

Peatükk 1

Sissejuhatus

2. osa

Ülevaade elastsusteooria aluste kursusest

Peatükk 2

Sisejõud ja pinged

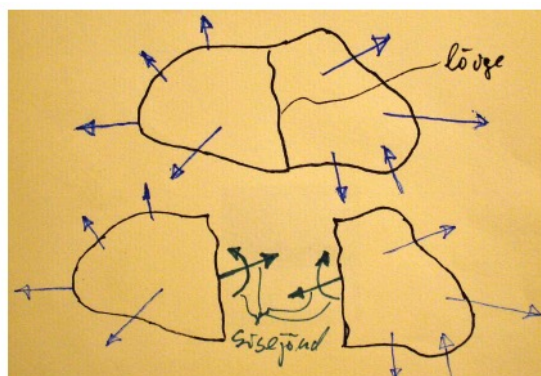
- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või keskkonna) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.
- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

Välisjõud jagunevad pind- ja ruumjõududeks.

- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punktmassile. Näiteks gravitatsioonijõud.

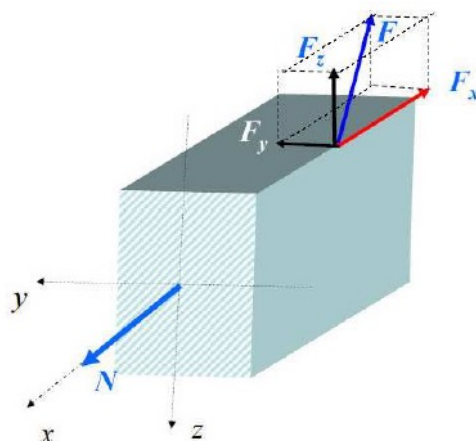
2.2 Sisejõud

2.2.1 Lõikemeetod



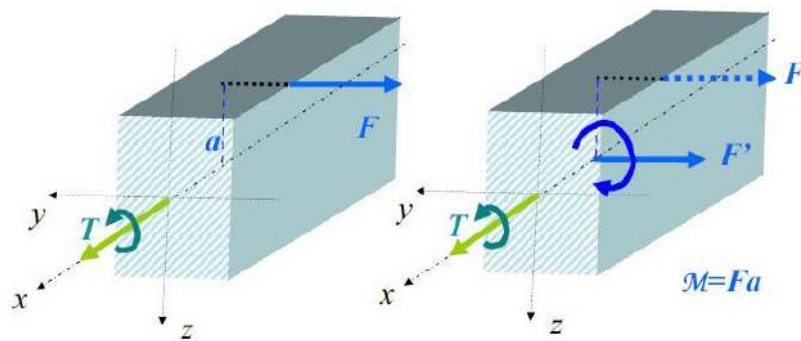
Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

2.2.2 Sisejõudude liigid



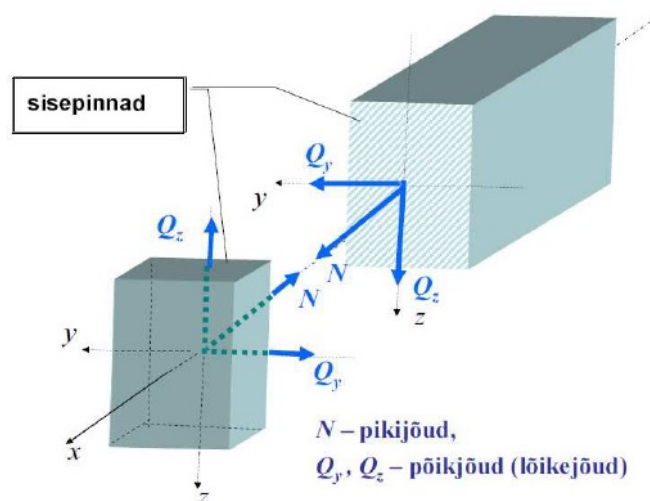
Joonis 2.2: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

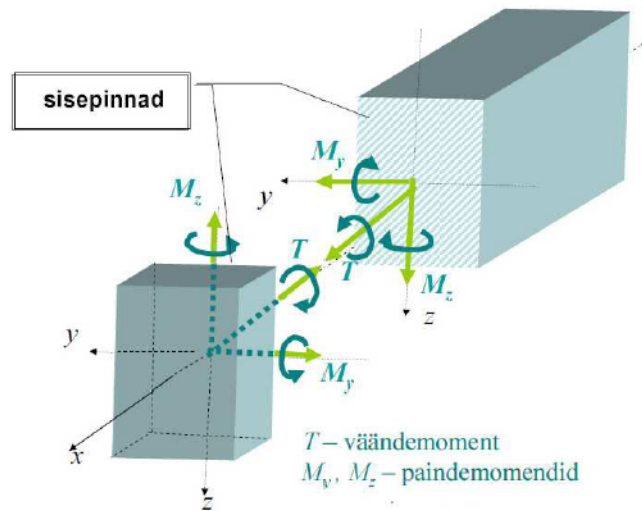


Taandades välisjõu F varda x -teljele saame välisjõu F' ja pöördemomendi \mathcal{M} .

Joonis 2.3: Väändemoment
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



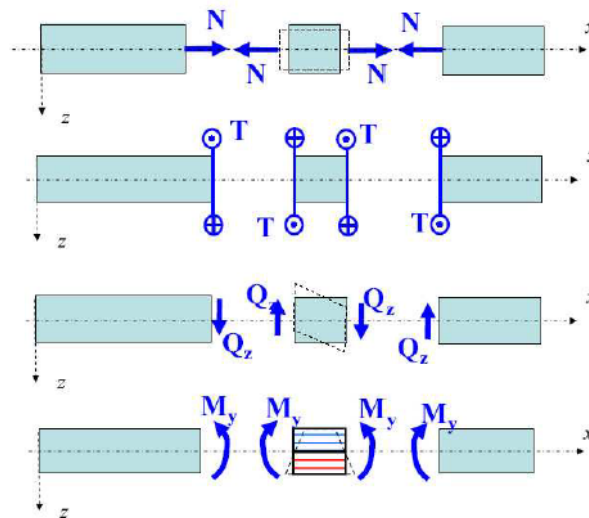
Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — piki- ja põikjõud 3D juhul.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)



Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemomendid 3D juhul. NB! M_z on siin negatiivne, teised positiivsed.
 (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

2.2.3 Sisejõudude märgireeglid

Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.
 (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
 - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.
- *Väändemomendi positiivne suund* on määratud krüvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjuv väändemoment on positiivne kui väändemomendi suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
- *Positiivne põikjõud* Q_z mõjub positiivsel sisepinnal z -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal z -telje negatiivses suunas.
 - Analoogiline märgireegel kehtib ka põikjõu Q_y jaoks.
 - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne põikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
- *Positiivne paindemoment* tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
 - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

Märkus: Piki- ja põikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändemomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

2.2.4 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga dx läbijagamist, ning viimasest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalseost:

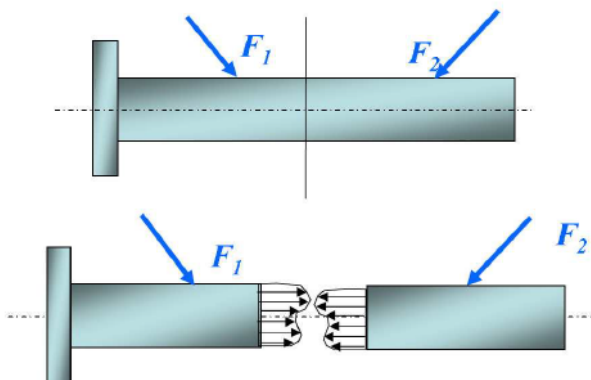
$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga dx ning integreerime lõigul $[a, x]$:

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

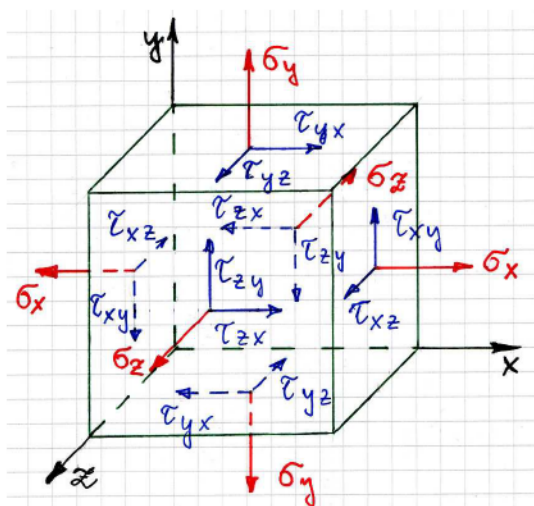
2.3 Pinge mõiste

On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemeetodi korral on sisejõud tegelikult jaotunud üle kogu lõikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud koos sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedel.



Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varde ristlõikes
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

2.4 Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid



Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

Märgireeglid: joonis 2.14.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

2.5 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja kuus nihkepinget $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada 3×3 (tasandülesannete korral 2×2) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal¹⁵.

2.5.1 Skalaar, vektor, tensor

Skalaar pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus.

Vektorit iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund.

Teist järku tensor on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

2.5.2 Pingetensori invariantid

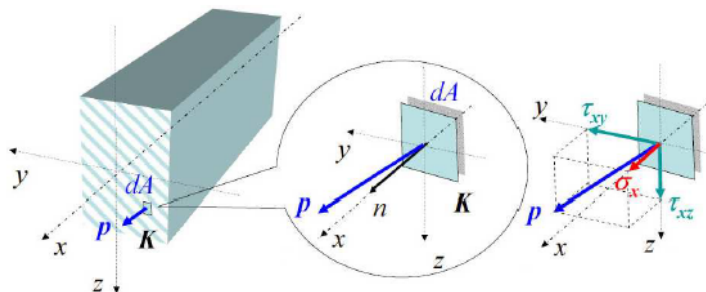
Suuruseid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{cases}, \quad (2.6)$$

nimetatakse *pingetensori invariantideks* ehk lühidalt *pinge invariantideks*.

Märkus: Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

2.6 Pinged varda ristlõike punktis.



Joonis 2.15: Pinge varda punktis
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

2.7 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

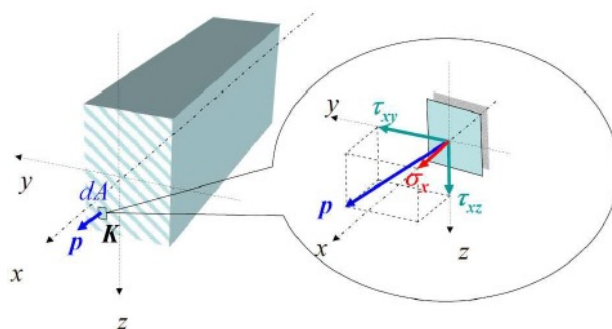
2.7.1 Sisejõudude avaldamine pingete kaudu

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.5)$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.6)$$

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA \quad \text{jä} \quad M_z = \int_A y \sigma_x dA. \quad (2.7)$$

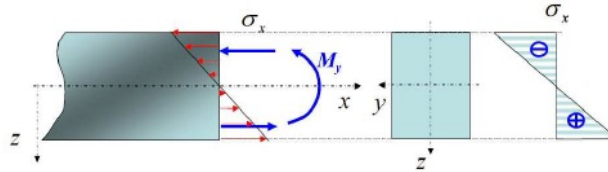
$$T = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA. \quad (2.8)$$



2.7.2 Pingete avaldamine sisejõudude kaudu

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.9)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.12)$$

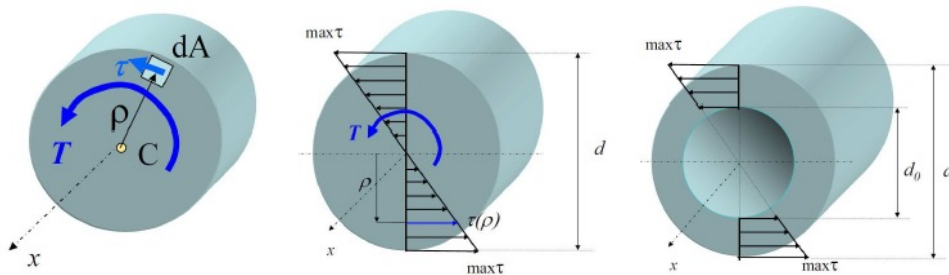


Väände- ja lõikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändemomendist ja lõikepinge põikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomendist põhjustatud normaalpingete leidmine, siis pühendame neile omaette jaotise.

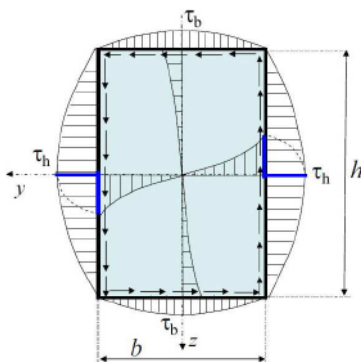
2.8 Nihkepinged varda ristlõikes

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_\rho 2}. \quad (2.20)$$



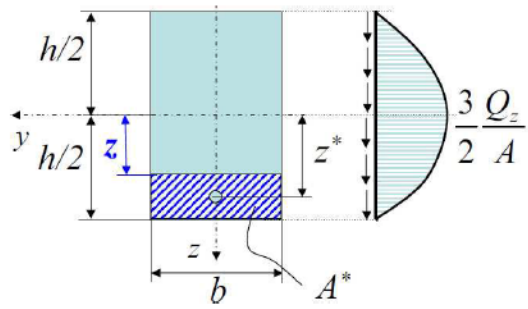
Joonis 2.24: Väändepinged ümarvardas ja paksuseinalises torus.

$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.24)$$



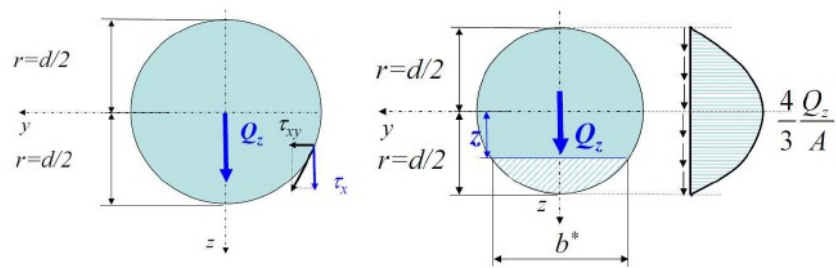
h/b	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
k_h	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
k_b	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vardas.



Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

$$\tau_{xz} = \frac{3 Q_z}{2 A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3 Q_z}{2 A}. \quad (2.37)$$



Joonis 2.38: Lõikepinged ümarristlõikes

$$\tau_{xz} = \frac{4 Q_z}{3 A} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4 Q_z}{3 A}. \quad (2.38)$$

Peatükk 3

Deformatsioon ja olekuvõrrandid

3.1 Siire ja deformatsioon

3.1.1 Cauchy seosed

Eristame kahte liiki siirded:

- keha kui terviku siirded (toimuvad ilma deformatsioonideta) — selliste siiretega tegeleb jäiga keha mehaanika²;
- siirded, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse just selliseid siirdeid.

Siirdevektori koordinaattelgede x, y, z sihilisi komponente tähistatakse u, v, w , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

Märgireeglid:

- pikenemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

Järeldus: Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

3.2 Deformatsioonitensor

Normaal- ja nihkedeformatsioonidest (ehk nihetest) saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensorarvutuste reeglitele. Analoogiliselt pingetensoriga saab leida ka deformatsioonitensori invariantid:

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}, & I_3^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.16)$$

3.4 Pidevustingimused

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3.19)$$

3.5 Olekuvõrrandid

Välisjõudude toimetel kehad (keskkonnad) deformeeruvad. On selge, et ühe ja sama välisjõu toimetel võivad erinevad materjalid deformeeruda väga erinevalt — järelikult on vaja võrrandeid, mis määraksid kuidas üks või teine materjal koormamisel käitub.

