

# Peatükk 1

## 2. osa

# Ülevaade elastsusteooria aluste kursusest

## Peatükk 2

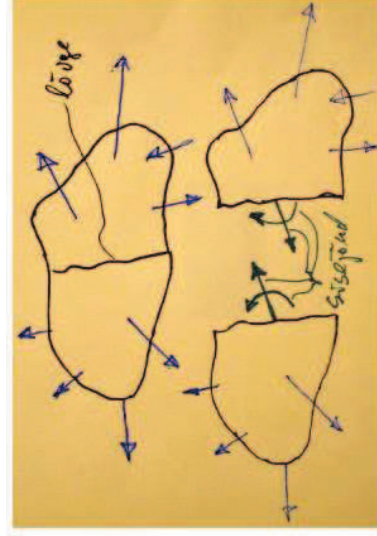
### Sisejõud ja pinged

- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või kesk-konna) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.
- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

Välisjõud jagunevad pind- ja ruumjõududeks.

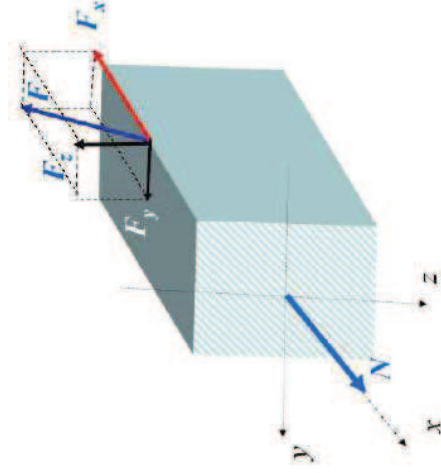
- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punktmassile. Näiteks gravitatsioonijõud.

## 2.2 Sisejõud ja lõikemeetod



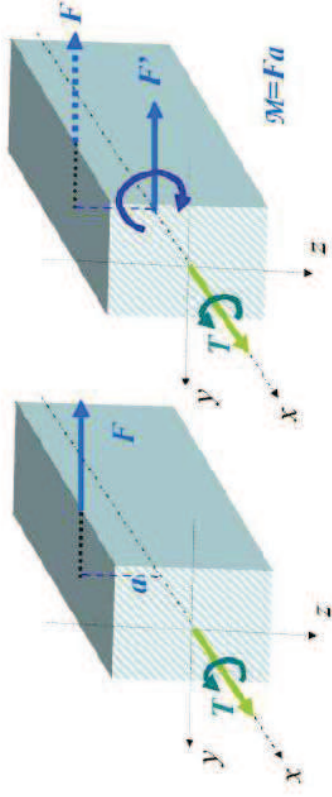
Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

## 2.3 Sisejõudude liigid



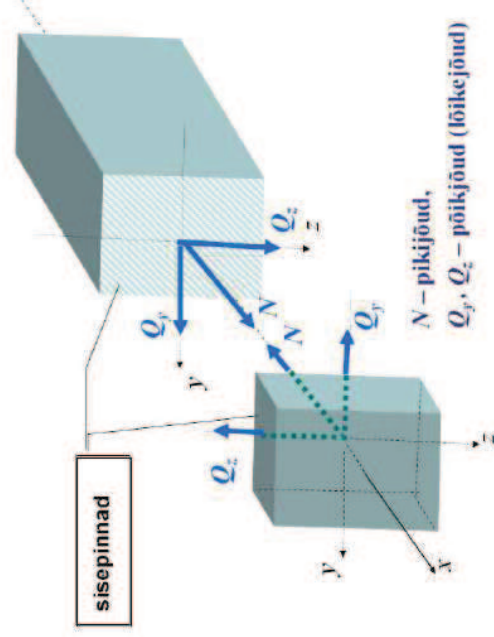
Joonis 2.2: Pürijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

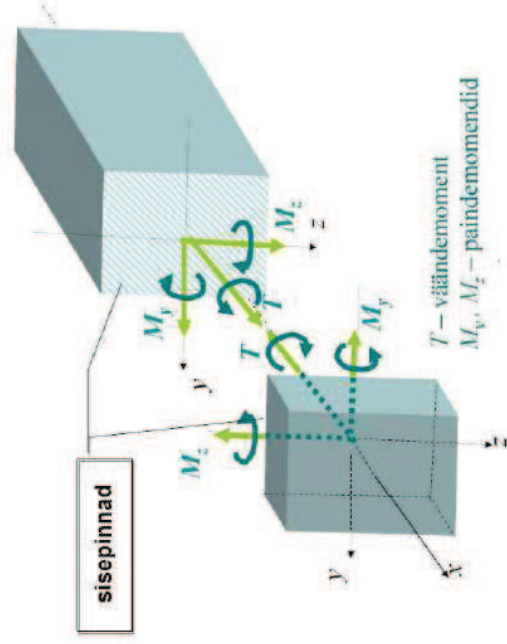


Taandades välisjõu  $F$  varda  $x$ -teljele saame välisjõu  $F'$  ja pöördemomendi  $\mathcal{M}$ .

Joonis 2.3: Väändemoment  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — piki- ja põikjõud 3D juhul.  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

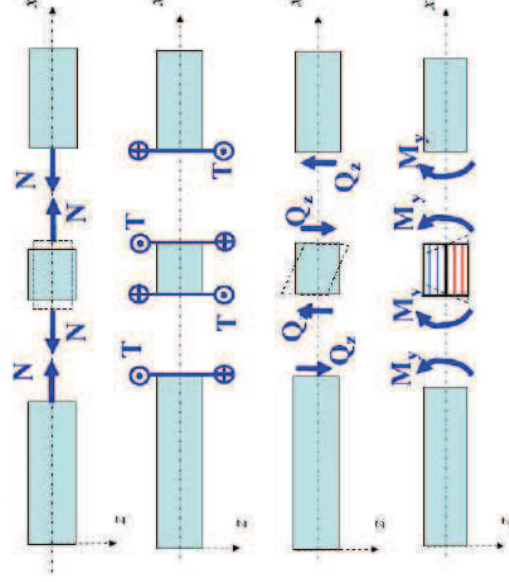


Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemomendid 3D juhul. NB!  $M_z$  on siin negatiivne, teised positiivsed.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

## 2.4 Sisejõudude märgireeglid

**Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).**



Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
  - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.
- *Väändmomenti positiivne suund* on määratud kruvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjub väändemoment on positiivne kui väändemomendi suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
- *Positiivne põikjõud*  $Q_z$  mõjub positiivsel sisepinnal  $z$ -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal  $z$ -telje negatiivses suunas.
  - Analoogiline märgireegel kehtib ka põikjõu  $Q_y$  jaoks.
  - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne põikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
- *Positiivne paindemoment* tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
  - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

**Märkus:** Piki- ja põikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändemomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

## 2.5 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga  $dx$  läbijagamist, ning viimastest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalset:

