

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

Pideva Keskkonna Mehaanika

Loengukonspekt

Tallinn 2002/2003/2004

Eessõna

Käesolev loengukonspekt põhineb autori poolt alates 1996. aastast Tallinna Tehnikaülikoolis tehnilise füüsika eriala üliõpilastele peetud pideva keskkonna mehaanika loengutel. Aine käsitus on mitte-lineaarne ning põhineb A.C. Eringeni ja M.N.L. Narasimhani õpikutel [1] ja [2] (vt. soovitatud kirjanduse loetelu lk. 5). Kursuse peaesmärgiks on anda ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhi-meetodeist ja põhivõrrandest, mis kehtivad nii tahkete kehade kui vedelike ja gaaside puhul. Seetõttu ei pöörata konkreetsetele rakendustele samapalju tähelepanu.

Loengukonspekti esimese variandina tuleb vaadelda autori poolt käsitsi kirjutatud ja 1996. kuni 1999. aastani loengutel kasutatud kilesid, millest üliõpilased said endale koopiad. 1999/2000 õppeaasta kevadsemestri jooksul valmis käesoleva loengukonspekti “esimene trükk”, vormistatuna L^AT_EX-s. 2001. aasta variandi puhul oli võrreldes eelmisega lisatud eessõna ja epiloog. 2002/2003. õppeaasta variandi jaoks sai 4. peatükk täielikult ümbertöötatud ja teiste peatükkide osas tehtud nii muudatusi kui lisatud uut materjali. Võrreldes eelmiste variantidega pikenes kirjanduse loetelu. Käesoleva, s.o. 2003/2004 aasta variandi puhul pole tekstis olulisi muudatusi tehtud — parandatud on vaid ilmsiks tulnud trükivead. Kuna tegu on õppevahendiga, mis jõudis seda ainet õppivate tudengiteni 2001/2002 kevadsemestril pidevalt uuenedes ja täienedes, siis on nimetatud loetelu esitatud sissejuhatava peatüki viimase paragrahvina (mitte aga vahetult enne sisukorda nagu on kombeks

fikseeritud sisuga ja kirjastatud õppevahendite puhul).

Märkused:

1. Nii loengukonspekt on väljas internetis minu koduleheküljel <http://cens.ioc.ee/~salupere>.
2. Loengukonspekt pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpikuna.
3. Teksti paremas servas olevad märgid (\surd , \bullet , \star jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitatakse olulisi selgitavaid märkusi.
4. Loengukonspekt võib endiselt sisaldada trükivigu.

Lõpetuseks avaldan siirast tänu Küberneetika Instituudi vanemteadurile Arvi Ravasoole, kes luges TTÜ-s käesolevat õppeainet enne mind ning kelle loengumaterjalid olid mulle 1996. aastal hindamatuks abiks.

Andrus Salupere

Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Pideva keskkonna mehaanika aine ja meetodid

Pideva keskkonna mehaanika (PKM) on mehaanika osa, mis uurib gaaside, vedelike ja deformeeruvate tahkete kehade (tahkiste) liikumist välismõjutuste toimel. PKM uurimisobjektiks on keskkonnad või tahked kehad, mille osakeste vahekaugus liikumisel muutub.

Liikumine on siin tunduvalt laiem mõiste kui jäiga keha mehaanikas. Näiteks: vee voolamine ühest anumast teise, trossi pikenemine • koormamisel, tahke keha liikumine vedelikus või gaasis, õhu tsirkulatsioon atmosfääris, jne., jne. PKM aineks on selliste dünaamiliste protsesside kirjeldamine.

PKM baseerub eksperimentaalmehaanika tulemustel, kuid tema meetoodika on matemaatiline, st. mehaanika ülesanded lahendatakse matemaatiliste meetodite abil. Seega, et väljaselgitada deformeeruvate keskkondade liikumise seaduspärasused, tuleb koostada matemaatiline mudel, mille käitumine peab olema kooskõlas eksperimendidel saadud tulemustega. ✓

1.2 Pideva keskkonna mehaanika põhieeldused, aksioomid ja hüpoteesid

Pidevushüpotees

Kõik kehad koosnevad osakestest, kuid meid huvitavas mahus (ruumalas) on neid palju. Seetõttu eeldame, et uuritavad *vedelikud, gaasid ja tahked kehad on sellised keskkonnad, mis täidavad vaadeldava ruumi pidevalt*. See hüpotees võimaldab nende keskkondade matemaatilisel kirjeldamisel kasutada pidevaid funktsioone.

Ruumi meetrilisus

Eeldame, et *kahe pidevas ruumis asuva punkti vaheline kaugus on alati üheselt määratav*.

Näide 1.2.1. ...

Eksperimendid on näidanud, et reaalseid füüsikalisi ruume võib mitte väga suurte mastaapide puhul lugeda eukleidilisteks ruumideks. Meie vaatleme edaspidi eranditult eukleidilisi ruume. Mehaanikat, mis baseerub eukleidilisel ruumil, nimetatakse Newtoni mehaanikaks. ✓

Aja absoluutsus

Aeg kulgeb kõigis taustsüsteemides ühesuguselt¹. Teisisõnu, eeldame et *eksisteerib absoluutne aeg*.²

¹Efekte, mis ilmnevad valguse kiirusele lähedastel kiirustel, antud kursuses ei vaadelda.

²Newton: “Absoluutsel ajal pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ning ta kulgeb ühtlaselt.” Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel siiski mingist konkreetsest füüsikalisest nähtusest.

1.3 Kirjandus

1. A.C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continious Media*. McCraw-Hill Book Company, New-York et al., 1962.
2. M.N.L. Narasimhan. *Principlec of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993.
3. A.C. Eringen. *Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, inc., New-York et al., 1967.
4. Y.C. Fung. *Foundation of Solid Mechanics*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
5. Y. Başar, D. Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer, Berlin et al., 2000.
6. A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics. Series: Longman mathematical texts*. Longman Scientific & Thechnical, Harlow, 1988.
7. J. Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts, Thermoelasticity*. Springer, Berlin et al., 2001.
8. L.I. Sedov. *Mehanika splošnoi sredõ I*. Nauka, Moskva, 1973. (vene keeles)
9. J. Engelbrecht. *Sissejuhatus deformeeruva keha mehaanikasse*. Tallinn, 1984.
10. Ü. Lepik, K. Soonets. *Osnovõ mehaniki splošnoi sredõ*. Tartu, 1980. (vene keeles)
11. Ü. Lepik, K. Soonets. *Pideva keskkonna mehaanika II*. Tartu, 1986.

Loengukonspekti koostamisel on peamiselt kasutatud õpikuid [1] ja [2].

Peatükk 2

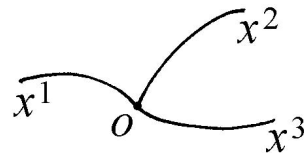
Deformeeruva keha kinemaatika

2.1 Pideva keskkonna liikumise kirjeldamise kaks viisi

2.1.1 Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjoonelise koordinaatsüsteemi x^1, x^2, x^3 , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalseste punktide liikumist.



Joonis 2.1: Euleri koordinaadid

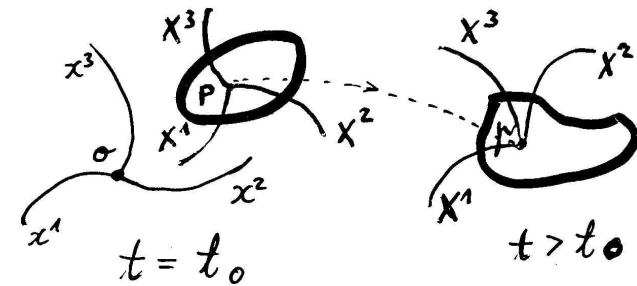
Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks* ehk *ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate x^1, x^2, x^3 — *Euleri koordinaatideks (EK)* ehk *ruumilis-*

teks koordinaatideks. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Lagrange'i koordinaadid

Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalseste punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi X^1, X^2, X^3 . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem X^1, X^2, X^3 . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks* ehk *materiaalseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate X^1, X^2, X^3 — *Lagrange'i koordinaatideks (LK)* ehk *materiaalseteks koordinaatideks*.



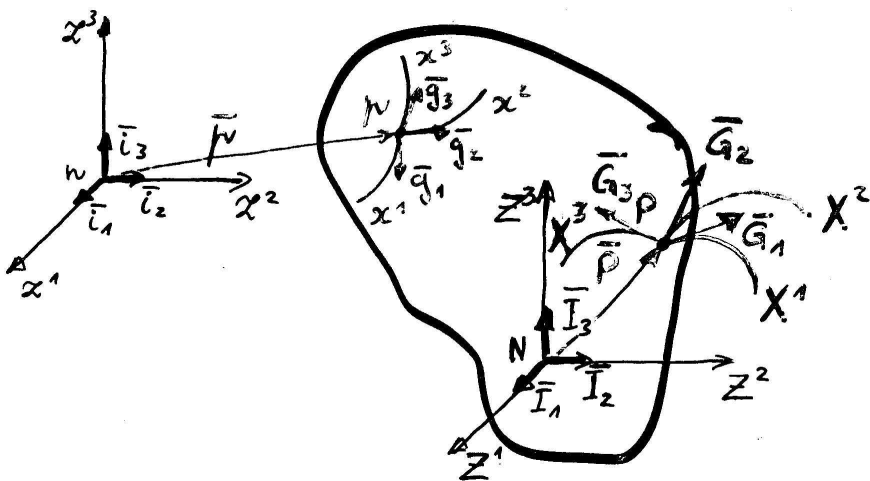
Joonis 2.2: Lagrange'i koordinaadid

2.1.2 Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide kaudu

Eukleidilises ruumis E^3 saab alati sisse tuua Descartes'i ristkoordinaadid (DRK). Toome nüüd Euleri kõverjoonelised koordinaadid sisse läbi Euleri Descartes'i ristkoordinaatide (EDRK) z^1, z^2, z^3 . Selleks eeldame, et EDRK z^1, z^2, z^3 sõltuvad kolmest Eukleidilise ruumi E^3 muutujast x^1, x^2, x^3 , st.,

$$z^k = f^k(x^1, x^2, x^3) = z^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

kus funktsioonid f^k kuuluvad klassi $C^r, r \geq 1$ (st., nad on pidevad funktsioonid, mis omavad pidevaid osatuletisi kuni järguni r) ja on defineeritud mingis ruumi E^3 piirkonnas. Nüüd tuleb määratleda



Joonis 2.3: Kõverjoonelised koordinaadid ja DRK

tingimused, mille puhul õnnestub võrranditest (2.2) avaldada

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

nii, et (2.2) ja (2.3) oleksid teineteise ühesed pöördteisendused.

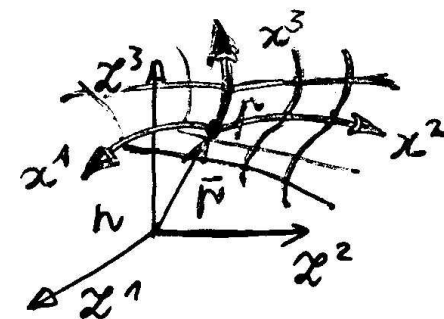
Matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemi (teoreem ilmutamata funktsioonist)¹ põhjal omab teisendus (2.2) punkti p ümbruses δ ühest pöördteisendust (2.3) siis ja ainult siis kui jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0; |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (2.4)$$

Siin $x_0^k, k = 1, 2, 3$, on ruumipunkti p koordinaadid ja

$$\left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial x^1} & \frac{\partial z^1}{\partial x^2} & \frac{\partial z^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z^2}{\partial x^1} & \frac{\partial z^2}{\partial x^2} & \frac{\partial z^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z^3}{\partial x^1} & \frac{\partial z^3}{\partial x^2} & \frac{\partial z^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Kui fikseerime avaldise (2.2) vasakul poolel $(z^1, z^2, z^3) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3)$, siis saame kolme lõikuva pinna võrrandid. Teatavasti esitavad kaks lõikuvat pinda kõvera (kõverjoone) ja kolm lõikuvat pinda punkti. Kui $(z^1, z^2, z^3) = (z_*^1, z_*^2, z_*^3)$ on punkti p koordinaadid, siis paari-kaupa lõikuvad pinnad esitavad kolm ruumipunkti p läbivat kõverat. Neid ruumipunkti p läbivat kolme pinda nimetatakse *koordinaatpindadeks* ja kolme kõverat *koordinaatkõverateks*.



Joonis 2.4: Koordinaatkõverad ja koordinaatpinnad

¹Tõestust vaata näiteks õpikust [2] lk. 28–30

Ajahetkel $t = t_0$ toome analoogselt sisse Lagrange'i kõverjoonelised koordinaadid — eeldame, et LDRK Z^1, Z^2, Z^3 on avaldatavad LK X^1, X^2, X^3 kaudu kujul

$$Z^K = Z^K(X^1, X^2, X^3), \quad K = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Vastav pöördteisendus

$$X^K = X^K(Z^1, Z^2, Z^3), \quad K = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

eksisteerib ja on ühene materiaalse punkti P ümbruses δ parajasti siis kui jakobiaan

$$J_L = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^L} \right| \neq 0; \quad |X^K - X_0^K| < \delta. \quad (2.8)$$

Avaldisi (2.2), (2.3), (2.6) ja (2.7) nimetatakse *koordinaatteisendusteks*, kusjuures (2.2) ja (2.3) kehtivad suvalisel ajahetkel, kuid (2.6) ja (2.7) vaid $t = t_0$ puhul (viimaseid kasutatakse vaid selleks, et LK sisse tuua).

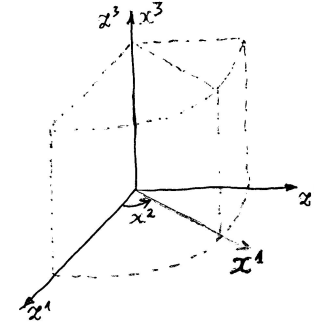
Edaspidises eeldame, et

- kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on sisse toodud Descartes'i ristkoordinaatide kaudu (EK kujul (2.2) ja LK kujul (2.6)) selliselt, et jakobiaanid (2.4) ja (2.8) pole samaselt nullid ruumis E^3 või vähemalt mingis meid huvitavas ruumi E^3 piirkonnas (v.a. mõned singulaarsed punktid, jooned või pinnad);
- üldjuhul on pikkuse mõõtmiseks piki telgi z^k ja Z^K valitud ühtne mastaap.

Märkused:

- Selliselt sisse toodud kõverjoonelised koordinaadid on üldjuhul lokaalsed ja pole üldjuhul ortogonaalsed. •
- $J \neq 0 \Rightarrow J > 0$ või $J < 0$ igas ruumpunktis. ✓

Näide 2.1.1. Euleri koordinaatideks x^k on silindrilised koordinaadid. Kas EK on üheselt määratud EDRK kaudu? Millised on koordinaatpinnad ja koordinaatkõverad?



Joonis 2.5: Silindrilised koordinaadid

Defineerime x^k läbi z^k :

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases} \quad (2.9)$$

Pöördteisendus

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan(z^2/z^1) \\ x^3 = z^3 \end{cases} \quad (2.10)$$

Jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| = \dots$$

Järelikult, ühene pöördteisendus eksisteerib ...

2.1.3 Liikumise kirjeldamine

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, t) \quad (2.11)$$

või

$$X^K = X^K(x^1, x^2, x^3, t), \quad (2.12)$$

mis siirdab materiaalse punkti X^1, X^2, X^3 ruumipunkti x^1, x^2, x^3 . Parameetrik on siin aeg t . Alghetkel $t = t_0$ kujutavad teisendused (2.11) ja (2.12) (parameetrist sõltumatuid) koordinaat teisendusi. Tihti on kasulik kui $t = t_0$ puhul teljestikud x^k ja X^K ühtiksid, st., hetkel $t = t_0$ $x^k = X^K$ kui $k = K$. Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel $t = t_0$ automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel $t > t_0$ lihtsalt leitav.

Analoogselt eelmise punktiga 2.1.2 tekib ka siin küsimus liikumisseaduse ühesusest, st., teisendused (2.11) ja (2.12) peavad olema teineteise ühesed pöörde teisendused. Eeldades, et nii funktsioon (2.11) kui (2.12) kuuluvad klass C^r , $r \geq 1$, on see tingimus täidetud ruumipunkti p ümbruses δ parajasti siis kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \neq 0 \quad |x^k - x_0^k| < \delta. \quad (2.13)$$

Jakobiaan (2.13) väljendab tegelikult pidevuse aksioomi, mille põhjal positiivne lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks² ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse³ (joon deformeerub jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks).

²ik. *indestructibility of matter*

³ik. *impenetrability of matter*

Kui keskkonnas esineb katkevusi (näit. kihiline materjal või praod), pole eeltoodu otseselt kasutatav ja tuleb sisse tuua lisatingimusi. Samuti tuleb erilist tähelepanu pöörata võimalikele singulaarsetele punktidele, joontele või/ja pindadele, kus tingimus (2.13) pole täidetud.

Funktsioonide (2.11) ja (2.12), st., liikumisseaduste leidmine ongi üks pideva keskkonna mehaanika põhiülesandeid.

Kui liikumine on kirjeldatud avaldistega (2.11), siis öeldakse, et on antud *liikumise Lagrange'i kirjeldus* — antud juhul saame teada, millises ruumipunktis x^k asub materiaalne punkt X^K hetkel t . Kui $t = t_0$ puhul EK ja LK ühtisid, siis saame liikumisseadusest (2.11) teada, millises ruumipunktis asub hetkel t see materiaalne punkt, mis alghetkel oli ruumipunktis $x^k = X^K$ ($k = K$). Lagrange'i kirjeldust on otstarbekas kasutada deformeeruva tahke keha ülesannete puhul, sest siin keha peaasjalikult vaid deformeerub välisjõudude toimel ning tema materiaalsed punktid ei paigutu ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime materiaalse punkti X^K , siis avaldistest (2.11) saame tema liikumisseaduse kujul

$$x^k = f^k(t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Avaldised (2.12) esitavad *liikumise Euleri kirjelduse* — nende põhjal saab määrata materiaalse punkti X^K , mis hetkel t asub ruumipunktis x^k . Seda moodust on mõistlik kasutada näiteks hüdrodünaamika ülesannete puhul, sest vedeliku “osakesed” (materiaalsed punktid) paigutuvad ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime ruumipunkti x^k , siis saab liikumisseadus (2.11) kuju

$$X^K = F^K(t), \quad K = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

ja esitab neid materiaalseid punkte, mis liiguvad läbi selle fikseeritud ruumipunkt.

Näide 2.1.2. *Liikumise Lagrange'i kirjeldus*

$$\begin{cases} x^1 &= X^1 + X^2(e^t - 1), \\ x^2 &= X^1(e^{-t} - 1) + X^2, \\ x^3 &= X^3. \end{cases}$$

Liikumise Euleri kirjeldus

$$\begin{cases} X^1 &= \frac{-x^1 + x^2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X^2 &= \frac{x^1(e^{-t} - 1) - x^2}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X^3 &= x^3. \end{cases}$$

Alghetkel LK ja EK ühtivad. Kas liikumine on üheselt määratud?

Jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| = \dots$$

...

2.2 Deformatsioon ja siire

2.2.1 Skalaar, vektor ja tensor

Skalaar

Vaatleme koordinaatsüsteeme ζ^i ja η^i . Funktsiooni $\varphi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \equiv \varphi(\zeta)$ nimetatakse (absoluutseks) *skalaariks* kui ta ei muuda koordinaatteisendusega $\zeta^k = \zeta^k(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \equiv \zeta^k(\boldsymbol{\eta})$, $k = 1, 2, 3$ oma algväärtust, st.,

$$\varphi(\zeta^1(\boldsymbol{\eta}), \zeta^2(\boldsymbol{\eta}), \zeta^3(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi(\boldsymbol{\eta}) = \varphi(\zeta). \quad (2.16)$$

Seega ei sõltu skalaari väärtus antud punktis koordinaatide valikust.

Näide: *Temperatuur on absoluutne skalaar.*

Kontravariantne vektor

Suurusi $\varphi^k(\zeta)$ nimetatakse vektori kontravariantseteks komponentideks ehk lihtsalt kontravariantseteks vektoriks kui koordinaatteisenduse $\zeta = \zeta(\boldsymbol{\eta})$ puhul muutub ta vastavalt seadusele

$$\varphi^k(\zeta(\boldsymbol{\eta})) \equiv \psi^k(\boldsymbol{\eta}) = \varphi^m(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Suurusi $\psi^k(\boldsymbol{\eta})$ tuleb siin mõista kui suuruste $\varphi^k(\zeta)$ komponente koordinaatsüsteemis η^i , $i = 1, 2, 3$. Samuti on siin esmakordselt kasutatud *summeerimiskokkulepet* $\sum_{i=1}^3 a^i b_i \equiv a^i b_i$, mida jäämegi kasutama.

Näide: Diferentsiaal on kontravariantne vektor, sest võttes

$\varphi^k = d\zeta^k$, saame

$$\psi^k = d\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \equiv \varphi^m \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}.$$

Kovariantne vektor

Suurusi $\varphi_k(\zeta)$ nimetatakse vektori kovariantseteks komponentideks ehk lühidalt kovariantseks vektoriks kui nad koordinaatide teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad vastavlt seadusele

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

Näide: Osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, sest tähistades

$$\varphi_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m}$$

kus Φ on absoluutne skalaar, saame

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kontravariantne, kovariantne ja segatensor

Suurusi $\Phi^{kl}(\zeta)$, $\Phi_{kl}(\zeta)$ ja $\Phi^k_l(\zeta)$ nimetatakse vastavalt kontravariantseteks-, kovariantseks- ja segatensoriks kui nad koordinaat-teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad seaduste

$$\Phi^{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^{kl}(\eta) = \Phi^{mn}(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \eta^l}{\partial \zeta^n}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (2.19)$$

$$\Phi_{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi_{kl}(\eta) = \Phi_{mn}(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

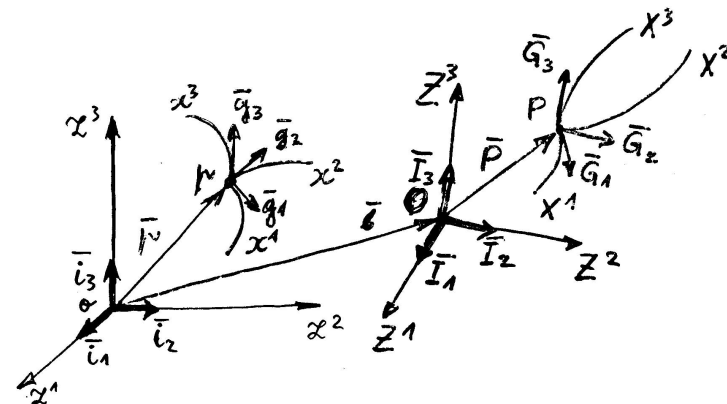
ja

$$\Phi^k_l(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^k_l(\eta) = \Phi^m_n(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

järgi.

2.2.2 Baasivektor, meetriline tensor

Kovariantsed baasivektorid



Joonis 2.6: Kovariantsed baasivektorid

Vaatleme kahte DRK — üks neist on EDRK z^k ja teine LDRK Z^K . Vastavad ühikbaasid tähistame \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K . Kui eeldame, et pikkuse mastaap piki telgi z^k ja Z^K on sama, siis omavad vektorid \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K võrdset ühikpikkust. Kõverjoonelised LK tuuakse teatavasti sisse kujul (2.6), st.,

$$Z^K = Z^K(X^1, X^2, X^3), \quad K = 1, 2, 3,$$

ja kõverjoonelised EK kujul (2.2), st.,

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3.$$

Kohavektorid \mathbf{P} ja \mathbf{p} avalduvad läbi LDRK ja EDRK kujul

$$\mathbf{P} = Z^K(X^1, X^2, X^3)\mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{p} = z^k(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_k. \quad (2.22)$$

Viimastest leiame kohavektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} lõpmata väikesed muudud ehk diferentsiaalid

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} dX^K = \mathbf{G}_K dX^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} dx^k = \mathbf{g}_k dx^k, \quad (2.23)$$

kus vektoreid

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \quad (2.24)$$

ja

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \quad (2.25)$$

nimetatakse vastavalt kõverjooneliste koordinaatide X^K ja x^k kovariantseteks baasivektoriteks. Nad on suunatud piki koordinaatkõvera puutujaid (vaadeldavas punktis) ja liikumisel ühest punktist teise muutuvad nad üldjuhul nii suuruselt kui suunalt. Seega moodustavad nad vektorvälja.

Loomulikult saab suurusi $d\mathbf{P}$ ja $d\mathbf{p}$ avaldada DRK kaudu kujul

$$d\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} dZ^K = \mathbf{I}_K dZ^K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} dz^k = \mathbf{i}_k dz^k \quad (2.26)$$

ning DRK baasivektoreid \mathbf{I}_K ja \mathbf{i}_k omakorda baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k kaudu kujul

$$\mathbf{I}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z^K} = \frac{\partial X^L}{\partial Z^K} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^k} = \frac{\partial x^l}{\partial z^k} \mathbf{g}_l. \quad (2.27)$$

Kovariantne meetriline tensor

Elementaar pikkuse ruut $dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P}$ avaldub lähtudes valemist (2.26) kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dZ^K \mathbf{I}_K \cdot dZ^L \mathbf{I}_L$$

ja lähtudes valemist (2.23) kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dX^K \mathbf{G}_K \cdot dX^L \mathbf{G}_L.$$

Järgnevalt defineerime Kroneckeri delta

$$\delta_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \begin{cases} 1, & K = L \\ 0, & K \neq L \end{cases} \quad (2.28)$$

ja kovariantse meetrilise tensori

$$G_{KL} = G_{LK} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L \stackrel{(2.24)}{=} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M \cdot \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L}. \quad (2.29)$$

Arvestades viimaseid avaldisi saame elementaar pikkuse ruudu avaldada kujul

$$dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = \delta_{KL} dZ^K dZ^L. \quad (2.30)$$

Analoogselt — elementaar pikkuse ruut

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = \delta_{kl} dz^k dz^l, \quad (2.31)$$

kus Kroneckeri delta

$$\delta_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (2.32)$$

ja kovariantne meetriline tensor

$$g_{kl} = g_{lk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \stackrel{(2.25)}{=} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \cdot \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l}. \quad (2.33)$$

Märkus Suurused ds^2 ja dS^2 on skalaarid ja nende väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust, st., $ds^2(x^1, x^2, x^3) = ds^2(z^1, z^2, z^3)$ ja $dS^2(X^1, X^2, X^3) = dS^2(Z^1, Z^2, Z^3)$.

Kontravariantsed baasivektorid ja meetrilised tensorid

Kovariantsete baaside \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k duaalsed⁴ baasid on defineeritud läbi ortonormaalsustingimuse

$$\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^K_L \text{ ja } \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k_l \quad (2.34)$$

Vektoreid \mathbf{G}^K ja \mathbf{g}^k nimetatakse *kontravariantseteks baasivektoriteks* ja nad avalduvad võrrandisüsteemide (2.34) lahendina kujul

$$\mathbf{G}^K = G^{KL} \mathbf{G}_L \text{ ja } \mathbf{g}^k = g^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (2.35)$$

Viimastes avaldistes esinevad *kontravariantsed meetrilised tensorid* avalduvad läbi kovariantsete meetriliste tensorite kujul

$$G^{KL} = \frac{\text{cofactor } G_{KL}}{G} \equiv \frac{(-1)^{K+L} \Delta_{LK}^G}{G} \quad (2.36)$$

ja

$$g^{kl} = \frac{\text{cofactor } g_{kl}}{g} \equiv \frac{(-1)^{k+l} \Delta_{lk}^g}{g}, \quad (2.37)$$

kus

$$G = |G_{KL}| \text{ ja } g = |g_{kl}| \quad (2.38)$$

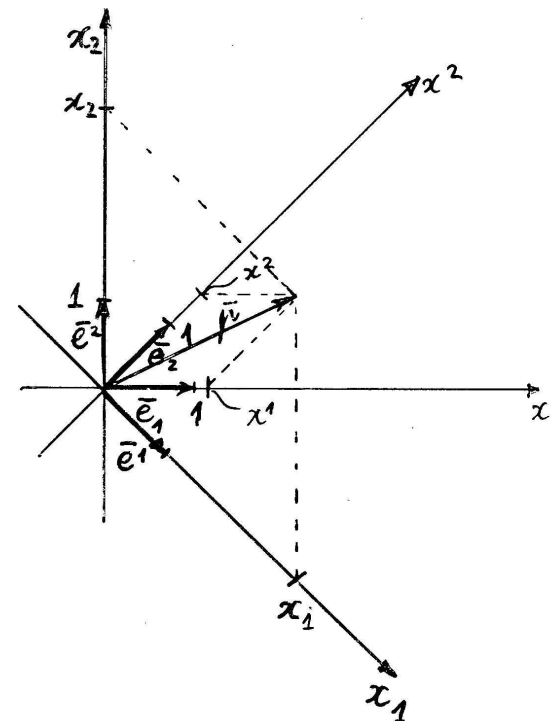
on determinandid ning Δ_{KL}^G ja Δ_{kl}^g on determinantide $|G_{KL}|$ ja $|g_{kl}|$ elemendile indeksipaariga KL või kl vastav miinor. Meetrilised \checkmark tensorid rahuldavad tingimusi

$$G_{KL} G^{LM} = \delta_K^M \text{ ja } g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m. \quad (2.39)$$

Kuna meetrilised tensorid G_{KL} ja G^{KL} on muutujate X^I ning meetrilised tensorid g_{kl} ja g^{kl} muutujate x^i funktsioonid, siis kujutavad G_{KL} ja G^{KL} endast tensorvälju Lagrange'i koordinaatides X^I ning g_{kl} ja g^{kl} tensorvälju Euleri koordinaatides x^i .

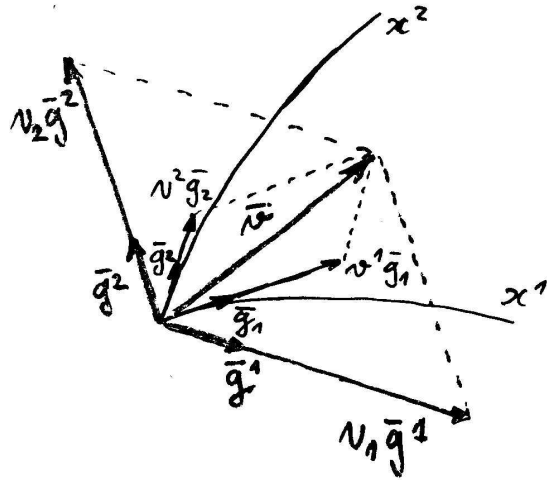
⁴Lad. k. *dualis* — kahene

Näide 2.2.1. Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 2.7:

Näide 2.2.2. Vektorite avaldamine kovariantsete ja kontravariantsete baasivektorite kaudu.



Joonis 2.8:

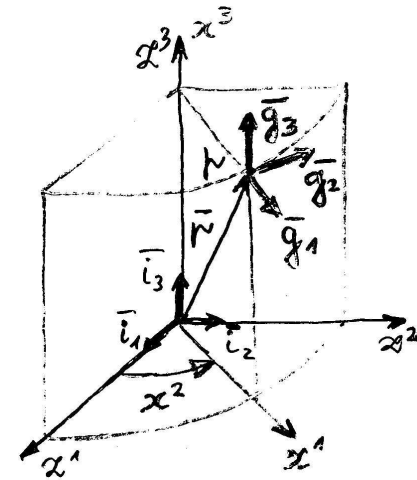
Näide 2.2.3. Pöördume tagasi Näite 2.1.1 (lk. 11) juurde. Euleri koordinaatideks x^k on silindrilised koordinaadid, mis on defineeritud läbi DRK järgmiselt:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 \cos x^2 \\ z^2 = x^1 \sin x^2 \\ z^3 = x^3 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 = \arctan \frac{z^2}{z^1} \\ x^3 = z^3 \end{cases}$$

Vaatleme suvalist punkti p koordinaatidega (x^1, x^2, x^3) ehk kohavektoriga \mathbf{p} . Leida sellele punktile vastavad kovariantsed ja kontravariantsed baasivektorid ning meetrilised tensorid!



Joonis 2.9: Silindrilised koordinaadid

Ülesanne 2.2.1. *Leida silindriliste koordinaatide puhul elementaar pikkuse ruut ds^2 lähtudes valemist (2.31) ja kasutades nii koordinaate x^1, x^2, x^3 kui z^1, z^2, z^3 !*

Suvaline vektor \mathbf{v} on avaldatav nii kovariantse kui ka kontravariantse baasi kaudu, st.,

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{g}^k = v^k \mathbf{g}_k, \quad (2.40)$$

kus v_k ja v^k on vastavalt vektori \mathbf{v} kovariantsed ja kontravariantsed komponendid (koordinaadid), mis üldjuhul on erinevad (ühtivad vaid ortonormeeritud baasi puhul).

Korrutame nüüd avaldist (2.40) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{g}^l ✓

$$v_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^l = v^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l.$$

Kuna $v^k \delta_k^l = v^l$, siis $v_k g^{kl} = v^l$, ehk nimetades indeksid ümber,

$$v^k = g^{kl} v_l. \quad (2.41)$$

Kui korrutada aga avaldist (2.40) kovariantse baasivektoriga \mathbf{g}_l , siis saame analoogselt, et

$$v_k = g_{kl} v^l. \quad (2.42)$$

Sellist protseduuri nimetatakse *vektori indeksite tõstmiseks ja langetamiseks*. Seega, meetriliste tensorite abil saab indekseid tõsta ja langetada ehk teisisõnu — minna kovariantsetelt komponentidelt üle kontravariantsetele ja vastupidi. Lagrange'i koordinaatide puhul analoogselt

$$V^K = G^{KL} V_L \text{ ja } V_K = G_{KL} V^L \quad (2.43)$$

Märkused

1. Üldjuhul pole baasivektorid \mathbf{G}^K , \mathbf{G}_K , \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}_k ühikvektorid. Nende pikkused avalduvad läbi meetrilise tensori diagonaali elementide —

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}^K| &= \sqrt{G^{KK}}, & |\mathbf{G}_K| &= \sqrt{G_{KK}}, & K &= \underline{K} \\ |\mathbf{g}^k| &= \sqrt{g^{kk}}, & |\mathbf{g}_k| &= \sqrt{g_{kk}}, & k &= \underline{k}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Allkriips tähendab siin seda, et korduva indeksi järgi ei summeerita. Eelnenud näite 2.2.3 puhul $|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_3| = 1$ ja $|\mathbf{g}_2| = x^1$

2. Kui kõverjoonelised koordinaadid on ortogonaalsed, siis $g^{kl} = g_{kl} = 0$ kui $k \neq l$. Näite 2.2.3 puhul see nii oligi. Lisaks olid vektorid \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}_k kollineaarsed.