- *Võrrandeid, mis seovad omavahel deformatsioonid ja pinged, nimetatakse olekuvõrranditeks.*
- Lineaarses e. klassikalises elastsusteoorias on olekuvõrrandid esitatud *üldistatud Hooke'i seadusena*, mis esitab lineaarse seose pinge- ja deformatsioonitensori vahel.
- Kui on vaja arvestada ka temperatuuri mõju kehade deformatsioonidele, siis tuuakse sisse termoelastsus tegurid ning lisatakse võrranditesse vastavad lisaliikmed. Sel juhul öeldakse tihti, et tegu on *termoelastsusteooriaga*.

3.5.1 Üldistatud Hooke'i seadus

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*⁹

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.31)$$

3.6 Deformatsiooni potentsiaalne energia

Potentsiaalse energia tihedus

$$W = \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2\mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.44)$$

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.31) saame *Clapeyroni valemi*

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.45)$$

Viimastest saab omakorda avaldada W läbi pingete ja elastsuskonstantide E ja ν kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.23)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 2(1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.46)$$

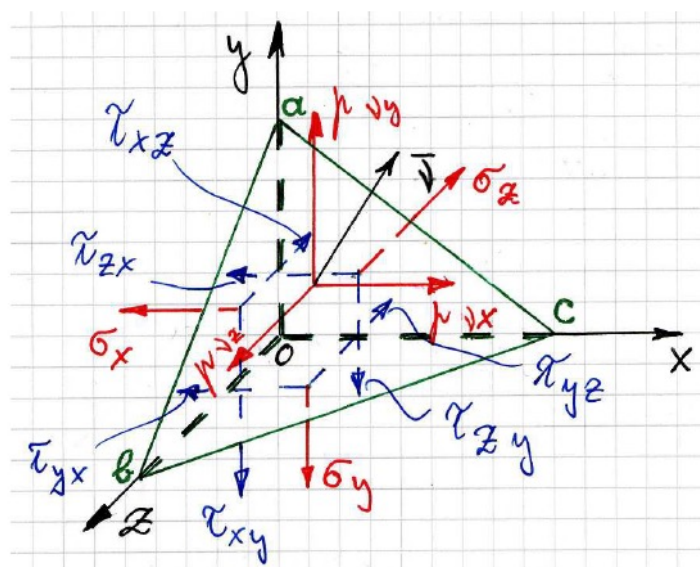
Rakendes Clapeyroni valemit avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.50)$$

Peatükk 4

Peapinged ja peadeformatsioonid

4.1 Pinged kaldpinnal



Joonis 4.1: Pinged kaldpinnal. Kaldpinnal normaaliga ν mõjuv pingevektor p_ν on esitatud läbi tema projektsioonide $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$ ja $p_{\nu z}$.

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 4.1 kujutatud kaldpinna abc orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (4.5)$$

4.2 Peapinged

$$\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu \cdot \boldsymbol{\nu} = p_{\nu x} l + p_{\nu y} m + p_{\nu z} n. \quad (4.7)$$

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (4.8)$$

On selge, et nii \mathbf{p}_ν , kui σ_ν ja τ_ν sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge $\tau_\nu = 0$ ja normaalpinge $\sigma_\nu = p_\nu$. Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks*.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Pinguste liigid. Sõltuvalt sellest, mitu peapinget on nullist erinevad, eristatakse kolme pinguse liiki:

- *ruumpingus* – kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* – üks peapinge on null, kaks nullist erinevad;
- *joonpingus* – kaks peapinget on nullid, üks nullist erinev.

Kasutades peapingeid saame pinge invariantid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (4.14)$$

- Kuna invariantid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

4.3 Peadeformatsioonid

Peasuundi ja peaväärtusi saab leida mistahes teist järku tensoritele. Kuna deformatsioonitensor ja pingetensor on sümmeetrilised tensorid, siis on peadeformatsioonide leidmise protseduur analoogiline peapingete omaga. Antud juhul saame seega deformatsioonitensorile

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

anda kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

misjärel deformatsioonitensori invariantid

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad I_2^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3, \quad I_3^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (4.22)$$

Peatükk 5

Elastsusteooria põhivõrrandid, nende lahendusmeetodid ja lihtsamad ruumilised ülesanded

5.1 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui ma-
hujõudude projektsioonid sisaldavad inertsjõudusid, saab viimste abil lahendada
ka dünaamika ülesandeid.

5.2 Elastusteooria põhivõrrandid

1. *Tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid (5.5) (3 võrrandit):*
2. *Cauchy seosed (3.6) (6 võrrandit):*
3. *Üldistatud Hooke'i seadus (6 võrrandit) nn. otsesel kujul (3.23):*

Võrrandeid kokku 15.

Tundmatud kokku 15: 6 pingetensori komponenti + 6 deformatsioonitensori komponenti + 3 siirdevektori komponenti.

Rajatingimused ehk ääretingimused ehk servatingimused

Pidevustingimused. Kui põhimuutujateks on valitud deformatsioonid või pinged, siis on tarvis arvestada ka pidevustingimusi (3.19):

5.3 Elastusteooria ülesannete lahendusmeetodid

Elastusteooria põhivõrrandeid võib lahendada mitmel erineval moel, sõltuvalt sellest millised suurused on valitud põhimuutujateks.

1. *Lahendamine siiretes* — tundmatuteks on valitud siirdevektori komponendid $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$.
2. *Lahendamine pingetes* — tundmatuteks on valitud pingetensori komponendid $\sigma_x(x, y, z), \dots, \tau_{xy}(x, y, z), \dots$
3. *Lahendamine deformatsioonides* — tundmatuteks on valitud deformatsioonitensori komponendid $\varepsilon_x(x, y, z), \dots, \gamma_{xy}(x, y, z), \dots$
4. *Nn. segalahendi leidmine* — eelmise kolme kombinatsioonid.

5.3.1 Elastusteooria ülesannete lahendamine siiretes

Otsitavad: siirdekomponeendid $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$.

5.3.2 Elastusteooria ülesande lahendamine pingetes konstantsete mahujõudude korral

Otsitavad: 6 pingetensori komponenti.

5.4 Lihtsamad ruumilised ülesanded

Käesolevas alajaotuses *vaatleme mõningate lihtsamate elastsusteooria ülesannete lahendamist pingetes.*

- Vaadeldavate ülesannete *lihtsus* seisneb eeskätt selles, et *pingekomponendid on konstantsed või lineaarfunktsioonid koordinaatidest (x, y, z) .*
- *Vaatleme elementaarteooriast*, st. tugevusõpetusest (tehnilisest mehaanikast), *tuntud lahendeid ja näitame, et nad rahuldavad elastsusteooria tasakaalvõrrandeid (5.9) ja rajatingimusi (5.13).*

5.4.1 Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne

5.4.2 Prismaatiliste varraste puhas paine

5.4.3 Plaadi puhas paine

5.4.5 Varda tõmme omakaalu mõjul

Peatükk 6

Elastsusteooria tasandülesanne

6.1 Tasandülesande mõiste

Elastsusteooria ülesannet nimetatakse *tasandülesandeks* (ehk tasapinnaliseks ülesandeks) kui deformatsioon või pinge on kogu keha ulatuses tasapinnaline.

6.2 Tasanddeformatsioon

Vaadeldaval juhul on kõigis keha punktides deformatsioon tasapinnaline, st. üks peadeformatsioonidest on null. *Tasanddeformatsioon saab tekkida kui siirded*

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (6.1)$$

Selline deformatsiooniseisund tekib pikas kehas, millele mõjub keha pinnaga (z -teljega) ristuv koormus.

Näiteks: pikk tugisein; (metroo)tunnel; pikk radiaalselt surutud võll; pika plaadi silindriline paine (NB! Saint Venant'i printsiip).

