+A^2 \\ -3A(1-A^2) & 1-3A+A^2 & 4-2A-A^2 \end{bmatrix}$$

6) Materiaalne punkt $(1, 1/(1+A), 1/(1+A))$ asub vaadeldaval hetkel ruumipunktis $(1, 1, 1)$.