Nihutaja

Seni oleme hoidnud EK ja LK lahus, kuid vahel on vaja ühes koordinaatsüsteemis esitatud vektoreid projekteerida teise koordinaatsüsteemi baasivektoritele. Vaatleme joonist 2.6 (lk. 17) Punktide P ja p kohavektorid

$$\mathbf{P} = P^L \mathbf{G}_L \text{ ja } \mathbf{p} = p^l \mathbf{g}_l.$$

Korrutame neist esimest kontravariantse baasivektoriga \mathbf{G}^K —

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K = P^L \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{G}^K = P^L \delta_L^K = P^K.$$

Seega,

$$P^K = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G}^K \text{ ja } p^k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}^k. \quad (2.45)$$

Viimased kujutavad endast vektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} projektsioone vastavalt baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k sihtidele (vt. Näited 2.2.1 ja 2.2.2).

Oletame nüüd, et tahame viia vektori \mathbf{p} paralleellükkega punkti P ja projekteerida teljestikku X^K , st., baasivektorite \mathbf{G}_K sihile. Tähistame vastava projektsiooni p^K . Nüüd

$$\mathbf{p} = p^K \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = p^k \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \quad (2.46)$$

Korrutame avaldist (2.46) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{G}^L

$$p^K \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}^L = p^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^L.$$

Defineerime nn. *nihutaja*

✓

$$g_k^K \stackrel{\text{def}}{=} g^K_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}_k. \quad (2.47)$$

Seega, tähistades ümber indeksid $L \rightarrow K$ saame

$$p^K = g_k^K p^k = g^K_k p^k, \quad (2.48)$$

mis esitabki kohavektori \mathbf{p} projektsiooni kovariantse baasivektori \mathbf{G}_K sihil.

Korrutades avaldist (2.46) kontravariantse baasivektoriga \mathbf{g}^l ja defineerides *nihutajad*

$$g^k_K \stackrel{\text{def}}{=} g_K^k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}^k, \quad (2.49)$$

saame vektori \mathbf{p} tagasi EK-sse.

$$p^k = g^k_K p^K = g_K^k p^K. \quad (2.50)$$

Analoogselt eelnevaga saab defineerida nihutajad

$$g_{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g_{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{g}_k \quad (2.51)$$

ja

$$g^{kK} \stackrel{\text{def}}{=} g^{Kk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{G}^K = \mathbf{G}^K \cdot \mathbf{g}^k. \quad (2.52)$$

Nihutajad g^k_K , g^K_k jne. on nii muutujate X^1, X^2, X^3 kui ka x^1, x^2, x^3 funktsioonid, sest baasivektorid \mathbf{G}_K ja \mathbf{G}^K sõltuvad Lagrange'i koordinaatidest X^1, X^2, X^3 ning baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{g}^k Euleri koordinaatidest x^1, x^2, x^3 . Enamgi veel, nad osutuvad nn. kahepunktilisteks tensorväljadeks, sest teisenevad kui tensorid mõlemas koordinaatsüsteemis.

Järgnevalt näitame, et

$$g^K_k g^l_K = \delta_k^l. \quad (2.53)$$

Teatavasti

$$v_k = v_K g^K_k = v_l g^l_K g^K_k.$$

Kuna

$$v_k = v_l \delta_k^l,$$

siis peab kehtima võrdus (2.53) ehk nihutajad g^K_k ja g^l_K on teineteise pöördtensorid. Analoogselt

$$g^K_k g^k_L = \delta^K_L. \quad (2.54)$$

Teisendame nüüd nihutajat g_{kK} —

$$g_{kK} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{G}_K \stackrel{(2.25), (2.24)}{=} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \mathbf{i}_l \cdot \frac{\partial Z^L}{\partial X^K} \mathbf{I}_L = \delta_{lL} \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \frac{\partial Z^L}{\partial X^K}, \quad (2.55)$$

kus

$$\delta_{lL} = \delta_{Ll} = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{I}_L. \quad (2.56)$$

Suurus δ_{lL} on Kroneckeri delta vaid juhul kui $z^k \uparrow \uparrow Z^K$.

Tensorite indeksite tõstmine ja langetamine

Peale vektorite indeksite saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada ka tensorite indekseid, näiteks

$$C^K{}_L = G^{KM} C_{ML}$$

$$C_L{}^K = G^{KM} C_{LM}$$

$$C^K{}_L = G_{LM} C^{KM}$$

$$C^{KL} = G^{LM} C^K{}_M$$

$$g_K{}^k = G_{KL} g^{kl} g^L{}_l$$

$$g^{Kk} = G^{KL} g^{kl} g_{Ll}$$

$$g^K{}_k = G^{KL} g_{kl} g^L{}_l$$

$$g_{Kk} = G_{KL} g_{kl} g^{Ll}$$

Näide 2.2.4. Vaatleme juhtu, kus LK ühtib $LDRK$ ning EK ühtib $EDRK$, st., $(X^1, X^2, X^3) = (Z^1, Z^2, Z^3)$ ja $(x^1, x^2, x^3) = (z^1, z^2, z^3)$. Baasivektorid punktides P ja p on avaldiste (2.24) ja (2.25) põhjal

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M = \mathbf{I}_K \quad (2.57)$$

analoogselt

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{i}_k \quad (2.58)$$

Antud juhul ühtivad kovariantsed ja kontravariantsed koordinaadid ja baasid, st.,

$$G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}, \quad (2.59)$$

$$g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}, \quad (2.60)$$

$$g_{Kk} = g^{Kk} = \delta_{Kk}, \quad (2.61)$$

millest viimane on Kroneckeri delta kui $\mathbf{i}_k \uparrow \uparrow \mathbf{I}_K$.

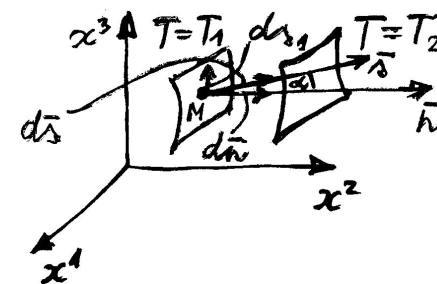
2.2.3 Samaväärtuspinnad, tuletis antud suunas, gradient

Samaväärtuspinnad

Vaatleme skalaarset funktsiooni (näit. temperatuuri)

$$T = T(x^1, x^2, x^3, t) \quad (2.62)$$

Igal ajahetkel võib vaadelda pindu $T = \text{const}$, mida nimetatakse *samaväärtuspindadeks* ehk *ekvipotentsiaalpindadeks*.



Joonis 2.10: Tuletis antud suunas

Tuletis antud suunas

Vaatleme punkti M pinnal $T = T_1$ ja uurime skalaarse suuruse T sõltuvust suunast \mathbf{s} . Suurust

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} \quad (2.63)$$

nimetatakse *tuletiseks suunas* \mathbf{s} .⁵

⁵Kasutatakse ka terminit *tuletis suuna järgi*. I.k. *directional derivative*

Kui $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$ on ekvipotentsiaalpinna $T = T_1$ suvalise puutuja sihis, siis $\partial T / \partial s = 0$.

Kui $\Delta T = T_2 - T_1$, ja liigume normaali sihis, siis $dn = ds \cos \alpha$, st.,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial s \cos \alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha. \quad (2.64)$$

Kui $\alpha \rightarrow 0$, siis $\partial T / \partial s \rightarrow \max$.

Gradient

Funktsiooni *gradient* on defineeritud järgmiselt —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n}^\circ, \quad (2.65)$$

kus \mathbf{n}° on normaalsihiline ühikvektor, mis on suunatud funktsiooni T kasvamise suunas. Teisest küljest —

$$\text{grad } T \stackrel{\text{def}}{=} \nabla T = \mathbf{g}^k \frac{\partial T}{\partial x^k}, \quad (2.66)$$

kus *nabla*

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = g^{kl} \mathbf{g}_l \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.67)$$

Valemeis (2.66) ja (2.67) peame kasutama kontravariantset baasi, sest osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, st., $\partial T / \partial x^k = \Phi_k$.

2.2.4 Deformatsioon ja siire

Siirdevektor

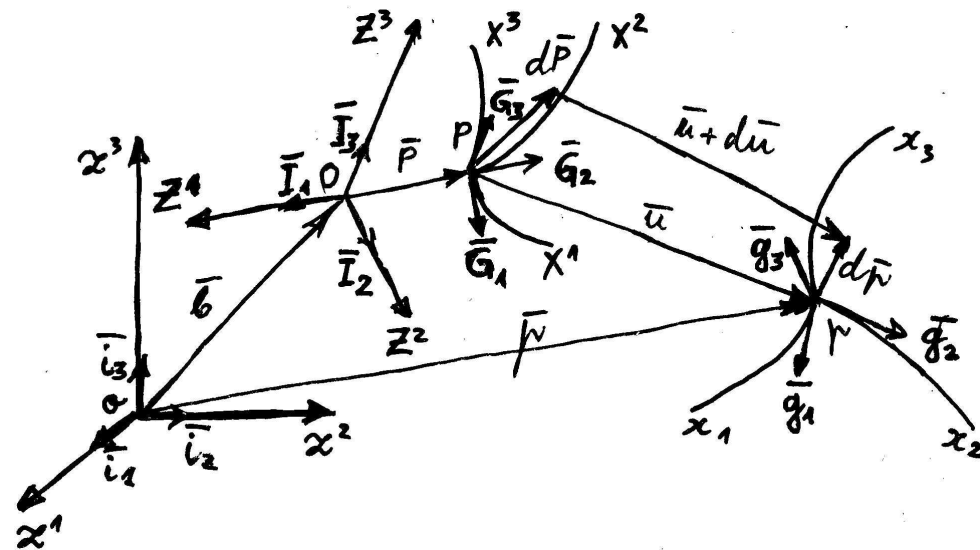
Vaatleme liikumist, mis on üheselt määratud koordinaatteisendusega

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, t) \quad (2.68)$$

või

$$X^K = X^K(x^1, x^2, x^3, t), \quad (2.69)$$

kus parameeter t tähistab aega. Vaatleme materiaalselt punkti P .



Joonis 2.11: Deformatsioon

Euleri koordinaatides on tema asend p määratud kohavektoriga $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, st., \mathbf{p} muutub aja jooksul. Materiaalse punkti P asukoha muut hetkel $t > t_0$ on määratud *siirdevektoriga* \mathbf{u} .

Deformatsioonigradiendid ja deformeerunud keskkonna baasivektorid

Kui eeldada, et alghetkel $t = t_0$ LK ja EK ühtisid, siis vastavalt joonisele 2.11 on $t = t_0$ puhul

$$\mathbf{u} = 0, \mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} \quad \text{ja} \quad ds^2 = dS^2. \quad (2.70)$$

Hetkeks $t > t_0$ on keskkonna materiaalsed osakesed üksteise suhtes liikunud — järelikult $ds^2 \neq dS^2$, st., keha on deformeerunud. *Elementaarpikkuse ruudu muut*

$$ds^2 - dS^2 \quad (2.71)$$

vaadeldakse kui *deformatsiooni mõõtu* ning tihti nimetatakse teda seejuures lühidalt *deformatsiooniks*.

Toome sisse suurused

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k(X^1, X^2, X^3, t)}{\partial X^K} \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} = \frac{\partial X^K(x^1, x^2, x^3, t)}{\partial x^k}, \quad (2.72)$$

mida nimetatakse *deformatsioonigradiendid*.

Indeks peale koma tähistab ka edaspidi osatuletist vastava (kontra-variantse) koordinaadi järgi. ✓

Vastavalt liikumisseadustele (2.68) ja (2.69) avalduvad *koordinaatide täisdiferentsiaalid* kujul

$$dx^k = x^k_{,K} dX^K \quad \text{ja} \quad dX^K = X^K_{,k} dx^k. \quad (2.73)$$

Valemite (2.23) põhjal avalduvad kohavektorite lõpmata väikesed muudud läbi baasivektorite \mathbf{G}_K ja \mathbf{g}_k . Teisendame neid avaldise:

$$\begin{cases} d\mathbf{P} = \mathbf{G}_K dX^K \stackrel{(2.73)}{=} \mathbf{G}_K X^K_{,k} dx^k = \mathbf{c}_k dx^k, \\ d\mathbf{p} = \mathbf{g}_k dx^k \stackrel{(2.73)}{=} \mathbf{g}_k x^k_{,K} dX^K = \mathbf{C}_K dX^K, \end{cases} \quad (2.74)$$

kus suurused

$$\begin{cases} \mathbf{c}_k(x^1, x^2, x^3, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} X^K_{,k} = \mathbf{G}_K X^K_{,k} \\ \text{ja} \\ \mathbf{C}_K(X^1, X^2, X^3, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} x^k_{,K} = \mathbf{g}_k x^k_{,K} \end{cases} \quad (2.75)$$

on vaadeldavad kui uued, keskkonna deformeeritud olekule vastavad, baasivektorid. Teisisõnu, *keskkonna liikumisel transformeeruvad baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{G}_K uuteks baasivektoriteks \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k* . Vektori \mathbf{c}_k leidmiseks tuleb baasivektor \mathbf{G}_K avaldada liikumisseaduse (2.69) abil läbi EK, st.,

$$\mathbf{G}_K(X^1, X^2, X^3) \stackrel{(2.69)}{\rightarrow} \mathbf{G}_K(x^1, x^2, x^3).$$

Analoogselt tuleb \mathbf{C}_K leidmiseks avaldada

$$\mathbf{g}_k(x^1, x^2, x^3) \stackrel{(2.68)}{\rightarrow} \mathbf{g}_k(X^1, X^2, X^3).$$

Deformatsioonigradiendid vahelised seosed

$$x^k_{,K} X^K_{,l} = \delta^k_l \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} x^k_{,L} = \delta^K_L \quad (2.76)$$

Järgnevalt avaldame vana baasi \mathbf{G}_K uue baasi \mathbf{c}_k kaudu: ✓

$$(2.75)_1 \cdot x^k_{,L} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{G}_K = \mathbf{c}_k x^k_{,K}. \quad (2.77)$$

Analoogselt ✓

$$(2.75)_2 \cdot X^K_{,l} \rightarrow \dots \Rightarrow \mathbf{g}_k = \mathbf{C}_K X^K_{,k}. \quad (2.78)$$

Kontravariantsed baasid saadakse ortonormaalsustingimustest

$$\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}_l = \delta^k_l \text{ ja } \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}_L = \delta^K_L, \quad (2.79)$$

kust

$$\begin{cases} \mathbf{c}^k(x^1, x^2, x^3, t) = \mathbf{G}^K(X^1, X^2, X^3)x^k_{,K} \\ \text{ja} \\ \mathbf{C}^K(X^1, X^2, X^3, t) = \mathbf{g}^k(x^1, x^2, x^3)X^K_{,k} \end{cases} \quad (2.80)$$

NB! Meetriliste tensorite g^{kl} , g_{kl} , G^{KL} ja, G_{KL} abil ei saa tõsta ega langetada uute baasivektorite \mathbf{c}_k , \dots , \mathbf{C}^K indekseid, st., üldjuhul $\mathbf{c}^k \neq g^{kl}\mathbf{c}_l$ ja $\mathbf{C}^K \neq G^{KL}\mathbf{C}_L$.

Meil oli eeldatud, et $t = t_0$ puhul EK ja LK ühtivad, st., $x^1 = X^1, \dots, x^3 = X^3$. Järelikult alghetkel

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_K(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t)$$

Vaatleme avaldisi (2.74) —

$$d\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{G}_K}_{\text{i}} dX^K = \underbrace{\mathbf{c}_k}_{\text{ii}} dx^k \text{ ja } d\mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{g}_k}_{\text{iii}} dx^k = \underbrace{\mathbf{C}_K}_{\text{iv}} dX^K. \quad (2.81)$$

i määrab $d\mathbf{P}$ kui $t = t_0$

ii $d\mathbf{P}$ muutumise seadus EK-s

iii määrab $d\mathbf{p}$ igal ajahetkel, sest vastavalt definitsioonile (2.23) ja (2.25) ei muutu $d\mathbf{p}$ ajas

iv määrab muutumatu suuruse $d\mathbf{p}$ muutuvates koordinaatides X^K suvalisel hetkel $t \geq t_0$.

2.2.5 Deformatsioonitensorid

Cauchy ja Greeni deformatsioonitensorid

Vaatleme elementaarpikkuse ruutu:

$$\begin{cases} \text{LK} \rightarrow dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{c}_k dx^k \cdot \mathbf{c}_l dx^l = c_{kl} dx^k dx^l, \\ \text{ja} \\ \text{EK} \rightarrow ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{C}_K dX^K \cdot \mathbf{C}_L dX^L = C_{KL} dX^K dX^L. \end{cases} \quad (2.82)$$

Siin

$$\begin{cases} c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \stackrel{(2.75)}{=} G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \\ \text{ja} \\ C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(2.75)}{=} g^{kl} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{cases} \quad (2.83)$$

Suurust c_{kl} nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensoriks* ja suurust C_{KL} *Greeni deformatsioonitensoriks*. Nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud. Tensoreid c_{kl} ja C_{KL} võib interpreteerida ka kui meetrilisi tenseoreid, sest meetriline tensor $G_{KL}(\mathbf{X})$ transformeerub läbi keskkonna liikumise tensoriks $c_{kl}(\mathbf{x})$ ja $g_{kl}(\mathbf{x}) \rightarrow C_{KL}(\mathbf{X})$.

Kovariantsete tensorite c_{kl} ja C_{KL} indekseid saab kontravariantsete meetriliste tensoritega tõsta (\mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K omi ei saanud!). Saadud kontravariantsete tensorite maatriksid $[c^{kl}]$ ja $[C^{KL}]$ ei osutu aga kovariantsete tensorite maatriksite $[c_{kl}]$ ja $[C_{KL}]$ pöördmaatriksiteks (nagu oli g_{kl} ja G_{KL} puhul). Antud juhul tuleb sisse tuua tensorid

$$\begin{cases} \bar{c}^{-1kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}^l \stackrel{(2.80)}{=} G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} \\ \text{ja} \\ \bar{C}^{-1KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}^L \stackrel{(2.80)}{=} g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l}, \end{cases} \quad (2.84)$$

mille puhul $c_{km} \bar{c}^{-1ml} = \delta_k^l$ ja $C_{KM} \bar{C}^{-1ML} = \delta_K^L$. Tensorit \bar{c}^{-1kl} nimetatakse *Fingeri deformatsioonitensoriks* ja \bar{C}^{-1KL} *Piola deformatsioonitensoriks*

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid

Pöördume tagasi suuruste $d\mathbf{p}$ ja $d\mathbf{P}$ juurde —

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL}dX^KdX^L = c_{kl}dx^kdx^l, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl}dx^kdx^l = C_{KL}dX^KdX^L \end{cases}$$

Viimastest leiame *elementaar pikkuse ruudu muudu*

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}dX^KdX^L = 2e_{kl}dx^kdx^l, \quad (2.85)$$

kus

$$2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} \text{ ja } 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl}. \quad (2.86)$$

Tensorit $E_{KL} = E_{KL}(\mathbf{X}, t)$ nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonitensoriks* ja tensorit $e_{kl} = e_{kl}(\mathbf{x}, t)$ *Euleri deformatsioonitensoriks*. Kasutades valemeid (2.83), (2.75), (2.77) ja (2.78) tuletame seosed tensorite E_{KL} ja e_{kl} vahel:

$$2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL} = \dots\dots\dots$$

$$= 2e_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L}.$$

Seega,

$$E_{KL} = e_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L} \text{ ja } e_{kl} = E_{KL}X^K_{,k}X^L_{,l} \quad (2.87)$$

Valemi (2.87)₁ kasutamise puhul tuleb avaldada $e_{kl}(\mathbf{X}, t)$ ja (2.87)₂ puhul vastupidi $E_{KL}(\mathbf{x}, t)$.

Meetriliste tensorite abil saame leida vastavaid sega- ja kontravariantseid tensoreid:

$$\begin{aligned} E^K_L &= G^{KM}E_{ML}, & E^{KL} &= G^{KM}G^{LN}E_{MN} = G^{LM}E^K_M, \\ e^k_l &= g^{km}e_{ml}, & e^{kl} &= g^{km}g^{ln}e_{mn} = g^{lm}e^k_m. \end{aligned}$$

Descartes'i ristkoordinaatide puhul koordinaadid X ja Z ning x ja z ühtivad,

$$\begin{aligned} G_{KL} &= G^{KL} = \dots = \delta_{KL}, & g_{kl} &= g^{kl} = \dots = \delta_{kl}, \\ E_{KL} &= E^{KL} = E^K_L, & e_{kl} &= e^{kl} = e^k_l. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nüüd

$$\begin{cases} C_{KL} = \delta_{kl}z^k_{,K}z^l_{,L} \equiv \delta_{kl}z_{k,K}z_{l,L} \quad , \\ c_{kl} = \delta_{KL}Z^K_{,k}Z^L_{,l} \equiv \delta_{KL}Z_{K,k}Z_{L,l} \end{cases} \quad (2.89)$$

ja

$$\begin{cases} 2E_{KL} = \delta_{kl}z^k_{,K}z^l_{,L} - \delta_{KL} \equiv \delta_{kl}z_{k,K}z_{l,L} - \delta_{KL} \quad , \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - \delta_{KL}Z^K_{,k}Z^L_{,l} \equiv \delta_{kl} - \delta_{KL}Z_{K,k}Z_{L,l}. \end{cases} \quad (2.90)$$

2.2.6 Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu**Vektori kovariantne osatuletis**

Kõigepealt püüame siirdevektori \mathbf{u} kaudu avaldada vektorid \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k .

Joonise 2.11 (lk. 31) põhjal $\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}$. Seega *siirdevektor*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P} - \mathbf{b}. \quad (2.91)$$

Siirdevektori \mathbf{u} saab avaldada nii LK kui EK kaudu —

$$\mathbf{u} = U^K\mathbf{G}_K = U_K\mathbf{G}^K = u^k\mathbf{g}_k = u_k\mathbf{g}^k, \quad (2.92)$$

kus $U^K(\mathbf{X}, t)$ ja $u^k(\mathbf{x}, t)$ on vektori \mathbf{u} kontravariantsed komponendid ning $U_K(\mathbf{X}, t)$ ja $u_k(\mathbf{x}, t)$ kovariantsed komponendid vastavalt LK- ja EK-s.

Ka nende indekseid saab meetriliste tensorite abil tõsta ja langetada —

$$U^K = G^{KM}U_M, U_L = G_{LK}U^K, u^k = g^{km}u_m, u_l = g_{lk}u^k.$$

$$(2.92) \rightarrow U_K \mathbf{G}^K = u_k \mathbf{g}^k \mid \cdot \mathbf{G}_L \Rightarrow \dots = \dots$$

Tähistame indeksid ümber ($L \rightarrow K$) ja saame

$$U_K = g^k{}_K u_k \text{ ja } u_k = g^K{}_k U_K. \quad (2.93)$$

Definitsioonide (2.75) põhjal

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K(X^1, X^2, X^3, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} \\ \mathbf{c}_k(x^1, x^2, x^3, t) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k} \end{cases}$$

Avaldame valemist (2.91) kohavektorid \mathbf{p} ja \mathbf{P} ning asendame viimastesse avaldistesse. Saame

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} = \mathbf{G}_K + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} \\ \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \mathbf{g}_k - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \end{cases} \quad (2.94)$$

Valemite (2.92) põhjal $\mathbf{u} = U^L \mathbf{G}_L = u^l \mathbf{g}_l$ ning (2.94) saab kuju

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K}(U^L \mathbf{G}_L) \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k}(u^l \mathbf{g}_l) \end{cases} \quad (2.95)$$

Analoogsed avaldised võib tuletada ka siirdevektori kovariantsete komponentide jaoks:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + \frac{\partial}{\partial X^K}(U_L \mathbf{G}^L) \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - \frac{\partial}{\partial x^k}(u_l \mathbf{g}^l) \end{cases} \quad (2.96)$$

Järgnevalt püüame leida avaldistes (2.95) ja (2.96) olevaid osatuletisi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X^K}(U^L \mathbf{G}_L) = \frac{\partial U^L}{\partial X^K} \mathbf{G}_L + U^L \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K}, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(u^l \mathbf{g}_l) = \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \mathbf{g}_l + u^l \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k}, \end{cases} \quad (2.97)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X^K}(U_L \mathbf{G}^L) = \frac{\partial U_L}{\partial X^K} \mathbf{G}^L + U_L \frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K}, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(u_l \mathbf{g}^l) = \frac{\partial u_l}{\partial x^k} \mathbf{g}^l + u_l \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k}. \end{cases} \quad (2.98)$$

Esimeste liidetavate leidmine pole probleemiks — see on lihtne. Teiste liidetavatega on lugu keerukam, sest osatuletisi tuleb leida baasivektoritest $\mathbf{G}_L, \dots, \mathbf{g}^l$.

Vastavalt definitsioonidele (2.24) ja (2.25)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_L &= \frac{\partial Z^N}{\partial X^L} \mathbf{I}_N \rightarrow \mathbf{I}_N = \frac{\partial X^L}{\partial Z^N} \mathbf{G}_L, \\ \mathbf{g}_l &= \frac{\partial z^n}{\partial x^l} \mathbf{i}_n \rightarrow \mathbf{i}_n = \frac{\partial x^l}{\partial z^n} \mathbf{g}_l. \end{aligned}$$

Seega osatuletised võrrandis (2.97)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \mathbf{I}_N = \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \mathbf{i}_n = \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n} \mathbf{g}_m. \end{cases} \quad (2.99)$$

Võtame kasutusele *Christoffeli teist liiki sümboolid*

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n}. \quad (2.100)$$

Valemid (2.99) saavad nüüd kuju

$$\frac{\partial \mathbf{G}_L}{\partial X^K} = \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} \mathbf{G}_M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_m. \quad (2.101)$$

Analoogselt saab näidata, et

$$\frac{\partial \mathbf{G}^L}{\partial X^K} = - \left\{ \begin{matrix} L \\ KM \end{matrix} \right\} \mathbf{G}^M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}^l}{\partial x^k} = - \left\{ \begin{matrix} l \\ km \end{matrix} \right\} \mathbf{g}^m. \quad (2.102)$$

Christoffeli esimest liiki sümboolid on defineeritavad kahel moel.

i) Läbi Christoffeli teist liiki sümboolite

$$\left\{ \begin{matrix} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} G_{MN} \left\{ \begin{matrix} N \\ KL \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} = G^{MN} [KL, N], \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} g_{mn} \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = g^{mn} [kl, n]. \end{matrix} \right. \quad (2.103)$$

ii) Arvestades meetriliste tensorite definitsioone (2.29) ja (2.33),

$$G_{KL} = \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L = \delta_{MN} \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \frac{\partial Z^N}{\partial X^L},$$

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = \delta_{mn} \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \frac{\partial z^n}{\partial x^l},$$

saame

$$\left\{ \begin{matrix} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial G_{LM}}{\partial X^K} - \frac{\partial G_{KL}}{\partial X^M} \right), \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \end{matrix} \right. \quad (2.104)$$

Väga tihti defineeritaksegi Christoffeli esimest liiki sümboolid kujul (2.104). Valemeist (2.100) ja (2.104) jäeldub, et Christoffeli sümboolid on sümmeetrilised indekseste K ja L (k ja l) suhtes —

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} M \\ LK \end{matrix} \right\}, \quad [KL, M] = [LK, M],$$

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ lk \end{matrix} \right\}, \quad [kl, m] = [lk, m]. \quad (2.105)$$

NB! *Christoffeli sümboolid pole tensorid!*

Tuleme tagasi valemite (2.97) ja (2.98) juurde ning esitame nad kujul

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial X^K} (U^L \mathbf{G}_L) = U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \mathbf{g}_l) = u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \end{matrix} \right. \quad (2.106)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial X^K} (U_L \mathbf{G}^L) = U_{M;K} \mathbf{G}^M, \\ \frac{\partial}{\partial x^k} (u_l \mathbf{g}^l) = u_{m;k} \mathbf{g}^m, \end{matrix} \right. \quad (2.107)$$

Siin

$$\left\{ \begin{matrix} U^M{}_{;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} U^L, \\ u^m{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} u^l \end{matrix} \right. \quad (2.108)$$

on kontravariantsete vektorite kovariantsed osatuletised (meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} järgi) ning

$$\left\{ \begin{matrix} U_{M;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_M}{\partial X^K} - \left\{ \begin{matrix} L \\ MK \end{matrix} \right\} U_L, \\ u_{m;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_m}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} u_l \end{matrix} \right. \quad (2.109)$$

on kovariantsete vektorite kovariantsed osatuletised (meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} järgi). √

Suurused $U^M_{;K}$ ja $u^m_{;k}$ on segatensorid ning $U_{M;K}$ ja $u_{m;k}$ kovariantsed tensorid. •

Meetriliste tensoritega saab teostada üleminekuid (2.108) → (2.109) ja vastupidi:

$$\begin{cases} U^L_{;K} = G^{LM}U_{M;K} & U_{L;K} = G_{LM}U^M_{;K} \\ u^l_{;k} = g^{lm}u_{m;k} & u_{l;k} = g_{lm}u^m_{;k} \end{cases}$$

Kovariantse osatuletise geomeetriline interpretatsioon

Kovariantse osatuletise avaldised (2.108) ja (2.109) koosnevad kahest osast. Neist esimene iseloomustab vektori \mathbf{u} muutumist kui muutub koordinaat X^K (või x^k) ning teine \mathbf{u} muutumist kui seoses X^K (või x^k) muutumisega muutub baas \mathbf{G}_M (või \mathbf{g}_m).

Sirgjooneliste koordinaatide puhul on Christoffeli sümbolid samaselt nullid ja seega kovariantne osatuletis on võrdne “harilikku” osatuletisega. *

Pöördume nüüd tagasi uute baasivektorite \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k avaldiste (2.95) ja (2.96) juurde. Arvestades avaldise (2.106) ja (2.107) saame

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U^M_{;K}\mathbf{G}_M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u^m_{;k}\mathbf{g}_m, \end{cases} \quad (2.110)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_K = \mathbf{G}_K + U_{M;K}\mathbf{G}^M, \\ \mathbf{c}_k = \mathbf{g}_k - u_{m;k}\mathbf{g}^m. \end{cases} \quad (2.111)$$

Avaldame nüüd Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorid läbi siirete võttes arvesse valemeid (2.110) —

$$C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(2.110)}{=} \dots$$

=

=

Kokku saame

$$\begin{cases} C_{KL} = G_{KL} + U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K}U^N_{;L}, \\ c_{kl} = g_{kl} - u_{k;l} - u_{l;k} + u_{n;k}u^n_{;l}. \end{cases} \quad (2.112)$$

Arvestades Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorite definitsioone (2.86) saame omakorda

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K}U^M_{;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k}u^m_{;l}. \end{cases} \quad (2.113)$$

Need võrrandid on PKM ühed põhivõrrandid, mis seovad omavahel Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid ning materiaalsete punktide siirded \mathbf{u} .

Sirgjooneliste koordinaatide puhul $U_{M;K} \equiv U_{M,K}$ jne.

DRK puhul lisaks eelnevale $U^M_{;L} \equiv U_{M,K}$ jne. ning võrrandid (2.113) saavad kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L,K} + U_{K,L} + U_{M,K}U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l,k} + u_{k,l} - u_{m,k}u_{m,l}. \end{cases} \quad (2.114)$$

Avaldame kohavektorite \mathbf{P} ja \mathbf{p} lõpmata väikesed muudud $d\mathbf{P}$ ja $d\mathbf{p}$ läbi siirete. Valemite (2.74) põhjal

$$d\mathbf{P} = \mathbf{c}_k(x^1, x^2, x^3, t)dx^k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{p} = \mathbf{C}_K(X^1, X^2, X^3, t)dX^K.$$

Asendades siia \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K valemeist (2.110) ja (2.111) saame

$$\begin{cases} d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u^m_{;k}\mathbf{g}_m)dx^k, \\ d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U^M_{;K}\mathbf{G}_M)dX^K, \end{cases} \quad (2.115)$$

$$\begin{cases} d\mathbf{P} = (\mathbf{g}_k - u_{m;k}\mathbf{g}^m)dx^k, \\ d\mathbf{p} = (\mathbf{G}_K + U_{M;K}\mathbf{G}^M)dX^K. \end{cases} \quad (2.116)$$

Märkused

1. Ortogonaalse kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul lihtsustuvad mõned avaldised tunduvalt:

- meetriline tensor

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \Rightarrow g_{kl} = 0 \text{ kui } k \neq l; \quad (2.117)$$

- elementaarpikkuse ruut

$$ds^2 = g_{kl}dx^k dx^l = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2; \quad (2.118)$$

- determinant

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}; \quad (2.119)$$

- kontravariantne meetriline tensor †

$$g^{\underline{k}\underline{k}} = 1/g_{\underline{k}\underline{k}}; \quad (2.120)$$

- kontravariantne baas

$$\mathbf{g}^k = g^{\underline{k}\underline{k}}\mathbf{g}_k, \quad k = \underline{k}; \quad (2.121)$$

- Christoffeli teist liiki sümbolid ‡

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ \underline{k}\underline{k} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{\underline{l}\underline{l}}} \frac{\partial g_{\underline{k}\underline{k}}}{\partial x^l}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (2.122)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}l \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^l} \ln \sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}, \quad l \neq \underline{k}; \quad (2.123)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}\underline{k} \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{k}}} \ln \sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}}; \quad (2.124)$$

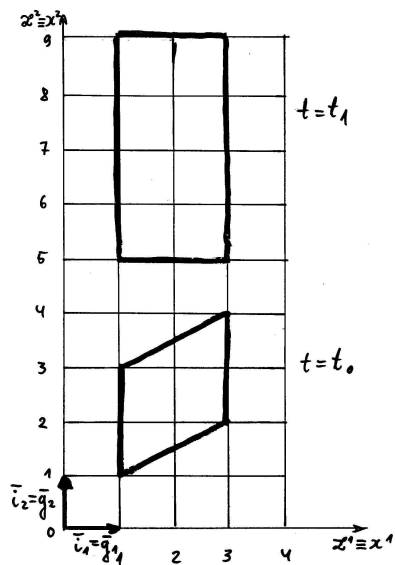
$$\left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} = 0, \quad l \neq k \neq m. \quad (2.125)$$

2. Alghetkel $t = t_0$ toome sisse Lagrange'i koordinaadid (mis võivad kuid ei pruugi ühtida Euleri koordinaatidega). Sel hetkel loeme keskkonna deformatsioonid ja siirded nulliks ning ütleme, et keskkond on *loomulikulus olekus*.