6.3 Tasandpingus

Vaatleme olukorda, kus kõigis keha punktides üks peapingetest on null. Sellisel juhul saame valida Descartes'i ristkoordinaadid nii, et

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (6.7)$$

Selline pingus tekib näiteks õhukeses plaadis, millele mõjub servades rakendatud koormus, mis on risti z -teljega.

6.4 Tasandülesande lahendamine pingetes

Väga sageli lahendatakse elastsusteooria ülesanded pingetes, sest sellel meetodil on võrreldes siiretes lahendamisega mõned eelised:

- sageli ongi ülesande lahendina vaja leida vaid pingeid, siirded on teisjärgulise tähtsusega ning neid polegi vaja leida;
- üldjuhul on siirete avaldised võrreldes pingete avaldisega tunduvalt keerukamad.

Tundmatud: pingetensori komponendid σ_x, σ_y ja τ_{xy} .

Tasandülesande lahendamine pingetes lihtsustub oluliselt kui tuua sisse *Airy'* pingefunktsioon $\varphi(x, y)$, mis on seotud pingekomponentidega järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx, \quad (6.15)$$

kus X ja Y on konstantsed mahujõud. Alternatiivne võimalus siduda pingekomponendid ja pingefunktsioon:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (6.16)$$

Nii (6.15) kui (6.16) korral on tasakaaluvõrrandid (6.4) automaatselt rahuldatud. Pannes selliselt defineeritud pingekomponendid pidevustingimusse (6.14) saame *biharmoonilise võrrandi*

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0. \quad (6.17)$$

Lahti kirjutatult saab viimane kuju

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (6.18)$$

Funktsiooni, mis rahuldab biharmoonilist võrrandit (6.17) või (6.18) nimetatakse *biharmooniliseks funktsiooniks*.

Tegelikult on pingefunktsiooni leidmine mitmel juhul suhteliselt lihtne. Vastavat meetodit võib nimetada *poolvastupidiseks meetodiks*. Selle põhjal antakse pingefunktsioon ette kas polünoomina või trigonomeetrilise reana, mis sisaldavad määramata konstante. Viimased määratakse ülesande lahendamise käigus ääritingimuste ja biharmoonilise võrrandi abil.

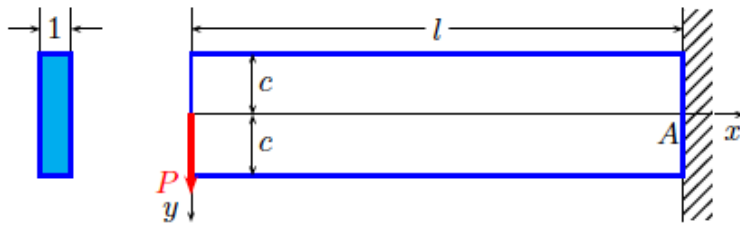
6.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Kui väljendada Airy funktsioon polünoomina

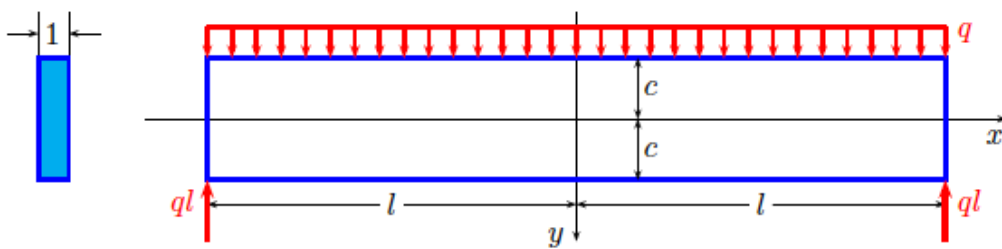
$$\begin{aligned} \varphi = & \left(\frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \right) + \left(\frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \right) + \\ & + \left(\frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.19)$$

saab konstrueerida terve rea tasandülesande lahendusi. Vaadeldav lähenemisviis on rakendatav kui uuritakse riskülikulisi plaate või talasid. Mahujõud, k.a. keha kaal, hülgame. Käesolevas alajaotuses vaatleme talasid, mille pikkus on l , kõrgus $2c$ ja laius 1. Tala teljeks on x -telg ja y telg on suunatud alla. Kuna lineaarses elastsusteoorias kehtib superpositsiooni printsiip, siis vaatleme algul polünoome kuni 5. astmeni eraldi. Järgmises alajaotuses konstrueerime saadud tulemuste abil erinevaid lahendeid.

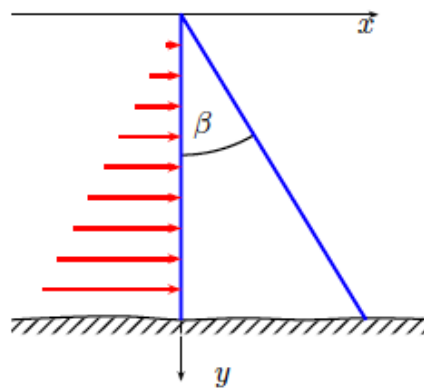
6.6 Konsooli paine



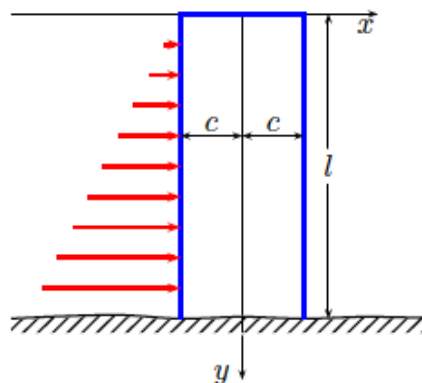
6.7 Ühtlaselt koormatud tala paine



6.8 Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

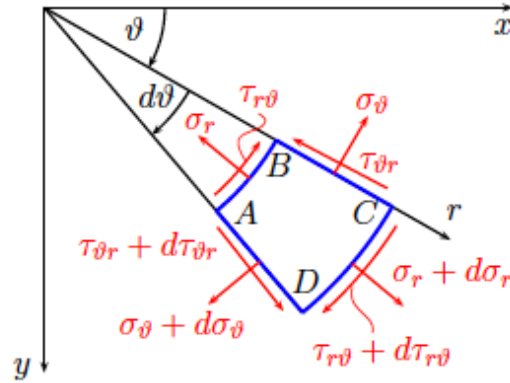


6.9 Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool



6.10 Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides

6.10.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 6.26: Väikese elemendi ABCD tasakaal.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + f_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + f_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (6.91)$$

Siin tähistavad f_r ja f_ϑ mahujõudude projektsioone radiaal ja tangentsiaal suunale (r ja ϑ kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni $\varphi = \varphi(\vartheta, r)$, nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right). \end{cases} \quad (6.92)$$

Nüüd Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (6.93)$$

ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (6.94)$$

Kui pingekomponendid ja seega ka φ sõltuvad vaid koordinaadist r , siis saab võrrandi (6.94) üldlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (6.95)$$

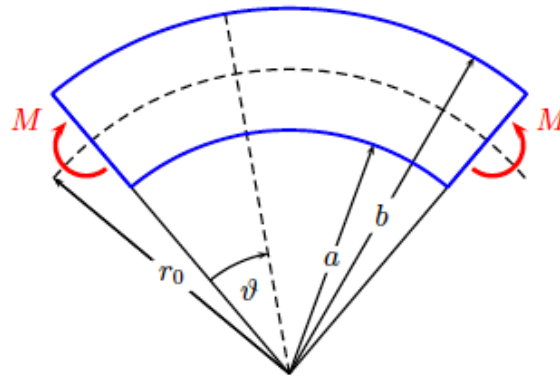
6.10.2 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{cases} \quad (6.96)$$

Siin mõistetakse suurusi u ja v kui radiaalsed ja tangentsiaalsed siirdekomponeendi. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r), \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \quad (6.97)$$

6.11 Kõvera tala paine

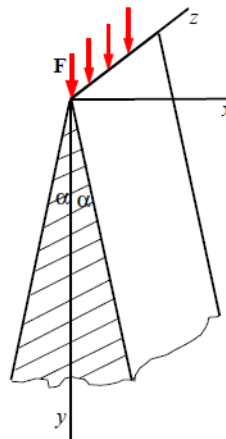


6.12 Pöörlev ketas

6.13 Radiaalne pingus.

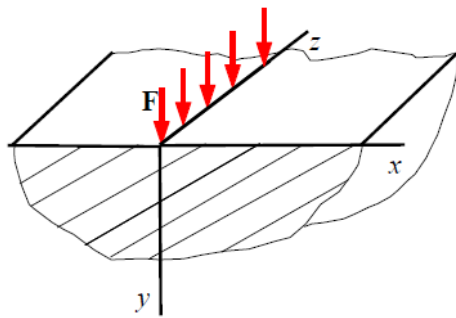
Küllaltki tihti esineb ülesandeid, kus igas keha punktis on nullist erinev vaid radiaalne pingus σ_r . Sellist pingust nimetatakse *radiaalseks pinguseks*.