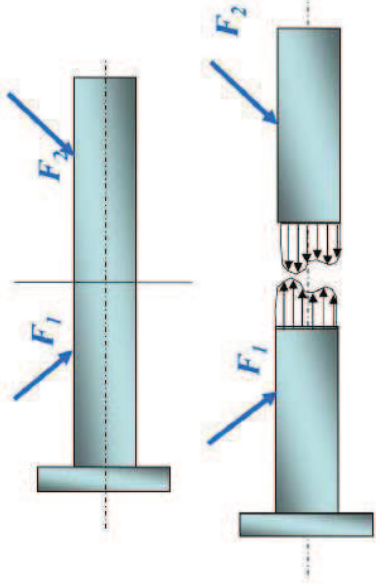
$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga  $dx$  ning integreerime lõigul  $[a, x]$ :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2.6 Pinge mõiste

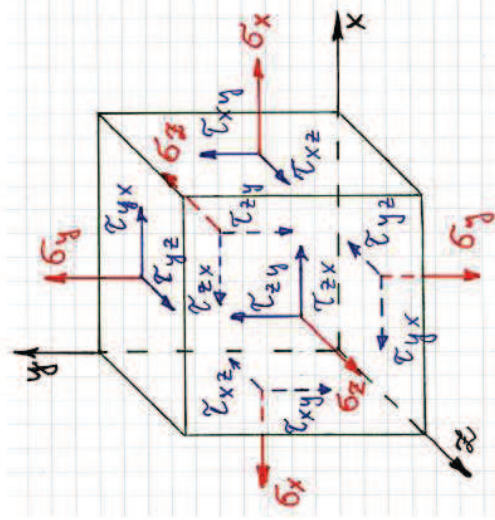
On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemeetodi korral on si-sejõud tegelikult jaotunud üle kogu loikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud kuus sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi pro- jektsioone koordinaattelgedel.



Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

## 2.7 Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

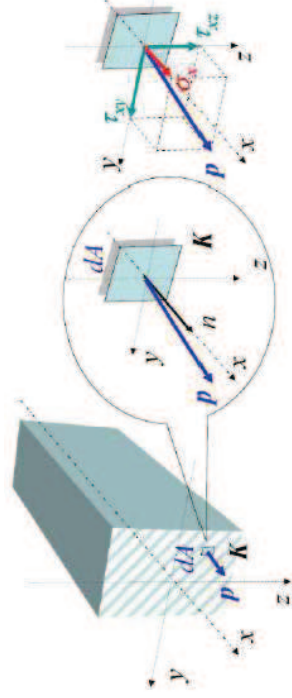


Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

Märgireeglid: joonis 2.14.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

## 2.8 Pinged varda ristlõike punktis.



Joonis 2.15: Pinge varda punktis  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

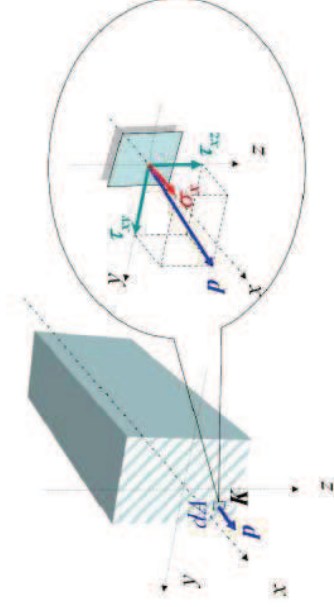
## 2.9 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.5)$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.6)$$

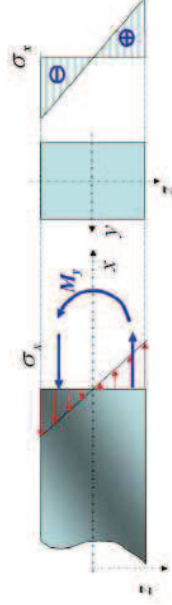
$$M_y = \int_A z \sigma_x dA \quad \text{ja} \quad M_z = \int_A y \sigma_x dA. \quad (2.7)$$

$$T = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA. \quad (2.8)$$



$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}, \quad (2.12)$$

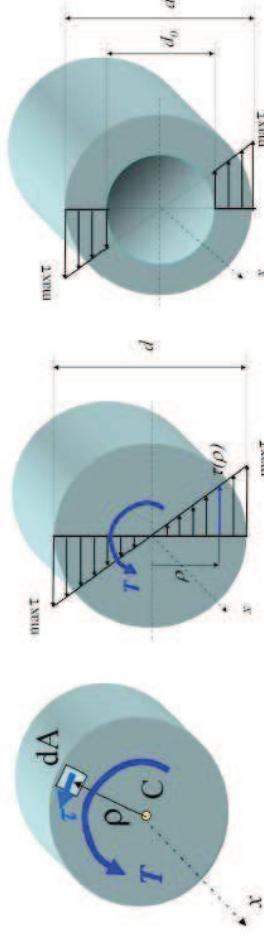


### Väände- ja lõikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändemomendist ja lõikepinge pöikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomendist põhjustatud normaalingete leidmine, siis pühendame neile omaette jaotise.

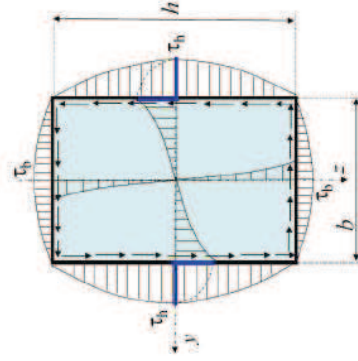
## 2.10 Nihkepinged varda ristlõikes

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_p 2}. \quad (2.20)$$



Joonis 2.24: Väändepinged ümarvargas ja paksuseinälises torus.

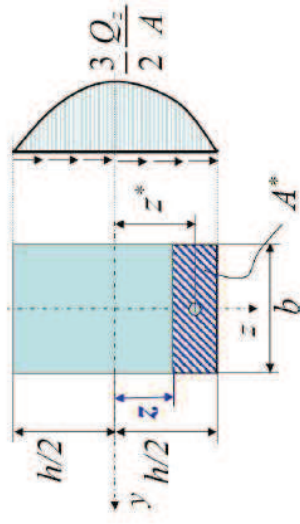
$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.24)$$



$h/b$	1	1,2	1,5	2	3	5	10	$\infty$
$k_h$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
$k_b$	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

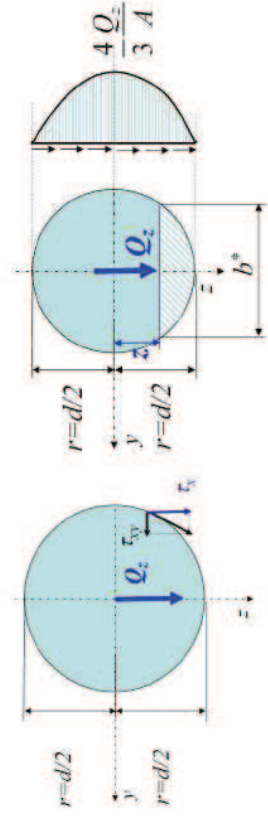
Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vargas.





Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

$$\tau_{xz} = \frac{3 Q_z}{2 A} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3 Q_z}{2 A}. \quad (2.37)$$



Joonis 2.38: Lõikepinged ümaristlõikes

$$\tau_{xz} = \frac{4 Q_z}{3 A} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4 Q_z}{3 A}. \quad (2.38)$$

## 2.11 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja kuus nihkepinget  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada  $3 \times 3$  (tasandiülesannete korral  $2 \times 2$ ) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal<sup>15</sup>.