3. Siirete ja deformatsioonide määramiseks hetkel $t = t_1$ on vaja teada liikumisseadust, st., ajast kui parameetrist sõltuvat koordinaatteisendust. Kui meid ei huvita kuidas deformatsioon toimus, siis piisab tegelikult sellest kui me teame liikumisseadust esitavat koordinaatteisendust vaid kahel ajahetkel: $t = t_0$ ja $t = t_1$.

4. Suurusi $u_{l;k}, u^m;l$ jne. nimetatakse tihti *siirdegradientideks*.

Näide 2.2.5. Pidev keskkond liigub tasapinnaliselt. On teada tema asend hetkel $t = t_0$ ja $t = t_1$. Leida deformatsioonitensorid ja keskkonna punktide siirded!



Joonis 2.12:

2.2.7 Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid

Vektorite ja tensoritega opereerides ei pöörata tavaliselt tähelepanu dimensioonile — erinevad komponendid on sageli erineva dimensiooniga (näiteks silindrilised koordinaadid.) Et sellest füüsikaliselt vastuvõtmatust olukorrast puhtalt välja tulla, tuuakse sisse vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid. Teatavasti pole baasivektorid kõverjoonelise koordinaatsüsteemi puhul üldjuhul ühikvektorid ja valemite (2.44) põhjal on nende pikkused määratud meetrilise tensori diagonaalelementidega

$$|\mathbf{g}_k| = \sqrt{g_{kk}} \text{ ja } |\mathbf{g}^k| = \sqrt{g^{kk}} \text{ kui } k = \underline{k}. \quad (2.126)$$

Defineerime ühikvektorid

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{kk}}} \text{ ja } \mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{g}^k}{\sqrt{g^{kk}}}, \quad k = \underline{k}. \quad (2.127)$$

Nüüd

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k = u^{(k)} \mathbf{e}_k = u_k \mathbf{g}^k = u_{(k)} \mathbf{e}^k, \quad (2.128)$$

kus $u^{(k)}$ ja $u_{(k)}$ on vektori \mathbf{u} kontra- ja kovariantse füüsikalised komponendid. Valemite (2.127) ja (2.128) põhjal vektori füüsikalised komponendid

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{kk}} \text{ ja } u_{(k)} = u_k \sqrt{g^{kk}}. \quad (2.129)$$

Ortogonaalse baasi puhul $g_{kk} = 1/g^{kk}$, järelikult on kovariantne füüsikaline komponent leitav kovariantse meetrilise tensori abil:

$$u_{(k)} = \frac{u_k}{\sqrt{g_{kk}}}. \quad (2.130)$$

Analoogselt saab defineerida tensorite füüsikalised komponendid. Näiteks ortogonaalse baasi puhul

$$t^{(k)}_{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}}. \quad (2.131)$$

Märkused

1. Tavaliselt lahendatakse ülesanded ko- ja kontravariantsetes tensorites ning lõpus minnakse üle füüsikalistele komponentidele.
2. DRK puhul $\mathbf{g}_k \equiv \mathbf{g}^k \equiv \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}^k$.

Näide 2.2.6. Leida ühikbaas ja siirdevektori füüsikalised komponendid silindriliste koordinaatide jaoks

2.3 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

2.3.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid olid defineeritud avaldistega (2.113) kujul

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L} + U_{M;K}U^M_{;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = c_{kl} - g_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l} - u_{m;k}u^m_{;l}. \end{cases}$$

Kui siirdegradiendid on väikesed võrreldes ühega, siis

$$U_{M;K}U^M_{;L} \ll U_{K;L} \ll 1. \quad (2.132)$$

Seega hüljates kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid⁶

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L;K} + U_{K;L}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = c_{kl} - g_{kl} = u_{l;k} + u_{k;l}. \end{cases} \quad (2.133)$$

Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse klassikalises lineaarses teoorias.

⁶Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks “unustades” sõna lõpmata lisamata.

2.3.2 Pöördetensorid ja pöördevektorid

Siirdevektori kovariantsete komponentide täisdiferentsiaalid

$$dU_K = U_{K;L}dX^L \quad \text{ja} \quad du_k = u_{k;l}dx^l. \quad (2.134)$$

Avaldame viimased kujul

$$\begin{cases} dU_K = \frac{1}{2}[(U_{K;L} + U_{L;K}) + (U_{K;L} - U_{L;K})]dX^L, \\ du_k = \frac{1}{2}[(u_{k;l} + u_{l;k}) + (u_{k;l} - u_{l;k})]dx^l. \end{cases} \quad (2.135)$$

Esimene sulgavaldis kujutab siin klassikalise lineaarse teooria deformatsioonitensorit, teise aga tähistame

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K;L} - U_{L;K}) \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} - u_{l;k}). \quad (2.136)$$

Viimased on *klassikalise lineaarse teooria pöördetensorid*. On selge, et tegu on kaldsümmeetriliste tensoritega, st., $\tilde{R}_{KL} = -\tilde{R}_{LK}$ ja $\tilde{r}_{kl} = -\tilde{r}_{lk}$. Pöördetensorite indekseid saab meetriliste tensoritega tõsta ja langetada.

Järgnevalt toome sisse Lagrange'i ja Euleri *lineaarsed pöördevektorid* $\tilde{\mathbf{R}}^K$ ja $\tilde{\mathbf{r}}^k$:

$$\tilde{\mathbf{R}}^K = \frac{1}{2}\epsilon^{KLM}\tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm}\tilde{r}_{ml}, \quad (2.137)$$

kus ϵ^{KLM} ja ϵ^{klm} on *permutatsioonisümbolid*.

Permutatsioonisümbolid omakorda on defineeritud järgmiselt:

$$e^{klm}, e_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaris permutatsioon,} \\ -1 & \text{kui } klm \text{ on } 123 \text{ paaritu permutatsioon,} \\ 0 & \text{muudel juhtudel,} \end{cases} \quad (2.138)$$

$$\text{st., } \begin{cases} e^{123} = \dots \\ e^{321} = \dots \\ \text{teised } e^{klm} = \dots \end{cases} \quad \dagger$$

$$\begin{cases} \epsilon^{klm} = \frac{e^{klm}}{\sqrt{g}}, \\ \epsilon_{klm} = e_{klm}\sqrt{g}, \quad g = |g_{kl}|. \end{cases} \quad (2.139)$$

Näide 2.3.1. Avaldame pöördevektorid $\tilde{\mathbf{r}}^1, \tilde{\mathbf{r}}^2$ ja $\tilde{\mathbf{r}}^3$ siirdegradientide kaudu. Valemite (2.137) ja (2.139) põhjal

$$\tilde{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{klm} \tilde{r}_{ml},$$

Seega

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots + \dots] = \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{3;2} - u_{2;3}) \\ \tilde{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots + \dots] = \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{1;3} - u_{3;1}) \\ \tilde{\mathbf{r}}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g}} [\dots + \dots] = \dots \\ \frac{1}{2\sqrt{g}} (u_{2;1} - u_{1;2}) \end{cases} \quad (2.140)$$

2.3.3 Väikeste deformatsioonide ligikaudsed teooriad

Valemite (2.133) ja (2.136) põhjal avalduvad siirdegradientid kujul

$$U_{K;L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL}, \quad \text{ja} \quad u_{k;l} = \tilde{e}_{kl} + \tilde{r}_{kl}. \quad (2.141)$$

Kasutades viimaseid avaldisi saame aga avaldada Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensordid (2.113) läbi lõpmata väikeste deformatsioonide tensorite:

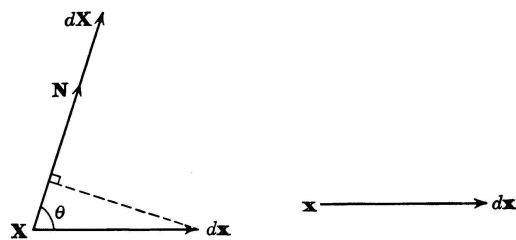
$$\begin{cases} E_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2}(\tilde{E}_{MK} + \tilde{R}_{MK})(\tilde{E}^M{}_L + \tilde{R}^M{}_L), \\ e_{kl} = \tilde{e}_{kl} + \frac{1}{2}(\tilde{e}_{mk} + \tilde{r}_{mk})(\tilde{e}^m{}_l + \tilde{r}^m{}_l). \end{cases} \quad (2.142)$$

Selle valemi põhjal on selge, et \tilde{e}_{kl} ei sobi hästi deformatsiooni mõõduks, sest $\tilde{e}_{kl} = 0$ puhul ei pruugi e_{kl} olla null. Sama kehtib ka Lagrange'i deformatsioonitensori E_{KL} kohta. Valemite (2.142) põhjal on tuletatud mitmeid ligikaudseid teooriaid, eriti plaatidele ja koorikutele.

- Kui $\tilde{e}_{kl} \ll 1$, siis hüljatakse liikmed $\tilde{e}_{mk}\tilde{e}^m{}_l$.
- Kui nii $\tilde{e}_{kl} \ll 1$ kui $\tilde{r}_{kl} \ll 1$, siis hüljatakse liikmed $\tilde{e}_{mk}\tilde{e}^m{}_l$, $\tilde{e}_{mk}\tilde{r}^m{}_l$ ja $\tilde{r}_{mk}\tilde{e}^m{}_l$.
- Jne. sõltuvalt tensorite elementide suurusjärgust.

2.3.4 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensori geomeetriline tõlgendus

Lõpmata väikeste deformatsioonide tensori \tilde{E}_{KL} diagonaalelementidele saab DRK puhul anda selge geomeetrilise tõlgenduse.



Joonis 2.13:

Vaatleme lõpmata väikest vektorit, mis alghetkel $t = t_0$ on esitatud LK-s kujul $d\mathbf{X}$ ning mis deformeerub EK-s esitatud vektoriks $d\mathbf{x}$ hetkel $t = t_1$. Defineerime ühikvektori

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|}. \quad (2.143)$$

Leiame suhtelise pikenemise vektori \mathbf{N} sihis —

$$\epsilon_{(\mathbf{N})} = \frac{|d\mathbf{x}| \cos \vartheta - |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|} = \dots$$

$$\dots = \frac{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}}{|d\mathbf{X}|} - 1, \quad (2.144)$$

ehk

$$\epsilon_{(\mathbf{N})} = \frac{dx_K N^K}{|d\mathbf{X}|} - 1. \quad (2.145)$$

Avaldame vektori $d\mathbf{x}$ projektsiooni LK-s —

$$dx_K = g^k_K dx_k = \dots$$

$$\dots = (G_{KL} + U_{K;L})dX^L.$$

Valemi (2.141) põhjal $U_{K;L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL}$. Seega

$$dx_K = (G_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL})dX^L \quad (2.146)$$

ning valemi (2.145) põhjal

$$\epsilon_{(\mathbf{N})} = \dots$$

$$\dots = (G_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL})N^L N^K - 1. \quad (2.147)$$

Valime DRK nii, et koordinaat $X^1 \parallel \mathbf{N}$. Järelikult $N^1 = 1$ ja $N^2 = N^3 = 0$. Pannes need väärtused valemisse (2.147) saame, et $\epsilon_{(1)} = \tilde{E}_{11}$ ehk

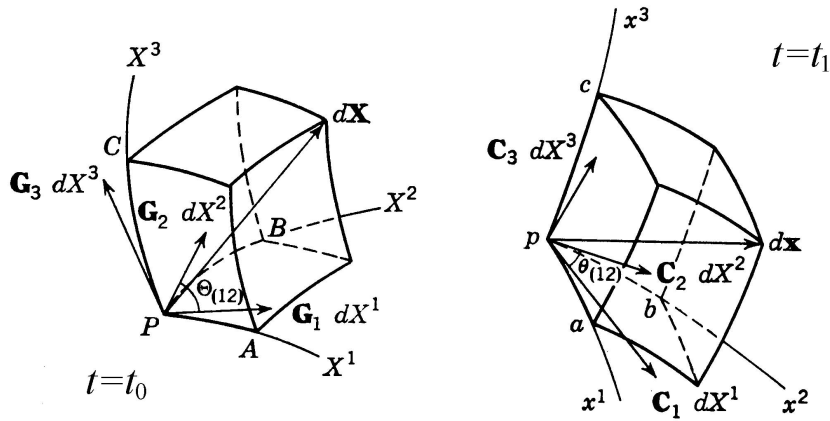
$$\epsilon_{(K)} = \tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}} \quad (2.148)$$

Järeldus: DRK puhul võrdub suhteline pikenemine piki koordinaattelge X^K Lagrange'i deformatsioonitensori vastava normaal-komponendiga $\tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}}$.

2.4 Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geomeetiline tõlgendus

2.4.1 Pikenemine, pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine

Vaatleme kõverjoonelist rööptahukat⁷ (Joon. 2.14). Tema “servavektorid” hetkel $t = t_0$ on $\mathbf{G}_K dX^K$ ja need deformeeruvad servavektoriteks $\mathbf{C}_K dX^K$ (vt. valemid (2.110) ja (2.111) lk. 42).



Joonis 2.14: Kõverjoonelise rööptahuka deformatsioon

Suhet

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|}$$

nimetatakse *pikenemiskoeffitsendiks*⁸ ja ta sõltub vektori $d\mathbf{X}$ (või $d\mathbf{x}$) suunast.

⁷I.k. *curvilinear parallelepiped*

⁸I.k. *stretch*

Defineerime vektorite $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ sihilised ühikvektorid

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \quad \text{ja} \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad (2.149)$$

mille komponendid

$$N^K = \frac{dX^K}{dS} \quad \text{ja} \quad n^k = \frac{dx^k}{ds} \quad (2.150)$$

kujutavad endast vektorite \mathbf{N} ja \mathbf{n} suunakoosinusi. Nüüd saame avaldada pikenemiskoeffitsendi (suunas \mathbf{N}) kujul

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} \stackrel{(2.82)}{=} \sqrt{\frac{C_{KL} dX^K dX^L}{dS^2}} \\ \stackrel{(2.150)}{=} \sqrt{C_{KL} N^K N^L}, \\ \lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} \stackrel{(2.82)}{=} \sqrt{\frac{ds^2}{c_{kl} dx^k dx^l}} \\ \stackrel{(2.150)}{=} \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n^k n^l}}. \end{array} \right. \quad (2.151)$$

Füüsikaliselt on suurused $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ ja $\lambda_{(\mathbf{n})}$ samad — esimene on vaid esitatud LK-s, teine EK-s.

*Suhteline pikenemine*⁹ (suunas \mathbf{N}) esitatakse kujul

$$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 \equiv \lambda_{(\mathbf{n})} - 1. \quad (2.152)$$

⁹I.k. *extension*

Lagrange'i koordinaadid

Kui \mathbf{N} on paralleelne koordinaatkõvera X^1 puutujaga, siis †

$$N^1 = \frac{dX^1}{dS} \stackrel{(2.30)}{=} \frac{dX^1}{\sqrt{G_{11}}(dX^1)^2} = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}}, \quad N^2 = N^3 = 0 \quad (2.153)$$

ja avaldise (2.151) põhjal

$$\Lambda_{(1)} = \sqrt{C_{11}(N^1)^2} \stackrel{(2.153)}{=} \sqrt{\frac{C_{11}(\mathbf{X}, t)}{G_{11}(\mathbf{X})}} = \sqrt{1 + \frac{2E_{11}}{G_{11}}}. \quad (2.154)$$

Suhtelise pikenemise definitsiooni (2.152) ja viimaste valemite (2.154) põhjal ✓

$$E_{(1)} = \sqrt{1 + \frac{2E_{11}}{G_{11}}} - 1. \quad (2.155)$$

Korrates sama protseduuri teiste koordinaatkõverate puutujate sihis, saame alternatiivsed valemid pikenemiskoeffitsentide ja suhtelise pikenemise leidmiseks (koordinaatkõvera X^K puutuja sihis) — ★

$$\Lambda_{(K)} = \sqrt{\frac{C_{KK}}{G_{KK}}} = \sqrt{1 + \frac{2E_{KK}}{G_{KK}}} \quad (2.156)$$

$$E_{(K)} = \sqrt{1 + \frac{2E_{KK}}{G_{KK}}} - 1.$$

Et anda füüsikalist tõlgendust deformatsioonitensorite komponentidele, esitatakse viimased valemid sageli kujul

$$\frac{C_{KK}}{G_{KK}} = \Lambda_{(K)}^2, \quad (2.157)$$

$$\frac{2E_{KK}}{G_{KK}} = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = (1 + E_{(K)})^2 - 1.$$

Euleri koordinaadid

Lähtudes avaldistest (2.151)₂ saame tuletada analoogsed valemid EK jaoks — ✓

$$\begin{cases} \lambda_{(k)} = \sqrt{\frac{g_{kk}}{c_{kk}}} = \left(1 - \frac{2e_{kk}}{g_{kk}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ e_{(k)} = \left(1 - \frac{2e_{kk}}{g_{kk}}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \\ \frac{c_{kk}}{g_{kk}} = \lambda_{(k)}^{-2}, \\ \frac{2e_{kk}}{g_{kk}} = 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = 1 - (1 + e_{(k)})^{-2} \end{cases} \quad (2.158)$$

Descartes'i ristkoordinaadid

Kui nii LK kui EK on DRK, siis $G_{KK} = g_{kk} = 1$ ja valemite (2.156) ja (2.158) põhjal

$$C_{KK} = \Lambda_{(K)}^2 \quad \text{ja} \quad 2E_{KK} = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = (1 + E_{(K)})^2 - 1 \quad (2.159)$$

ning

$$c_{kk} = \lambda_{(k)}^{-2} \quad \text{ja} \quad 2e_{kk} = 1 - \lambda_{(k)}^{-2}. \quad (2.160)$$

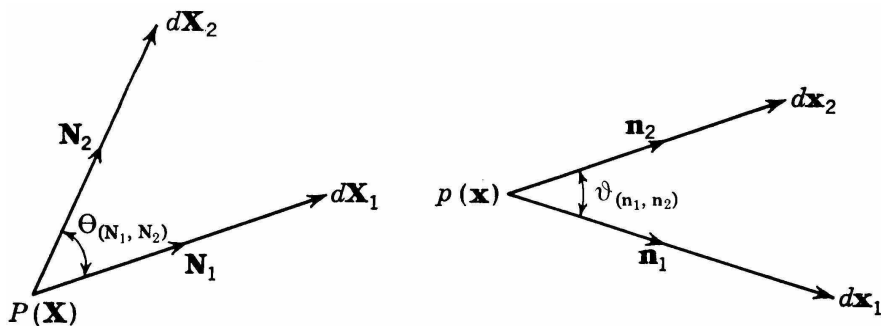
Kui $E_{KK} \ll 1$ või $e_{kk} \ll 1$, siis arendades avaldised (2.156)₂ ja (2.158)₂ Maclaurin'i ritta ning säilitades vaid kõige madalamat järku liikmed, saame •

$$E_{KK} \approx E_{(K)} \quad \text{ja} \quad e_{kk} \approx e_{(k)} \quad (2.161)$$

†

2.4.2 Nurga muutus ja nihkedeformatsioon

Vaatleme kahte lõpmata väikest vektorit $d\mathbf{X}_1$ ja $d\mathbf{X}_2$, mille vaheline nurk on $\Theta \equiv \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}$ ja mis deformeeruvad vektoriteks $d\mathbf{x}_1$ ja $d\mathbf{x}_2$, mille vaheline nurk on $\vartheta \equiv \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$.



Joonis 2.15: Nurga muutus

Ühikvektorid

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{d\mathbf{X}_\alpha}{|d\mathbf{X}_\alpha|} \quad \text{ja} \quad \mathbf{n}_\alpha = \frac{d\mathbf{x}_\alpha}{|d\mathbf{x}_\alpha|} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.162)$$

ning nurkade koosinused

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} \stackrel{(2.23)}{=} \frac{G_{KL} dX_1^K dX_2^L}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = G_{KL} N_1^K N_2^L \quad (2.163)$$

ja

$$\cos \vartheta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|} \stackrel{(2.74)}{=} \frac{C_{KL} dX_1^K dX_2^L}{\sqrt{C_{MN} dX_1^M dX_1^N} \sqrt{C_{RS} dX_2^R dX_2^S}} = \dots$$

$$\dots \stackrel{(2.151)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}} \stackrel{\text{tähistame } H}{=} H. \quad (2.164)$$

Nihe ehk nihkedeformatsioon ehk nihkenurk vektoritega \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 määratud pinnal on defineeritud kui algse nurga Θ muut —

$$\Gamma_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} = \gamma_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} - \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}. \quad (2.165)$$

Võtame viimase avaldise vasakust ja paremast poolest siinuse

$$\sin \Gamma = \sin(\Theta - \vartheta) = \dots$$

$$\dots \stackrel{(2.164)}{=} H \sin \Theta - \sqrt{1 - H^2} \cos \Theta. \quad (2.166)$$

Kui $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$, siis saame viimasest, et

$$\sin \Gamma = H \stackrel{(2.164)}{=} \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}}. \quad (2.167)$$

Seega, kaks algsest ristuvat vektorit jäävad ka peale deformatsiooni risti parajasti siis kui

$$C_{KL} dX_1^K dX_2^L = 0. \quad (2.168)$$

Kui valida suunad \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 piki koordinaatkõverate X^K puutujaid, siis saab nurgamuutuste hindamiseks kasutada baasivektoreid \mathbf{G}_K ja \mathbf{C}_K (kuigi nad pole ühikvektorid) —

$$\begin{cases} \cos \Theta_{(KL)} = \frac{G_{KL}}{\sqrt{G_{\underline{K}\underline{K}} G_{\underline{L}\underline{L}}}}, \\ \cos \vartheta_{(KL)} = \frac{C_{KL}}{\sqrt{C_{\underline{K}\underline{K}} C_{\underline{L}\underline{L}}}} = \frac{G_{KL} + 2E_{KL}}{\sqrt{(G_{\underline{K}\underline{K}} + 2E_{\underline{K}\underline{K}})(G_{\underline{L}\underline{L}} + 2E_{\underline{L}\underline{L}})}}. \end{cases} \quad (2.169)$$

EK-s saavad viimased valemid kuju

$$\begin{cases} \cos \vartheta_{(kl)} = \frac{g_{kl}}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}} g_{\underline{l}\underline{l}}}}, \\ \cos \Theta_{(kl)} = \frac{c_{kl}}{\sqrt{c_{\underline{k}\underline{k}} c_{\underline{l}\underline{l}}}} = \frac{g_{kl} - 2e_{kl}}{\sqrt{(g_{\underline{k}\underline{k}} - 2e_{\underline{k}\underline{k}})(g_{\underline{l}\underline{l}} - 2e_{\underline{l}\underline{l}})}}. \end{cases} \quad (2.170)$$

Kuna LK ja EK on valitavad sõltumatult, siis üldjuhul ei õnnestu siduda nihkeid $\Gamma_{(KL)}$ ja $\gamma_{(kl)}$. Nurkadele $\Theta_{(KL)} = \pi/2$ ja $\vartheta_{(kl)} = \pi/2$ vastavad nihked on määratud järgmiselt:

$$\begin{cases} \sin \Gamma_{(KL)} = \frac{1}{\Lambda_{(K)}\Lambda_{(L)}} \frac{C_{KL}}{\sqrt{G_{\underline{K}\underline{K}}G_{\underline{L}\underline{L}}}}, \\ \sin \gamma_{(kl)} = -\lambda_{(k)}\lambda_{(l)} \frac{c_{kl}}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}}g_{\underline{l}\underline{l}}}}. \end{cases} \quad (2.171)$$

Kui X^K on DRK, siis $G_{KL} = \delta_{KL}$ ja avaldised (2.169) saavad kuju •

$$\begin{cases} \cos \Theta_{(KL)} = \delta_{KL}, \\ \cos \vartheta_{(KL)} = \sin \Gamma_{(KL)} = \frac{\delta_{KL} + 2E_{KL}}{\sqrt{(1 + 2E_{\underline{K}\underline{K}})(1 + 2E_{\underline{L}\underline{L}})}}. \end{cases} \quad (2.172)$$

Asendame viimastes avaldistes suuruse $2E_{\underline{K}\underline{K}}$ valemest (2.159) ning saame

$$2E_{KL} = (1 + E_{(\underline{K})})(1 + E_{(\underline{L})}) \sin \Gamma_{\underline{K}\underline{L}}, \quad K \neq L. \quad (2.173)$$

Kui nii $|E_{(K)}| \ll 1$, $|E_{(L)}| \ll 1$ kui $|\sin \Gamma_{(KL)}| \ll 1$ siis saame

$$2E_{KL} \approx \sin \Gamma_{(KL)}, \quad K \neq L. \quad (2.174)$$

Kui lisaks $\Gamma_{(KL)} \rightarrow 0$, siis

$$2E_{KL} \approx \Gamma_{(KL)}, \quad K \neq L. \quad (2.175)$$

Kui x^k on DRK, $e_{(k)} \ll 1$, $e_{(l)} \ll 1$ ja $\gamma_{(kl)} \rightarrow 0$, siis

$$2e_{kl} \approx \gamma_{(kl)}, \quad k \neq l. \quad (2.176)$$

Tarvilikud ja piisavad tingimused deformatsioonide puudumiseks

Arvestades käesolevas alajaotises esitatud deformatsioonitensorite geomeetrilist tähendust, võime öelda, et *deformatsioonide puudumiseks keskkonna suvalises punktis on tarvilik ja piisav*, et ★

$$C_{KL} = G_{KL} \text{ ja } c_{kl} = g_{kl} \text{ ehk } E_{KL} = e_{kl} = 0. \quad (2.177)$$

2.5 Deformatsiooniellipsoid

Deformatsiooni iseloomu deformeerumata keha punkti $P(\mathbf{X})$ ümbruses või deformeerunud keha punkti $p(\mathbf{x})$ ümbruses saab illustreerida Cauchy poolt pakutud geomeetrilise meetodi abil. Allpool esitatud tulemused on otseselt rakendatavad suvalisele sümmeetrilisele teist järku tensorile.

Vektor $d\mathbf{X}$ LK-s määrab elementaarsfääri ✓

$$G_{KL}dX^K dX^L = dS^2 = K^2, \quad (2.178)$$

kus K on sfääri raadius. Deformeerumisel liigub materiaalne punkt X^K ruumipunkti x^k ja materiaalselt punkti X^K ümbritsenud sfääri punktid ruumipunkti x^k ümbritsevaks teist järku pinna punktideks

$$c_{kl}dx^k dx^l = dS^2 = K^2. \quad (2.179)$$

Valemite (2.83) põhjal $c_{kl} = G_{KL}X^K_{,k}X^L_{,l}$. Kuna c_{kl} on positiivselt määratud, siis see teist järku pind on ellipsoid. Ellipsoidi (2.179) nimetatakse *materiaalseks deformatsiooniellipsoidiks*.

Analoogselt — elementaarsfäärile deformeerunud olekus

$$g_{kl}dx^k dx^l = ds^2 = k^2 \quad (2.180)$$

vastab ellipsoid algolekus

$$C_{KL}dX^K dX^L = ds^2 = k^2. \quad (2.181)$$

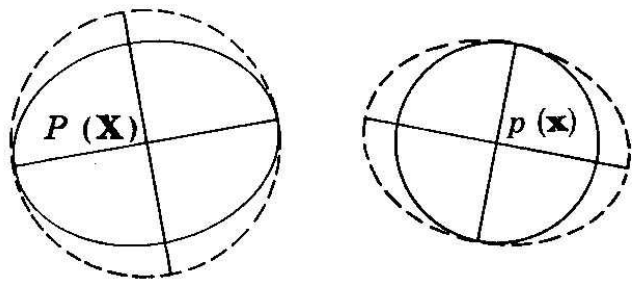
Avaldisega (2.181) määratud ellipsoidi nimetatakse *ruumiliseks deformatsiooniellipsoidiks* (ruumiline viitab siin endiselt EK-le, mitte aga 3D-le).

Vaatleme kahte vektorit $d\mathbf{X}_1 \perp d\mathbf{X}_2$, st. $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 0$. Kuna vektorid $d\mathbf{X}_\alpha$ on avaldatavad nii baasi \mathbf{G}_K kui \mathbf{c}_k kaudu, siis

$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = \dots = c_{kl} dx_1^k dx_2^l = 0. \quad (2.182)$$

Seega on meil ka peale deformatsiooni kaks ristuvat vektorit — üks komponentidega $c_{kl} dx_1^k$ ja teine komponentidega dx_2^l . Teisisõnu, kaks ristuvat vektorit LK-s deformeeruvad kaheks ristuvaks vektoriks EK-s (sealjuures nende vektorite siht ja pikkus võivad muutuda).

Ellipsoidil on teatavasti 3 ristuvat pooltelge. Eeldame algul, et kõik poolteljed on erineva pikkusega. Seega materiaalse deformatsiooniellipsoidi puhul leidub algses sfääris kolm ristuvat raadiust, mis deformeeruvad ellipsoidi pooltelgedeks. Deformatsiooni käigus muutub nende pikkus ja orientatsioon (siht) kuid nad jäävad omavahel risti. Neid telgi nimetatakse *deformatsiooniellipsoidi peatelgedeks*.



Joonis 2.16: Ruumiline (—) ja materiaalne (- - -) deformatsiooniellipsoid

Alajaotuses 2.4.2 (lk. 59) esitati valemid (2.170) nurkade $\vartheta_{(kl)}$ ja $\Theta_{(kl)}$ leidmiseks —

$$\begin{cases} \cos \vartheta_{(kl)} = \frac{g_{kl}}{\sqrt{g_{\underline{k}\underline{k}} g_{\underline{l}\underline{l}}}}, \\ \cos \Theta_{(kl)} = \frac{c_{kl}}{\sqrt{c_{\underline{k}\underline{k}} c_{\underline{l}\underline{l}}}} = \frac{g_{kl} - 2e_{kl}}{\sqrt{(g_{\underline{k}\underline{k}} - 2e_{\underline{k}\underline{k}})(g_{\underline{l}\underline{l}} - 2e_{\underline{l}\underline{l}})}}. \end{cases}$$

Kui valime baasivektorite \mathbf{g}^k ja \mathbf{g}^l sihid piki deformatsiooniellipsoidi peatelgi, siis $\vartheta_{(kl)} = \Theta_{(kl)} = \pi/2$. Järelikult $\cos \vartheta_{(kl)} = \cos \Theta_{(kl)} = 0$ ja

$$g_{kl} = c_{kl} = e_{kl} = 0, \quad \text{kui } k \neq l, \quad (2.183)$$

st., antud juhul on deformatsioontensorite mittediagonaalelemendid võrdsed nulliga.

Kogu toodud mõttekäik kehtib ka ruumilise deformatsiooniellipsoidi kohta. Sidudes omavahel ruumilise ja materiaalse deformatsiooniellipsoidi saab näidata, et *deformatsioon pöörab ruumilise deformatsiooniellipsoidi \mathbf{X} -s materiaalseks deformatsiooniellipsoidiks \mathbf{x} -s ja vastupidi*.

Deformatsioon viib sfääri diameetri \mathbf{X} -s ellipsoidi diameetriks \mathbf{x} -s. Ellipsoidi ja sfääri diameetrite pikkuste suhe määrab ära pikenevuskoeffitsendi $\Lambda = ds/dS$ vastavas sihis. Pikenemiskoeffitsente kolmes deformatsiooniellipsoidi peatelje sihis nimetatakse peapikenemisteks ja tähistatakse $\Lambda_{(1)} \geq \Lambda_{(2)} \geq \Lambda_{(3)}$, kusjuures $\Lambda_{(1)} = \max \Lambda$ ja $\Lambda_{(3)} = \min \Lambda$.

Eelnev baseerus eeldusel, et ellipsoidi pooltelgede pikkused on erinevad. Vastupidisel juhul saab leida lõpmata palju peatelgi. ✓

2.6 Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

Alajaotuses 2.5 näitasime, et punktis $P(\mathbf{X})$ leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat suunda, mis deformatsiooni käigus lähevad deformatsiooniellipsoidi kolmeks peateljeks punktis $p(\mathbf{x})$ ja vastupidi.