6.14 Kiilu surve.

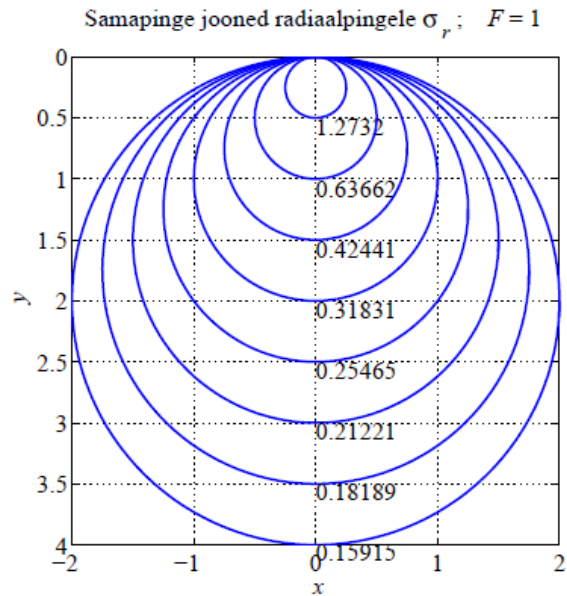


Joonis 6.29: Sümmeertiline kiil ja tema sümmeetriasandis mõjuv jõud.

6.15 Koondatud jõu mõju poolruumile



Joonis 6.31: Elastsele poolruumile mõjuv koondatud jõud.

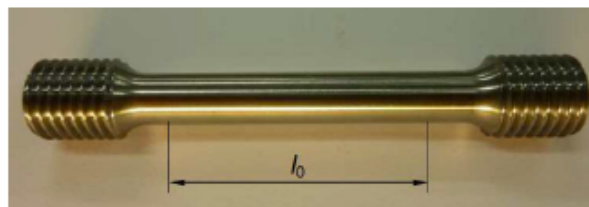


Sellise graafilise radiaalpingte esituse andis esmakordselt Joseph Boussinesq ning seetõttu nimetatakse neid ringe *Boussinesqi ringideks*.

Peatükk 7

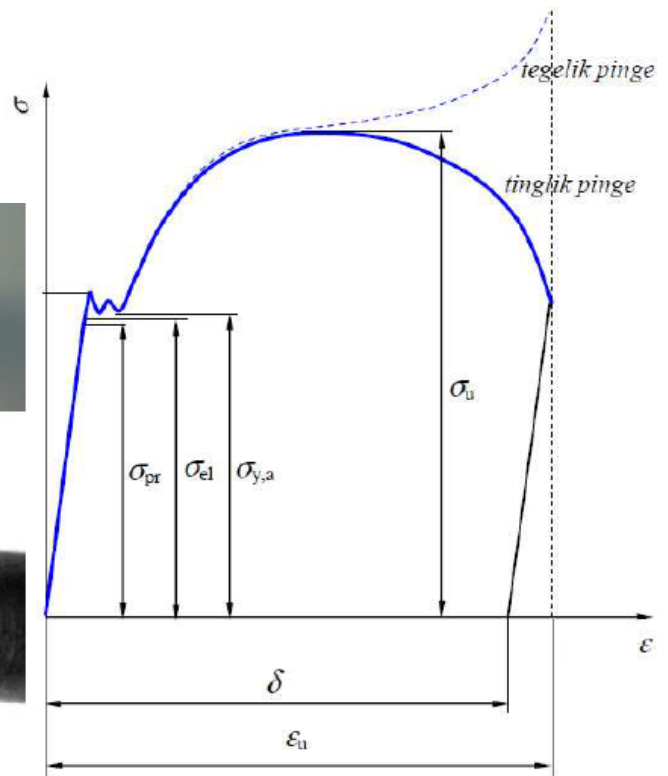
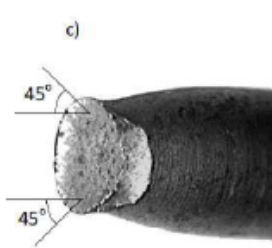
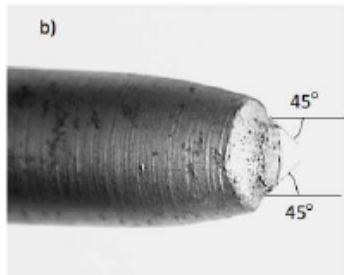
Materjalide omadused

Standardtingimustel sooritatud katset nimetatakse teimiks.

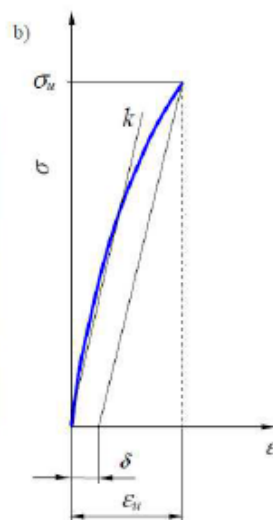


Joonis 7.1: Tõmbekatsel kasutatav katsekeha.

7.1 Terasetõmbekatsed



7.2 Hallmalmi tõmbekatsed



Joonis 7.6: Malmi purunemispilt ja tõmbediagramm

7.3 Haprus, sitkus, plastsus, tugevus

Vastavalt käitumisele enne purunemist, saab välja tuua mitmeid erinevaid materjali omadusi, vt. joonist 7.7, kus on esitatud erineva süsinikusisaldusega rauasulamite tõmbediagrammid. Tavaliselt lähenetakse materjalide vaadeldavatele omadustele läbi vastandlike omaduste paaride: elastsus – plastsus, haprus – sitkus. Elastsuse mõistet käsitlesime esimeses peatükis.

- Plastsed materjalid

- Plastsus² — materjali omadus omandada olulisi jääkdeformatsioone.
- Plastsuse määra on tähtis teada näiteks valtsimisel, sepistamisel, traadi tõmbamisel jne.
- Mida plastsem on materjal, seda suurem on tema katkevenivus.
- Katekeahenemine

²i.k. *Plasticity*

- Haprad³ materjalid

- Haprus⁴ — materjali omadus puruneda juba tühise deformatsiooni korral.

- Sitked⁵ materjalid

- Sitkus⁶ — materjali omadus enne purunemist oluliselt deformeeruda.
- Selle definitsiooni põhjal ei pruugi sitke materjal olla eriti plastne — ta võib olla ka kõrgelastne, näiteks kummi.

- Plastsel sitkel materjalil pole alati võimalik eristada selget voolavuspiiri — tinglik voolavuspiir.

- Tugevus⁷ — materjali tugevust iseloomustab tema tõmbetugevus⁸, s.t. suurim katse jooksul fikseeritud tinglik pinge.