*Teist järku tensor* on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

### 2.11.2 Pingetensori invariantid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{cases}, \quad (2.40)$$

Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

# Peatükk 3

## Deformatsioon ja olekuvõrrandid

### 3.1 Siire ja deformatsioon

#### 3.1.1 Cauchy seosed

Eristame kahte liiki siirdeid:

- keha kui terviku siirdeid (toimuvad ilma deformatsioonideta) — selliste siirdega tegeleb jäiga keha mehaanika<sup>2</sup>;
- siirdeid, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse just selliseid siirdeid.

Siirdevektori koordinaattelgedele  $x, y, z$  sihilisi komponente tähistatakse  $u, v, w$ , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

Märgireglid:

- piknemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgedele positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

**Järeldus:** Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

### 3.2 Deformatsioonitensor

Normaal- ja nihkedeformatsioonidest (ehk nihetest) saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensorarvutuste reeglitele. Analoogiliselt pingetensoriga saab leida ka deformatsioonitensori invariantid:

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2^\varepsilon = \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{array} \right|, \\ I_3^\varepsilon = \left| \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{array} \right|. \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.16)$$

### 3.4 Pidevustingimused

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

### 3.5 Üldistatud Hooke'i seadus

- Võrrandeid, mis seovad omavahel deformatsioonid ja pinged, nimetatakse olekuvõrranditeks.

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad üldistatud Hooke'i seadust isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Tuues sisse *Lamé koeffitsiendid*<sup>9</sup>

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.31)$$

### 3.6 Deformatsiooni potentsiaalne energia

Potentsiaalse energia tihedus

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.44)$$

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.31) saame *Clapeyroni valemi*

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \quad (3.45)$$

Viimasest saab omakorda avaldada  $W$  läbi pingete ja elastsuskonstantide  $E$  ja  $\nu$  kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.23)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.46)$$

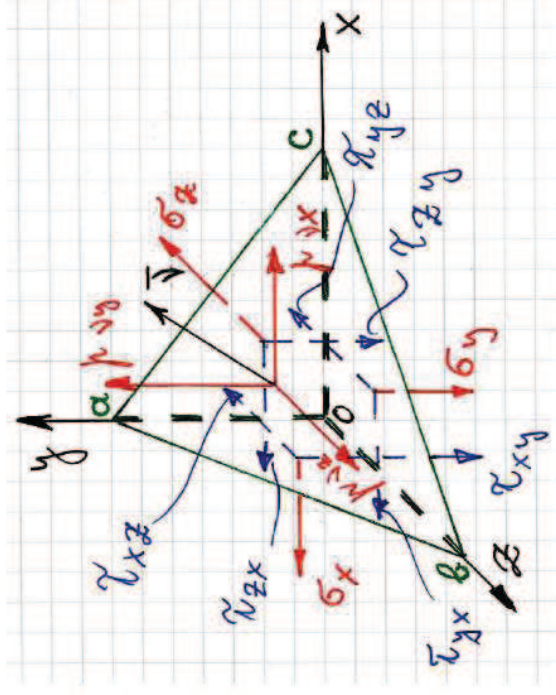
Rakendes Clapeyroni valemit avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.50)$$

# Peatükk 4

## Peapinged ja peadeformatsioonid

### 4.1 Pinged kaldpinnal



Joonis 4.1: Pinged kaldpinnal. Kaldpinnal normaalgiga  $\nu$  mõjuv pingevektor  $p_\nu$  on esitatud läbi tema projektsioonide  $p_{\nu x}$ ,  $p_{\nu y}$  ja  $p_{\nu z}$ .

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (4.5)$$

### 4.2 Peapinged

$$\sigma_\nu = p_\nu \cdot \nu = p_{\nu x} l + p_{\nu y} m + p_{\nu z} n, \quad (4.7)$$

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (4.8)$$

On selge, et nii  $p_\nu$ , kui  $\sigma_\nu$  ja  $\tau_\nu$  sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge  $\tau_\nu = 0$  ja normaalpinge  $\sigma_\nu = p_\nu$ . Selliseid pindasid nimetatakse *peapingadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks*.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

**Pinguste liigid.** Sõltuvalt sellest, mitu peapinget on nullist erinevad, eristatakse kolme pinguse liiki:

- *ruumpingus* – kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* – üks peapinge on null, kaks nullist erinevad;
- *joonpingus* – kaks peapinget on nullid, üks nullist erinev.

Kasutades peapingeid saame pinge invariantid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (4.14)$$

- Kuna invariantid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

### 4.3 Peadeformatsioonid

Peasuundi ja peaväärtusi saab leida mistahes teist järku tensoritele. Kuna deformatsioonitensor ja pingetensor on sümmeetrilised tensorid, siis on peadeformatsioonide leidmise protseduur analoogiline peapingete omaga. Antud juhul saame seega deformatsioonitensorile

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

anda kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

misjärel deformatsioonitensori invariantid

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad I_2^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3, \quad I_3^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (4.22)$$

## Peatükk 5

### Elastusteooria põhivõrrandid, nende lahendusmeetodid ja lihtsamad ruumilised ülesanded

#### 5.1 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui mahujõudude projektsioonid sisaldavad inertsjõudusid, saab viimaste abil lahendada ka dünaamika ülesandeid.

#### 5.2 Elastusteooria põhivõrrandid

1. *Tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid (5.5) (3 võrrandit):*
2. *Cauchy seosed (3.6) (6 võrrandit):*
3. *Üldistatud Hooke'i seadus (6 võrrandit) nn. otsesel kujul (3.23):*

Võrrandeid kokku 15.

Tundmatud kokku 15: 6 pingetensori komponenti + 6 deformatsioonitensori komponenti + 3 siirdevektori komponenti.

*Rajatingimused ehk ääretingimused ehk servatingimused*

*Pidevustingimused*. Kui põhimuutujateks on valitud deformatsioonid või pinged, siis on tarvis arvestada ka pidevustingimusi (3.19):



### 5.3 Elastusteooria ülesannete lahendusmeetodid

Elastusteooria põhivõrrandeid võib lahendada mitmel erineval moel, sõltuvalt sellest millised suurused on valitud põhimuutujateks.

1. *Lahendamine siiretes* — tundmatuteks on valitud siirdevektori komponendid  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$ .
2. *Lahendamine pingetes* — tundmatuteks on valitud pingetensori komponendid  $\sigma_x(x, y, z), \dots, \tau_{xy}(x, y, z), \dots$
3. *Lahendamine deformatsioonides* — tundmatuteks on valitud deformatsioonitensori komponendid  $\varepsilon_x(x, y, z), \dots, \gamma_{xy}(x, y, z), \dots$
4. *Nn. segalahendi leidmine* — eelmise kolme kombinatsioonid.

#### 5.3.1 Elastusteooria ülesannete lahendamine siiretes

Otsitavad: siirdekomponeendid  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$ .