Määrame nüüd peasuunad analüütiliselt, st., leiame kolm ristuvat suunda, millest kahe puhul piknemiskoeffitsendid omavad ekstreemalseid väärtusi. Valemite (2.151) põhjal

$$\Lambda_{(\mathbf{N})}^2 = C_{KL} N^K N^L, \quad (2.184)$$

kus $N^K = dX^K/dS$. Peasuundade leidmiseks tuleb minimeerida funktsioon (2.184) \mathbf{N} suhtes lisatingimusel, et \mathbf{N} on ühikvektor, st.,

$$G_{KL} N^K N^L = 1. \quad (2.185)$$

Saadud lisatingimusega ekstreemumülesande lahendamiseks kasutame Lagrange'i meetodit¹⁰ mille põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\frac{\partial}{\partial N^M} [C_{KL} N^K N^L - C (G_{KL} N^K N^L - 1)] = 0, \quad (2.186)$$

kus tundmatut C nimetatakse Lagrange'i multiplikaatoriks. Viimane omakorda annab meile kolm lineaarset homogeenset võrrandit ühikvektori komponentide N^K leidmiseks —

$$(C_{KL} - CG_{KL}) N^L = 0 \quad (2.187)$$

Tensori E_{KL} definitsiooni põhjal $C_{KL} = G_{KL} + 2E_{KL}$ saab võrrandidele (2.187) anda kuju

$$(E_{KL} - EG_{KL}) N^L = 0, \quad 2E = C - 1. \quad (2.188)$$

Pole tähtis kumba saadud võrrandisüsteemidest lahendada — kui vaja, saab hiljem minna ühelt lahendilt üle teisele. Meie lähtume

võrrandisüsteemist (2.187), korrutades teda meetrilise tensoriga G^{MK} , st., tõstes indeksi K üles. ✓

Seega tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$(C^K_L - C\delta^K_L) N^L = 0. \quad (2.189)$$

Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C^K_L - C\delta^K_L| = 0. \quad (2.190)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C = 0 \quad (2.191)$$

tundmatu C määramiseks. Suurused

$$\left\{ \begin{array}{l} I_C = \frac{1}{1!} \delta^K_L C^L_K = \\ = \dots \\ II_C = \frac{1}{2!} \delta^K_L{}^M_N C^L_K C^N_M = \\ = \dots \\ III_C = \frac{1}{3!} \delta^K_L{}^M_N{}^R_S C^L_K C^N_M C^S_R = \\ = \dots \end{array} \right. \quad (2.192)$$

on deformatsioonitensori C^K_L invariandid (koordinaatteisenduste suhtes $\mathbf{X} - s$) ja $\delta^K_L{}^M_N$ ning $\delta^K_L{}^M_N{}^R_S$ Kroneckeri üldistatud deltid. Viimaste leidmiseks sobib kasutada valemeid ✓

$$\delta^K_L{}^M_N{}^R_S = e^{KMR} e_{LNS}, \quad \delta^K_L{}^M_N = e^{KM} e_{LN} = \delta^K_L{}^M_N{}^R_R. \quad (2.193)$$

Karakteristlik võrrand (2.191) omab kolme juurt C_α , $\alpha = 1, 2, 3$, ✓

¹⁰I.k. *Lagrange's method of multipliers*

mida nimetatakse *omaväärtusteks* ehk *peaväärtusteks*¹¹. Võrrandisüsteemi (2.189) abil saame nüüd igale peaväärtusele C_α seada vastavusse *omavektori* ehk *peavektori* \mathbf{N}_α , mis määrab *peasuuna*.

Saab tõestada, et peaväärtused on reaalsed ning neile vastavad peasuunad on omavahel risti ja eksisteerivad alati. •

Kui koordinaadid on valitud peasuundades (st., baasivektorite siht ühtib peavektortite sihtidega igas materiaalses punktis), siis ★

$$N^L_\alpha = \varkappa_\alpha \delta^L_\alpha \quad (2.194)$$

ja avaldiste (2.189) põhjal

$$C^K_\alpha = C_\alpha \delta^K_\alpha, \quad (2.195)$$

st., $C^1_1 = C_1$, $C^2_2 = C_2$, $C^3_3 = C_3$ ja $C^K_\alpha = 0$, kui $K \neq \alpha$. Kokkuvõttes võib öelda, et *peaväärtused võrduvad deformatsioonitensori normaalkomponentidega peatelgedes (peadeformatsioonidega)*. *Nihkedeformatsioonid selliste telgede (koordinaatide) puhul puuduvad*.

Deformatsioonitensori invariandid saavad nüüd tunduvalt lihtsamad kujud —

$$\begin{cases} \text{I}_C = C_1 + C_2 + C_3, \\ \text{II}_C = C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2, \\ \text{III}_C = C_1 C_2 C_3. \end{cases} \quad (2.196)$$

†

Deformatsioonitensori peaväärtuste ja peasuundade ning deformatsiooniellipsoidi peatelgede vaheline seos

Peasuunad \mathbf{N}_α määravad ära deformatsiooniellipsoidi peateljed LK-s \mathbf{X} , st., ruumilise deformatsiooniellipsoidi võrrand saab nüüd kuju

$$ds^2 = k^2 = C_{KL} dX^K dX^L = C_\alpha (dX^\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha C_\alpha (dX^\alpha)^2. \quad (2.197)$$

Seega peatelgedes deformatsiooniellipsoidi võrrand lihtsustub.

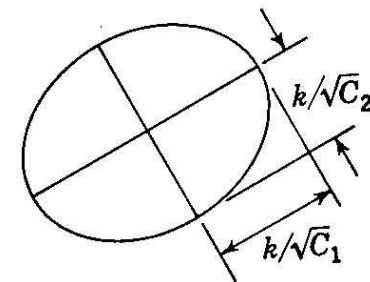
DRK puhul on ellipsoidi poolteljed ✓

$$a_\alpha = \frac{ds}{\sqrt{C_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}} \quad (2.198)$$

ja pikenemiskoeffitsent peatelgedes

$$\Lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL} N^K N^L} = \sqrt{C_\alpha} \stackrel{(2.198)}{=} \frac{ds}{a_\alpha} \quad (2.199)$$

ning seega $a_\alpha = dS$, s.o. \mathbf{N}_α sihilise joonelemendi pikkus.



Joonis 2.17: Ruumilise deformatsiooniellipsoidi poolteljed

¹¹I.k. *eigenvalues or principal values or proper numbers*

EK \mathbf{x} puhul avaldub materiaalne deformatsiooniellipsoid kujul

$$dS^2 = K^2 = c_{kl} dx^k dx^l = c_\alpha (dx^\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha c_\alpha (dx^\alpha)^2 \quad (2.200)$$

ja poolteljed DRK-s¹²

$$a_\alpha = \frac{dS}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}}. \quad (2.201)$$

Suurus c_α on siin deformatsioonitensori c^k_l omaväärtus. Pikenemiskoeffitsendid

$$\lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n^k n^l}} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} = \frac{a_\alpha}{dS} \quad (2.202)$$

ja nüüd seega $a_\alpha = ds$, s.o. \mathbf{n}_α sihilise joonelemendi pikkus. Valemite (2.199) ja (2.202) põhjal

$$C_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} = \lambda_\alpha^2 \equiv \Lambda_\alpha^2. \quad (2.203)$$

Kokkuvõttes:

- Ruumilise deformatsiooniellipsoidi pooltelgede pikkused LK-s \mathbf{X} on pöördvõrdelised materiaalse deformatsiooniellipsoidi pooltelgede pikkustega EK-s \mathbf{x} .
- Samuti on pöördvõrdelised vastavad omaväärtused C_α ja c_α .
- Peaväärtus C_α on võrdne pikenemiskoeffitsendi ruuduga deformatsiooniellipsoidi vastavas peasihis α .
- Peatelgede sihis omab Λ ekstremaalseid väärtusi.

Seosed Greeni ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel

Kuna $C_\alpha = \Lambda_\alpha^2 \equiv \lambda_\alpha^2$ ja $\lambda_\alpha = 1 + e_\alpha$, siis

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_C = \text{I}_{-1} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 + (1 + e_2)^2 + (1 + e_3)^2, \\ \text{II}_C = \text{II}_{-1} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = \\ \quad = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 + (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2 + (1 + e_3)^2 (1 + e_1)^2, \\ \text{III}_C = \text{III}_{-1} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2, \\ \text{I}_c = \text{I}_{-1}^c = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}, \\ \text{II}_c = \text{II}_{-1}^c = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} + \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2} + \lambda_3^{-2} \lambda_1^{-2}, \\ \text{III}_c = \text{III}_{-1}^c = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2}. \end{array} \right. \quad (2.204)$$

Siin \bar{C}^{-1} vastab tensorile $\bar{C}^{-1 K}_L = G_{LM} \bar{C}^{-1 KM} = G_{LM} \mathbf{C}^K \mathbf{C}^M = G_{LM} g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l} = \dots\dots$ ja \bar{c}^{-1} tensorile $\bar{c}^{-1 k}_l$. Samuti on võetud arvesse, et $C_\alpha = \bar{c}^{-1}_\alpha$ ja vastupidi, $c_\alpha = \bar{C}^{-1}$.

Otsitavad seosed

$$\text{I}_c = \frac{\text{II}_C}{\text{III}_C}, \quad \text{II}_c = \frac{\text{I}_C}{\text{III}_C}, \quad \text{III}_c = \frac{1}{\text{III}_C} \quad (2.205)$$

saame valemeist (2.204).

Kuna $0 < \lambda_\alpha < \infty$ siis ka $0 < \text{I}, \text{II}, \text{III} < \infty$. ✓

Deformatsioonide puudumisel (jäiga keha puhul) $e_\alpha = 0$ ja $\lambda_\alpha = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$ ning seega

$$\text{I} = \text{II} = 3 \quad \text{ja} \quad \text{III} = 1 \quad (2.206)$$

¹²Valemis (2.198) tähistab a_α pooltelje pikkust LK-s, nüüd aga EK-s

Seosed Lagrange'i ja Greeni deformatsioonitensori invariantide vahel

Lagrange'i deformatsioonitensori invariandid avalduvad läbi peaväärtuste E_α analoogselt Greeni deformatsioonitensori invariantidega (2.196) —

$$\begin{cases} \text{I}_E = E_1 + E_2 + E_3, \\ \text{II}_E = E_2 E_3 + E_1 E_3 + E_1 E_2, \\ \text{III}_E = E_1 E_2 E_3. \end{cases} \quad (2.207)$$

Kasutades nüüd valemeid (2.196) ja (2.207) ning arvestades, et valem (2.188)₂ põhjal $2E_\alpha = C_\alpha - 1$, saame seosed

$$\begin{cases} \text{I}_C = 3 + 2\text{I}_E, \\ \text{II}_C = 3 + 4\text{I}_E + 4\text{II}_E, \\ \text{III}_C = 1 + 2\text{I}_E + 4\text{II}_E + 8\text{III}_E, \\ 2\text{I}_E = -3 + \text{I}_C, \\ 4\text{II}_E = 3 - 2\text{I}_C + \text{II}_C, \\ 8\text{III}_E = -1 + \text{I}_C - \text{II}_C + \text{III}_C. \end{cases} \quad (2.208)$$

Seosed Euleri ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel saadakse sidudes tensorite c^k_l ja e^k_l invariandid. Tulemuseks on duaalsed seosed eelmistele —

$$\begin{cases} \text{I}_c = 3 - 2\text{I}_e, \\ \text{II}_c = 3 - 4\text{I}_e + 4\text{II}_e, \\ \text{III}_c = 1 - 2\text{I}_e + 4\text{II}_e - 8\text{III}_e. \end{cases} \quad (2.209)$$

Invariantide III_C ja III_c geomeetriline tõlgendus

Maatriksite teoriast on teada, et determinant maatriksite korrutisest on võrdne korrutatavate maatriksite determinantide korrutisega, st., $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Meil

$$C^K_L = G^{KM} C_{ML} \stackrel{(2.83)}{=} G^{KM} g_{kl} x^k_{,M} x^l_{,L}. \quad (2.210)$$

Invariandi III_C definitsiooni (2.192) põhjal †

$$\text{III}_C = |C^K_L| \stackrel{(2.210)}{=} |G^{RS}| |g_{mn}| |x^k_{,K}|^2 = \frac{g}{G} j^2 = J^2, \quad (2.211)$$

kus J on teisenduse $z^k = z^k(Z^K, t)$ jakobiaan fikseeritud ajahetkel t ja mis on leitav järgmiselt: ‡

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \left| \frac{\partial x^n}{\partial X^N} \right| \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j. \quad (2.212)$$

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente ds_α ja dS_α . Elementaarruumalad $d\mathcal{V} = dS_1 dS_2 dS_3$ ja $dv = ds_1 ds_2 ds_3$. Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{dv}{d\mathcal{V}} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \stackrel{(2.204)}{=} \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(2.211)}{=} J.$$

Seega

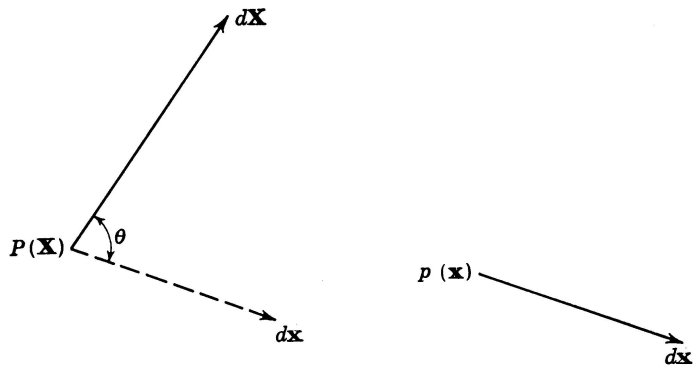
$$dv = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_c} dv. \quad (2.213)$$

Kokkuvõttes — invariandid III_C ja III_c iseloomustavad ruumala muutust.

2.7 Pööre

Deformatsiooni käigus läheb vektor $d\mathbf{X}$ (\mathbf{X} -s) vektoriks $d\mathbf{x}$ (\mathbf{x} -s). Leiame nende vektorite vahelise nurga ϑ —

$$\cos \vartheta = \frac{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{x}}{|d\mathbf{X}| |d\mathbf{x}|} = \frac{G_{KL} dX^K g^L{}_l dx^l}{|d\mathbf{X}| |d\mathbf{x}|} = \frac{g_{kl} dx^k g^l{}_L dX^L}{|d\mathbf{X}| |d\mathbf{x}|}. \quad (2.214)$$



Joonis 2.18: Joonelemendi deformatsioon

Edaspidi eeldame, et $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Toome sisse ühikvektorid

$$N^K = \frac{dX^K}{|d\mathbf{X}|} \quad \text{ja} \quad n^k = \frac{dx^k}{|d\mathbf{x}|}. \quad (2.215)$$

Nüüd

$$\cos \vartheta = G_{KL} g^L{}_l N^K n^l = g_{kl} g^l{}_L n^k N^L. \quad (2.216)$$

Arvestades, et $dx^l = x^l{}_{,M} dX^M$ ja et $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})} = |d\mathbf{x}| / |d\mathbf{X}|$ saame valemile (2.214) ja (2.216) alternatiivse kuju

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{G_{KL} g^L{}_l x^l{}_{,M} (dX^K / |d\mathbf{X}|) (dX^M / |d\mathbf{X}|)}{(|d\mathbf{x}| / |d\mathbf{X}|)} \\ &= \frac{1}{\Lambda_{(\mathbf{N})}} G_{KL} g^L{}_l x^l{}_{,M} N^K N^M = g_{kl} g^l{}_L X^L{}_{,m} n^k n^m \lambda_{(\mathbf{n})}. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Leiame nüüd nurgad ϑ_α , mille võrra pöörab deformatsioon peatelgi. Olgu \mathbf{n}_α Cauchy deformatsioonitensori c_{kl} peavektor. Võrrandisüsteemi (2.187) analoog EK-s on

$$(c_{kl} - c g_{kl}) n^l = 0, \quad (2.218)$$

Et leida nurka ϑ_α tuleb siit avaldada $g_{kl} n_\alpha^l$ ning asendada avaldisse (2.217). Arvestades, et $C_\alpha = 1/c_\alpha = \lambda_\alpha^2$ saame

$$\cos \vartheta_\alpha = (c_\alpha)^{-3/2} c_{kl} g^l{}_L X^L{}_{,m} n_\alpha^k n_\alpha^m. \quad (2.219)$$

Kui mingid kaks nurka $\vartheta_\alpha = 0$, siis ka kolmas on null. Vastavat deformatsiooni (deformatsiooni seisundit, deformatsiooni olekut) nimetatakse pikideformatsiooniks ehk pöördevabaks deformatsiooniks¹³. Antud juhul on materiaalse ja ruumilise deformatsiooniellipsoidi peateljed paralleelsed. See ei tähenda aga, et deformatsioonielipsoidi teised diagonaalid peaksid jääma iseendaga paralleelseteks — kui muutub peatelgede pikkuste suhe, siis diagonaalid, mis pole paralleelsed peatelgedega pöörduvad.

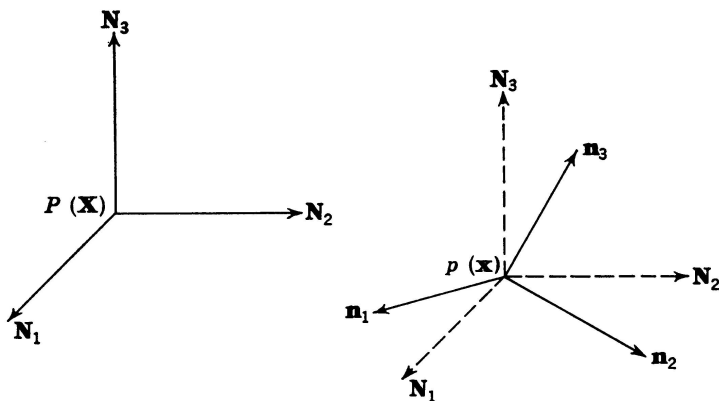
Novožilov (1948) leidis, et valemite (2.217) ja (2.219) kasutamine võib osutuda komplitseerituks ning tuletas nn. keskmise pöörde valemid¹⁴ läbi lineaarse pöördetensori \tilde{R}_{KL} . Leitud valemid võimaldavad leida fikseeritud punkti läbivate kiudude keskmist pööret ja on otseselt kasutatavad DRK puhul. Kuna nimetatud valemid ei võimalda aga määrata vaadeldavat punkti läbiva üksiku kiu pööret (kiu lokaalset pööret), siis jätame nad vaatluse alt välja.

¹³I.k. *pure strain*

¹⁴Vt. näiteks [1] lk. 34–36

Pööre põhiteoreem

Fikseeritud kiu lokaalse pööre määramiseks toome sisse pöördetensori. Olgu vektorid \mathbf{N}_α peatelgede sihilised ortogonaalsed ühikvektorid \mathbf{X} -s. Peale deformatsiooni on see kolmik pööratud ortogonaalseks kolmikuks \mathbf{n}_α koordinaatides \mathbf{x} . Kui nihutada (siira-



Joonis 2.19: Peatelgede siire koos pöördtega

ta) kolmik \mathbf{N}_α ruumipunkti $p(\mathbf{x})$ siis saab defineerida ühese ortogonaalse tensori \mathbf{R} , mida nimetatakse *pöördetensoriks* ja mis pöörab \checkmark nihutatud kolmiku \mathbf{N}_α kolmikuks \mathbf{n}_α .

$$\begin{cases} n^k_\alpha = R^k_m g^m_K N^K_\alpha = g^k_L R^L_K N^K_\alpha = R^k_K N^K_\alpha \\ N^K_\alpha = g^K_m \bar{R}^{-1}_m_k n^k_\alpha = \bar{R}^{-1}_K L g^L_k n^k_\alpha = \bar{R}^{-1}_K n^k_\alpha \end{cases} \quad (2.220)$$

Siin $\bar{\mathbf{R}}^{-1}$ on tensori \mathbf{R} pöördtensor (duaalne tensor): \mathbf{R} pöörab $\mathbf{N}_\alpha \rightarrow \mathbf{n}_\alpha$ ja vastupidi — $\bar{\mathbf{R}}^{-1}$ pöörab $\mathbf{n}_\alpha \rightarrow \mathbf{N}_\alpha$ tagasi. Tensor

$$R^k_K = R^k_m g^m_K = R^L_K g^k_L \quad (2.221)$$

esitab siiret $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ koos järgneva pöördtega.

Defineerime nüüd vektorite kolmikud \mathbf{N}^α ja \mathbf{n}^α —

$$N^\alpha_K N^L_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \delta^L_K, \quad n^\alpha_k n^l_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \delta^l_k, \quad (2.222)$$

st., (vektorite) kolmikud \mathbf{N}^α ja \mathbf{n}^α ning \mathbf{N}_α ja \mathbf{n}_α teineteise pöördkolmikud¹⁵. Maatrikskirjaviisis tähendaks eelnev seda, et $[N^\alpha_K][N^L_\alpha] = \mathbf{I}$, kus \mathbf{I} on ühikmaatriks. Korrutame avaldise (2.220) • vastavalt vektoritega N^α_L ja n^α_l . Arvestades definitsioone (2.222) saame pöördetensorite määramiseks valemid

$$R^k_K = n^k_\alpha N^\alpha_K \quad \text{ja} \quad \bar{R}^{-1}_K k = N^K_\alpha n^\alpha_k. \quad (2.223)$$

Pöördeta deformatsiooni (deformatsiooni, kus peateljed ei pöördu) puhul, seega

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{ehk} \quad R^k_l = \delta^k_l; \quad R^k_K = g^k_K; \dots \quad (2.224)$$

Toupin (1956) tõestas, et

1. Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite n -ndad astmed on \checkmark seotud järgmiselt

$$\begin{cases} \bar{C}^{-n}_{K_L} = \bar{R}^{-1}_K k n^k_l R^l_L \\ \bar{C}^{-n}_{k_l} = R^k_K \bar{C}^n_{K_L} \bar{R}^{-1}_L l \end{cases} \quad (2.225)$$

ning lisaks veel, et

$$\bar{C}^{-n}_{K_L} = \sum_\alpha (C_\alpha)^{-n} N^K_\alpha N^\alpha_L. \quad (2.226)$$

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$\begin{cases} x^k_{,K} = R^k_L \bar{C}^{\frac{1}{2}L}_K = R^l_K \bar{C}^{-\frac{1}{2}k}_l, \\ X^K_{,k} = \bar{R}^{-1}_K l \bar{C}^{\frac{1}{2}l}_k = \bar{R}^{-1}_L k \bar{C}^{-\frac{1}{2}K}_L. \end{cases} \quad (2.227)$$

¹⁵I.k. *reciprocal triads*

Viimastest omakorda

$$R^k{}_K = x^k{}_{,L} \bar{C}^L{}_K{}^{-\frac{1}{2}} \text{ ja } \bar{R}^K{}_k = X^K{}_{,l} \bar{C}^{\frac{1}{2}l}{}_k. \quad (2.228)$$

Saab näidata, et teiselt poolt $x^k{}_{,K} = g^{kl} g^L{}_l (G_{KL} + U_{L;K})$, kust $U_{L;K} = g_{kl} g^l{}_L x^k{}_{,K} - G_{KL}$. Arvestades nüüd (2.227)₁, saame, et

$$U_{L;M} = R_{KL} \bar{C}^L{}_M{}^{\frac{1}{2}} - G_{KM} = R_K{}^L \bar{C}^{\frac{1}{2}}{}_{LM} - G_{KM}. \quad (2.229)$$

Lisaks eelnenule saab tõestada seosed tensorite $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ ja \mathbf{R} vahel —

$$R_{KM} = \left(G_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) \bar{C}^{\frac{1}{2}L}{}_M. \quad (2.230)$$

Väikeste deformatsioonigradientide puhul saame viimasest

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - G_{KM}, \quad (2.231)$$

ning arvestades (2.229) analoogi EK jaoks, et

$$\tilde{R}_{KM} \approx g^k{}_K g^m{}_M \tilde{r}_{km}. \quad (2.232)$$

mis kinnitab veelkord termini lõpmata väike pööre õigsust suuruste \tilde{R}_{KM} ja \tilde{r}_{km} jaoks.

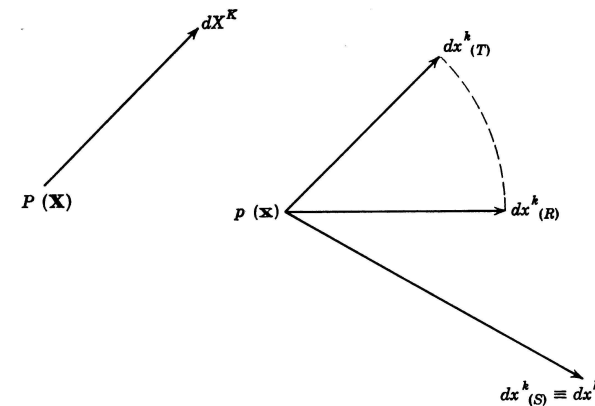
Nüüd ongi paras aeg sõnastada **pöörde põhiteoreem** —

Iga joonelemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleellükkest, 2) peatelgede jäigast pöördest ja 3) pikkuse muutust peatelgede sihis.

Vaatleme vektorit dX^K \mathbf{X} -s, mis läheb deformatsiooni käigus vektoriks $dx^k = x^k{}_{,K} dX^K$. Kasutades seoseid (2.227)₁ saame

$$dx^k = g^k{}_L R^L{}_M \bar{C}^M{}_K{}^{\frac{1}{2}} dX^K = \bar{c}^{\frac{1}{2}k}{}_l R^l{}_m g^m{}_K dX^K. \quad (2.233)$$

Avaldisele (2.233) saab anda järgmise tõlgenduse (joonis 2.20).



Joonis 2.20: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

1. Vektori $d\mathbf{X}$ lüke¹⁶ (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}_{(T)}$.
2. Vektori $d\mathbf{x}_{(T)}$ jäik pööre¹⁷ (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}_{(R)}$.
3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise¹⁸ muudetakse vektor $d\mathbf{x}_{(R)}$ vektoriks $d\mathbf{x}_{(S)} = d\mathbf{x}$. Täiendavat pööret ei toimu siin siis ja ainult siis kui $d\mathbf{X}$ on paralleelne ühega tensori C_{KL} peavektoritest.

Valemities on eelnev esitatav kujul

$$\begin{cases} dx^k{}_{(T)} = g^k{}_K dX^K \\ dx^k{}_{(R)} = R^k{}_l dx^l{}_{(T)} \\ dx^k = \bar{c}^{\frac{1}{2}k}{}_l dx^l{}_{(R)} \end{cases} \quad (2.234)$$

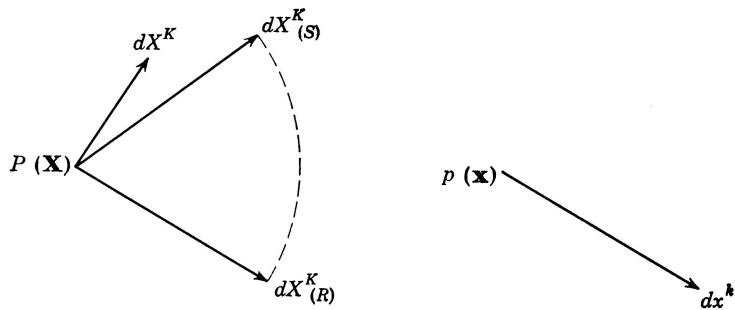
Kui asendame (2.234)₁ \rightarrow (2.234)₂ \rightarrow (2.234)₃, siis saame (2.233), mis tõestabki teoreemi.

¹⁶I.k. translation

¹⁷I.k. rotation

¹⁸I.k. stretch

Joonis 2.21 esitab sama protsessi teises järjekorras — pikenemine, pööre, lüke, st.,



Joonis 2.21: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon

$$\begin{cases} dX^M_{(S)} = \frac{1}{2} C^M_K dX^K, \\ dX^L_{(T)} = R^L_M dX^M_{(S)}, \\ dx^k = g^k_L dX^L_{(R)}. \end{cases} \quad (2.235)$$

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis. Eelnev mõttekäik on esitatav ka deformatsiooniellipsoidide kaudu —

1. ...
2. ...
3. ...

2.8 Pidevustingimused ehk sobivustingimused

Kolmemõõtmelises ruumis on deformatsioonitensori kuus (sõltumatut) komponenti seotud siirdevektori kolme komponendiga läbi kuue võrrandi (vt. (2.113) lk.43). Näiteks,

$$2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL} = 2E_{LK} = U_{K;L} + U_{L;K} + G^{MN} U_{M;K} U_{N;L}. \quad (2.236)$$

Kui on teada siirdevektori komponendid U_K , siis valemi (2.236) põhjal saab määrata kas tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti. Kui aga on vastupidi, st., et teada on tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti, siis on meil kolme tundmatu määramiseks kuus võrrandit. Järelikult on meil tegu ülemääratud süsteemiga. Selleks, et siirdekomponendid U_K oleks üheselt määratavad ja pidevad (siirdeväli peab olema üheselt määratud ja pidev) tuleb nüüd deformatsiooni tensori komponentidele peale panna lisatingimused. Neid tingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks* ehk *sobivustingimusteks*¹⁹. Kui siirdekomponendid U_K on ette teada (siirdekomponendid on valitud põhimuutujateks) siis on sobivustingimused automaatselt täidetud. Kui aga põhimuutujateks on deformatsioonitensorid, siis on sobivustingimustel täita oluline roll.

Üks võimalus saada sobivustingimusi on siirdekomponentide U_K elimineerimine avaldistes (2.236) läbi vastavate osatuletiste määramise. Eringen nimetab sellist lähenemist tüütuks ja lootusetult kohmakaks ning paneb ette kasutada Riemanni teoreemi:

¹⁹I.k. *compatibility conditions*

Sümmeetriline tensor a_{kl} on meetriline tensor eukleidilises ruumis siis ja ainult siis kui see tensor a_{kl} on mittesingulaarne ja temast moodustatud Riemanni-Christoffeli tensor $R^{(a)}_{klmn}$ on samaselt null.

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{(a)}_{klmn} \stackrel{\text{def}}{=} a_{kr} \left(\left\{ \begin{array}{l} r \\ ln \end{array} \right\}_{,m} - \left\{ \begin{array}{l} r \\ lm \end{array} \right\}_{,n} + \left\{ \begin{array}{l} s \\ ln \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r \\ sm \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} s \\ lm \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r \\ sn \end{array} \right\} \right), \\ \left\{ \begin{array}{l} r \\ lm \end{array} \right\} = a^{rs} [lm, s], \\ [lm, r] = \frac{1}{2} (a_{lr,m} + a_{mr,l} + a_{lm,r}). \end{array} \right. \quad (2.237)$$

Tensorid C_{KL} ja c_{kl} on mittesingulaarsed ja positiivselt määratud, järelikult on vaja veel rahuldada tingimused

$$R^{(C)}_{KLMN} = 0 \quad \text{ja} \quad R^{(c)}_{klmn} = 0. \quad (2.238)$$

Neist esimese puhul diferentseeritakse avaldises (2.237) X^K järgi ja teise puhul x^k järgi.

Riemanni-Christoffeli tensor on ruumi kõveruse mõõduks. Kui $R_{klmn} \equiv 0$, siis nimetatakse ruumi lamedaks. Eukleidilises ruumis $R_{klmn} \equiv 0$, järelikult on eukleidiline ruum lame. Vastupidi, et ruum oleks eukleidiline ruum, peab $R_{klmn} \equiv 0$.

Avaldised (2.238) esitavad sobivustingimused C_{KL} ja c_{kl} jaoks. Sobivustingimused tensoreile E_{KL} ja e_{kl} jaoks saadakse läbi avaldiste

$$C_{KL} = G_{KL} + 2E_{KL} \quad \text{ja} \quad c_{kl} = g_{kl} - 2e_{kl}. \quad (2.239)$$

Allpool on esitatud pidevustingimused e_{kl} jaoks —

$$\begin{aligned} & e_{kn,lm} + e_{lm,kn} - e_{km,ln} - e_{ln,km} + \\ & + 2g^{rs} \{ [kn, r]_e [lm, s]_g + [kn, r]_g [lm, s]_e - 2[kn, r]_e [lm, s]_e - \\ & - [km, r]_e [ln, s]_g - [km, r]_g [ln, s]_e + 2[km, r]_e [ln, s]_e \} + \\ & + 2e^{rs} \{ [kn, r]_g [lm, s]_g - [km, r]_g [ln, s]_g - 2[kn, r]_e [lm, s]_g - \\ & - 2[kn, r]_g [lm, s]_e + 4[kn, r]_e [lm, s]_e + 2[km, r]_e [ln, s]_g + \\ & + 2[km, r]_g [ln, s]_e - 4[km, r]_e [ln, s]_e \} = 0. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Siin on juba arvestatud, et g_{kl} on meetriline tensor ja seega $R^{(g)}_{klmn} \equiv 0$ ning $[kl, m]_g$ ja $[kl, m]_e$ on Christoffeli esimest liiki sümbolid vastavalt tensoritest g_{kl} ja e_{kl} . Kõik saadud sobivustingimused (2.238) ja (2.240) pole sõltumatud, sest R_{klmn} rahuldab Bianchi' samasust (tingimust)

$$R_{klmn;p} + R_{klnp;m} + R_{klpm;n} = 0. \quad (2.241)$$

Kolmedimensionaalses ruumis osutub tensori R_{klmn} 81 komponendist vaid 6 algebralise sõltumatuks ja nullist erinevaks (mitte samaselt nulliks).

Kui avaldistes (2.240) asendada tensor e_{kl} lineaarse teooria deformatsiooni tensoriga $\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} + u_{l;k})$ ning hüljata kõik kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame lõpmata väikeste deformatsioonide (lineaarse teooria) sobivustingimused —

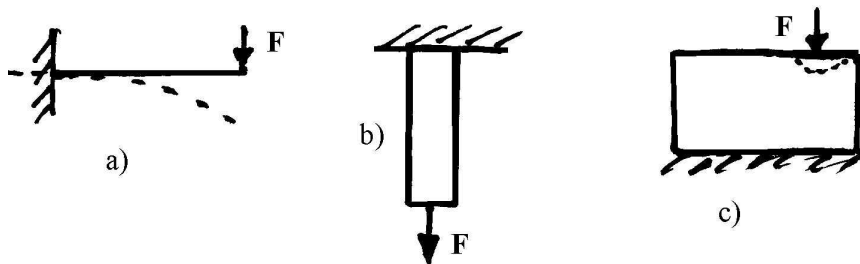
$$\tilde{e}_{kn;lm} + \tilde{e}_{lm;kn} - \tilde{e}_{km;ln} - \tilde{e}_{ln;km} = 0. \quad (2.242)$$

2.9 Lihtsustatud deformatsiooniteooriad

Esitatud valemite kasutamine võib viia matemaatilistele raskustele. Klassikalises (lineaarses) elastsusteoorias ja vedelike voolamise teoorias (hüdromehaanikas) hüljatakse seetõttu mittelineaarsed liikmed, st. uuritakse vaid nn. väikeseid deformatsioone. Tihti saab lineaarse teooria täpsust tõsta lähtudes uuritava objekti geometriast ja deformatsiooni iseloomust.