³I. k. *Brittle*

⁴I. k. *Brittleness*

⁵I. k. *Ductile*

⁶I. k. *Ductility*

⁷I. k. *Strength*

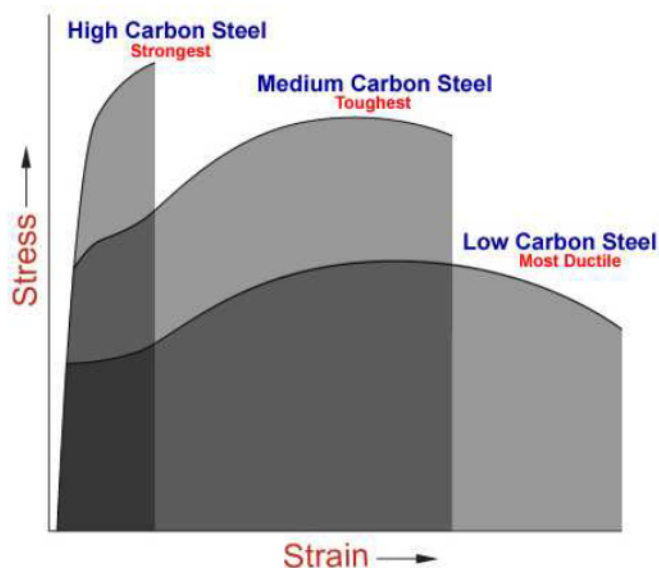
⁸I. k. *Tensile strength*

Ingliskelses kirjanduses on kombeks eristada kahte sitkeid materjale iseloomustavat omadust: *ductility* ja *toughness*. Eesti keelde võiks tõlkida neid tõlkida vastavalt kui *venivus* ja *sitkus* ja siin eeldatakse, et tegu on plastsete materjalidega. Definiitsioonid:

- *Ductility is a measure of the deformation at fracture. Defined by percent elongation or percent reduction in area.*
- *Toughness is the ability to absorb energy up to fracture. Units: the energy per unit volume, e.g. J/m^3 . Can be measured by an impact test.*
- Mida sitkem materjal, seda rohkem tööd tuleb teha tema purustamiseks ja seega seda suurem on tema tõmbediagrammi aluse pinna pindala.

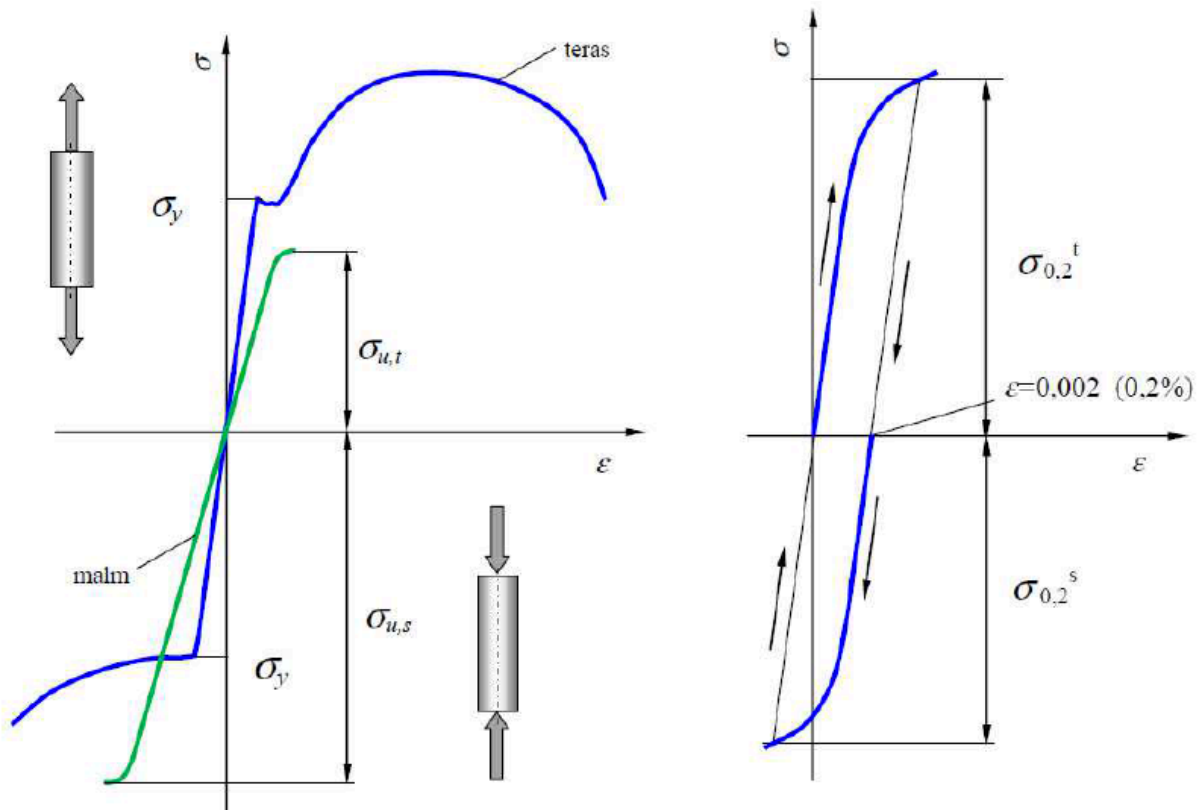
Peale eelnevate võib veel eristada sepistatavust⁹, näiteks kuld. Sellisest materjalist on võimalik vormida hästi õhukesi lehti. Venivus (*ductility*) ja sepistatavus (*malleability*) pole sünonüümid: kuld on nii veniv kui sepistatav, tina vaid sepistatav