- 5.3.2 Elastusteooria ülesande lahendamine pingetes konstantsete mahujõudude korral

Otsitavad: 6 pingetensori komponenti.

### 5.4 Lihtsamad ruumilised ülesanded

Käesolevas alajaotuses vaatleme mõningate lihtsamate elastusteooria ülesannete lahendamist pingetes.

- Vaadeldavate ülesannete lihtsus seisneb eeskätt selles, et pingekomponendid on konstantsed või lineaarfunktsioonid koordinaatidest  $(x, y, z)$ .
- Vaatleme elementaarteooriast, st. tugevusõpetusest (tehmilisest mehaanikast), tuntud lahendeid ja näitame, et nad rahuldavad elastusteooria tasakaaluvõrrandeid (5.9) ja rajatingimusi (5.13).

- 5.4.1 Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne

- 5.4.2 Prismaatiliste varraste puhas paine

- 5.4.3 Plaadi puhas paine

- 5.4.5 Varda tõmme omakaalu mõjul

# Peatükk 6

## Elastusteooria tasandülesanne

### 6.1 Tasandülesande mõiste

Elastusteooria ülesannet nimetatakse *tasandülesandeks* (ehk tasapinnaliseks ülesandeks) kui deformatsioon või pinge on kogu keha ulatuses tasapinnaline.

### 6.2 Tasanddeformatsioon

Vaadeldaval juhul on kõigis keha punktides deformatsioon tasapinnaline, st. üks peadeformatsioonidest on null. *Tasanddeformatsioon saab tekkida kui siirded*

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (6.1)$$

Selline deformatsiooniseisund tekib pikas kehas, millele mõjub keha pinnaga ( $z$ -teljega) ristuv koormus.

*Näiteks:* pikk tugisein; (metroo)tunnel; pikk radiaalselt surutud võll; pika plaadi silindriline paine (NB! Saint Venant'i printsiip).

### 6.3 Tasandpingus

Vaatleme ohukorda, kus kõigis keha punktides üks peapingetest on null. Sellisel juhul saame valida Descartes'i ristkoordinaadid nii, et

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (6.7)$$

Selline pingus tekib näiteks õhukeses plaadis, millele mõjub servades rakendatud koormus, mis on risti  $z$ -teljega.

### 6.4 Tasandülesande lahendamine pingetes

Väga sageli lahendatakse elastusteooria ülesanded pingetes, sest sellel meetodil on võrreldes siiretes lahendamisega mõned eelised:

- sageli ongi ülesande lahendina vaja leida vaid pingeid, siirded on teisejärgulise tähtsusega ning neid polegi vaja leida;
- üldjuhul on siirete avaldised võrreldes pingete avaldisega tunduvalt keerukamad.

*Tundmatud:* pingetensori komponendid  $\sigma_x, \sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$ .

Tasandiülesande lahendamise pingetes lihtsustub oluliselt kui tuua sisse *Airy* pingefunktsioon  $\varphi(x, y)$ , mis on seotud pingekomponentidega järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx, \quad (6.15)$$

kus  $X$  ja  $Y$  on konstantsed mahujõud. Alternatiivne võimalus siduda pingekomponendid ja pingefunktsioon:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (6.16)$$

Nii (6.15) kui (6.16) korral on tasakaaluvõrrandid (6.4) automaatselt rahuldatud. Pannes selliselt defineeritud pingekomponendid pidevustingimusse (6.14) saame *biharmoonilise võrrandi*

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0. \quad (6.17)$$

Lahti kirjutatult saab viimane kuju

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (6.18)$$

Funktsiooni, mis rahuldab biharmoonilist võrrandit (6.17) või (6.18) nimetatakse *biharmooniliseks funktsiooniks*.

Tegelikult on pingefunktsiooni leidmine mitmel juhul suhteliselt lihtne. Vastavad meetodid võib nimetada *poolvastupidiseks meetodiks*. Selle põhjal antakse pingefunktsioon ette kas poliinoomina või trigonomeetrilise reana, mis sisaldavad määramata konstante. Viimased määratakse ülesande lahendamise käigus ääritingimuste ja biharmoonilise võrrandi abil.

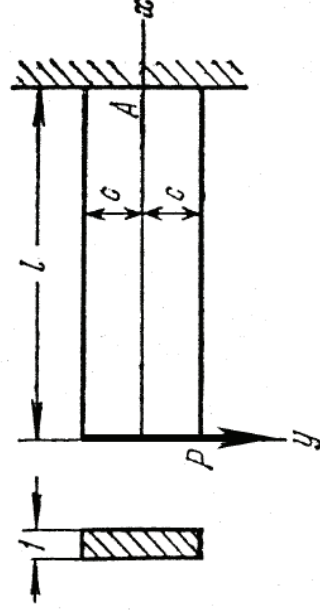
## 6.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Kui väljendada Airy funktsioon polünoomina

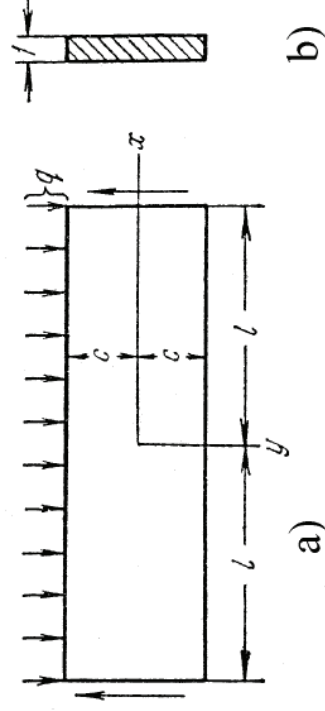
$$\varphi = \left( \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2 \right) + \left( \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3 \right) + \left( \frac{a_4}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2}xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3}y^4 \right) + \dots \quad (6.19)$$

saab konstrueerida terve rea tasandülesande lahendusi. Vaadeldav lähenemisviis on rakendatav kui uuritakse ristkülikulisi plaate või talasid. Mahujõud, k.a. keha kaal, hülgame. Käesolevas alajaotuses vaatleme talasid, mille pikkus on  $l$ , kõrgus  $2c$  ja laius 1. Tala teljeks on  $x$ -telg ja  $y$  telg on suunatud alla. Kuna lineaarses elastsusteoorias kehtib superpositsiooni printsiip, siis vaatleme algul polünoome kuni 5. astmeni eraldi. Järgmises alajaotuses konstrueerime saadud tulemuste abil erinevaid lahendeid.