Näited:

- Hästi õhukese tala paine — pöörded suured, pikenemised väikesed.
- Tala tõmme — pikenemised suured, pöörded väikesed. Rakendatakse Saint-Venant'i printsiipi (koormuse rakenduspunkti lähiumbruses on olukord muust tala erinev).
- Koondatud jõu mõju massiivile — siin on soovitatav rakendada puhtalt mittelineaarset teooriat.



Joonis 2.22: Erineva iseloomuga deformatsioonid: a) õhukese tala paine, b) tala tõmme ja c) koondatud jõu mõju massiivile.

Deformatsioonitensor, pöördetensor ja invariantid on avaldatavad läbi siirdegradientide (näiteks $U_{K;L}$). Seega saame rääkida väikestest siiretest või mõnest teisest kolmest sõltumatust muutujast, mis neid asendaks. Näiteks võivad olla aproksimatsioonide puhul kasutusel kolm peapikenemist või pöördevektori komponendid. Deformatsioonitensori või pöördetensori komponentide otsene kasutamine on komplitseeritud, sest sobivustingimused peavad olema rahuldatud. Samuti tuleb olla ettevaatlik kui suurusjärkude hindamise aluseks on siirdegradiendid. Järgnevate näidete eesmärgiks on anda mingi baasettekujutus sellistest ligikaudsetest teooriatest.

Väikeste siirete teooria

Väikeste siirete teooria²⁰ puhul loetakse väikesteks kõik siirdekomponeendid ja siirdegradiendid ning hüljatakse kõik mittelineaarsed liikmed. Deformatsioonitensorid (2.113) saavad nüüd kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL} \approx U_{K;L} + U_{L;K} = 2\tilde{E}_{KL}, \\ 2e_{kl} = g_{kl} - c_{kl} \approx u_{k;l} + u_{l;k} = 2\tilde{e}_{kl} \end{cases} \quad (2.243)$$

ja pöördetensori jaoks kasutatakse valemid (2.231) ja (2.232), st.

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - G_{KM} \quad \text{ja} \quad \tilde{R}_{KM} \approx g^k_{\ K} g^m_{\ M} \tilde{r}_{km}.$$

Siin kaob erinevus U^K ja u^k vahel ning saadakse klassikaline lõpmaata väikeste deformatsioonide teooria.

Et saada paremaid (täpsemaid) tulemusi vaadeldakse siin tihti siiret nn. häirituste rea kujul —

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{u}_n \quad (2.244)$$

kus suurused \mathbf{u}_n hoitakse fikseeritud ning ϵ on häiritusparameeter. Sellise formalismi puhul vastab ϵ^n n -järku aproksimatsioonile. Teooria esitati E. ja F. Cosserat' poolt (1896).

²⁰I.k. *small displacement theory*

Väikeste peadeformatsioonide teooria

Väikeste peadeformatsioonide²¹ puhul eeldame, et $e_\alpha \equiv E_\alpha \ll 1$. DRK-le vastavaist valemeist (2.159) ja (2.173)

$$\begin{cases} 2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + E_{(K)})^2 - 1, \\ 2E_{KL} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \sin \Gamma_{\underline{K}\underline{L}}, \quad K \neq L. \end{cases}$$

saame mittelineaarsete liikmete hulgamisel

$$\begin{cases} E_{\underline{K}\underline{K}} \approx E_{(K)} = e_{\underline{k}\underline{k}} = e_{(k)} \\ 2E_{KL} \approx [1 + E_{(K)} + E_{(L)}] \sin \Gamma_{\underline{K}\underline{L}}, \quad K \neq L. \end{cases} \quad (2.245)$$

Deformatsioonitensorite invariantid saavad kuju

$$\begin{cases} \text{I}_C = \text{I}_{-1} \approx 3 + 2\text{I}_e, & \text{I}_c = \text{I}_{-1} \approx 3 - 2\text{I}_e, \\ \text{II}_C = \text{II}_{-1} \approx 3 + 4\text{I}_e, & \text{II}_c = \text{II}_{-1} \approx 3 - 4\text{I}_e, \\ \text{III}_C = \text{III}_{-1} \approx 1 + 2\text{I}_e, & \text{III}_c = \text{III}_{-1} \approx 1 - 2\text{I}_e, \end{cases} \quad (2.246)$$

suhteline mahu muut

$$\frac{dv - d\mathcal{V}}{d\mathcal{V}} \approx \text{I}_E \approx \text{I}_e \quad (2.247)$$

ja pöördetensor

$$R_{KL} \approx G_{KL} + U_{K;L}, \quad R_{KL}^{-1} \approx G_{KL} - U_{K;L}. \quad (2.248)$$

²¹I.k. *Small principal extentions*. Eesti keeles oleks seega täpsem öelda, et tegu on väikeste suhteliste peapikenemistega.

Väikeste pöörete teooria

Väikeste pöörete²² puhul loeme iga joonelemendi pöörde väikeseks ja pöördenurga $\vartheta \approx \sin \vartheta \approx \tan \vartheta$. Deformatsioonitensorit (2.142) (lk. 51) võib nüüd aproksimeerida kujul

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} \tilde{E}^M{}_L + \tilde{E}_{MK} \tilde{R}^M{}_L + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}^M{}_L \right). \quad (2.249)$$

Kui pööre on väike, siis võib kasutada pöördevektorit $2\tilde{R}^K = \epsilon^{KLM} \tilde{R}^{ML}$. Kui nüüd mõni \tilde{R}^K komponent osutub teistega võrreldes väikeseks, siis lihtsustub E_{KL} avaldis veelgi, sest liikmed, mis osutuvad teistega võrreldes väikesteks hüljatakse. Selline aproksimatsioon sõltub keha ja deformatsiooni geometriast. Näiteks, õhukese plaadi painde puhul on tasandilise elemendi pööre ümber kesktasandi normaali sihilise telje väike, võrreldes pööretega, mis toimuvad kesktasandil asuvate telgede ümber. Saadakse plaatide teist järku teooria, mis on tuntud kui Föppl-Kármán-Timošenko teooria.

Väikeste deformatsioonide ja väikeste pöörete teooria

Väikeste deformatsioonide (suhteliste pikenemiste) ja väikeste pöörete²³ puhul loetakse nii $\tilde{E}_{KL} \ll 1$ kui ka $\tilde{R}_{KL} \ll 1$ ja

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} \tilde{R}^M{}_L + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}^M{}_L \right). \quad (2.250)$$

Kui pöörded ja deformatsioonid osutuvad sama suurusjärku olevateks, siis võib nende korrutised hüljata. Tulemuseks on see, et eeldame väikeseid siirdegradiende ja saame lõpmata väikeste deformatsioonide teooria, st.,

²²I.k. *small rotations*

²³I.k. *small extentions and small rotations*

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} \text{ ja } R^K_L \approx \delta^K_L + \tilde{R}^K_L. \quad (2.251)$$

Siin on seega hüljatud kõik mittelineaarsed liikmed. Kehtib superpositsiooni printsiip: *Mitmest siirdest põhjustatud deformatsiooni võib vaadelda neist siiretest eraldi põhjustatud deformatsioonide summana* —

$$\begin{cases} \mathbf{E} \approx \tilde{\mathbf{E}} \approx \tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{R} \approx \tilde{\mathbf{R}} \approx \tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_2 + \tilde{\mathbf{R}}_1 \end{cases} \quad (2.252)$$

2.10 Deformatsioonide erijuhud

Vaatleme kolme tüüpi deformatsioone

- (i) *Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piirangud.* Need deformatsioonid ei sõltu suunast ega keha või deformatsiooni geometriast. Siia klassi kuuluvad nn. jäik deformatsioon, puhas homogeenne pikenemine, potentsiaalne deformatsioon ja isohooriline deformatsioon.
- (ii) *Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust.* Teisisõnu, pikenemised ja pöörded võivad mõnes koordinaadistikus olla väga spetsiifiliselt määratud. Siia klassi kuuluvad näiteks ühtlane paisumine, puhas piki-deformatsioon, puhas nihe, tasapinnaline deformatsioon.
- (iii) *Spetsiifilise geometriaga kehade spetsiifilised deformatsioonid.* Näiteks silindrilise varda vääne, ploki puhas paine, sfääri paisumine või vääne.

(i) **Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piirangud.**

Jäik deformatsioon. Deformatsioon on jäik²⁴ (keha jääb jäigaks) kui mistahes kahe punkti vaheline kaugus ei muutu. Tarvilik ja piisav tingimus selleks on, et $\mathbf{C} = \mathbf{c} = \mathbf{I}$ igas punktis. Lisaks $C_\alpha = \lambda_\alpha^2 = 1$, $I_C = II_C = 3$ ja $III_C = 1$ Vaata ka lk. 69.

Puhas pikenemine. Puhta pikenemise²⁵ ehk puhta pikideformatsiooni ehk pöördevaba deformatsiooni puhul peateljed ei pöördu. Tarvilik ja piisav tingimus selleks on, et $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ igas punktis. Vaata ka lk. 75.

Potentsiaalne deformatsioon. Potentsiaalse deformatsiooni²⁶ puhul leidub skalaarne funktsioon V nii, et

$$\mathbf{U} = \text{grad } V \quad (2.253)$$

Isohooriline deformatsioon. Isohooriline deformatsioon²⁷ on deformatsioon, mille puhul ruumala ei muutu. Kuna (vt. ka lk. 71)

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{III_C} = \frac{1}{\sqrt{III_c}} = J,$$

siis isohoorilise deformatsiooni puhul

$$\sqrt{III_C} = \sqrt{III_c} = 1 \text{ ja } J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = 1. \quad (2.254)$$

²⁴I.k. *rigid deformation*

²⁵I.k. *pure strain*

²⁶I.k. *potential deformation*

²⁷I.k. *isohoric deformation*

Kuna antud juhul $\text{III}_C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$, siis saab invariandid I_C ja II_C avaldada vaid kahe peapikenemise kaudu. Enamgi veel, funktsioonid mis üldjuhul sõltuvad kõigest kolmest invariandist (peapikenemisest), on nüüd vaid kahe esimese invariandi (peapikenemise) funktsioonid.

(ii) Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust

Siin on enamikel juhtudel tegu afiinse teisendusega, mis seob materiaalse punkti asukoha enne (Z^K) ja pärast (z^k) deformatsiooni.

$$z^k = D^k_K Z^K, \quad Z^K = \bar{D}^{-1K}_k z^k, \quad D^k_K \bar{D}^{-1K}_l = \delta^k_l, \quad (2.255)$$

kus D^k_K ja \bar{D}^{-1K}_l on konstantsed tensorid (maatriksid). Teisendus (2.255) jätab sirged sirgeteks, ellipsoidid ellipsoidideks jne. Sellist deformatsiooni nimetatakse *homogeenseks deformatsiooniks*²⁸. Seda võib defineerida ka kujul

$$\frac{\partial^2 z^k}{\partial Z^K \partial Z^L} = 0 \quad (2.256)$$

või üldistes kõverjoonelistes koordinaatides

$$(x^k_{,K})_{;L} = 0, \quad C_{KL;M} = 0. \quad (2.257)$$

Viimases avaldises tähistab koolon *kovariantset täistuletist* —

$$A^k_{K;L} = A^k_{K;L} + A^k_{K;l} x^l_{,L}, \quad \text{kus } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}). \quad (2.258)$$

Sellesse klassi kuulub ka näiteks punktis (i) vaadeldud puhas pikenenemine. Üldistatud homogeense deformatsiooni puhul võib D^k_K sõltuda materiaalse punkti koordinaatidest.

²⁸I.k. *homogeneous strain*

Ühtlane paisumine. Ühtlaseks paisumiseks²⁹ nimetatakse homogeenset deformatsiooni, mille puhul

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (2.259)$$

Deformatsioonitensorid

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{c}}^{-1} = \lambda^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \lambda^{-2} \mathbf{I}, \quad 2\mathbf{E} = (\lambda^2 - 1)\mathbf{I}. \quad (2.260)$$

Deformatsiooniellipsoidid on antud juhul sfäärid. Järelikult iseloomustavad sellist deformatsiooni identsed peadeformatsioonid (peapikenemised). Parameeter λ iseloomustab pikkuse muutust suvalises suunas. Kui $\lambda > 1$, siis on tegu ühtlase paisumisega (laienemisega), kui aga $0 < \lambda < 1$, siis ühtlase kokkutõmbumisega. Kera jääb sellisel deformatsioonil keraks. Deformatsioonitensorite invariandid

$$\text{I}_C = 3\lambda^2, \quad \text{II}_C = 3\lambda^4, \quad \text{III}_C = \lambda^6. \quad (2.261)$$

Ühesuunaline (üheteljeline) pikenenemine ja puhas pikideformatsioon. Ühesuunalise pikenenemise³⁰ puhul on

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (2.262)$$

ning

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{c}}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.263)$$

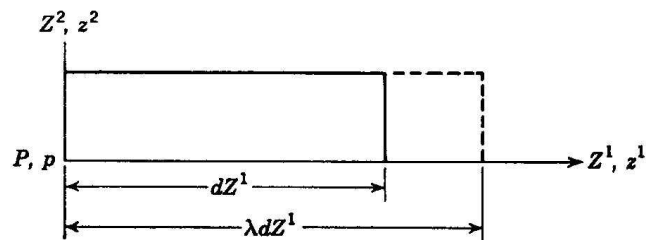
²⁹I.k. *uniform dilatation*

³⁰I.k. *uniaxial strain*

Invariandid

$$\begin{cases} I_C = 2 + \lambda^2, & II_C = 1 + 2\lambda^2, & III_C = \lambda^2, \\ I_E = 0.5(\lambda^2 - 1), & II_E = III_E = 0. \end{cases} \quad (2.264)$$

Deformatsiooniellipsoid on antud juhul pöördellipsoid kusjuures kaks peapikenemist on võrdsed ühega, ning üks on ühest erinev. Deformatsiooni tulemusena liigub teljega Z^1 risti olev tasand paralleelselt iseendaga ja Z^2 ning Z^3 sihis deformatsioon puudub.



Joonis 2.23: Ühesuunaline piknemine

Tegelikult tala ristlõige tõmbe puhul väheneb ja surve puhul suureneb. Sellist deformatsiooni nimetatakse *puhtaks piknemiseks* ehk *puhtaks pikideformatsiooniks*³¹. Nüüd

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & K\lambda & 0 \\ 0 & 0 & K\lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (2.265)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^2 \end{bmatrix}, \quad (2.266)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^{-2} \end{bmatrix}. \quad (2.267)$$

³¹I.k. *simple extention*

Invariandid

$$I_C = (1 + 2K^2)\lambda^2, \quad II_C = (2 + K^2)K^2\lambda^4, \quad III_C = K^4\lambda^6, \quad (2.268)$$

Seega, antud juhul on Z^1 sihis piknemiskoeffitsent $ds_1/dS_1 = \lambda$ ja suhteline piknemine $(ds_1 - dS_1)/dS_1 = \lambda - 1$. Vastavad suurused Z^2 ja Z^3 sihis on $K\lambda$ ja $K\lambda - 1$. *Poisson'i tegur* ν , mis iseloomustab piknemiste suhet põiki- (Z^2 või Z^3 siht) ja pikisuunas (Z^1 siht), on defineeritud järgmiselt:

$$\nu = -\frac{K\lambda - 1}{\lambda - 1}, \quad K = \frac{1 + \nu}{\lambda} - 1. \quad (2.269)$$

Kui $\nu = -1$ ($K = 1$) siis on tegu ühtlase paisumisega, $\nu = 0$ ($K = 1/\lambda$) puhul ühesuunalise piknemisega, $\nu > 0$ puhul ristlõige väheneb ja $\nu < 0$ puhul suureneb.

Puhas nihe. Puhta nihke³² puhul

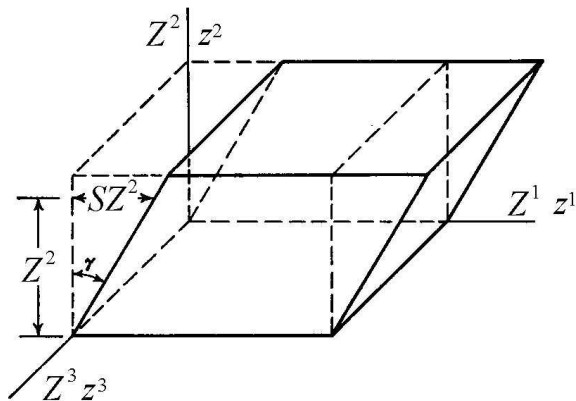
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < S < \infty, \quad S = const. \quad (2.270)$$

Seega liikumisseadus saab kuju (joonis 2.24)

$$z^1 = Z^1 + SZ^2, \quad z^2 = Z^2, \quad z^3 = Z^3. \quad (2.271)$$

³²I.k. *simple shear*

Puhast nihet võib ühest küljest kirjeldada kui deformatsiooni, mis pöörab tasandeid $Z^1 = \text{const.}$ ümber nende lõikejoone tasandiga $Z^2 = 0$ nurga $\gamma = \arctan S$ võrra, vastavalt liikumisseadusele (2.271). Teisest küljest aga kui deformatsiooni, mis nihutab mitte-deformeeruvaid tasandeid $Z^2 = \text{const.}$ vastavalt liikumisseadusele (2.271).



Joonis 2.24: Puhas nihe

Deformatsioonitensordid ja invariandid

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+S^2 & -S & 0 \\ -S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.272)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & -S & 0 \\ -S & 1+S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+S^2 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.273)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & -S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.274)$$

$$\begin{cases} \text{I}_C = \text{II}_C = 3 + S^2, & \text{III}_C = 1, \\ \text{I}_e = -\text{I}_E = 2\text{II}_e = 2\text{II}_E = -S^2/2, & \text{III}_e = \text{III}_E = 0. \end{cases} \quad (2.275)$$

Kuna $\text{III}_C = 1$, siis on puhas nihe isohooriline deformatsioon.

Kui lahendada karakteristlik kuupvõrrand

$$-C^3 + \text{I}_C C^2 - \text{II}_C C + \text{III}_C = 0$$

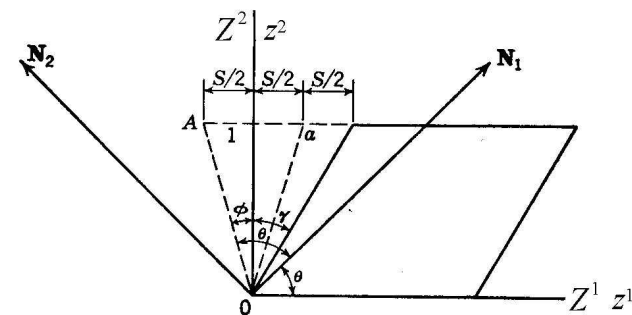
saame deformatsioonitensore \mathbf{C} ja \mathbf{c} peaväärtused

$$\begin{cases} C_1 = 1/c_1 = \lambda_1^2 = 1 + S^2/2 + S\sqrt{1+S^2/4}, \\ C_2 = 1/c_2 = \lambda_2^2 = 1 + S^2/2 - S\sqrt{1+S^2/4}, \\ C_3 = 1/c_3 = \lambda_3^2 = 1. \end{cases} \quad (2.276)$$

Viimastele vastavad peavektorid

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\mathbf{I}_1 + \left(S/2 \pm \sqrt{1+S^2/4} \right) \mathbf{I}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \pm S\sqrt{1+S^2/4}}}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{I}_3, \quad (2.277)$$

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\mathbf{i}_1 + \left(-S/2 \pm \sqrt{1+S^2/4} \right) \mathbf{i}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \mp S\sqrt{1+S^2/4}}}, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{i}_3. \quad (2.278)$$



Joonis 2.25: Nihketasand

Tasandi $Z^3 = 0$ punkt $A(-S/2, 1, 0)$ läheb pärast deformatsiooni vastavalt valemile (2.271) asendisse $a(S/2, 1, 0)$ (vt. joonis 2.25). Seega $OA = Oa$ ja järelikult kiud, mis olid enne deformatsiooni paralleelsed OA -ga ja moodustasid Z^2 teljega nurga $\Phi = \arctan S/2$ ei muuda deformatsiooni käigus oma pikkust. Valemist (2.277) saame määrata nurga

$$\tan \vartheta = S/2 + \sqrt{1 + S^2/4}. \quad (2.279)$$

Ka OA ja \mathbf{N}_1 vaheline nurk on ϑ , sest $\tan(\widehat{OAN_1}) = \tan \vartheta$. Seega poolitab peasuund \mathbf{N}_1 nurga $\widehat{OAZ^1}$, peasuund \mathbf{N}_2 on temaga risti tasandil $Z^3 = 0$ ning \mathbf{N}_3 on suunatud piki telge Z^3 .

Pöördetensor ($\mathbf{R} = [R^k_K] = [n^k_\alpha N^\alpha_K]$)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{4}S^2)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}S(1 + \frac{1}{4}S^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2}S(1 + \frac{1}{4}S^2)^{-\frac{1}{2}} & (1 + \frac{1}{4}S^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.280)$$

Tasapinnaline deformatsioon. Erinevalt kolmest viimasest näitest, ei pruugi siin olla tegu homogeenise deformatsiooniga. Tasapinnalise deformatsiooni³³ korral toimub paralleelsetel tasanditel identne deformatsioon ning nende normaali sihis deformatsioonid puuduvad. Seega kui deformatsioonid toimuvad $x^1 - x^2$ tasandis, siis liikumisseadus on esitatav kujul

$$\begin{aligned} x^k &= x^k(X^1, X^2), \quad k = 1, 2, \\ x^3 &= X^3 = z^3 = Z^3 \end{aligned} \quad (2.281)$$

(x^3 peab siin olema üldjuhul sirge) On lihtne mõista, et Cauchy deformatsioonitensor saab nüüd kuju

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.282)$$

ja analoogsed, st., väliskuju poolest sarnased on ka kõik teised deformatsioonitensorid ning pöördetensorid. Üks peatelgedest on antud juhul paralleelne x^3 -ga ja tema sihis on pikenemiskoeffitsent $\lambda_3 = 1$. Tasapinnaline deformatsioon on isohooriline kui $\lambda_1 = 1/\lambda_2$. •

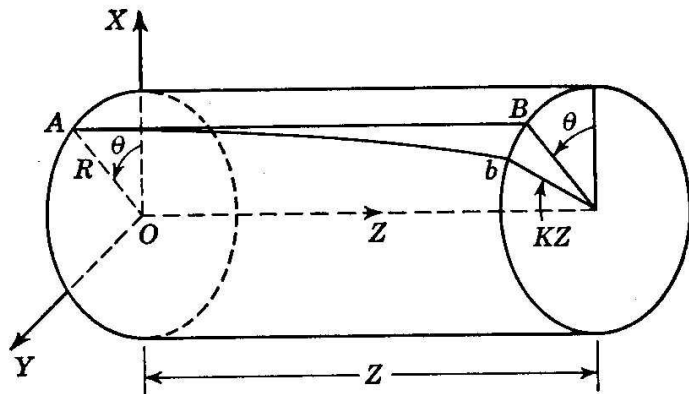
Üldistatud tasapinnaline deformatsioon on defineeritud kujul

$$\begin{aligned} x^k &= x^k(X^1, X^2), \quad k = 1, 2, \\ x^3 &= X^3 = z^3(Z^3). \end{aligned} \quad (2.283)$$

³³I.k. *plane strain*

(iii) Spetsiifilise geomeetriaga kehade spetsiifilised deformatsioonid.

Ümarsilindri vääne. Vaatleme silindrilise varda (ümarsilindri) väänet³⁴ (Joonis 2.26). LDRK XYZ ja EDRK xyz langevad alghet-



Joonis 2.26: Ümarsilindri vääne.

kel kokku ning silindrilised koordinaadid on tähistatud järgmiselt: $R\Theta Z$ — LK , $r\vartheta z$ — EK . Deformatsiooni kirjeldavad avaldised

$$r = R, \quad \vartheta = \Theta + KZ, \quad z = Z, \quad (2.284)$$

kus võrdetegur K väljendab Z ühikpikkusele vastavat pöoret. Z -telje sihis siirded puuduvad. Silindriliste koordinaatide korral on meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} nullist erinevad komponendid järgmised

$$\begin{aligned} G_{11} = G_{33} = 1, \quad G_{22} = R^2, \\ g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = r^2. \end{aligned} \quad (2.285)$$

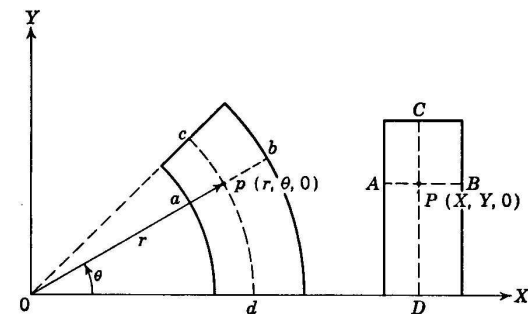
³⁴I.k. *torsion of a circular cylinder*

Deformatsioonitensorid C_{KL} ja c^{-1kl} leitakse vastavalt nende definitsioonidele (2.83) ja (2.84) —

$$[C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & KR^2 \\ 0 & KR^2 & 1 + K^2R^2 \end{bmatrix}, \quad [c^{-1kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K^2 + 1/r^2 & K \\ 0 & K & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.286)$$

Invariandid $I_C = II_C = 3 + K^2R^2$ ja $III_C = 1$ — seega on taoliselt kirjeldatud vääne isohooriline. Kui võrrelda deformatsioonitensorite invariante (või füüsikalisi komponente) väände ja nihke puhul, siis saab teha järelduse, et ümarvarda vääne on ekvivalentne kontsentriliste silindrite $R = const.$ puhta nihkega, kui võtta $S = KR$. Seega kehtivad väändel põhimõtteliselt samad valemid, mis nihkel.

Ploki puhas paine. Vaatleme risttahuka kujulise ploki (tala) puhast painet³⁵ (Joonis 2.27). LDRK ja LK XYZ ning EDRK xyz



Joonis 2.27: Ploki puhas paine.

langevad ühte, kuid EK -ks on silindrilised koordinaadid $r\vartheta z$, mille nullpunkt ühtib LDRK nullpunktiga. Deformeerugu vaadeldav plokk järgmiselt: tasandid $X = const.$ lähevad silindrilisteks pindadeks $r = const.$, tasandid $Y = const.$ lähevad tasandideks $\vartheta = const.$

³⁵I.k. *pure bending of a block*

ja tasandid $Z = \text{const.}$ jäävad tasandeiks $z = \text{const.}$. Selline deformatsioon on esitatav avaldistega

$$r = f(X), \quad \vartheta = g(Y), \quad z = h(Z). \quad (2.287)$$

Nüüd

$$G_{KL} = \delta_{KL}, \quad g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{kl} = 0 \quad (k \neq l). \quad (2.288)$$

Deformatsioonitensorid

$$[C^K_L] = [\bar{c}^{-1k}_l] = \begin{bmatrix} f'^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 g'^2 & 0 \\ 0 & 0 & h'^2 \end{bmatrix} \quad (2.289)$$

Siin ' tähistab diferentseerimist vastava argumendi järgi, st., $f' \equiv \partial f / \partial X$ jne. Viimases avaldises on tensorid \mathbf{C} ja $\bar{\mathbf{c}}^{-1}$ vaid arvuliselt võrdsed, tegelikult on üks avaldatud LK-s ja teine EK-s. Kuna vaadeldavad deformatsioonitensorid on juba diagonaalkujul, siis on peasuunad määratud vastavalt XYZ ja $r\vartheta z$ suundadega ning peapikenemised

$$\lambda_1 = f', \quad \lambda_2 = r g', \quad \lambda_3 = h' \quad (2.290)$$

ja peasuunad DRK-s ja silindrilistes koordinaatides

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= (1, 0, 0), & \mathbf{N}_2 &= (0, 1, 0), & \mathbf{N}_3 &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{n}_1 &= (1, 0, 0), & \mathbf{n}_2 &= (0, 1/r, 0), & \mathbf{n}_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.291)$$

Pöördetensorid $R^k_K = n^k_\alpha N^\alpha_K$ ja $R^k_l = g^k_l R^k_K$

$$[R^k_K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R^k_l] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ -r^{-1} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.292)$$

Pöördeteljeks on $Z \equiv z$, see on ilmselge juba jooniselt 2.27.

2.11 Kiirus ja kiirendus

2.11.1 Materiaalne tuletis

Pideva keskkonna mehaanikas on dünaamiliste protsesside kirjeldamise puhul vaja leida materiaalse punktidega seotud füüsikaliste suuruste (skalaaride, vektorite ja tensorite) muutumise kiirust³⁶, st., tuleb leida tuletisi aja järgi skalaaridest, vektoritest ja tensoritest (mis on funktsioonid kas materiaalistest või ruumilistest koordinaatidest) mingis fikseeritud materiaalses punktis. Siinjuures tuleb arvesse võtta nii muutus, mis on seotud fikseeritud ruumipunktiga (lokaalne muutus) kui materiaalse punkti liikumisest põhjustatud muutus (konvektiivne muutus).

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\text{const}}. \quad (2.293)$$

Kui vektorfunktsiooni \mathbf{f} argumentideks on LK, siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.294)$$

Näide: Nii leitakse materiaalselt tuletist liikumisseadusest. ✓

Keerukam on lugu siis, kui \mathbf{f} on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f^k \mathbf{g}_k = f_k \mathbf{g}^k$. Nüüd

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f^k \mathbf{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f^k \mathbf{g}_k) \dot{x}^l, \\ \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f_k \mathbf{g}^k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f_k \mathbf{g}^k) \dot{x}^l. \end{cases} \quad (2.295)$$

³⁶I.k. time rate

Esimest liiget nimetatakse siin *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muutusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti ümbruses).

Konvektiivsete tuletiste esimesed tegurid (valemite (2.295)) kujutavad endast kovariantset osatuletist vastavalt kontravariantsest ja kovariantsest vektorist (vt. valemid (2.106) – (2.109) lk. 41). Seega, kuna baasivektorid \mathbf{g}_k ja \mathbf{g}^k on ajast sõltumatud, saavad valemid (2.295) kuju

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df^k}{Dt} \mathbf{g}_k = \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{g}^k, \quad (2.296)$$

kus suurusi

$$\frac{Df^k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k_{;l} \dot{x}^l \quad \text{ja} \quad \frac{Df_k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k;l} \dot{x}^l \quad (2.297)$$

nimetatakse *materiaalseks tuletiseks vastavalt vektori kontravariantsest ja kovariantsest komponendist*. ✓

Materiaalne tuletis skalaarist. Vaatleme skalaarfunktsiooni $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$. *Materiaalne tuletis skalaarist* on defineeritud kujul †

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \dot{x}^l. \quad (2.298)$$

Näide: Tähistagu skalaar Φ materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev temperatuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.

Tensorite kovariantsed osatuletised. Enne kui saab asuda materiaalse tuletiste leidmisele tensoritest tuleb sisse tuua tensorite kovariantsed osatuletised. Need on defineeritud analoogselt vektorite kovariantsete osatuletistega (vt. lk. 41) —

$$f^{kl}_{;m} = f^{kl}_{,m} + f^{nl} \left\{ \begin{matrix} k \\ nm \end{matrix} \right\} + f^{kn} \left\{ \begin{matrix} l \\ nm \end{matrix} \right\} \quad (2.299)$$

on *kontravariantse tensori kovariantne osatuletis*. Analoogselt saab defineerida *kovariantse osatuletise segatensorist*

$$f^k_{l;m} = f^k_{l,m} + f^n_l \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} - f^k_n \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\} \quad (2.300)$$

ja *kovariantse osatuletise kovariantsest tensorist*

$$f_{kl;m} = f_{kl,m} - f_{nl} \left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} - f_{kn} \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\}. \quad (2.301)$$

Materiaalne tuletis tensoritest. *Materiaalne tuletis tensorite kontravariantsetest, kovariantsetest ja segakomponentidest on defineeritud järgmiselt* —

$$\begin{cases} \frac{Df^{kl}}{Dt} = \frac{\partial f^{kl}}{\partial t} + f^{kl}{}_{;m}\dot{x}^m \\ \frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl;m}\dot{x}^m \\ \frac{Df^k{}_l}{Dt} = \frac{\partial f^k{}_l}{\partial t} + f^k{}_{l;m}\dot{x}^m \end{cases} \quad (2.302)$$

Märkused

- (i) Materiaalse tuletise kontseptsiooni tõid sisse Euler (1770) ja Lagrange (1783), tähistus D/Dt pärineb aga Stokesilt (1845).
- (ii) Üldjuhul operaatorid $d/dt \neq D/Dt$. Sama tulemuse annavad need operaatorid vaid kolmel juhul:
 - (a) Kui on tegu DRK-ga (Christoffeli sümbolid on nullid).
 - (b) Kui on tegu skalaarse väljaga $\phi(\mathbf{x}, t)$ (siin $\phi_{;i} \equiv \phi_{,i}$).
 - (c) Kui on tegu liikumisseadusega $x^k = x^k(\mathbf{X}, t)$, siis

$$\left. \frac{dx^k}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\text{const}} = \frac{\partial x^k}{\partial t} = \frac{Dx^k}{Dt} = \dot{x}^k \quad (2.303)$$

- (iii) Materiaalne tuletis meetrilistest tensoritest ja baasivektoritest on null:

$$\frac{Dg_{kl}}{Dt} = \frac{DG_{KL}}{Dt} = \dots = \frac{D\mathbf{G}^K}{Dt} = \dots = 0. \quad (2.304)$$

2.11.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

Kiirus on teatavasti kohavektori esimene tuletis aja järgi. Kui materiaalse punkti kohavektor on $\mathbf{p} = x^k(X^1, X^2, X^3, t)\mathbf{g}_k$, siis tema kiirus on defineeritud kujul

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.305)$$

Kuna baasivektorid \mathbf{g}_k ei sõltu ajast, siis (vt. eelmine alajaotus)

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{x}^k(X^1, X^2, X^3, t)\mathbf{g}_k. \quad (2.306)$$

Kui tähistada $\mathbf{v} = v^k\mathbf{g}_k$, siis

$$v^k \equiv \dot{x}^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial t} \equiv \frac{Dx^k}{Dt}. \quad (2.307)$$

Joonise 2.11 (lk. 31) ja valemi (2.91) (lk. 37) põhjal

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}. \quad (2.308)$$

Kuna \mathbf{b} ja \mathbf{P} ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (2.309)$$

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul $\mathbf{u} = U^K\mathbf{G}_K$, kus $U^K = U^K(\mathbf{X}, t)$. Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U^K}{\partial t}\mathbf{G}_K, \quad \text{ehk} \quad (2.310)$$

$$\mathbf{v} = V^K\mathbf{G}_K, \quad \text{kus } V^K = \frac{\partial U^K}{\partial t}.$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

Euleri koordinaadid. Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis $\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k$, kus $u^k = u^k(\mathbf{x}, t)$. Nüüd saame kiiruse avaldised Euleri koordinaatides:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x}=\text{const}} = \frac{Du^k}{Dt} \mathbf{g}_k \equiv \left[\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k{}_{;l} v^l \right] \mathbf{g}_k,$$

ehk

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus } v^k = \frac{Du^k}{Dt} \equiv \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k{}_{;l} v^l.$$

Seega on kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

Kiirendus

Materiaalse punkti kiirendus on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.312)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A^K \mathbf{G}_K, \quad A^K = \frac{\partial V^K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^K}{\partial t^2} \quad (2.313)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k, \quad a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k{}_{;l} \underbrace{v^l}_{\dot{x}^l} \quad (2.314)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

Märkused

- (i) Kovariantseid kiiruse ja kiirenduse komponente saab leida meetriliste tensorite abil —

$$V_K = G_{KL} V^L, \quad v_k = g_{kl} v^l, \quad A_K = G_{KL} A^L, \quad a_k = g_{kl} a^l. \quad (2.315)$$

- (ii) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ määrab *kiiruse välja* ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$) omakorda *kiirenduse välja*.