⁹I. k. *malleable*



Joonis 7.7: Erineva süsinikusisaldusega rauasulamite tõmbediagrammid

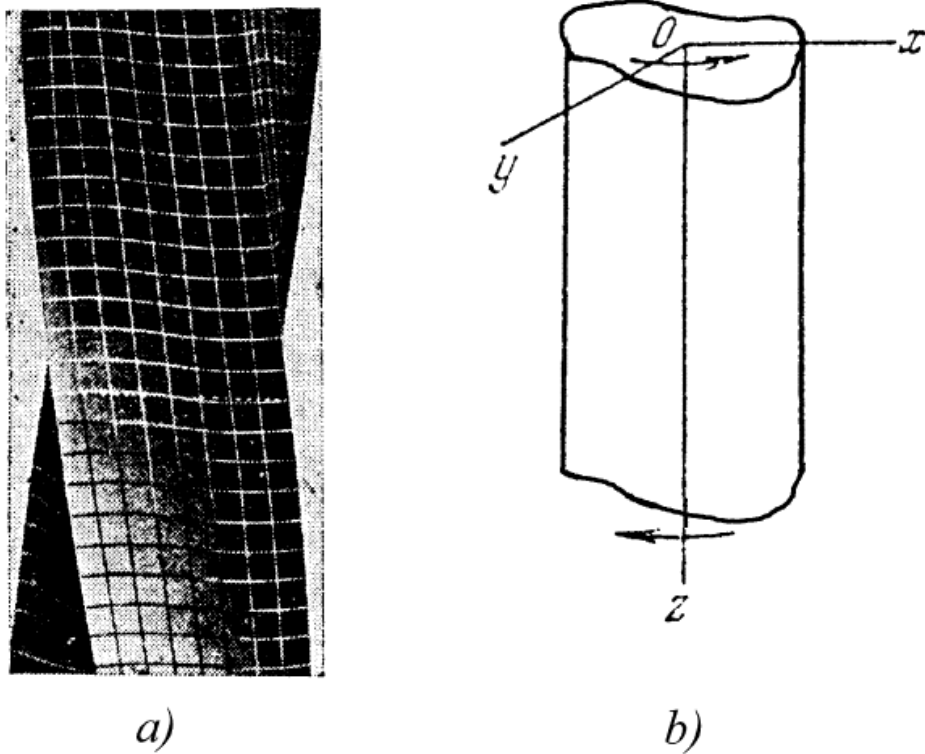
7.4 Survekatsed



Peatükk 8

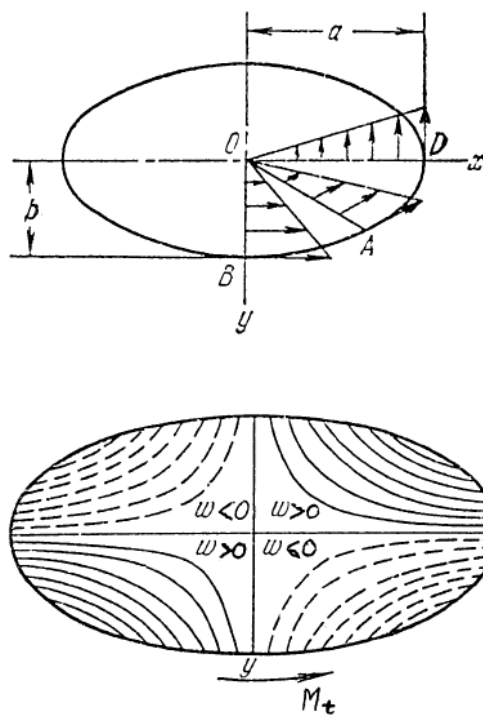
Sirgete varraste vääne

Ümarvarraste väändeülesande lahendamisel tehtud hüpotees, et varda ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks ei kehti mitteümarvarraste puhul. Seda näitavad ilmekalt eksperimentide tulemused. Enim kõverduvad algsed sirged külgede keskosas. Korrektse lahenduse vaadeldavale ülesandele andis Saint-Venant (1855).



Joonis 8.1: Sirge varda vääne.

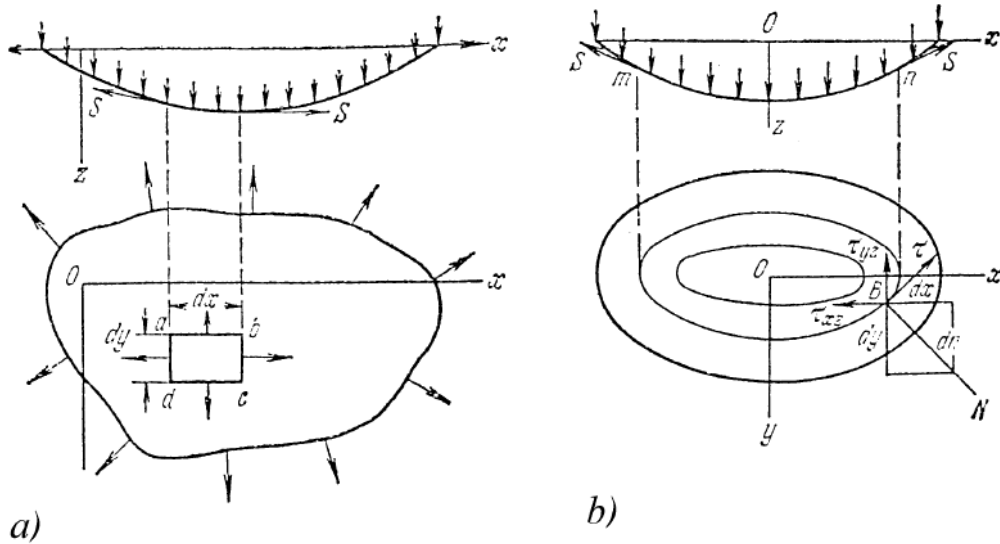
8.2 Elliptiline ristlõige



Samasiirdejooned $w = const.$

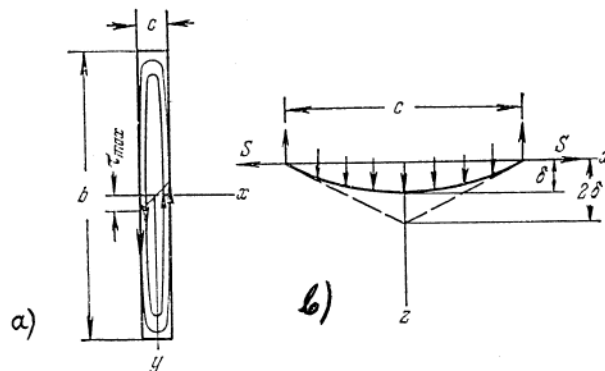
8.3 Membraananalooia

Nihkepinge -- membraani läbipaine

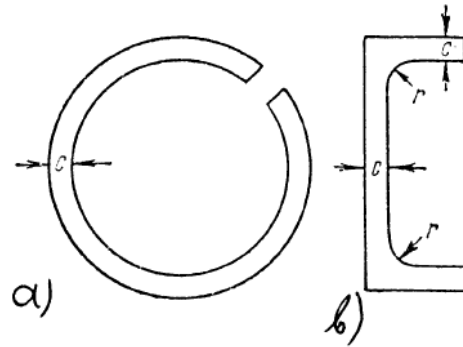


Joonis 8.5: Põikkoormusega koormatud ühtlaselt tõmmatud membraan — a); deformeerunud membraani samaläbipainde jooned — b). NB! $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

8.4 Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne



Joonis 8.6: Varda ristlõige ja maksimaalsed nihkepinged — a) ja vastava membraanani läbipaine — b).



Joonis 8.7: Õhukeseseinalised avatud ristlõiked.

8.5 Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne

8.6 Valtsmetallist varraste (talade) vääne

Peatükk 9

Kokkuvõtvad märkused

9.1 Jäiga keha mehaanika ja elastsusteooria

Sarnasused:

- Alamharud: staatika, kinemaatika, dünaamika.
- Mõlemal juhul on rakendatavad analüütilise mehaanika meetodid
- Jõudu ja jõu momenti käsitletakse kui vektoreid!
- Mõlemad, st. nii jäik keha kui deformeeruv keskkond, koosnevad punktmassidest ja nad moodustavad seega punktmasside (mehaanikalise) süsteemi
 - Sageli öeldakse deformeeruva keskkonna korral punktmassi asemel materiaalne punkt
 - Punktmasside süsteemile mõjuvad jõud saab jaotada sise- ja välisjõududeks

- Jõusüsteemi peavektori ja peamomendi kontseptsiooni rakendatakse mõlemal juhul, kuid deformeeruva keha korral esineb mõningaid spetsiifilisi erisusi
 - Sisejõud: keha lõikes mõjuvate pingete peavektor ja peamoment
 - Tavaliselt taandatakse pinged lõike pinnakeskmesse
 - Talade korral on tala ristlõikes mõjuvate sisejõudude projektsioonidel spetsiifilised nimed: pikijõud, põikjõud, väändemoment, paindemoment
 - * Tavaliselt kasutatakse siinjuures Descartes'i ristkoordinaate
- Tasakaalutingimused: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment peavad võrduma nulliga.
- Liikumishulk ja kineetiline moment ning vastavad teoreemid
- Kogu teooria baseerub mõlemal juhul Newtoni seadustel

Erinevused:

- Uurimisobjekt: jäik keha *vs.* deformeeruv keskkond
 - Deformeeruv keskkond: deformeeruv tahkis (tahke keha), gaas, vedelik
- Jäiga keha mehaanikas saab jõudu vaadelda kui libisevat vektorit, kuid deformeeruva keskkonna korral ei saa.
- Jäiga keha mehaanikas saab lauskoormuse asendada üksikjõuga, kuid deformeeruva keskkonna korral ei saa.