## 6.6 Konsooli paine

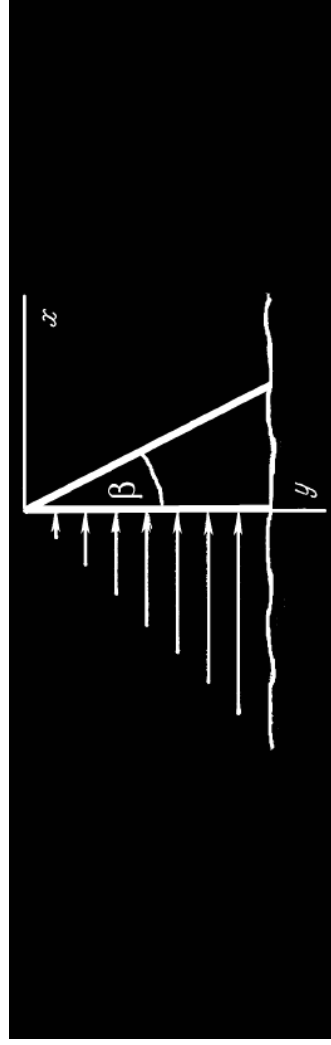


## 6.7 Ühtlaselt koormatud tala paine

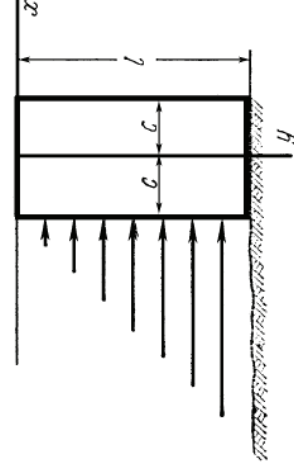


b)

### 6.8 Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

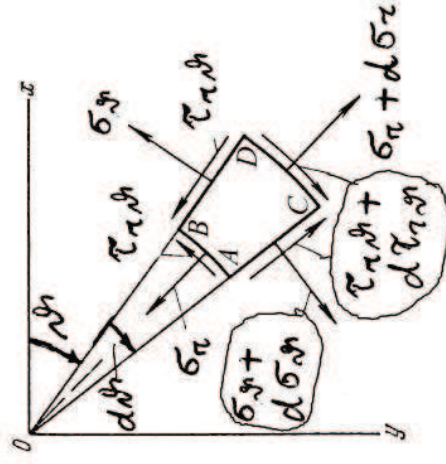


### 6.9 Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool



### 6.10 Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides

#### 6.10.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 6.26: Väikese elemendi  $ABCD$  tasakaal.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0. \end{cases} \quad (6.91)$$

Siin tähistavad  $f_r$  ja  $f_\theta$  mahujõudude projektsioone radiaal ja tangentsiaal suunale ( $r$  ja  $\theta$  kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni  $\varphi = \varphi(\theta, r)$ , nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, & \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{cases} \quad (6.92)$$

Niiud Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (6.93)$$

ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (6.94)$$

Kui pingekomponendid ja seega ka  $\varphi$  sõltuvad vaid koordinaadist  $r$ , siis saab võrrandi (6.94) üldlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (6.95)$$

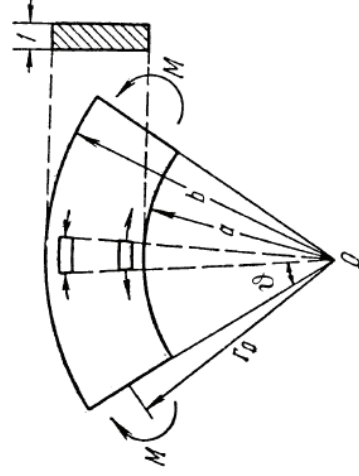
### 6.10.2 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{cases} \quad (6.96)$$

Siin mõistetakse suurusi  $u$  ja  $v$  kui radiaalset ja tangentsiaalset siirdekompontenti. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}. \quad (6.97)$$

## 6.11 Kõvera tala paine

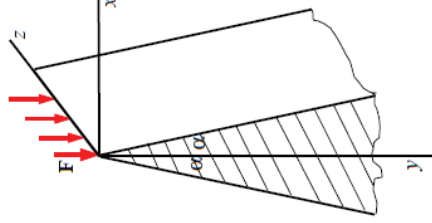


## 6.12 Pöörlev ketas

## 6.13 Radiaalne pingus.

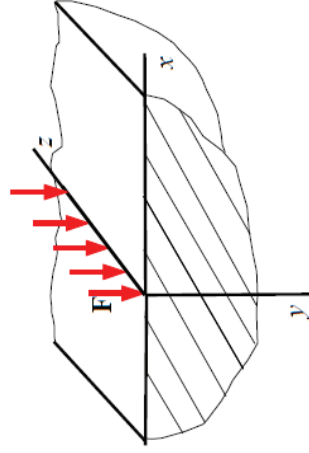
Küllaltki tihti esineb ülesandeid, kus igas keha punktis on nullist erinev vaid radiaalne pinge  $\sigma_r$ . Sellist pingust nimetatakse *radiaalseks pinguseks*.

## 6.14 Kiilu surve.

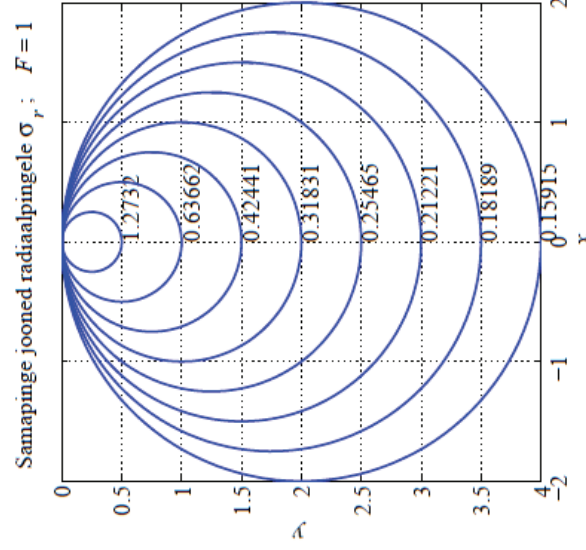


Joonis 6.29: Sümmetriline kiil ja tema sümmetriatasandis mõjuv jõud.

## 6.15 Koondatud jõu mõju poolruumile



Joonis 6.31: Elastsele poolruumile mõjuv koondatud jõud.



Sellise graafilise radiaalpingte esituse andis esmakordselt Joseph Boussinesq ning seetõttu nimetatakse neid ringe *Boussinesqi ringideks*.

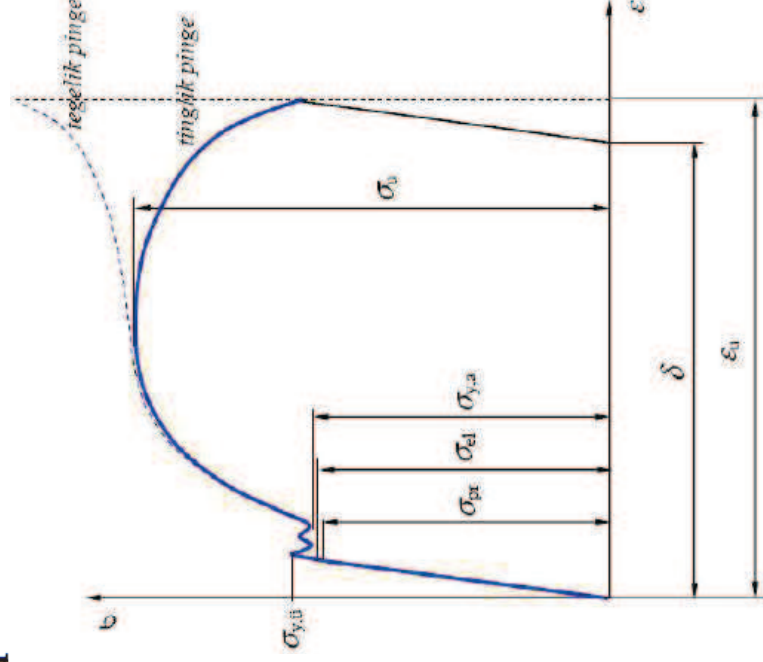
## Peatükk 7

### Materjalide omadused

Standardtingimustel sooritatud katset nimetatakse teimiks.