- (a) Punkti, kus $\mathbf{v} = 0$ nimetatakse *stagneerunud punktiks*³⁷.

- (b) Kui kiirus ei sõltu ajast, st., $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, siis nimetatakse sellist liikumist *statsionaarseks liikumiseks*³⁸. See määratlus kehtib suvalise vektorväljas jaoks.

- (c) Liikumist, mille puhul vaid üks kiirusvektori komponent erineb nullist ja sõltub seejuures vaid vastavast ruumikoordinaadist nimetatakse *ühemõõtmeliseks liikumiseks*³⁹ — näiteks $v^1 = v^1(x^1, t)$ ja $v^2 = v^3 = 0$.

- (d) Liikumist, mille puhul üks kiirusvektori komponent on null ja kaks kiirusvektori komponenti on nullist erinevad ning sõltuvad seejuures vastavatest ruumikoordinaatidest, nimetatakse *tasapinnaliseks liikumiseks*⁴⁰ — näiteks $v^1 = v^1(x^1, x^2, t)$, $v^2 = v^2(x^1, x^2, t)$, $v^3 = 0$.

- (iii) Lagrange'i kirjelduse puhul on (analoogselt punkti kinemaatikaga) antud kiirusega liikuv materiaalne punkt identifitseeritav. Euleri kirjelduse puhul selline analoogia punkti kinemaatikaga puudub. Siin on antud kiiruste välja puhul, hetkel t , teada kiirusvektor igas ruumipunktis, kuid pole teada, milline materiaalne punkt asub vaadeldavas ruumipunktis.

³⁷I.k. *stagnation point*, ld. *stagnum* – seisev vesi

³⁸I.k. *steady motion*

³⁹I.k. *lineal motion*

⁴⁰I.k. *plane motion*

2.11.3 Trajektoor, voolujoon, voolupind

Trajektoor⁴¹ on kõver, mida mööda liigub vaadeldav materiaalne punkt —

$$x^k = x^k(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\text{const}}. \quad (2.316) \quad \checkmark$$

Kui on antud kiiruste väli, siis fikseeritud materiaalse punkti \mathbf{X}_0 trajektooriks on süsteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad (2.317)$$

integraalkõver, mis vastab algtingimusele $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t_0)$.

Voolujooned⁴² on jooned (kõverad), mille puutujad igas punktis ühtivad sihilt kiirusvälja vektoritega. Kui tähistada materiaalse • punkti kohavektori \mathbf{p} lõpmata väikest muutut, mis on paralleelne voolujoone puutujaga $d\mathbf{p}$, siis

$$\mathbf{v} = kd\mathbf{p} \quad \text{ehk} \quad \frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = \frac{1}{k}, \quad (2.318)$$

kus k on konstant. Seega on voolujooned süsteemi (2.318) integraalkõverad.

Voolupinnad⁴³ ja voolutorud⁴⁴ on voolujoonte hulgad, mis lõikuvad vastavalt avatud või suletud kõveraga. ★

2.11.4 Deformatsioonikiiruse tensor

Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist. Materiaalse tuletise deformatsioonigradiendist leiame kasutades materiaalse tuletise ja kovariantse osatuletise definitsioone (2.297) (lk. 100) ja (2.108) (lk. 41) —

$$\begin{aligned} \frac{D(x^k_{,K})}{Dt} &= \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \left[v^k_{,l} + \left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} v^m \right] x^l_{,K} \end{aligned}$$

Millest omakorda saame *materiaalse tuletise deformatsioonigradiendist*

$$\frac{D(x^k_{,K})}{Dt} = v^k_{,l} x^l_{,K}. \quad (2.319)$$

Arvestades, et $dx^k = x^k_{,K} dX^K$, siis korrutades viimast avaldist dX^K saame

$$\frac{D(dx^k)}{Dt} = v^k_{,l} dx^l, \quad (2.320)$$

mis esitab *diferentsiaalide dx^k muutumise kiiruse fikseeritud materiaalse punkti jaoks.*

⁴¹I.k. *pathline, trajectory*

⁴²I.k. *streamlines*

⁴³I.k. *streamsheets*

⁴⁴I.k. *stream tubes*

Euleri deformatsioonikiiruse tensor. Leiame materiaalse tuletise joonelemendi ruudust (EK-s $ds^2 = g_{kl}dx^k dx^l$) —

$$\begin{aligned} \frac{D(ds^2)}{Dt} &= \frac{D}{Dt} (g_{kl}dx^k dx^l) = \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= v_{l;k}dx^l dx^k + v_{k;l}dx^k dx^l = (v_{k;l} + v_{l;k}) dx^k dx^l. \end{aligned} \quad (2.321)$$

Kui tähistada

$$2d_{kl} = v_{k;l} + v_{l;k}, \quad (2.322)$$

siis

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl}dx^k dx^l. \quad (2.323)$$

Tensorit d_{kl} nimetatakse *Euleri deformatsioonikiiruse tensoriks*. Ta ei ole tensori e_{kl} tuletis aja järgi. Põhjus on selles, et tensori e_{kl} sissetoomise puhul vaadeldi ajavahemikku $[t_0, t]$, mis võis olla kui tahes pikk. Nüüd aga vaadeldi suuruse ds^2 muutust lõpmata väikese ajavahemiku jooksul. Kuna lõpmata väikesele deformatsiooni muutusele vastab tensor $\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} + u_{l;k})$, siis

$$d_{kl} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{e}_{kl}. \quad (2.324)$$

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor. Lagrange'i koordinaatide puhul teatavasti (vt. lk. 36) $ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}dX^K dX^L$. Kuna dS^2 ja dX^K ei sõltu ajast, siis

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} \stackrel{\text{LK}}{\equiv} \frac{\partial(ds^2)}{\partial t} = 2\dot{E}_{KL}dX^K dX^L, \quad (2.325)$$

kus \dot{E}_{KL} nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensoriks*. Kuna $C_{KL} = 2E_{KL} + G_{KL}$, siis $\dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}$. Kuna definitsiooni põhjal $C_{KL} = g_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L}$, siis kasutades valemeid (2.319) ja (2.322) saame seosed Euleri ja Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensorite vahel

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L}. \quad (2.326)$$

2.11.5 Elementaaruumala muutumise kiirus

Käesolevas alajaotuses leiame materiaalse tuletise EK-s esitatud elementaarumalast dv . Alghetkel t_0 on meil tahke keha (ruumi- piirkond) B , mida ümbritseb pind A ja mille ruumala on \mathcal{V} . Deformatsiooni käigus $B \rightarrow b$, $A \rightarrow a$ ja $\mathcal{V} \rightarrow v$. Kasutame tähistusi \checkmark

$$\begin{aligned} j &= \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| = |x^k_{,K}|, & J &= \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = |z^k_{,K}|, \\ g &= |g_{kl}|, & G^{-1} &= |G^{KL}|. \end{aligned} \quad (2.327)$$

Pideva liikumise puhul on koordinaatteisendused $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ja $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ teineteise ühesed pöördteisendused ja $j \neq 0$. Kõverjoonelised koordinaadid \mathbf{x} ja \mathbf{X} olid sissetoodud läbi DRK. Seega

$$\frac{\partial z^k}{\partial Z^K} = \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \frac{\partial X^M}{\partial Z^K}$$

ning jakobiaan

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^m} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^m}{\partial X^M} \right| \cdot \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^K} \right|. \quad (2.328)$$

Teisest küljest, arvestades meetriliste tensorite definitsioone $g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l$ jne. ning baasvektorite definitsioone (2.24) ja (2.25),

$$|g_{mn}| = \left| \frac{\partial z^m}{\partial x^n} \right|^2, \quad |G^{MN}| = \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \right|^2 \quad (2.329)$$

ning seega

$$\sqrt{g} = \left| \frac{\partial z^m}{\partial x^n} \right|, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} = \left| \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \right|. \quad (2.330)$$

kasutades avaldisi (2.327)–(2.330), saame

$$J = \sqrt{g} \cdot j \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j. \quad (2.331)$$

Kuna deformatsiooni käigus $d\mathcal{V} = dZ^1 dZ^2 dZ^3 \rightarrow dv = dz^1 dz^2 dz^3$ ja $dv = Jd\mathcal{V}$ (vt. lk. 71), siis

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \frac{DJ}{Dt} d\mathcal{V}. \quad (2.332)$$

Leiame materiaalse tuletise jakobiaanist J :

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} \frac{Dj}{Dt} =$$

= ...

$$= Jv^k{}_{;k}, \quad \text{sest } X^K{}_{,k} x^l{}_{,K} = \delta^l_k.$$

$$(2.333)$$

Kokku saame aga avaldise

$$\frac{D(dv)}{Dt} = Jv^k{}_{;k} d\mathcal{V} = v^k{}_{;k} dv, \quad (2.334)$$

mis väljendabki elementaaruumala muutumise kiirust.

2.11.6 Elementaarpinna muutumise kiirus

Elementaarpind on määratud sellel pinnal asuva kahe vektoriga: †

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{X}_{(1)} \times d\mathbf{X}_{(2)} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_{(1)} \times d\mathbf{x}_{(2)}. \quad (2.335)$$

Vektor $d\mathbf{A}$ avaldub läbi kontravariantse baasi \mathbf{G}^K kujul

$$d\mathbf{A} = (d\mathbf{X}_{(1)} \times d\mathbf{X}_{(2)})_K \mathbf{G}^K = dA_K \mathbf{G}^K. \quad (2.336)$$

Kui avaldada $d\mathbf{X}_{(1)} = dX_{(1)}^L \mathbf{G}_L$ ja $d\mathbf{X}_{(2)} = dX_{(2)}^M \mathbf{G}_M$, siis

$$\begin{aligned} dA_K &= (d\mathbf{X}_{(1)} \times d\mathbf{X}_{(2)})_K = (d\mathbf{X}_{(1)} \times d\mathbf{X}_{(2)}) \cdot \mathbf{G}_K = \\ &= dX_{(1)}^L dX_{(2)}^M (\mathbf{G}_L \times \mathbf{G}_M) \cdot \mathbf{G}_K = \\ &= \epsilon_{LMK} dX_{(1)}^L dX_{(2)}^M = \frac{1}{2} \epsilon_{LMK} dA^{LM}, \end{aligned} \quad (2.337)$$

kus ‡

$$dA^{LM} = 2dX_{(1)}^L dX_{(2)}^M \quad \text{ehk} \quad dA^{LM} = \epsilon^{KLM} dA_K. \quad (2.338)$$

Analoogselt saame EK jaoks

$$da_k = \frac{1}{2} \epsilon_{lmk} da^{lm} \quad \text{ehk} \quad da^{lm} = \epsilon^{klm} da_k. \quad (2.339)$$

Suurusi dA^{LM} ja da^{lm} nimetatakse *bivektoreiks* ja on olemuselt on nad kald- ehk antisümmeetrilised tensorid. Deformatsiooni käigus $\star dX^K \rightarrow dx^k = x^k{}_{,K} dX^K$. Seega

$$da^{kl} = 2dx_{(1)}^k dx_{(2)}^l = 2x^k{}_{,K} dX_{(1)}^K x^l{}_{,L} dX_{(2)}^L \stackrel{(2.338)}{=} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} dA^{KL}. \quad (2.340)$$

Rakendades (2.339) saame

$$da_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} x^l{}_{,L} x^m{}_{,M} dA^{LM} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \epsilon^{KLM} x^l{}_{,L} x^m{}_{,M} dA_K. \quad (2.341)$$

Kuna

$$\epsilon^{KLM} \epsilon_{klm} x^l_{,L} x^m_{,M} = 2JX^K_{,k} \text{ ja } J = \sqrt{\frac{g}{G}}, \quad (2.342)$$

siis

$$da_k = JX^K_{,k} dA_K \text{ ja } dA_K = J^{-1} x^k_{,K} da_k \quad (2.343)$$

ja materiaalne tuletis pinnaelemendist

$$\frac{D(da_k)}{Dt} = \frac{D(JX^K_{,k} dA_K)}{Dt} = \left[\frac{DJ}{Dt} X^K_{,k} + J \frac{D(X^K_{,k})}{Dt} \right] dA_K. \quad (2.344)$$

Materiaalse tuletise $\frac{D(X^K_{,k})}{Dt}$ määramiseks leiame materiaalse tuletise avaldisest $x^k_{,K} X^K_{,l} = \delta^k_l$:

$$\frac{D(x^k_{,K})}{Dt} X^K_{,l} + x^k_{,K} \frac{D(X^K_{,l})}{Dt} = 0 \Big| \cdot X^L_{,k} \Rightarrow$$

...

Järelikult

$$\frac{D(X^K_{,k})}{Dt} = -X^K_{,l} v^l_{;k} \quad (2.345)$$

ja pinnaelemendi materiaalne tuletis (muutumise kiirus) avaldub kujul

$$\frac{D(da_k)}{Dt} = v^m_{;m} da_k - v^m_{;k} da_m. \quad (2.346)$$

2.12 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Integraalsete füüsikaliste suuruste muutumise kiiruse määramiseks on vaja leida tuletisi aja järgi ka vastavatest integraalidest. Algul

toome sisse aga materiaalse joone, materiaalse pinna ja materiaalse mahu mõisted⁴⁵.

Materiaalne joon on joon, mis koosneb materiaalistest punktidest:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(S), S - \text{parameeter.} \quad (2.347)$$

Materiaalse joone asukoht ruumis hetkel t on määratud läbi liikumiseaduse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ kujul

$$\mathbf{x}(S, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(S), t). \quad (2.348)$$

Materiaalne pind on pind, mis koosneb materiaalistest punktidest

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(R, Q), R, Q - \text{parameetrid} \quad (2.349)$$

ning tema asukoht ruumis hetkel t on

$$\mathbf{x}(R, Q, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(R, Q), t). \quad (2.350)$$

Materiaalne maht on materiaalistete punktide 3D piirkond.

⁴⁵I.k. *material line, material surface, material volume*

Joonintegraal

Olgu ϕ mingi funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elektri-juhtivus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone L . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_L \phi dx^k &= \int_L \frac{D}{Dt} (\phi dx^k) = \int_L \left[\frac{D\phi}{Dt} dx^k + \phi \frac{D}{Dt} (dx^k) \right] = \\ &\stackrel{(2.320)}{=} \int_L \left[\dot{\phi} dx^k + \phi v^k_{;l} dx^l \right]. \end{aligned} \quad (2.351)$$

Fikseeritud ruumijoone l puhul (ϕ on defineeritud mingil ruumijoonel l) ei vaatle me (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning joonintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_l \phi dx^k = \frac{\partial}{\partial t} \int_l \phi dx^k = \int_l \frac{\partial \phi}{\partial t} dx^k, \quad (2.352)$$

sest dx^k ei sõltu ajast.

Pindintegraal

Olgu nüüd suvaline funktsioon ϕ defineeritud üle materiaalse pinna S . Vastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{Dt} (\phi da_k) = \int_S \left[\frac{D\phi}{Dt} da_k + \phi \frac{D}{Dt} (da_k) \right] = \\ &\stackrel{(2.346)}{=} \int_S \left[\dot{\phi} da_k + \phi (v^l_{;l} da_k - v^l_{;k} da_l) \right]. \end{aligned} \quad (2.353)$$

Fikseeritud ruumipinna s puhul, ei vaatle me jällegi (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning pindintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_s \phi da_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \phi da_k = \int_s \frac{\partial \phi}{\partial t} da_k, \quad (2.354)$$

sest da_k ei sõltu ajast.

Ruumintegraal

Kui nüüd funktsioon ϕ on defineeritud üle materiaalse mahu \mathcal{V} , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt} (dv) \right] \stackrel{(2.334)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{;k} v^k \right) dv + \phi v^k_{;k} (dv) \right] = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v^k)_{;k} \right] dv. \end{aligned} \quad (2.355)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi⁴⁶, siis saame viimasest

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v^k da_k. \quad (2.356)$$

Siin on materiaalne maht \mathcal{V} asendatud fikseeritud ruumimahuga v , mida ümbritseb pind s ja mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V} . Seega, mingi füüsikalise suuruse ϕ materiaalses mahus \mathcal{V} muutumise kiirus võrdub selle suuruse ϕ muutumise kiirus ruumilises mahus v (mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V}) pluss suuruse ϕv^k voog läbi ruumilist mahtu v ümbritseva pinna s .

⁴⁶ $\int_{\mathcal{V}} u^k_{;k} dv = \int_S u^k da_k$, $da_k = n_k da$ — tuntud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem

2.13 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

2.13.1 Keeriselisus

Euleri deformatsioonikiiruse tensor on defineeritud juba punktis 2.11.4 kujul

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} + v_{l;k}) \equiv v_{(k;l)}, \quad (2.357)$$

Defineerime nüüd lisaks (Cauchy) keeriselisuse tensori⁴⁷

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} - v_{l;k}) \equiv v_{[k;l]}. \quad (2.358)$$

Viimase kahe valemi põhjal

$$v_{k;l} = d_{kl} + w_{kl} \equiv v_{(k;l)} + v_{[k;l]}. \quad (2.359)$$

Kaldsümmeetrilisest tensorist w_{kl} saab omakorda konstrueerida keerisvektori

$$w^k = \epsilon^{klm} w_{ml} = \epsilon^{klm} v_{m;l} \text{ ehk } \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (2.360)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \text{ ja } \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.361)$$

Keerisvektori kovariantsed komponendid

$$w_k = g_{kl} w^l. \quad (2.362)$$

⁴⁷I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

2.13.2 Deformatsioonikiiruse tensori füüsikaline sisu

Deformatsioonikiiruse tensor d_{kl} iseloomustab materiaalsete joonelementide pikkuse ja nende vahelise nurga muutumise (hetkelist) kiirust. Selle tõestuseks leiame ühikvektori \mathbf{n} sihilise elemendi pikene-mise kiiruse⁴⁸ $d_{(\mathbf{n})}$. Valemi (2.323) põhjal $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx^k dx^l$. † Seega —

$$d_{(\mathbf{n})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = d_{kl} n^k n^l, \text{ kus } n^k \equiv \frac{dx^k}{ds} \quad (2.363)$$

Kui ortogonaalse koordinaadistiku puhul on \mathbf{n} võetud piki x^1 , siis

$$d_{(1)} = d^{(1)}_{(1)}. \quad (2.364)$$

Analoogselt saab näidata, et algse täisnurga muutumise kiirus avaldub kujul

$$-\dot{\vartheta}_{(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)} = 2d_{kl} n^k_1 n^l_2 \quad (2.365)$$

ning et kui ortogonaalsete koordinaatide puhul on \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 valitud piki koordinaate x^1 ja x^2 , siis

$$-\dot{\vartheta}_{(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)} = 2d^{(1)}_{(2)}, \quad (2.366)$$

Kokku oleme seega tõestanud **teoreemi**: ortogonaalse koordinaadistiku puhul võrduvad deformatsioonikiiruse tensori füüsikalised normaalkomponendid koordinaatide sihiliste joonelementide pikene-mise kiirusega ja segakomponendid ($k \neq l$) poolega nihkekiirusest koordinaatidega x^k ja x^l määratud pinnal.

⁴⁸I.k. *Stretching, relative rate of stretch, rate of extension*

2.13.3 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Alajaotuses 2.11.4 defineerisime Euleri deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja näitasime, et Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}.$$

Leiame nüüd seose deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja Euleri deformatsioonitensori materiaalse tuletise \dot{e}_{kl} vahel. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni mõõdust $ds^2 - dS^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) \stackrel{(2.85)}{=} 2\frac{D}{Dt}(e_{kl}dx^k dx^l) \\ &\stackrel{(2.320)}{=} 2(\dot{e}_{kl} + e_{ml}v^m{}_{;k} + e_{km}v^m{}_{;l}) dx^k dx^l. \end{aligned} \quad (2.367)$$

Kuna valemi (2.323) põhjal $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx^k dx^l$, siis

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v^m{}_{;k} + e_{km}v^m{}_{;l}. \quad (2.368)$$

Arvestades Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensorite definitsiooni ($2e_{kl} = g_{kl} - c_{kl}$ ja $2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL}$) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl} \text{ ja } \dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}. \quad (2.369)$$

Killingi teoreem. On selge, et kui $d_{kl} = 0$, siis $D(ds^2)/Dt = 0$ ja vastupidi, kui suvalise kahe punkti puhul $D(ds^2)/Dt = 0$, siis $d_{kl} = 0$. Seega, $d_{kl} = 0$ on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et deformatsioon oleks jääk. See tulemus on tuntud Killingi teoreemina.

Eelpool toodud valemite põhjal selgub, et jäiga keha liikumise puhul, st. kui $d_{kl} = 0$, $\dot{E}_{KL} = 0$ kuid $\dot{e}_{kl} \neq 0$. Viimane seletub sellega, et kuigi jäiga keha liikumisel jääb deformatsiooni mõõt $ds^2 - dS^2$ konstantseks, võivad tensori e_{kl} komponendid muutuda. Seega, vaatlejale, kes liigub koos materiaalse punktiga, näib, et Euleri koordinaadid pöörlevad kui ruumpunktid mööduvad.

2.13.4 Kiirusvälja tsirkulatsioon

Kiirusvälja (kiirusvektori) \mathbf{v} tsirkulatsiooniks mõõda suletud taanduvat (laguvat) kõverat⁴⁹ c , nimetatakse joonintegraali *

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \oint_c v_k dx^k. \quad (2.370)$$

Siin $d\mathbf{p} = (dx^1, dx^2, dx^3)$ on kõvera c diferentsiaalne puutuja suvalises punktis, st., $d\mathbf{p}$ näitab ka liikumise suunda mööda kõverat c . †

Stokesi teoreemi põhjal $\oint_c \mathbf{b} \cdot d\mathbf{p} = \int_s (\text{curl } \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{a}$. Arvestades seda, et valemi (2.360) põhjal on just keerisvektor \mathbf{w} rootor kiiruse vektorist \mathbf{v} , siis saame

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \int_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = \text{ehk } \Gamma = \oint_c v_k dx^k = \int_s w_k da^k, \quad (2.371)$$

kus s on orienteeritud pind, mis on ümbritsetud orienteeritud kõveraga c . Kokkuvõttes, kiirusvektori tsirkulatsioon mööda kinnist (ja taanduvat) kõverat võrdub keerisvektori vooga läbi sellele kõverale toetuva "suvalise" pinna.

⁴⁹I.k. *reducible curve*

2.13.5 Keeriselisuse füüsikaline interpretatsioon

Keeriselisuse tensori füüsikaline sisu

Vaatleme materiaalist joonelementi, mille siht on antud hetkel määratud vektoriga $d\mathbf{p}$ ja mis pöörleb ümber vektoriga $\boldsymbol{\mu}$ määratud telje. Olgu $\boldsymbol{\nu}$ mingi fikseeritud ühikvektor ja φ vektorite $d\mathbf{p}$ ja $\boldsymbol{\nu}$ vaheline nurk. Kui tähistada $\mathbf{n} = d\mathbf{p}/ds$, siis

$$\cos \varphi = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{g}_k n^k \mathbf{g}_l \nu^l = g_{kl} \nu^l \frac{dx^k}{ds}. \quad (2.372)$$

Võtame viimase avaldise v.p. ja p.p. materiaalse tuletise —

$$\begin{aligned} -(\sin \varphi) \dot{\varphi} &= g_{kl} \nu^l \frac{D}{Dt} \left(\frac{dx^k}{ds} \right) = \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= v_{l;m} n^m \nu^l - d_{(\mathbf{n})} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.373)$$

Kui $\varphi = \pm\pi/2$, siis saame, et

$$\dot{\varphi} = \mp v_{l;m} n^m \nu^l. \quad (2.374)$$

Olgu nüüd x^k ortogonaalne koordinaatsüsteem ja $\boldsymbol{\nu} \parallel x^2$ ning $\mathbf{n} \parallel x^1$. Leiame millise nurkkiirusega pöörleb x^1 sihiline element x^2 sihilise elemendi suhtes (ümber x^3 -ga määratud telje), st.,

$$\dot{\varphi}_{12} = \dots \quad (2.375)$$

Esimene indeks näitab siin milline telg pöörleb ja teine mille suhtes ta pöörleb. Analoogselt

$$\dot{\varphi}_{21} = \dots \quad (2.376)$$

Seega

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_{12} &= v_{1;2} - v_{2;1} = 2w_{12} = -2w_{21} \\ \dot{\varphi}_{21} - \dot{\varphi}_{12} &= v_{1;2} + v_{2;1} = 2d_{12} = 2d_{21} \end{aligned} \quad (2.377)$$

Seega oleme näidanud, et *keeriselisuse tensori komponent w_{kl} võrdub poolega ortogonaalsete koordinaatide x^k ja x^l sihiliste joonelementide pöörlemise nurkkiiruste summast. Siinjuures toimub pöörlemine ümber telje, mis on risti mõlema vaadeldava joonelemendiga. Samuti leidis veelkord kinnitust fakt, et deformatsiooni-kiiruse tensori segakomponendid võrduvad poolega nihkekiirusest koordinaatidega x^k ja x^l määratud pinnal.*

Keerisvektori füüsikaline interpretatsioon

Vaatleme pinnal s punkti \mathbf{x} , kus pinnanormaliks on \mathbf{n} ja keerisvektoriks \mathbf{w} . Kui pinna s pindala on a , siis

$$\oint_c v_k dx^k = aw_n + O(a^2). \quad (2.378)$$

Seega, kui kõver c läheneb punktile \mathbf{x} , siis

$$w_n = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \oint_c v_k dx^k, \quad (2.379)$$

st., kiiruse tsirkulatsioon mööda kontuuri c , jagatud pindalaga a võrdub keerisvektori normaalkomponendiga vaadeldavas punktis (kui $a \rightarrow 0$).

2.13.6 Keerisevaba ja keeriseline liikumine

Keerisevaba liikumine

Liikumine on *keerisevaba* siis ja ainult siis kui keeriselisuse tensor $w_{kl} = 0$ (ja järelikult ka keerisvektor $\mathbf{w} = 0$) vaadeldava piirkonna igas punktis. Vedeliku puhul nimetatakse sellist liikumist *laminaarseks*⁵⁰ voolamiseks, st., vedeliku voolamine toimub paralleelsete kihitudena. Sellisel juhul on kiiruste väli avaldatav läbi potentsiaali ϕ

$$v_k = -\phi_{,k} \quad (2.380)$$

ja liikumist võib nimetada ka *potentsiaalseks*. Potentsiaalse liikumise puhul

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} v_k dx^k &= - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\phi = \phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2) \\ \Gamma &= \oint_c v_k dx^k = - \oint_c d\phi = 0. \end{aligned} \quad (2.381)$$

Viimasele vastab **Kelvini teoreem**: *Liikumine on potentsiaalne siis ja ainult siis kui kiirusvektori tsirkulatsioon mööda igat taanduvat kõverat on null. Pöördteoreemi tõestus järeldeb Stokesi teoreemist — $\Gamma = \oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = 0$ põhjal on $\mathbf{w} = 0$ kõikjal vaadeldavas piirkonnas ja seega on liikumine keerisevaba.*

⁵⁰I.k. lamellar

Keeriseline liikumine

Vaatleme juhtu, kus keerisvektor \mathbf{w} on nullist erinev igas vaadeldava piirkonna punktis. Jooni, mille puutujateks on keerisvektorid nimetatakse *keerisjoonteks*. Keerisjooned on võrrandi

$$\frac{dx_1}{w^1} = \frac{dx_2}{w^2} = \frac{dx_3}{w^3} \quad (2.382)$$

integraalkõverad. *Keerispinnad* on keerisjoontest moodustatud pinnad ja *keeristorud* on “suletud keerispinnad,” st., nad on defineeritud analoogselt voolupindade ja voolutorudega. ✓

Helmholtzi esimene teoreem: *igas keeristoru lõikes on summaarne keeriselisus sama, mis suvalises teises keeristoru lõikes.*

Tõestus põhineb Greeni-Gaussi teoreemil — $\int_v \operatorname{div} \mathbf{w} dv = \int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da$. Kuna $\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{v}$ ja $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$, siis ★

$$\int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (2.383)$$

Keerisvektor \mathbf{w} on keeristoru külpinna puutuja. Järelikult seal $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$. Tähistame s_1 ja s_2 keeristoru kaht suvalist lõiget välisnormaalidega \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 . Seega nimetatud otpindadel

$$\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{s_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (2.384)$$

Seega on keeriselisus lõigetes s_1 ja s_2 arvuliselt võrdne — $\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = \text{const}$. See konstant on igal torul erinev ja iseloomustab vaadeldavat toru.

Järeldus: Keerisjooned (keeristorud) ei saa alata ega lõppeda suvalises vedeliku punktis — nad on kas kinnised või algavad ja lõpevad keskkonna rajal (k.a. $\pm\infty$).

Peatükk 3

Deformeeruva keskkonna dünaamika

Dünaamika on mehaanika osa, mis uurib materiaalsete keskkondade liikumist välismõjude (välisjõudude) toimel. Uuritavaks materiaalseks keskkonnaks võib olla nii tahke keha, gaas kui vedelik. Üheks vaadeldavaid materiaalseid keskkondi iseloomustavaks suuruseks on *inerts*. Inerts mõõduks on mass.

3.1 Mass

Mass on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon M ei sõltu ei pikkuse dimensioonist L ega aja dimensioonist T . Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon ρ , mida nimetatakse *massi tiheduseks*. Sel juhul keha kogu mass

$$\mathfrak{M} = \int_v \rho dv. \quad (3.1)$$

Kui mass pole pidev üle kogu ruumala v , siis

$$\mathfrak{M} = \int_{v_1} \rho dv + \sum_{\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha}, \quad (3.2)$$

kus v_1 on pideva massijaotusega piirkond. Edaspidi vaatleme vaid pideva massijaotusega keskkondi, st., kus igas mahus on etteantud massi tihedus ning kui $v \rightarrow 0$, siis $\mathfrak{M} \rightarrow 0$ — seega $0 < \rho < \infty$.

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus

Globaalne massi jäävuse aksioom: Keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_{\circ} d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (3.3)$$

Kuna $dv = Jd\mathcal{V}$, siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_{\circ} - \rho J) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_v (\rho - \rho_{\circ} J^{-1}) dv = 0, \quad (3.4)$$

kus

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Lokaalse massi jäävuse aksioomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses. Valemite (3.4) põhjal saame

$$\rho_{\circ} = \rho J = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_{\circ} J^{-1} = \rho_{\circ} \sqrt{\text{III}_c}. \quad (3.5)$$

Avaldisi (3.5) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv \stackrel{(2.355)}{=} \int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} \right] dv = 0. \quad (3.6)$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksioom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0, \quad (3.7)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*. Avaldised (3.5) ja (3.7) esitavad ühe ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (3.5) on mugavam kasutada tahke keha mehaanikas, (3.7) aga vedelike ja gaaside puhul.

3.2 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulk*¹ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} v^k(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) d\mathfrak{M} \quad (3.8)$$

kusjuures baasivektorid $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ saab integraali ette tuua vaid sirgjooneliste koordinaatide puhul. Kuna pideva massijaotuse puhul $d\mathfrak{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. Kui korrutada viimast avaldist skalaarselt $\mathbf{G}^K(\mathbf{X})$ siis saame liikumishulga \mathcal{P} komponendid \mathcal{P}^K LK-s —

$$\mathcal{P}^K(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k(\mathbf{X}, \mathbf{x}) v^k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M}. \quad (3.9)$$

¹I.k. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline moment*² \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (3.10)$$

Analoogselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada LK-s

$$\mathcal{H}_o^K = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (3.11)$$

Lisaks saab kineetilise momendi avaldada ka bivektori kujul

$$\mathcal{H}_o^{KL} = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^{Ll} (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M}. \quad (3.12)$$

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline energia*³

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} g_{kl} v^k v^l d\mathfrak{M}. \quad (3.13)$$

Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus

Liikumishulga globaalse tasakaalu seadus. Liikumishulga muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peavektoriga⁴ —

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k v^k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}^K \quad (3.14)$$

²I.k. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

³I.k. *kinetic energy*

⁴I.k. *principle of balance of momentum*

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus

Kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadus. Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peamomendiga⁵ (mõlemad momendid peavad olema võetud ühe ja sama ruumipunkti suhtes) —

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_o &= \mathcal{M}_o \text{ ehk } \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^K \text{ ehk} \\ \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M} &= \mathcal{M}_o^{KL}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Valemitega (3.14) ja (3.15) esitatud pideva keskkonna mehaanika põhiaksioome nimetatakse *Euleri liikumisseadusteks* ning nad kujutavad endast Newtoni seaduste laiendust punktmassilt keskkonnale.