9.2 Lineaarne ja mittelineaarne elastsusteooria

Lineaarne elastsusteooria

- Lineaarne elastsusteooria = klassikaline elastsusteooria
 - Siirete ja deformatsioonide vahelised seosed on lineaarsed — geomeetriline lineaarsus
 - Deformatsioonitensor on defineeritud Cauchy seoste kaudu
 - Deformatsiooni mõõduks on tavaliselt suhteline pikenemine ja algse täisnurga muut ehk nihkenurk
 - Siirded on väikesed võrreldes uuritavate kehade joonmõõtmetega
 - Deformatsioonid (suhtelised pikenemised ja algse täisnurga muutused) on väikesed võrreldes ühega, neid saab käsitleda lõpmata väikeste suurustena ja kasutatakse terminit (lõpmata) väikesed deformatsioonid (inglise keeles *infinitesimal strains*)
-
- Olekuvõrrandid, st. pingete ja deformatsioonide vahelised seosed, on lineaarsed — füüsikaline lineaarsus
 - (Üldistatud) Hooke'i seadus
 - * Analoogiks on nn. ideaalne vedru
 - Kehtib superpositsiooni printsiip
 - Tihti nimetatakse seda ka jõudude mõju sõltumatuse printsiibiks
 - * Erinevate lahendite summa on alati lahend
 - Ideaalselt elastne keha
 - Alati rakendatakse Saint Venant'i printsiipi
 - Tavaliselt rakendatakse Bernoulli hüpoteesi (ristlõigete tasandilisuse hüpoteesi)

Mittelineaarne elastsusteooria

- Siirete ja deformatsioonide vahelised seosed on mittelineaarsed — geomeetiline mittelineaarsus
 - Kasutusel on erinevad deformatsioonitensorid ja deformatsiooni mõõdud
- Olekuvõrrandid on mittelineaarsed — füüsikaline mittelineaarsus
- Siirded pole väikesed (võrreldes keha mõõtmetega)
- Deformatsioonid pole väikesed võrreldes ühega
 - Deformatsioone ei saa käsitleda lõpmata väikeste suurustena
 - Öeldakse, et deformatsioonid omavad lõplike väärtusi ja kasutatakse terminit lõplikud deformatsioonid (inglise keeles *finite strains*)
- Superpositsiooni printsiip ei kehti!
- Saint Venant'i printsiip ja Bernoulli hüpotees pole tavaliselt rakendatavad
- Mittelineaarsele elastsusteooriale vastavaid võrrandeid ja seoseid käsitleme pideva keskkonna mehaanika kursuses.

Üldised hüpoteesid, eeldused, seaduspärasused jms., mis on rakendatavad nii lineaarse kui mittelineaarse teooria korral

- Pidevuse hüpotees kehtib alati
 - Pragude, tühimike jms. esinemise korral on vaja rakendada täiendavaid hüpoteese ja eeldusi
- Homogeensus ja mittehomogeensus
- Isotroopsus ja anisotroopsus
- Defineeritakse nn. algolek — puuduvad pinged ja deformatsioonid
- Termilised efektid — termoelastsusteooria — nii lineaarne kui mittelineaarne käsitus

- Viskoossed efektid — viskoelastsus
 - Viskoossus — vedeliku võime deformeerumisel vastu võtta nihke- ja tõmbepingeid
 - Mida väiksem on vedeliku viskoossus, seda voolavam ta on
 - Olekuvõrrandid esitavad seosed pingete ja deformatsioonikiiruste vahel
 - * Lineaarsed (Newtoni vedelik) ja mittelineaarsed (nn. mitte Newtoni vedelik, i.k. *non-Newtonian fluid*)
- Saab eristada tegelikku ja tinglikku pinget (ehk pseudopinget)
 - Lineaarses teoorias langevad need kaks praktiliselt kokku ja seetõttu neid tavaliselt ei eristata
 - Võrrelge malmi ja terase tõmbekatseid

9.3 Lineaarse elastsusteooria jaotamine elementaarteooriaks ja esimest järku teooriaks

- Elementaarteooria ehk nn. 0-järku teooria — sisaldab täiendavaid lihtsustusi
- Nn. 1-järku teooria — klassikaline ehk lineaarne elastsusteooria ilma täiendavate lihtsustusteta
- Tugevusõpetus — elementaarteooria + tugevusarvutused
 - Tugevusõpetus on mehaanika haru, mis uurib konstruktsioonelementide piisava tugevuse, jäikuse ja stabiilsuse saavutamist võimalikult ökonoomsel moel.
- Tehniline mehaanika TTÜ-s — tugevusõpetus + jäiga keha staatika

Elementaarteooria

- Kehtivad kõik lineaarse elastsusteooria hüpoteesid, eeldused, printsiibid, lihtsustused jne.
- Lisaks tehakse veel täiendavaid lihtsustusi, mis 1. järku teooria korral võivad, kuid ei pruugi kehtida
 - Algmõõtmete printsiip
 - Bernoulli hüpotees ehk ristlõigete tasapinnalisuse hüpotees
 - Uurimisobjektiks on peamiselt vardad ja talad
 - jne
- Peamiselt tuntakse huvi vaid varraste (talade) teljepunktide siirete vastu — teiste punktide siirete leidmine ei paku üldjuhul huvi
 - Vaadeldakse tala telge — elastse joone (i.k. *deflection curve*) diferentiaalvõrrand — läbipainded
- Käesoleva loengukonspekti 2. peatükis on varraste ja talade pingete analüüsi teostatud elementaarteooriast lähtudes

9.4 Olekuvõrranditest

Olekuvõrrandid esitavad tahkiste korral seoseid pingete ja deformatsioonide vahel, (viskoosete) vedelike korral aga pingete ja deformatsiooniiruste vahel.

Elastse keha lineaarne olekuvõrrand — Hooke'i seadus

- Ideaalselt elastne, homogeenne, isotroopne materjal
 - Kaks sõltumatut elastsuskonstanti
 - * Youngi moodul, Poissoni tegur, nihkeelastsusmoodul — valida kaks kolmest
 - * Lamé koefitsendid
 - * Ruumdeformatsioon — ruumpaisumismoodul
- Anisotroopne materjal — iga juht vajab individuaalset (eksperimentaalset) lähenemist
 - Tähtis on teada materjalide sümmeetriat, näiteks ortotroopne materjal

9.5 Deformatsioon ja pinge

- Deformatsioon iseloomustab keha (keskkonna) mõõtmete ja kuju muutuse intensiivsust vaadeldavas punktis
- Pinge iseloomustab sisejõudude intensiivsust vaadeldavat punkti läbival pinnal
- Deformatsiooniseisund — iseloomustab deformatsioone vaadeldavas punktis — kirjeldatakse deformatsioonitensori abil
- Pingeseisund ehk pingus — iseloomustab pingeid vaadeldavas punktis — kirjeldatakse pingetensori abil
- Peapinged ja peadeformatsioonid
- Ruum-, tasand- ja joonpingus
- Ruum-, tasand- ja joondeformatsioon
- Tasandpingusele vastab ruumdeformatsioon ja vastupidi, tasanddeformatsioonile vastab ruumpingus

9.6 Tugevuskriteeriumid ja varutegur

- Lubatav pinge — tähistused $[\sigma]$, $[\sigma^c]$, $[\sigma^t]$, $[\tau]$
 - Varutegur — väärtus $\geq 1,25$ sõltub konstruktsiooni vastutusrikkusest, materjali omaduste ühtlusest jms.
 - Tugevuskriteeriumid (tugevusteooriad)
 - Lihttööseisundid — $\sigma \leq [\sigma]$, $\sigma^c \leq [\sigma^c]$, $\sigma^t \leq [\sigma^t]$, $\tau \leq [\tau]$
 - Liitööseisundid — ekvivalentpinged $\sigma_{\text{ekv}} \leq [\sigma]$
 - * Kujumuutuse energia kriteerium ehk von Miesesi kriteerium (von Mises–Huber–Maxwell) — tänapäeval väga laialdaselt kasutusel
 - $\sigma_{\text{ekv}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3$
 - * Suurima nihkepinge kriteerium ehk Tresca kriteerium
 - $\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3$
 - * Maksimaalse peadeformatsiooni kriteerium
 - $\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3$
 - * jne.
 - Temperatuuri mõju — külmahaprus
-

9.7 Dünaamilised koormused

- Tsükliline koormamine — väsimus
 - Väsimuspragu ja väsimuspurunemine
- Löök
 - Löögisitkus
- Võnkumine
 - Resonants
- Lained
 - Akustilised lained
 - Deformatsioonilained
 - Nihkelained
 - Survelained