#### 7.1 Terase tõmbekatse

#### 7.2 Hallmalmi tõmbekatse



#### 7.3 Haprus, sitkus, plastsus, tugevus

Vastavalt käitumisele enne purunemist, saab välja tuua mitmeid erinevaid materjali omadusi, vt. joonist 7.7, kus on esitatud erineva süsinikusaldusega raua-sulamite tõmbediagrammid.

- Haprad<sup>2</sup> materjalid
  - Haprus — materjali omadus puruneda juba tühise deformatsiooni korral.
- Plastsed<sup>3</sup> materjalid
  - Plastsus — materjali omadus omandada olulisi jääkdeformatsioone.
  - Plastsuse määra on tähtis teada näiteks valtsimisel, sepiistamisel<sup>4</sup>, traadi tõmbamisel jne.
  - Mida plastsem on materjal, seda suurem on tema katkevenivus.
  - Katekehennemine

<sup>2</sup>I. k. *Brittle, brittleness*

<sup>3</sup>I. k. *Ductile, ductility*

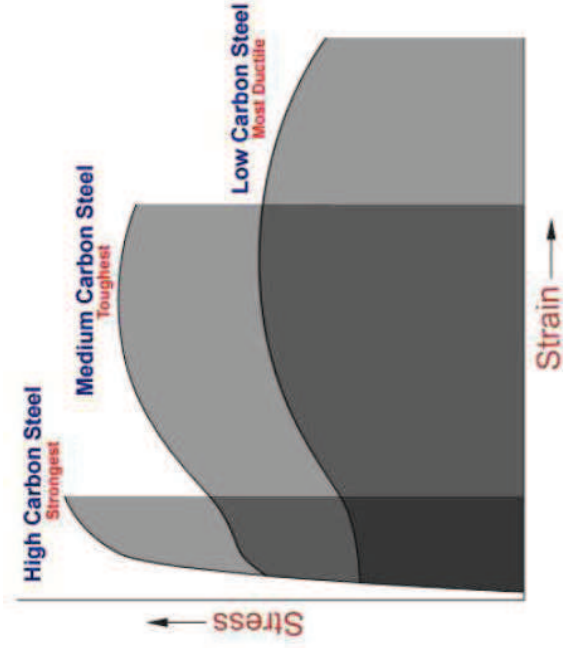
<sup>4</sup>*Ductility* üks võimalikest tõlgetest on sepiistatavus



- Sitked<sup>5</sup> materjalid
  - Sitkus — materjali omadus enne purunemist oluliselt deformeeruda.
  - Mida sitkem materjal, seda rohkem tööd tuleb teha tema purustamiseks.
    - \* Mida sitkem materjal, seda suurem on tema tõmbediagrammi aluse pinna pindala.
  - Sitke materjal ei pruugi olla eriti plastne — ta võib olla ka kõrgelastne, näiteks kummi.
- Tugevus — materjali tugevust iseloomustab tema tõmbetugevus.
- Toodud klassifikatsioon pole üksteisest välistav, näiteks on joonisel 7.7 kõige tugevam materjal samal ajal ka kõige hapram.
- Plastset sitket materjalil pole alati võimalik eristada selget voolavuspiiri — tinglik voolavuspiir.

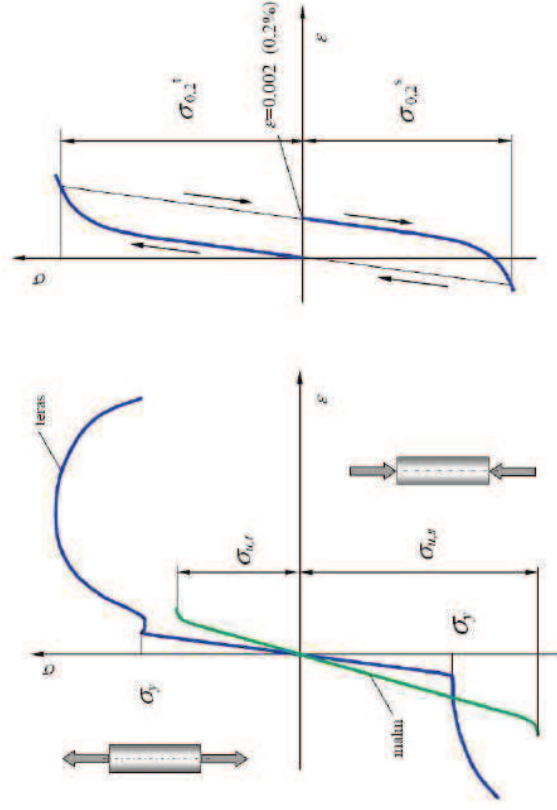
---

<sup>5</sup>I. k. *Tough, toughness*



Joonis 7.7: Erineva süsinikusaldusega rauasulamite tõmbediagrammid

## 7.4 Survekatsed

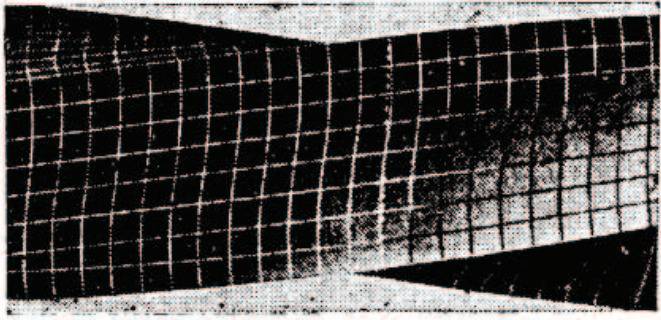


Joonis 7.8: Tõmbe- ja survediaagrammide võrdlus (vasakul) ja Bauschingeri efekt (paremal)

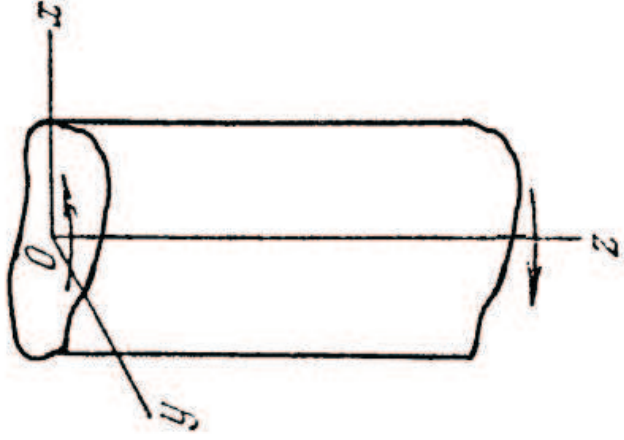
## Peatükk 8

### Sirgete varraste vääne

Ümarvarraste väändeülesande lahendamisel tehtud hüpotees, et varda ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks ei kehti mitteümarvarraste puhul. Seda näitavad ilmekalt eksperimentide tulemused. Enim kõverduvad algsed sirged külgede keskosas. Korrektse lahenduse vaadeldavale ülesandele andis Saint-Venant (1855).