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus

Energia jäävuse seadus. Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude töö ja keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud energiatega summa muutumise kiirusega —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}. \quad (3.16)$$

Siin \mathcal{K} on kineetiline energia, \mathcal{E} – siseenergia, \mathcal{W} – välisjõudude töö ajaühikus ja \mathcal{U}_{α} – ajaühikus muundunud energiatega mehaaniline ekvivalent. *Seega eeldame, et energiad on aditiivsed.* Suurused \mathcal{K} , \mathcal{W} ja \mathcal{U}_{α} on selgelt määratletavad, siseenergia \mathcal{E} on aga ebamäärasem ja teda võib vaadelda kui võrrandi (3.16) tasakaalustavat liiget. Ta

⁵I.k. *principle of balance of moment of momentum*

on nn. oleku funktsioon ja sõltub olekut väljendavatest muutujatest⁶. Termodünaamika ja termostaatika uurivad seda suurust \mathcal{E} põhjalikult. Kui on teada siseenergia tihedus ε (ühikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathfrak{M}} \varepsilon d\mathfrak{M} \equiv \int_v \rho \varepsilon dv. \quad (3.17)$$

3.3 Pinge

3.3.1 Sise- ja välisjõud

Materiaalne keha deformeerub sise- ja välisjõudude⁷ toimel. Jõudude päritolu võib olla väga mitmesugune — mehaaniline, elektriiline, keemiline jne. jne. Punktmassi ja jäiga keha mehaanikas vaadeldakse jõudusid, mis võivad sõltuda vaid ajast, punkti asukohast ja kiirusest, st., $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t)$. Pideva keskkonna mehaanikas sellist piirangut ei sea ja jõud võib sõltuda lisaks eeltoodule ka näiteks deformatsioonigradiendist, kõrgemat järku tuletistest aja järgi, elektromagnetilistest muutujatest jne. Klassikalises mehaanikas jõudu tavaliselt ei defineerita. Pideva keskkonna vaatepunktist lähtudes võib jõud jagada kolme kategooriasse:

1. *Mahu- ehk massijõud*⁸ mõjuvad keha või keskkonda moodustavatele materiaalsele punktile (masspunktidele). Näiteks gravitatsiooni jõud või elektrostaatilised jõud. Summaarne jõud saadakse integreerimisel üle kogu ruumala v . Siin eeldatakse, et on teada jõu tihedus ühikmassi või ühikruumala kohta.

⁶I.k. *constitutive variables*

⁷I.k. *internal and external loads*

⁸I.k. *body loads*

2. *Pinna- ehk kontaktjõud*⁹ on põhjustatud teiste kehade või keskkondade mõjust kokkupuutepinnal. Siin eeldatakse, et on teada pinnaühikule mõjuv jõud. Näiteks hüdrostaatilise rõhu mõju vette asetatud keha pinnale.
3. *Sisejõud*¹⁰ on põhjustatud materiaalsete punktide omavahelisest mõjust. Newtoni III seaduse põhjal mõjutavad kaks massipunkti teineteist võrdvastupidiste jõududega — seega on kõigi sisejõudude summa null. Dünaamika kursuses näidati, et ka kõigi sisejõudude peamoment on null. Punktmasside vahelised jõud (sisejõud) muutuvad pinnajõududeks kui me isoleerime (mõtteliselt) keskkonna või keha ühe osa ülejäänust. See annab pingehüpoteesi, mida vaatleme järgmises alajaotuses.

Allpool kasutame järgmisi tähistusi:

- \mathbf{f} — massijõud (jõud massiühiku kohta),
 $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ — pinnajõud (jõud pinnaühiku kohta) punktis, mille pinnanormaal on \mathbf{n} ,
 \mathcal{F}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv koondatud jõud,
 \mathbf{m} — massimoment (moment massiühiku kohta),
 $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ — pinnamoment (moment pinnaühiku kohta) punktis, mille pinnanormaal on \mathbf{n} ,
 \mathcal{M}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv jõupaari moment.

Seega, kehale mõjuva jõusüsteemi peavektor

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \sum_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha \quad (3.18)$$

⁹I.k. *surface or contact loads*
¹⁰I.k. *mutual or internal loads*

ja peamoment

$$\mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} [\mathbf{m} + \mathbf{p} \times \mathbf{f}] d\mathfrak{M} + \int_s [\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}] da + \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha \times \mathcal{F}_\alpha + \sum_{\beta} \mathcal{M}_\beta. \quad (3.19)$$

Koondatud jõudusid defineeritakse tihti kui piirjuhte pinna- või mahujõududest. Selline käsitlus võib aga mõnikord põhjustada matemaatilisi raskusi ning vajab seetõttu täiendavate tingimuste kasutamist. Näiteks, et vältida määramatusi rakendatakse lokaalseid teoreeme ja printsiipe vaid punktides, kus ei mõju koondatud jõudusid. Globaalsete teoreemide puhul sellist probleemi pole.

Antud kursuses vaadeldakse edaspidi eeskätt vaid jaotatud jõudusid (massijõudusid ja pinnajõudusid) ja nende põhjustatud momente. Teisisõnu, reeglina esitatakse jõusüsteemi peavektor kujul

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \quad (3.20)$$

ja peamoment kujul

$$\mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \quad (3.21)$$

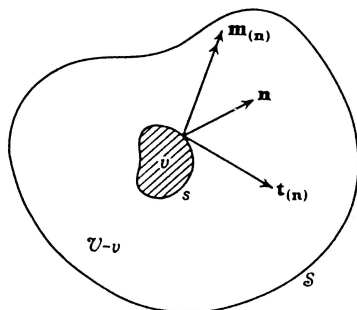
Arvestades avaldisi (3.20) ja (3.21) saavad liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadused (3.14) ja (3.15) kuju

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}} &\stackrel{(3.8)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\ \dot{\mathcal{H}}_o &\stackrel{(3.10)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \\ &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Neid võrrandeid nimetatakse *Euleri liikumisvõrrandeks*. Kuna sisejõud on tasakaalus, siis nemad neis võrrandis ei esine.

3.3.2 Pingehüpotees

Cauchy pingehüpotees. Pinnal Δa mõjub keskmine jõud $\Delta \mathcal{F}$ ja keskmine moment punkti p suhtes \mathcal{M}_p . Kui $\Delta a \rightarrow 0$, siis suhe $\Delta \mathcal{F}/\Delta a \rightarrow \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$. Kui vaadeldavas protsessis moment punkti p suhtes ei lähene nullile, siis saame ka suuruse $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$. Vaatleme †

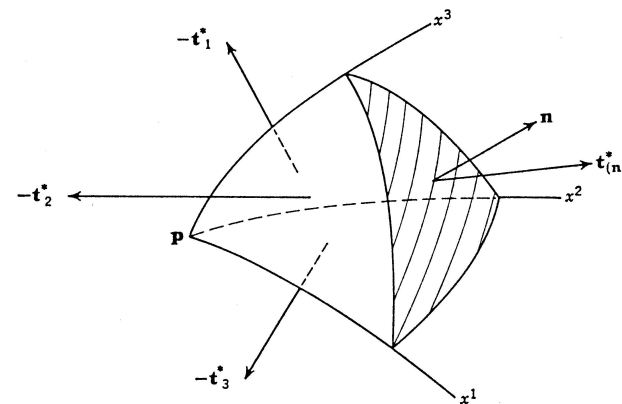


Joonis 3.1: Pingeja momentpinge

väikest ruumi piirkonda v , mis on ümbritsetud pinnaga s ja mis asub täielikult kehas mahuga \mathcal{V} ja pinnaga S (joonis 3.1). Punktis p , mis asub pinnal s on välisnormaal \mathbf{n} ning mõjuvad jõud $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ ja moment $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ pinnauhiku kohta. Mõlemad nad on põhjustatud mahtude v ja $\mathcal{V} - v$ koosmõjust pinnal s . Suurust $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ nimetatakse *pingeks* ehk *pingevektoriks* ja suurust $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ *momentpingeks* ehk *momendi pingeks*¹¹. Nad iseloomustavad vaadeldava mahu v välispinnal s mõjuvat väliskoormust, mis ei sõltu ainult vaadeldava punkti kohavektorist \mathbf{p} vaid ka pinnanormaalist \mathbf{n} .

Vaatleme väikest tetraeedrit (joonis 3.2), mille tipp p asub vaadeldava piirkonna v sees ja mille kolm tahku on koordinaatpinnad ning neljas asub pinnal s . Koordinaatpinnal $x^i = \text{const.}$ mõjuva keskmise pinge tähistame $-\mathbf{t}_i^*$. Kasutame vaadeldava tetraeedri √ jaoks liikumishulga tasakaalu seadust (integreerimisel on rakenda-

¹¹I.k. *couple stress*



Joonis 3.2: Tetraeeder

tud keskväärtusteoreeme) —

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}^* \Delta v) = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}^* \Delta a - \mathbf{t}_k^* \Delta a^k + \rho \mathbf{f}^* \Delta v. \quad (3.23)$$

Siin Δv on tetraeedri ruumala, Δa ja Δa^k – tetraeedri tahkude pindalad, \mathbf{v}^* – tetraeedri punktide keskmine kiirus ning \mathbf{f}^* – keskmine mahujõud. •

Jagame nüüd viimase avaldise Δa ja laseme $\Delta a \rightarrow 0$ nii, et punkt p läheneb pinnale s mahu v seest. Kuna $\Delta v/\Delta a \rightarrow 0$, siis piiril saame

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k \frac{da^k}{da} = \mathbf{t}_k n^k = \mathbf{t}^k n_k, \quad (3.24)$$

sest teatavasti elementaarpind $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = da^k \mathbf{g}_k$ ja $da^k = n^k da$. ★ Kokkuvõttes oleme seega tõestanud **teoreemi** — *pingevektor pinnapunktis p on lineaarfunktsioon ühikulisest pinnanormaalist \mathbf{n} . Selle lineaarfunktsiooni kordajateks on pingevektorid, mis mõjuvad vaadeldavat punkti läbivatel koordinaattasanditel.* †

Pingevektorid \mathbf{t}_k ei sõltu pinnanormaalist \mathbf{n} . Eeldades, et $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ on pidev funktsioon normaalist \mathbf{n} ja võttes valemis (3.24) $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ saame

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \quad (3.25)$$

st., punktis p mõjuvad sama pinna vastaskülgedel võrdvastupidised pingevektorid.

Rakendades analoogset mõttekäiku ka momentpingetele, saame

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{m}_k n^k = \mathbf{m}^k n_k \text{ ja } \mathbf{m}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}. \quad (3.26)$$

3.4 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x^k = \text{const}$ mõjuva pingevektori \mathbf{t}_k l -is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{g}^l \quad (3.27)$$

Seega näitab esimene indeks koordinaatpinda, millel pingevektor \mathbf{t}_k mõjub ja teine indeks vaadeldava komponendi mõjumise suunda. Pingekomponentide positiivsed suunad on näidatud joonisel 3.3. Pingetensori normaalkomponente $k = l$ nimetatakse *normaalpingeteks*¹² ja segakomponente $k \neq l$ *nihkepingeteks*¹³.

Pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n^k \stackrel{(3.27)}{=} t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \quad (3.28)$$

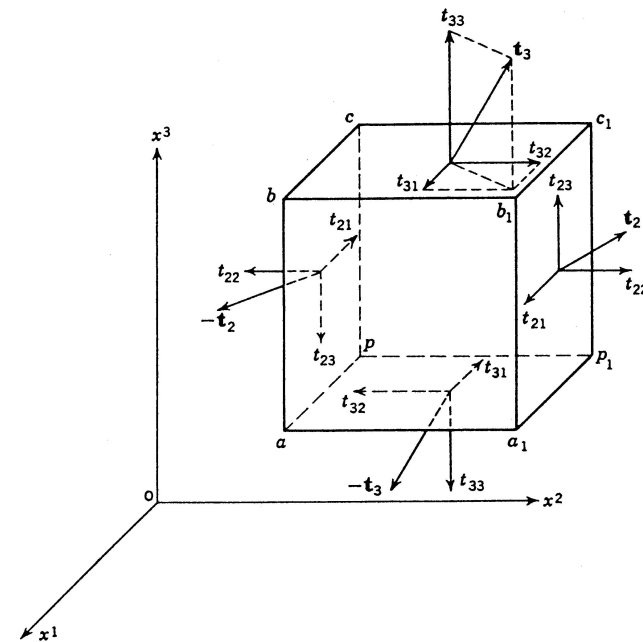
kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n^k. \quad (3.29)$$

Seega oleme tõestanud **teoreemi** — *punkti p läbival suvalisel pinnal (normaaliga \mathbf{n}) mõjuv pingevektor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl} .*

Meetriliste tensoritega indekseid tõstes saame moodustada kontravariantseid ja segatensoreid, näiteks

$$g^{km} g^{ln} t_{mn} = g^{ln} t^k_n = t^{kl}.$$



Joonis 3.3: Pingetensor

Seega, lisaks valemile (3.27) ja (3.28), on pingevektorite avaldamiseks mitmeid võimalusi —

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t^k_l n_k \mathbf{g}^l = t_l^k n^l \mathbf{g}_k = t^{lk} n_l \mathbf{g}_k = t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \\ \mathbf{t}^k = t^k_l \mathbf{g}^l = t^{kl} \mathbf{g}_l, \\ \mathbf{t}_k = t_k^l \mathbf{g}_l = t_{kl} \mathbf{g}^l. \end{cases} \quad (3.30)$$

Pingetensori füüsikalised komponendid

Alajaotuses 2.2.7 (lk. 46) toodud valemite põhjal pingevektor

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t_l^k n^l \mathbf{g}_k = t_{(l)}^{(k)} n^{(l)} \mathbf{e}_{(k)}, \quad (3.31)$$

¹²I.k. *normal stress*

¹³I.k. *shear stress*

kus

$$\mathbf{e}_{(k)} = \frac{\mathbf{g}_k}{\sqrt{g_{kk}}}, n^{(l)} = n^l \sqrt{g_{ll}} \text{ ja } t_{(l)}^{(k)} = t_l^k \frac{\sqrt{g_{kk}}}{\sqrt{g_{ll}}}. \quad (3.32)$$

Siinjuures $t_{(l)}^{(k)}$ nimetatakse pingetensori *vasakpoolseteks füüsikalisteks komponentideks*. Parempoolsed füüsikalised komponendid

$$t^{(l)}_{(k)} = \frac{\sqrt{g_{ll}}}{\sqrt{g_{kk}}}. \quad (3.33)$$

Sümmeetrilise pingetensori ja ortogonaalsete koordinaatide puhul

$$t^{(k)}_{(l)} = t_{(k)}^{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}} = t_k^l \sqrt{\frac{g_{ll}}{g_{kk}}} = t^{kl} \sqrt{g_{kk}g_{ll}} = t_{kl} \frac{1}{\sqrt{g_{kk}g_{ll}}} \quad (3.34)$$

Analoogselt tuuakse sisse ka momentpinge füüsikalised komponendid.

Erinevate autorite erinevaid tähistusi pingetensori jaoks

t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}	Eringen, Truesdell
A	B	C	D	E	F	Cauchy varasemad tööd
p_{xx}	p_{yy}	p_{zz}	p_{yz}	p_{zx}	p_{xy}	Cauchy hilisemad tööd, St. Venant, Maxwell
X_x	Y_y	Z_z	Y_z	Z_x	X_y	F. Neumann, Kirchhoff, Love
P	Q	R	S	T	V	Kelvin
σ_x	σ_y	σ_z	τ_{yz}	τ_{zx}	τ_{xy}	Kármán, Timošenko
τ_{11}	τ_{22}	τ_{33}	τ_{23}	τ_{31}	τ_{12}	Green, Zerna, Vene ja Saksa autorid
σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{23}	σ_{31}	σ_{12}	Mõned Inglise ja Ameerika autorid ning teised
σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{yz}	σ_{zx}	σ_{xy}	

3.5 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Lähtume valemist (3.22) (lk. 131), st. liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaal seadustest ning leiame vasakul poolel olevad materiaalsed tuletised. Saame

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{a} d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(n)} da \\ \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{a} d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(n)} da. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Need on valemite (3.22) alternatiivsed kujud. Vaatleme nüüd väikest mahu v , mis asub mahu \mathcal{V} sees ja kus on pidev massijaotus. Kasutades valemite (3.24) saame viimastest

$$\begin{aligned} \int_v \mathbf{a} \rho dv &= \int_v \mathbf{f} \rho dv + \int_s \mathbf{t}^k n_k da \\ \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{a} \rho dv &= \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{f} \rho dv + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}^k n_k da. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Kasutades Greeni-Gaussi teoreemi¹⁴ saame üle minna pindintegraalilt ruumintegraalile

$$\begin{aligned} \int_v \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) \right] dv &= 0. \\ \int_v \left\{ \mathbf{g}_k \times \mathbf{t}^k + \mathbf{p} \times \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) \right] \right\} dv &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Valemid (3.37) kehtivad suvalise mahu v jaoks kui integraalide alused avaldised on nullid, st.,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) &= 0, \\ \mathbf{g}_k \times \mathbf{t}^k &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

¹⁴siin kasutame teda kujul $\int_{\mathcal{V}} \mathbf{t}^k_{;k} d\mathcal{V} = \int_S \mathbf{t}^k n_k da$ ning rakendame lisaks valemite $t^{km}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k)$

Need võrrandid väljendavadki liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadust. Valemi (3.38)₂ saamiseks on kasutatud valemit (3.38)₁. Kui kasutada avaldisi (3.30) ja rakendada seoseid

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} \equiv \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} r \\ rk \end{matrix} \right\} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_r}{\partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ rk \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_n \quad (3.39)$$

siis saame esitada liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused komponentkujul (koordinaatkujul) —

$$\begin{aligned} t^{jk}{}_{;j} + \rho (f^k - a^k) &= 0, \\ \epsilon^{ijk} t_{jk} &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Äsjatuletatud lokaalse tasakaalu seadusi kujul (3.38) või kujul (3.40) nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks*.¹⁵ *

Avaldisest (3.40)₂ järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline —

$$\epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{jk} - t_{kj} = 0, \quad (3.41)$$

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus ning mahu- ja pinnamomentide puuduvad, on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

Seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: $t^{11}, t^{22}, t^{33}, t^{12} = t^{21}, t^{13} = t^{31}, t^{23} = t^{32}$, st.,

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad t^{kl} = t^{lk}, \quad t^k{}_l = t_l{}^k. \quad (3.42)$$

¹⁵Eringen [1] võtab saadud tulemused kokku kahe teoreemina.

Teoreem 1 Liikumishulga lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus on esitatav kujul (3.40)₁ või (3.38)₁.

Teoreem 2 Kineetilise momendi lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus esitatakse kujul (3.40)₂ või (3.38)₂, tingimusel, et liikumishulk on lokaalses tasakaalus.

Arvestades avaldisi (3.42) ning tõstes ja langetades indekseid, saab anda Cauchy esimesele liikumisseadusele (3.40)₁ alternatiivseid kujusid —

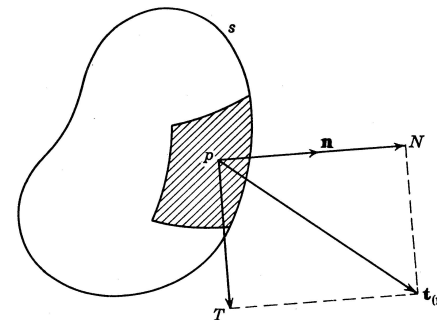
$$\begin{cases} t^{kl}{}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^l{}_{k;l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_{lk}{}^l + \rho (f_k - a_k) = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Enamgi veel, Cauchy liikumisseadusi on võimalik esitada ka füüsikalistes komponentides (vt. näiteks [1] lk. 105–106).

3.6 Peapinged ja pingetensori invariandid

Cauchy pingepinnad

Vaatleme pingevektorit $\mathbf{t}_{(n)}$, mis mõjub punktis p pinnal S . Kui \mathbf{n}



Joonis 3.4: Normaali- ja tangentsiaalpinge

on pinna S välisnormaal, siis pingevektori $\mathbf{t}_{(n)}$ normaalkomponent

$$N = \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{n} \stackrel{(3.29)}{=} t_{kl} n^k n^l. \quad (3.44)$$

Kui fikseerime N väärtuse ja muudame pinna orientatsiooni, siis selleks, et (3.44) oleks rahuldatud, peab muutuma pingetensor t_{kl} .

Sel juhul esitab (3.44) teist järku pinda pingete ruumis. Seda pinda nimetatakse Cauchy pingepinnaks (analoogselt Cauchy deformatsiooniellipsoidiga).

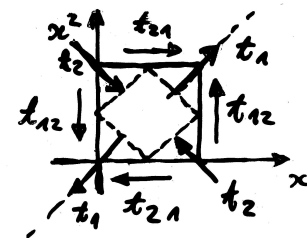
Peapinged, pingetensori peasuunad ja invariandid

Kui massi- ja pinnamomendid puuduvad, siis on pingetensor t_{kl} sümmeetriline. Seega kehtivad tema kohta samad seaduspärasused, mis deformatsioonitensorite kohta (vaata paragrahv 2.6) —

- (i) pingetensoril leidub vähemalt kolm peasuunda;
- (ii) pingetensoril leidub kolm peapinget, t_α ($\alpha = 1, 2, 3$), mis mõjuvad peapindadel;
- (iii) peapindadel on nihkepinged nullid;
- (iv) pingetensoril leidub kolm sõltumatut invarianti I_t , II_t ja III_t , mille leidmise eeskirjad, läbi pingetensori t^k_l või peaväärtuste t_α , on analoogsed Greeni deformatsioonitensori C^K_L invariantide leidmise eeskirjadele (2.192) ja (2.196) (lk. 65 ja 66).

Pinguse (pingeoleku) erijuhud

- (i) Kaks peapinget on nullid, kolmas pole — *puhas tõmme ehk üheteljeline pingus*.
- (ii) Üks peapinge on null, kaks pole — *tasapinnaline pingus ehk tasandpingus ehk kaheteljeline pingus*.
- (iii) Kui DRK-s esitatud tasandpinguse puhul kaks peapinget on suuruselt võrdsed kuid märgilt vastupidised, siis nimetatakse sellist pingust *puhtaks nihkeks*. Sel juhul puuduvad normaalinged pindadel, mis moodustavad peapindadega 45° nurga. Kui tähistada $t_1 = -t_2 = t$, siis joonisel 3.5 kujutatud olu-



Joonis 3.5: Puhas nihe

korra puhul on x^1, x^2 teljestikus nullist erinevad vaid pingetensori komponendid $t_{21} = t_{12}$ ja peateljestikus 1-2 vaid $t_{11} = -t_{22} = t$. Seega invariandid

$$I_t = III_t = 0 \quad \text{ja} \quad II_t = -(t_{12})^2 = -t^2 \quad (3.45)$$

ning nihkepinge $t_{12} = t$. See osutub ka maksimaalseks nihkepingeks (võrdle tugevusõpetusest tuntud valemiga $\max t_{kl} = (t_1 - t_2)/2$), mis mõjub pindadel, mis moodustavad peapindadega nurgad 45° .

3.7 Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

Cauchy liikumisvõrrandid (3.38) või (3.40) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pingvektori \mathbf{T}^K ruumipunktis \mathbf{x} , mis vastab deformeerumata pinnale dA materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, nii et

$$\mathbf{t}_{(n)} da = \mathbf{t}^k da_k = \mathbf{T}^K dA_K. \quad (3.46)$$

Kuna valemi (2.343) põhjal $da_k = JX^K_{,k} dA_K$ ja $dA_K = J^{-1}x^k_{,K} da_k$ siis

$$\mathbf{t}^k = J^{-1}x^k_{,K} \mathbf{T}^K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}^K = JX^K_{,k} \mathbf{t}^k \quad (3.47)$$

Lähtume Cauchy esimesest liikumisest kujul (3.38), st.,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \quad (3.48)$$

Teisendame v.p. olevat osatuletist (arvestades, et $j = \sqrt{G/g}J$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) &\stackrel{(3.47)}{=} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} J^{-1} x^k_{,K} \mathbf{T}^K) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\underbrace{j^{-1} x^k_{,K}}_{\sqrt{G}} \underbrace{\sqrt{g} \mathbf{T}^K}_{J} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (j^{-1} x^k_{,K}) \sqrt{G} \mathbf{T}^K + \frac{\partial}{\partial x^k} j^{-1} x^k_{,K} \left(\sqrt{G} \mathbf{T}^K \right) \right] \\ &= \frac{1}{j \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{G} \mathbf{T}^K \right) x^k_{,K} = \frac{1}{J \sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial X^K} \left(\sqrt{G} \mathbf{T}^K \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Seega saame anda Cauchy esimesele liikumisest (liikumishulga tasakaalu seadusele) kuju

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial X^K} \left(\sqrt{G} \mathbf{T}^K \right) + \underbrace{J\rho}_{=\rho_0} (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \quad (3.50)$$

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T^{Kl} ja T^{KL} nii, et

$$\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{g}_l = T^{KL} x^l_{,L} \mathbf{g}_l = T^{KL} \mathbf{G}_L. \quad (3.51)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. Terminid pseudopinge kasutatakse \checkmark siin seetõttu, et mõlemad tensorid väljendavad pinget algse (deformeerumata) pinna kohta. Tensor T^{Kl} (esimene Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) esitab pinget ruumipunktis \mathbf{x} ja tensor T^{KL} (teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) materiaalses punktis \mathbf{X} .

Seosed Cauchy pingetensoriga:

$$\begin{aligned} T^{Kl} &= JX^K_{,k} t^{kl}, & t^{kl} &= J^{-1}x^k_{,K} T^{Kl}, \\ T^{KL} &= T^{Kl} X^L_{,l} = JX^K_{,k} X^L_{,l} t^{kl}, \\ t^{kl} &= J^{-1}x^k_{,K} x^l_{,L} T^{KL}, & T^{KL} &= x^l_{,L} T^{KL}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Järgnevalt defineerime *kovariantse täistuletise*. Kui $A^{Kk} = A^{Kk}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$, siis kovariantne täistuletis

$$A^{Kk}_{;L} = \underbrace{A^{Kk}_{,L} + \left\{ \begin{matrix} K \\ ML \end{matrix} \right\} A^{Mk}}_{A^{Kk}_{;L}} + \underbrace{\left(A^{Kk}_{,l} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} A^{Km} \right)}_{A^{Kk}_{;l}} x^l_{,L}. \quad (3.53)$$

Nüüd saab avaldada valemid (3.50) läbi tensori T^{Kl} —

$$\begin{aligned} T^{Kk}_{,K} + T^{Km} \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^l_{,K} + T^{Kk} \left\{ \begin{matrix} L \\ LK \end{matrix} \right\} + \rho_0 (f^k - a^k) &= 0 \\ \text{ehk} \\ T^{Kk}_{;K} + \rho_0 (f^k - a^k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Viimase puhul on arvestatud, et siin $T^{Kk} = T^{Kk}(\mathbf{X})$. Pinna ja mahumomentide puudumisel saab Cauchy teine liikumisest kuju

$$T^{Kk} x^m_{,K} = T^{Km} x^k_{,K}. \quad (3.55)$$

Läbi tensori T^{KL} saavad liikumiseadused (3.54) ja (3.55) kuju

$$\begin{aligned} & (T^{KL}x^k_{,K})_{,K} + \left(\left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} x^m_{,L} x^l_{,K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ MK \end{matrix} \right\} x^k_{,L} \right) T^{KL} \\ & + \rho_0 (f^k - a^k) = 0 \quad \text{ja} \\ & T^{KL} = T^{LK}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Tensoritega T^{KL} ja T^{Kl} seotud valemeid on mugav kasutada väikeste deformatsioonide puhul, sest nad on seotud algpinnaga ning järelikult on lihtne aproksimeerida järgnevaid väikseid muutusi. Deformatsiooni käigus keha välispind muutub ja seega tuleb rajatingimused esitada liikuval ja muutuval pinnal ning nad sõltuvad siirdevektorist \mathbf{u} , mis on tundmatu. Lagrange'i kirjelduse puhul aga siin probleemi pole, sest rajatingimused esitatakse algse pinna jaoks, mis on teada. Tõsi küll, liikumisvõrrandid ise on sel juhul "pisut" keerukamad. Lineaarse teooria puhul erinevus kahe vaadeldava kirjelduse vahel kaob.

Näide P1 Pideva keskkonna deformatsiooni kirjeldab siirdeväli

$$\begin{cases} z^1 = Z^1, \\ z^2 = Z^2 + AZ^3, \\ z^3 = Z^3 + AZ^2, \end{cases}$$

$z^k \equiv x^k$ ja $Z^K \equiv X^K$. Cauchy pingetensor ruumipunktis $(1, 1, 1)$ on

$$[t^{kl}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Leida pingetensorite T^{Kl} ja T^{KL} , st. esimese ja teise Piola-Kirchoffi pingetensori, matriksid. Milline materiaalne punkt on vaadeldaval hetkel ruumipunktis $(1, 1, 1)$?

Lahenduskäik ja vastused. 1) Pöördteisendus

$$\begin{cases} Z^1 = z^1, \\ Z^2 = \frac{z^2 - Az^3}{1 - A^2}, \\ Z^3 = \frac{z^3 - Az^2}{1 - A^2} \end{cases}$$

2) Jakobiaan $J = 1 - A^2$

3) Deformatsioonigradient

$$[X^{K,k}] = \frac{1}{1 - A^2} \begin{bmatrix} 1 - A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A \\ 0 & -A & 1 \end{bmatrix}$$

4) Esimene Piola-Kirchoffi pingetensor

$$[T^{Kl}] = \begin{bmatrix} 2(1 - A^2) & 3(1 - A^2) & 0 \\ 3 & -1 - A & 1 - 4A \\ -3A & 1 + A & 4 - A \end{bmatrix}$$

5) Teine Piola-Kirchoffi pingetensor

$$[T^{KL}] = \frac{1}{1 - A^2} \begin{bmatrix} 2(1 - A^2)^2 & 3(1 - A^2) & -3A(1 - A^2) \\ 3(1 - A^2) & -1 - 2A + 4A^2 & 1 - 3A + A^2 \\ -3A(1 - A^2) & 1 - 3A + A^2 & 4 - 2A - A^2 \end{bmatrix}.$$

6) Materiaalne punkt $(1, 1/(1 + A), 1/(1 + A))$ asub vaadeldaval hetkel ruumipunktis $(1, 1, 1)$.

Peatükk 4

Energia ja entroopia

Keskkonnale (või tema osale või kehale) rakendatud pind- ja mahujõud põhjustavad tema osade liikumist. Liikumise olemus sõltub keskkonna (või keha) omadustest. Näiteks deformatsioon, jääga keha liikumine, vedeliku voolamine. Seega teevad keskkonnale rakendatud jõud tööd ja keskkond omandab energiat. Nimetatud energiale võib liituda veel muu päritoluga energiad (näiteks soojusenergia, keemiline energia jne.). Pideva keskkonna mehaanika puhul piirduakse muude energiatega osas tavaliselt vaid soojusenergiaga. Summaarne energia¹ on seega põhjustatud soojusenergiast ja välisjõudude tööst. Osa sellest summaarsest energiast «kulutatakse» kineetilise energi kujul (näiteks keskkonna deformeerimiseks või vedeliku voolamiseks). Ülejäänud osa summaarsest energiast kujutab endast vaadeldava keskkonna (kui mehaanikalise süsteemi) siseenergiat². Deformeeruva keha puhul võib siseenergia koosneda näiteks soojusenergiast ja deformatsioonienergiast, vedeliku voolamisel aga soojusenergiast ja viskoosse dissipatsiooniga seotud energiast.

¹I. k. *Total energy*

²I. k. *Internal energy*. Siseenergia mõiste võttis 1851. a. kasutusele W. Thomson sõnastamaks termodünaamika I seadust.

4.1 Energia jäävuse seadus — termodünaamika esimene seadus

Paragrahvis 3.2 esitasime globaalse energia jäävuse seaduse kujul

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}, \quad (4.1)$$

kus \mathcal{K} on kineetiline energia, \mathcal{E} – siseenergia, \mathcal{W} – välisjõudude töö (keha suhtes) ajaühikus, st., (välisjõudude) mehaanikaline võimsus ja \mathcal{U}_{α} – teiste energialiikide (soojus, elektrienergia, keemiline energia jne.) mehaanikaline ekvivalent ajaühiku kohta. Lihtsuse mõttes vaatleme edaspidi vaid soojusenergiat.

Soojuse ja mehaanikalise energia vahelise seose avastas Carnot (1824–32) ja formuleeris selgelt Joule (1843). Globaalne energia jäävuse seadus on termodünaamikas tuntud kui termodünaamika esimene seadus ja ta esitatakse kujul

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + Q, \quad (4.2)$$

kus Q on soojuse juurdevool ajaühikus, ja teda mõõdetakse samades ühikutes kui mehaanikalist võimsust \mathcal{W} , st., $\dim Q = \dim \mathcal{W} = ML^2/T^3$. Pideva massijaotusega keskkonnas

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho v_p v^p dv \quad \text{ja} \quad \mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \rho \varepsilon dv, \quad (4.3)$$

kus ε on siseenergia tihedus. Mehaanikaline võimsus pärineb massijõududest, pindjõududest, massimomentidest ja pinnamomentidest (viimaseid kahte käesolevas kursuses ei vaadelda) —

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r + \int_{\mathcal{V}} \rho f^p v_p dv. \quad (4.4)$$

Soojuse juurdevool koosneb kahest osast (i) juurdevool läbi pinna S kehasse \mathcal{V} ja (ii) keha siseallikaist toodetud soojus, st.,

$$Q = \int_S q^p da_p + \int_{\mathcal{V}} \rho h dv. \quad (4.5)$$

Siin q^p on soojuse juurdevool pinnatühiku kohta ja h — keha siseal-
likaist toodetud soojus massiühiku kohta.