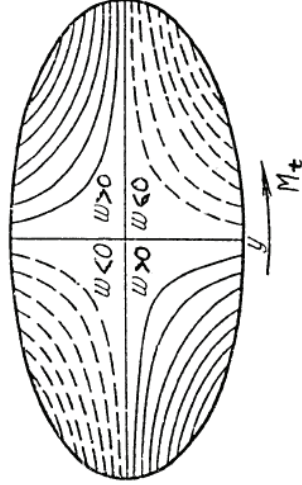
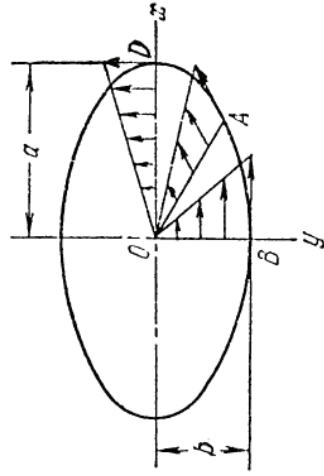
a)



b)

Joonis 8.1: Sirge varda vääne.

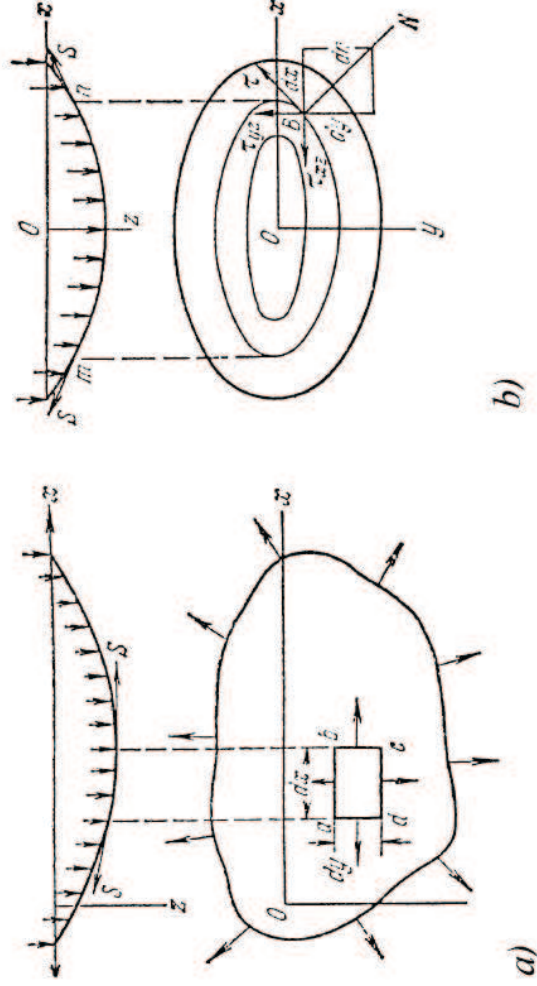
## 8.2 Elliptiline ristlõige



Samasäärdejooned  $w = \text{const}$ .

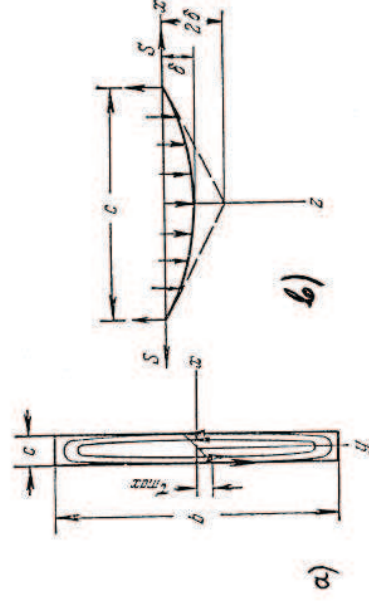
### 8.3 Membraananalooogia

Nihkepinge -- membraani läbipaine

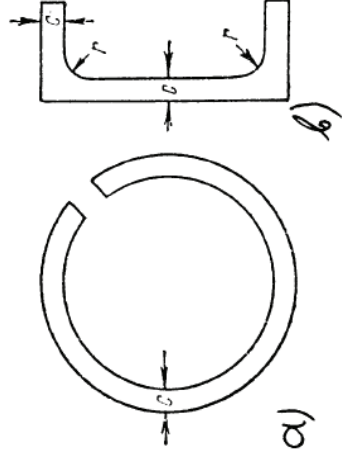


Joonis 8.5: Põikkoormusega koormatud ühtlaselt tõmmatud membraan — a); deformeerunud membraani samaläbipainde jooned — b). **NB!**  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

### 8.4 Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne



Joonis 8.6: Varda ristlõige ja maksimaalsed nihkepinged — a) ja vastava membraanani läbipaine — b).



Joonis 8.7: Õhukeseseinalised avatud ristlõiked.

## 8.5 Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne

## 8.6 Valtsmetallist varraste (talade) vääne

# Peatükk 9

## Kokkuvõtavad märkused

### 9.1 Jäiga keha mehaanika ja elastsusteooria

#### Sarnasused:

- Alamharud: staatika, kinemaatika, dünaamika. Lisaks on mõlemal juhul rakendatavad analüütilise mehaanika meetodid
- Jõud ja jõu moment on vektorid!
- Mõlemad, st. nii jäik keha kui deformeeruv keskkond, koosnevad punktmas-sidest
  - Sageli öeldakse deformeeruva keskkonna korral punktmassi asemel ma-teriaalne punkt
- Punktmasside süsteemile mõjuvad jõud saab jaotada sise- ja välisjõududeks
- Jõustüsteemi peavektor ja peamoment
  - Sisejõud: keha lõikes mõjuvate pingete peavektor ja peamoment
  - Tavaliselt taandatakse pinged lõike pinnakeskmesse

- \* Talade korral on tala ristlõikes mõjuvate sisejõudude projektsioonidel spetsiifilised nimed: pikijõud, põikjõud, väändmoment, paindemoment
- \* Tavaliselt kasutatakse siinjuures Descartes'i ristkoordinaate
- Tasakaalutingimused: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment peavad võrduma nulliga.
- Liikumishulk ja kineetiline moment ning vastavad teoreemid
- Kogu teooria baseerub mõlemal juhul Newtoni seadustel

#### Erinevused:

- Uurimisobjekt: jäik keha *vs.* deformeeruv keskkond
  - Deformeeruv keskkond: deformeeruv tahkis (tahke keha), gaas, vedelik
- Jäiga keha mehaanikas saab jõudu vaadelda kui libisevat vektorit, kuid deformeeruva keskkonna korral ei saa

## 9.2 Lineaarne ja mittelineaarne elastsusteooria

### Lineaarne elastsusteooria

- Lineaarne elastsusteooria = klassikeline elastsusteooria
- Siirete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed — geomeetriline lineaarsus
  - Deformatsioonitensor on defineeritud Cauchy seoste kaudu
  - Deformatsiooni mõõduks on tavaliselt suhteline pikenemine ja algse täismuruga muut ehk nihkenurk
- Siirded on väikesed võrreldes uuritavate kehade joonmõõtmetega
- Deformatsioonid (suhtelised pikenemised ja algse täismuruga muutused) on väikesed võrreldes ühega, neid saab käsitleda lõpmata väikeste suurustena ja kasutatakse terminit (lõpmata) väikesed deformatsioonid (inglise keeles *infinitesimal strains*)
- Kehtib superpositsiooni printsiip

- Tihhti nimetatakse seda ka jõudude mõju sõltumatuse printsiibiks
  - \* Erinevate lahendite summa on alati lahend
- Olekuvõrrandid, st. pingete ja deformatsioonide vahelised seosed, on lineaarsed — füüsikaline lineaarsus
  - (Üldistatud) Hooke'i seadus
  - Analogiks on nn. ideaalne vedru
- Ideaalselt elastne keha
- Alati rakendatakse Saint Venant'i printsiipi
- Tavaliselt rakendatakse Bernoulli hüpoteesi (ristlõigete tasandilise hüpoteesi)

### Mittelineaarne elastsusteooria

- Siirete ja deformatsioonide vahelised seosed on mittelineaarsed — geomeetriline mittelineaarvus
- Kasutusel on erinevad deformatsioonitensiorid ja deformatsiooni mõõdud

- Olekuvõrrandid on mittelineaarsed — füüsikaline mittelineaarvus
- Siirded pole väikesed (võrreldes keha mõõtmetega)
- Deformatsioonid pole väikesed võrreldes ühega
  - Deformatsioone ei saa käsitleda lõpmata väikeste suurustena
  - Öeldakse, et deformatsioonid omavad lõplike väärtusi ja kasutatakse tervimit lõplikud deformatsioonid (inglise keeles *finite strains*)
- Superpositiooni printsiip ei kehti!
- Saint Venant'i printsiip ja Bernoulli hüpotees pole tavaliselt rakendatavad
- Mittelineaarne elastsusteooriale vastavaid võrrandeid ja seoseid käsitleme pideva keskkonna mehaanika kursuses.

Üldised hüpoteesid, eeldused, seaduspärasused jms., mis on rakendatavad nii lineaarse kui mittelineaarse teooria korral

- Pidevuse hüpotees kehtib alati

- Praguide, tühimike jms. esinemise korral on vaja rakendada täiendavaid hüpoteese ja eeldusi
- Homogeensus ja mittehomogeensus
- Isotroopsus ja anisotroopsus
- Defineeritakse nn. algolek — puuduvad pinged ja deformatsioonid
- Termilised efektid — termoelastsusteooria — nii lineaarne kui mittelineaarne käsitlus
- Viskoossed efektid — viskoelastsus
  - Viskoossus — vedeliku võime deformeerumisel vastu võtta nihke- ja tõmbepingeid
  - Mida väiksem on vedeliku viskoossus, seda voolavam ta on
  - Olekuvõrrandid esitavad seosed pingete ja deformatsioonikiiruste vahel
    - \* Lineaarsed (Newtoni vedelik) ja mittelineaarsed (nn. mitte Newtoni vedelik, i.k. *non-Newtonian fluid*)

- Saab eristada tegelikku ja tinglikku pinget (ehk pseudopinget)
  - Lineaarses teoorias langevad need kaks praktiliselt kokku ja seetõttu neid tavaliselt ei eristata
  - Võrrelge malmi ja terase tõmbekatseid

### 9.3 Lineaarse elastsusteooria jaotamine elementaarteooriaks ja esimest järku teooriaks

- Elementaarteooria ehk nn. 0-järku teooria — sisaldab täiendavaid lihtsustusi
- Nn. 1-järku teooria — klassikaline ehk lineaarne elastsusteooria ilma täiendavate lihtsustusteta
- Tugevusõpetus — elementaarteooria + tugevusarvutused
  - Tugevusõpetus on mehaanika haru, mis uurib konstruktsioonilementide piisava tugevuse, jäikuse ja stabiilsuse saavutamist võimalikult ökonoomsel moel.
- Tehniline mehaanika TTÜ-s — tugevusõpetus + jäiga keha staatika



## Elementaarteooria

- Kehitavad kõik lineaarse elastsusteooria hüpoteesid, eeldused, printsiibid, lihtsustused jne.
- Lisaks tehakse veel täiendavaid lihtsustusi, mis 1. järku teooria korral võivad, kuid ei pruugi kehtida
  - Algnõotmete printsiip
  - Bernoulli hüpotees ehk ristlõigete tasapinnalise hüpotees
  - Uurimisobjektiks on peamiselt vardad ja talad
  - jne
- Peamiselt tuntakse huvi vaid varraste (talade) teljepunktide siirete vastu — teiste punktide siirete leidmine ei paku üldjuhul huvi
  - Vaadeldakse tala telge — elastse joone (i.k. deflection curve) diferentsiaalvõrrand — läbipainded
- Käesoleva loengukonsepti 2. peatükis on varraste ja talade pingete analüüs teostatud elementaarteooriast lähtudes

## 9.4 Olekuvõrranditest

Olekuvõrrandid esitavad tahkiste korral seoseid pingete ja deformatsioonide vahel, (viskoosete) vedelike korral aga pingete ja deformatsioonikiiruste vahel.

Elastse keha lineaarne olekuvõrrand — **Hooke'i seadus**

- Ideaalselt elastne, homogeenne, isotroopne materjal
  - Kaks sõltumatut elastsuskonstanti
    - \* Youngi moodul, Poissoni tegur, nihkeelastsusmoodul — valida kaks kolmest
    - \* Lamé koefitsendid
    - \* Ruumdeformatsioon — ruumpaisumismoodul
- Anisotroopne materjal — iga juht vajab individuaalset (eksperimentaalset) lähenemist
  - Tähtis on teada materjalide sümmeetriat, näiteks ortotroopne materjal

## 9.5 Deformatsioon ja pinge

- Deformatsioon iseloomustab keha (keskkonna) mõõtmete ja kuju muutuse intensiivsust vaadeldavas punktis
- Pinge iseloomustab sisejõudude intensiivsust vaadeldavat punkti läbival pinnal
- Deformatsiooniseisund — iseloomustab deformatsioone vaadeldavas punktis — kirjeldatakse deformatsioonitensori abil
- Pingeseisund ehk pingus — iseloomustab pingeid vaadeldavas punktis — kirjeldatakse pingetensori abil
- Peapinged ja peadeformatsioonid
- Ruum-, tasand- ja joonpingus
- Ruum-, tasand- ja joondeformatsioon
- Tasandpingusele vastab ruumdeformatsioon ja vastupidi

## 9.6 Tugevuskriteeriumid ja varutegur

## 9.7 Dünaamilised koormused