Avaldame nüüd kõik valemis (4.2) olevad liikmed läbi ruuminteg-
raalide —

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_v \left[\rho a^p v_p dv + \frac{1}{2} v_p v^p \frac{D}{Dt} (\rho dv) \right], \quad (4.6) \quad \checkmark$$

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_v \left[\rho \dot{\varepsilon} dv + \varepsilon \frac{D}{Dt} (\rho dv) \right], \quad (4.7)$$

$$\mathcal{W} = \int_v [t^{rp}{}_{;r} v_p + t^{rp} v_{p;r} + \rho f^p v_p] dv, \quad (4.8)$$

$$Q = \int_v (q^p{}_{;p} + \rho h) dv. \quad (4.9)$$

Jagades kiiruse gradiendi ja pingetensori sümmeetriliseks ja
kaldsümmeetriliseks osaks, st., $v_{p;r} = d_{pr} + w_{pr}$ ja $t^{pq} = t^{(pq)} + t^{[pq]}$,
saame anda *globaalsele energia jäävuse seadusele* kuju

$$\begin{aligned} & \int_v [\rho \dot{\varepsilon} - t^{(pr)} d_{rp} - q^p{}_{;p} - \rho h] dv = \\ & = \int_v v_p (t^{rp}{}_{;r} + \rho f^p - \rho a^p) dv - \\ & - \int_v w_{pq} t^{[pq]} dv - \int_v \left(\frac{1}{2} v_p v^p + \varepsilon \right) \frac{D}{Dt} (\rho dv). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Lokaalse energia jäävuse seaduse saame võrdusest (4.10) kui vaat-
leme vaid integraaliluseid avaldasi. Selgub, et p.p. olevad integraa-
lialused avaldised on kõik nullid — esimene kujutab endast liiku-
mishulga lokaalse tasakaalu seadust, teises $t^{[pq]} = 0$ vastavalt ki-
neetilise momendi lokaalse tasakaalu seadusele ja kolmanda liige
 $D(\rho dv)/Dt = 0$ massi jäävuse seaduse põhjal. Seega, (arvestades
et $t^{(pq)} = t^{pq}$),

$$\rho \dot{\varepsilon} = t^{(pr)} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h. \quad (4.11)$$

Saadud diferentsiaalvõrrand väljendab *lokaalset energia jäävuse*
seadust ja teda nimetatakse ka *energia lokaalse tasakaalu diferent-*
siaalvõrrandiks. Kuna arvesse pole võetud energia jaotust elemen-
taarmahu pinnal, siis võidakse siia lisada veel üks $q^p{}_{;p}$ tüüpi liige.
Viimases avaldises esinevat mehaanikalist energiat

$$\phi = t^{pq} d_{pq} \quad (4.12)$$

nimetatakse *pinge võimsuseks*.

4.2 Potentsiaalne energia

Vaatleme juhtu, kus välisjõud f_p on statsionaarsed ja avaldatavad
läbi potentsiaali $U(\mathbf{x})$ —

$$f_p = -U_{,p}. \quad (4.13)$$

Seega potentsiaalne energia

$$\mathcal{U} = \int_v \rho U dv. \quad (4.14)$$

Mahu- ja pinnamomentide puudumisel saab mehaanikalise võimsu-
se avaldis (4.4) nüüd kuju

$$\mathcal{W} = \int_s t^{rp} v_p da_r - \int_v \rho U_{,p} v^p dv. \quad (4.15)$$

Kuna

$$\dot{\mathcal{U}} = \frac{D}{Dt} \int_v \rho U dv = \int_v \rho \dot{U} dv = \int_v \rho U_{,p} v^p dv. \quad (4.16)$$

siis saab avaldis (4.15) omakorda kuju

$$\mathcal{W} = \int_s t^{rp} v_p da_r - \dot{\mathcal{U}} \quad (4.17)$$

ja globaalne energia jäävuse seadus (termodünaamika esimene seadus)

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{U}} = \int_s t^{rp} v_p da_r + Q. \quad (4.18)$$

Antud kujul väidab termodünaamika esimene seadus, et koguenergia muutus võrdub pindjõudude võimsus pluss soojuse juurdevool ajaühikus. Kui p.p. on null, siis

$$\mathcal{K} + \mathcal{E} + \mathcal{U} = \text{const.} \quad (4.19)$$

Selline olukord esineb kui keha on isoleeritud (st. $Q = 0$) ja pinnajõud ja kiirused on nullid või omavahel risti.

4.3 Deformatsiooni energia

Vaatleme järgnevalt juhtu, kus globaalne energia jäävuse seadus on esitatud üldkujul (4.2). Eeldame, et pingetensori saab jagada kahte ossa

${}_E \mathbf{t}$ — hüperelastne pinge, ehk pingetensori taastuv osa (pööratav);
 ${}_D \mathbf{t}$ — dissipatiivne pinge, ehk pingetensori taastumatu osa (pöördumatu). Seega

$$\mathbf{t} = {}_E \mathbf{t} + {}_D \mathbf{t}. \quad (4.20)$$

Hüperelastne pinge defineeritakse läbi potentsiaali $\tau(x^k, {}_K)$, mida nimetatakse *deformatsiooni energia funktsiooniks*, järgmiselt —

$$\rho \dot{\tau} = {}_E t^{pq} d_{pq}. \quad (4.21)$$

Asendame pingetensori avaldistest (4.20) ja (4.21) lokaalsesse energia jäävuse seadusse (4.11) ning integreerime üle ruumala —

$$\underbrace{\int_v \rho \dot{\mathcal{E}} dv}_{=\dot{\mathcal{E}}} = \underbrace{\int_v \rho \dot{\mathcal{J}} dv}_{=\dot{\mathcal{J}}} + \underbrace{\int_v {}_D t^{(pr)} d_{pr} dv}_{=\dot{\mathcal{D}}} + \underbrace{\int_v (q^p{}_{;p} + \rho h) dv}_{=\dot{\mathcal{Q}}}, \quad (4.22)$$

ehk

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{D}} + \dot{\mathcal{Q}}. \quad (4.23)$$

\mathcal{E} tähistab siin kogu siseenergiat, \mathcal{J} — kogu hüperelastse deformatsiooni energiat, \mathcal{D} — kogu dissipatiivset võimsust ja \mathcal{Q} — soojuse võimsust (soojuse juurdevoolu ajaühikus). Viimased avaldised esitavad globaalne energia jäävuse seaduse uuel kujul — *siseenergia muutumise põhjustavad hüperelastse deformatsiooni energia muutus, dissipatiivne võimsus ja soojuse juurdevool (soojuse võimsus)*.

Ka Piola-Kirchhoffi pseudopingetensori saab tuua sisse läbi potentsiaali τ . Kuna $J = \rho_0/\rho$, siis valemi (3.52) põhjal

$$t^{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} T^{Kl} x^k{}_{,K}. \quad (4.24)$$

Teisendame avaldise (4.21) p.p. —

$${}_E t^{kl} d_{lk} \stackrel{\bullet}{=} {}_E t^{kl} v_{l;k} \stackrel{(4.24)}{=} \frac{\rho}{\rho_0} {}_E T^{Kl} x^k{}_{,K} v_{l;k} \stackrel{(2.319)}{=} \frac{\rho}{\rho_0} {}_E T^{Kl} \frac{Dx^k{}_{,K}}{Dt}. \quad (4.25)$$

Vahetu kontroll näitab, et kui avaldada Piola-Kirchhoffi pingetensor kujul

$${}_E T^{Kl} = \rho_0 \frac{\partial \tau}{\partial x^k{}_{,K}}, \quad (4.26)$$

siis asendades viimase võrranditesse (4.25), saame valemi (4.21). Valemite (4.24) ja (4.26) abil saab omakorda avaldada

$${}_E t^k{}_l = \rho x^k{}_{,K} \frac{\partial \tau}{\partial x^l{}_{,K}}. \quad (4.27)$$

Vaatleme deformatsioonienergia erijuhtu, kus

$$\tau = \tau(J) = \tau \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right). \quad (4.28)$$

Nüüd

$${}_E t^k{}_l = \rho x^k{}_{,K} \frac{\partial \tau}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial x^l{}_{,K}} = \rho x^k{}_{,K} \frac{\partial \tau}{\partial J} J X^K{}_{,l}. \quad (4.29)$$

Defineerides *elastse hüdrostaatilise surve*

$$\pi \equiv \pi(J) \stackrel{\text{def}}{=} -\rho_0 \frac{\partial \tau}{\partial J}, \quad (4.30)$$

saame avaldisele (4.29) kuju

$${}_E t^k{}_l = -\pi \delta^k{}_l. \quad (4.31)$$

Kasutades (4.21) saame viimasest

$$\rho \dot{\tau} = -\pi v^k{}_{;k}. \quad (4.32)$$

Kuna $D(dv)/Dt = v^k{}_{;k} dv$, siis (4.22) põhjal

$$\dot{\mathcal{J}} = - \int_v \pi \frac{D}{Dt}(dv). \quad (4.33)$$

Üldjuhul saab pingetensori jagada surveks \bar{p} (s.o. *keratensor*) ja *deviaatoriks* \bar{t}^{kl} —

$$t^k{}_l = -\bar{p} \delta^k{}_l + \bar{t}^k{}_l, \quad (4.34)$$

kus

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \text{I}_t \quad \text{ja} \quad \bar{t}^k{}_k = 0. \quad (4.35)$$

Pinge võimsus ϕ avaldub nüüd kujul

$$\phi = t^{kl} d_{lk} = -\bar{p} v^k{}_{;k} + \bar{t}^{kl} d_{kl}. \quad (4.36)$$

Kui deviaatorosa on null, siis $\bar{p} = \pi$ puhul näeme, et $\phi = \rho \dot{\tau}$

4.4 Entroopia

4.4.1 Entroopia mõiste

Entroopia on termodünaamiline olekufunktsioon, mis iseloomustab energia pöördumatut hajumist. Tihti defineeritakse entroopiat

ka kui suurust millega mõõdetakse süsteemi korrastamatuse astet. Energia ja entroopia kontseptsioonid on termodünaamika alustalad. Termodünaamika esimene seadus — energia jäävuse seadus — sätestab, et materiaalses süsteemis muutub energia ühest vormist teise kuid ei teki juurde ega kao. Samas ei sätesta see seadus, mis vormis selline energia muutumine ehk ülekanne toimub. Näiteks ei anna termodünaamika esimene seadus informatsiooni selle kohta, kas selline ülekanne on pööratav või pöördumatu. Viimane küsimus energia ülekande pööratavusest on eriti tähtis juhtudel, kus on vaja teada energia hulka, mida on võimalik vaadeldava süsteemi puhul kasutada. *Entroopia* kontseptsioon tuuakse sisse selleks, et mõõta energia hulka, mis on pöördumatult muundunud kasutatavast vormist kasutamatusse. Viimase all tuleb mõista seda hulka energiast, mida pole enam võimalik muundada (mehaaniliseks) tööks. Näiteks, kui deformeeruvale kehale mõjub jõud, siis keha (üldjuhul) deformeerub. Viimase protsessiga kaasneb alati teatav temperatuuri tõus (soojusenergia juurdekasv). Sellist soojusenergia kasvu deformeerumisprotsessis iseloomustabki entroopia.

Süsteemi summaarne entroopia:

$$H = \int_v \rho \eta dv, \quad (4.37)$$

kus η on *erientroopia* ehk *entroopia tihedus* (massiühiku kohta)³. Tema dimensioon $\dim(\eta) = (\text{energia})/(\text{mass} \cdot \text{temperatuur})$

4.4.2 Termodünaamiline olek

Termodünaamika üks põhieeldus väidab, et igal materjali jaoks leidub üks ja ainult üks funktsioon, mida nimetatakse siseenergia tiheduse funktsiooniks ja mis on esitatav kujul

$$\varepsilon = \varepsilon(\eta, \nu_1, \dots, \nu_n, \mathbf{X}). \quad (4.38)$$

³I.k. *specific entropy or entropy density*

Erientroopia η ning mehaanikalised, keemilised, elektromagneetilised jne. parameetrid ν_α iseloomustavad süsteemi termodünaamilist käitumist. Füüsikaliselt erineb parameeter η parameetritest ν_α vaid dimensiooni poolest — η dimensioon on seotud soojusenergia ja temperatuuriga olles sõltumatu parameetrite ν_α dimensioonist. Teisisõnu, mehaanikalised, keemilised, elektromagneetilised jt. füüsikalised parameetrid, mis on sõltumatud soojusenergiast, on ebapiisavad siseenergia tiheduse ε kirjeldamiseks.

Kuna siseenergia tiheduse funktsioon ε iseloomustab vaadeldava materjali sisemist ehitust, siis nimetatakse teda *olekufunktsiooniks*. Suurusi η ja ν_α nimetatakse *termodünaamilisteks olekumuutujateks* ning nad määravad süsteemi *termodünaamilise oleku* materiaalses punktis \mathbf{X} . Kui funktsioon ε ei sõltu materiaalsest koordinaadist \mathbf{X} , siis nimetatakse vaadeldavat keskkonda *termodünaamiliselt homogeeneks*.

Parameetrid η ja $\boldsymbol{\nu}$ võivad omakorda sõltuda ajast, ja ruumikoordinaadist või liikumisest, st.

$$\eta = \eta(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (4.39)$$

Gibbs (1873, 1875) pakkus võrrandile (4.38) välja järgmise interpretatsiooni. Vaatleme termodünaamiliselt homogeenet keskkonda kus $\nu_1 = \nu$ ja $\nu_\alpha = 0$, $\alpha > 1$. Sel juhul esitab (4.38) energia-pinda kolmemõõtmelises termodünaamiliste olekumuutujate ruumis ε, ν, η . Parameetriline kõver $\varepsilon = \varepsilon(s), \eta = \eta(s), \nu = \nu(s), s_1 \leq s \leq s_2$ on aga interpreteeritav kui *termodünaamiline trajektoori*⁴, mida mööda vaadeldav keskkond läheb ühest termodünaamilisest olekust $(\eta(s_1), \nu(s_1))$ üle teise olekusse $(\eta(s_2), \nu(s_2))$. Vastavat diagrammi kutsutakse *Gibbsi diagrammiks*. Trajektoori, kus erientroopia $\eta = \text{const}$ nimetatakse *isoentroopiliseks*⁵ ja trajektoori, kus temperatuur $\vartheta = \text{const}$ *isotermiliseks*. Esitatud interpretatsioon on

✓

loomulikult üldistatav ka mittehomogeensele keskkonnale ja juhule, kus $\nu_\alpha \neq 0$, $\alpha > 1$ — kasvab vaid termodünaamiliste olekumuutujate ruumi dimensioon.

Temperatuur ϑ ja termodünaamiline pinge τ^α on defineeritud järgmiselt —

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \quad \text{ja} \quad \tau^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_\alpha}. \quad (4.40)$$

Seega fikseeritud materiaalse punkti jaoks avaldub siseenergia tiheduse lõpmata väike muut (siseenergia diferentsiaal) kujul

$$d\varepsilon = \vartheta d\eta + \tau^\alpha d\nu_\alpha. \quad (4.41)$$

Viimane on tuntud kui *Gibbs'i võrrand* [1873]. Viimasest saab lihtsalt leida siseenergia tiheduse muutumise kiiruse fikseeritud materiaalses punktis $\mathbf{X} = \text{const}$

$$\dot{\varepsilon} = \vartheta \dot{\eta} + \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha. \quad (4.42)$$

Valemite (4.38), (4.39) ja (4.40) põhjal

$$\vartheta = \vartheta(\eta, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}) \quad \text{ja} \quad \tau^\alpha = \tau^\alpha(\eta, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}) \quad (4.43)$$

ning seega võib η asemel valida ϑ uueks (sõltumatuks) olekumuutujaks, st.,

$$\eta = \eta(\vartheta, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\vartheta, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}) \quad (4.44)$$

ja

$$\tau^\alpha = \tau^\alpha(\vartheta, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}) \quad \text{ehk} \quad \nu^\alpha = \nu^\alpha(\vartheta, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}). \quad (4.45)$$

Võrrandeid (4.44) nimetatakse termilisteks olekuvõrranditeks⁶.

Parameetrite ν_α ja termodünaamiliste pingete τ^α interpreteerimisest. Kui $\nu_1 = 1/\rho$ on erimaht, siis $-\tau^1$ nimetatakse *termodünaamiliseks surveks*. Kui vaadeldav keskkond on segu erinevatest ainetest ja ν_2, ν_3, \dots on komponentide kontsentratsioonid, siis pingeid τ^2, τ^3, \dots nimetatakse *keemilisteks potentsiaalideks*.

⁴I. k. *Thermodynamic path*

⁵I.k. *isentropic*

⁶I.k. *thermal equations of state*

4.4.3 Entroopia tootmine

Lokaalne entroopia tootmine

Kasutame lokaalset energia jäävuse seadust (4.11)

$$\rho \dot{\varepsilon} = t^{(pr)} d_{pr} + q^p_{;p} + \rho h$$

ja järeldust Gibbs'i võrrandist (4.42)

$$\dot{\varepsilon} = \vartheta \dot{\eta} + \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha.$$

Kui elimineerida viimasest $\dot{\varepsilon}$ ning arvestada, et entroopia tootmine on seotud vaid pingetensori dissipatiivse osaga, saame diferentsiaalvõrrandi erientroopia η määramiseks —

$$\rho \vartheta \dot{\eta} = {}_D t^{(pr)} d_{pr} + q^p_{;p} + \rho h - \rho \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha. \quad (4.46)$$

Seda nimetatakse ka *lokaalseks entroopia tootmise võrrandiks*.

Globaalne entroopia tootmine

Vastav võrrand saadakse kui integreerida lokaalset entroopia tootmise avaldist (4.46) (avaldades elnevalt $\rho \dot{\eta}$) üle mahu \mathcal{V} ning kasutada seoseid

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\eta} dv = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \eta dv \doteq \dot{H} \quad (4.47)$$

ja

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\vartheta} q^p_{;p} dv = \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{q^p}{\vartheta} \right)_{;p} + \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} \right] dv = \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{q^p \vartheta_{;p}}{\vartheta^2} dv. \quad (4.48)$$

Seega, globaalne entroopia tootmise võrrand avaldub kujul

$$\dot{H} = \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \left(\Delta + \frac{\rho h}{\vartheta} \right) dv, \quad (4.49)$$

kus

$$\Delta = \frac{1}{\vartheta} \left[{}_D t^{(pr)} d_{rp} + q^p (\ln \vartheta)_{;p} - \rho \tau^\alpha \dot{\nu}_\alpha \right]. \quad (4.50)$$

Seega entroopia muutust põhjustavad: 1) entroopia juurdevool q^p/ϑ läbi keha pinna ja 2) entroopia tootmine keha sees.

4.4.4 Entroopia seadus — termodünaamika teine seadus

Termodünaamika teise seaduse klassikalised sõnastused:

1. *Clausius*: soojus ei saa iseenesest minna külmemalt kehalt soojemale;
2. *Kelvin*: protsessid, mille ainsaks tulemuseks on keha jahtumine ja selle arvelt saadav töö, pole võimalikud;
3. *Carathéodory*: iga termodünaamilise oleku ümbruses eksisteerivad nn. naaberolekud, kuid üleminek ühest naaberolekust teise pole võimalik adiabaatilise protsessi käigus.

Globaalne entroopia seadus

Eksperimentaalsete tulemuste põhjal on teada, et soojusallikatest vaba süsteem tarbib mehaanikalist tööd mitte ei tooda energiat, st., valemis (4.50) esinev suurus

$$\Delta \geq 0. \quad (4.51)$$

Seega valemite (4.49)–(4.51) põhjal

$$\dot{H} \geq \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p + \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho h}{\vartheta} dv, \quad (4.52)$$

Avaldis (4.52) väljendab *termodünaamika teist seadust globaalsel kujul* (globaalne entroopia seadus) — summaarse entroopia juurdekasv on suurem-võrdne läbi keha pinna toimuva entroopia juurdevoolu ja keha siseallikaist toodetud entroopia summast.⁷

Lokaalne entroopia seadus

Selleks et saada termodünaamika teist seadust lokaalsel kujul (lokaalne entroopia seadus), minnakse avaldises (4.52) Greeni-Gaussi teoreemi abil üle ruumintegraalile. Arvestades (4.47)

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \rho \dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \right\} dv \geq 0, \quad (4.53)$$

kust globaalse võrratuse lokaliseerimise tulemusena saame

$$\rho \dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\vartheta} \right)_{;k} - \frac{\rho h}{\vartheta} \geq 0. \quad (4.54)$$

Viimane võrratus väljendabki *termodünaamika teist seadust lokaalsel kujul (lokaalset entroopia seadust)*.

Ellimineerime nüüd lokaalse energia jäävuse seaduse abil lokaalsest entroopiaseadusest kehasisest allikast toodetud soojuse h . Kasutades samasusi (4.48) saame võrratuse

$$\rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\vartheta} \right) + \frac{1}{\vartheta} t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta^2} q^k \vartheta_{,k} \geq 0. \quad (4.55)$$

See võrratus väljendab samuti lokaalset entroopia seadust ning on tuntud *Clausiuse-Duhemi võrratusena*.

Võrratusele (4.55) saab anda alternatiivse kuju, tuues sisse *Helmholtzi vaba energia tiheduse*

$$\psi = \varepsilon - \vartheta \eta. \quad (4.56)$$

⁷Eringeni [1] põhjal nimetatakse (4.52) Clausiuse-Duhemi võrratuseks. Täpiliselt esitatakse nimetatud võrratus siiski lokaalsel kujul.

Funktsioon ψ väljendab seda osa siseenergiast, mis on võimeline tegema mehaanikalist tööd. Avaldades nüüd avaldisest (4.56) siseenergia tiheduse ε , saame anda võrratusele (4.55) kuju

$$-\rho \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} \right) + t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\vartheta} q^k \vartheta_{,k} \geq 0. \quad (4.57)$$

Võrratused (4.55) ja (4.57) peavad kehtima kõikide termomehaanikaliste protsesside puhul.

Materiaalsetes (Lagrange'i) koordinaatides saab Clausiuse-Duhemi võrratus (4.57) kuju

$$-\rho_0 \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\vartheta} \right) + \frac{1}{2} T^{KL} \dot{C}_{KL} + \frac{1}{\vartheta} Q^K \vartheta_{,K} \geq 0. \quad (4.58)$$

Viimase tuletamise puhul on arvestatud, et

$$t^{kl} d_{kl} = \frac{\rho}{2\rho_0} T^{KL} \dot{C}_{KL} \quad \text{ja} \quad q^k \vartheta_{,k} = \frac{\rho}{\rho_0} Q^K \vartheta_{,K}. \quad (4.59)$$

Peatükk 5

Olekuvõrrandid

5.1 Sissejuhatus

Selleks, et võrrandisüsteemil eksisteeriks ühene lahend, peab tundmatute arv ja võrrandite arv olema võrdne. Meil on *kaheksa võrrandit*.

1. Massi jäävuse seadus ehk ruumiline pidevusvõrrand (3.7) — 1 võrrand

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k}. \quad (5.1)$$

2. Cauchy esimene liikumisseadus ehk liikumishulga tasakaalu seadus (3.40)₁ — 3 võrrandit

$$t^{jk}_{;j} + \rho (f^k - a^k) = 0. \quad (5.2)$$

3. Cauchy teine liikumisseadus ehk kineetilise momendi tasakaalu seadus (3.40)₂ — 3 võrrandit

$$m^{ji}_{;j} + \rho m^i + \epsilon^{ijk} t_{jk} = 0. \quad (5.3)$$

✓

4. Energia jäävuse seadus (4.11) — 1 võrrand

$$\rho \dot{\epsilon} = t^{(pr)} d_{rp} - m^{rpq} w_{pq;r} + q^p_{;p} + \rho h. \quad (5.4)$$

Tundmatuid on nendes võrrandites aga tunduvalt rohkem — ρ , v_i , t^{ij} , $m^{ljk} = -m^{lkj}$ ja q^k . Siinjuures loetakse suurused a^i , d_{ij} ja w_{ij} avaldatavateks v_i kaudu ning välismõju ja keskkonna (keha) omadusi kirjeldavad suurused f^k , m^{ij} , h ja ϵ etteantuks. Seega kokku on tundmatuid 25. On selge, et 8 võrrandiga pole neid võimalik üheselt määrata. Kui tuua mängu veel elektrilisi või keemilisi muutujaid, läheb asi aina hullemaks ning on selgemast selgem, et on tarvis sisse tuua täiendavaid võrrandeid.

5.2 Kasutatavad meetodid

Ülaltoodud 8 võrrandit kehtivad iga mehaanikalise keskkonna (tahke keha, vedelik, gaas) puhul. Täiendavate võrrandite tuletamise juures arvestatakse aga fakti, et sama geomeetria ja massijaotuse puhul võivad erinevast materjalist kehad käituda sama välismõju all erinevalt. Seega arvestatakse lisavõrrandite tuletamisel materjali (aine) omadusi. Neid lisavõrrandeid nimetatakse olekuvõrranditeks¹ ja nende tuletamiseks on mitmeid meetodeid.

Statistilis-mehaanikaline. Kõik keskkonnad koosnevad osakesetest — molekulidest, aatomitest jne. — mille vahel on sidemed. Rakendades mehaanika seadusi neile osakestele saadakse statistiline mehaanika. Nimetatud teooria puuduseks on see, et juba molekulide vaheliste jõudude olemus on ülikeerukas ja seega on täpse mudeli koostamine samuti “pisut tülikas”. Pideva keskkonna mehaanika püüab siiski kasutada keskkonna omaduste kirjeldamiseks pidevaid funktsioone.

¹I.k. *constitutive equations*

Puhas matemaatiline viis lähtub ideest, et nn. täielik võrrandisüsteem määrab füüsikalise nähtuse üheselt. See lähenemine võib aga viia ummikusse, sest (i) matemaatilised tingimused (alg- ja rajatingimused) aproksimeerivad mingit füüsikalist nähtust, kuid ilma füüsikalise põhjendusega ei saa seda teha; (ii) ühese tulemuse (väljundi) nõudest ei järeldu ühene ülesande formuleering. Seega ei pruugi saadud olekuvõrrandid olla ühesed.

Termodünaamiline viis arvestab soojuse ja temperatuuri mõju. Lineaarsed pöördumatud protsessid on siin suhteliselt lihtsalt kirjeldatavad, problemaatiliseks võib osutuda tugevalt mittelineaarsete või tugevalt dissipatiivsete protsesside kirjeldamine.

Pideva keskkonna füüsikast lähtuv suund ühendab endas kõiki eeltoodud meetodeid. Ei püüta luua ühte üldist ja kõigile materjalidele ning situatsioonidele ühist olekuvõrrandit. Võimalikud on siiski teatavad grupeeringud ja üldistused (ideaalselt elastne keha, mäluga materjalid jne.)

5.3 Olekuvõrrandite invariantus

Olekuvõrrand defineerib idealiseeritud materjali (keskkonna). Et selline ideaalne materjal kirjeldaks füüsikalist materjali adekvaatselt, peab ta rahuldama teatavaid füüsikalisi printsiipe.

1. Välistamise (hülgamise) printsiibid Ükski olekuvõrrand ei suuda siduda kõiki olekuparameetreid ja funktsionaale. Alati tuleb midagi hüljata. Vaadeldavad printsiibid määravad mida ja millal hüljata võib. Järgnevalt vaatleme mõnd neist.

1a. Mälu (pärilikkuse) arvestamine — materjali käitumine ajahetkel t on määratud tema minevikuga kuni selle ajahetkeni

(mälu). See on teatavas vastuolus klassikalise Newtoni mehaanikaga, kus algtingimusega ($t = 0$) on nii minevik kui tulevik täielikult määratud. Antud printsiibist lähtudes saame tingimused, et hüljata olekuvõrrandist järgnevad ajahetked.

1b. Ümbruse printsiip — hetkel t ruumipunktis \mathbf{x} asuva materiaalse punkti \mathbf{X} käitumine on määratud vaadeldava materiaalse punkti \mathbf{X} suvalise väikese ümbruse käitumisega.

1a. ja 1b. kokku annavad **determinismi printsiibi** — Hetkel t ruumipunktis \mathbf{x} asuva materiaalse punkti \mathbf{X} käitumine on määratud vaadeldava materiaalse punkti \mathbf{X} ümbruse käitumise (liikumise) ajalooga.

1c. Võrdse kohaloleku printsiip ehk sõltumatute olekuparameetrite valiku ühesuse printsiip — ühe teooria raames peavad sama materjali kõik olekuvõrrandid sisaldama samu sõltumatuid olekuparameetreid.

1d. Unifitseerimise printsiip — Erinevad olekuparameetrid, mis iseloomustavad erinevaid materjale võivad esineda kõigi materjalide olekuvõrrandites. (Kasutatakse juhul kui tahetakse luua ühist olekuteooriat erinevatele materjalidele.)

2. Invariantus koordinaatteisenduste suhtes nõuab, et olekufunktsioonid oleksid absoluutsed tensorfunktsioonid oma argumentidest — seega et nad oleksid invariantid koordinaatteisenduste suhtes.

3. Ruumiline invariantus. Olekuvõrrandid peavad olema invariantid ruumikoordinaatide järgi liikumise suhtes. Füüsikaliselt tähendab see seda, et olekuvõrrandid ei tohi sõltuda vaatleja asukohast. St., et kui üks liikumine toimub teljestikus \mathbf{x} hetkel t ja teine teljestikus \mathbf{x}' hetkel t' siis olekuvõrrandis olevad funktsioonid $f_{kl}(\mathbf{x}, t)$ ja $f_{kl}(\mathbf{x}', t')$ oleksid samad (langeksid kokku). Vaadeldav

nõue viib $g^k_K x^k_{,K}$ tüüpi liikmete elimineerimisele olekuvõrrandites.

Materiaalne invariantus (materiaalne isomorfism). Kui olekuvõrrandid on invariantid mingi materiaalse koordinaatide teisenduse rühma suhtes, siis öeldakse, et olekuvõrrandid omavad materiaalselt sümmeetriat vaadeldava teisenduse rühma suhtes. Näiteks peegeldused, pöörded. Materjali sümmeetriat on kasulik ette teada, sest see lihtsustab olekuvõrrandeid. Näiteks on metallide elastsed omadused antud punktis invariantid igas suunas. Sellist materjali omadust nimetatakse *isotroopsuseks*. Selle vastand on anisotroopne materjal. On aineid, millel näiteks mehaanikalised omadused on isotroopsed, kuid elektrilised anisotroopsed.

Mõõtühikutest sõltumatuse printsiip ehk dimensionaalne invariantus. Olekuvõrranditesse kuuluvad materjalikonstandid või moodulid peavad olema mõõtühikute suhtes invariantid.

Sobivuse printsiip Kõik olekuvõrrandid peavad olema vastavuses massi, liikumishulga, energia jt. füüsikaliste suuruste kohta kehivate põhiprintsiipide ja aksioomidega.

5.4 Ideaalselt elastse keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod

Ideaalselt elastne keha (keskkond) on keha, kus pinged sõltuvad vaid deformatsioonist. Täpsemalt öeldes (i) eeldatakse, et väliskoormuse mõjul ei toimu mitte mingeid elektrilisi, keemilisi ja termodünaamilisi nähtusi; (ii) keha jaoks defineeritakse *loomulik olek*, kus deformatsioonid ja pinged puuduvad, temperatuur ja teised

väljad on konstantsed ja ühesugused igas punktis ning eeldatakse, et kui välisjõud eemaldada, siis keha loomulik olek taastub. Seega hüljatakse temperatuur ja kõik teised väljad, eeldades, et nad väliskoormuse mõjul ei muutu. Järelikult on tegu nullise dissipatsiooniga ja järelikult kogu energia, mis kulub deformatsiooniks, saab välisjõu eemaldamisel tagasi. Sellisel juhul saab olekuvõrrandi tuletamiseks kasutada *Greeni meetodit*, mille puhul eeldatakse, et siseenergia on deformatsiooni funktsioon. Selliseid kehi nimetatakse tihti *hüperelastseteks kehadeks*.

Definitsioon. *Keha nimetatakse hüperelastseks kui ta omab deformatsioonienergiat kujul*

$$\rho_0 \varepsilon \equiv \Sigma = \Sigma (X^K, x^k, g^k_K, \rho, \mathbf{G}_K, x^k_{,K}), \quad (5.5)$$

nii et

$$\frac{\rho}{\rho_0} \dot{\Sigma} = t^k_l d^l_k. \quad (5.6)$$

Valemi (5.5) põhjal võib vaadeldav materjal olla mittehomoogeenne ja anisotroopne. Σ sõltub vaid konfiguratsioonist hetkel t ja mitte minevikust. Seega on tegu nn. *lihtsa materjaliga*, mille mälu piirdub vaid algolekuga (loomuliku olekuga). Gradiendid $x^k_{,K}$ toovad sisse ümbruse printsiibi. Valemi (5.6) põhjal pole antud keskkond soojust juhtiv ning talle ei ole rakendatud jõupaare.

Järgnevalt üritame Σ avaldisest elimineerida nii palju argumente kui võimalik.

1) Kasutades pidevuse võrrandit (massi jäävus) saab elimineerida tiheduse ρ ($\rho_0/\rho = J = |g^k_K| |x^k_{,K}|$). Seega

$$\Sigma = \Sigma (X^K, x^k, g^k_K, \mathbf{G}_K, x^k_{,K}) \quad (5.7)$$

2) Ruumilise invariantuse nõue, st., Σ peab olema invariantne koordinaatide teisenduse $x'^k(\mathbf{X}, t') = Q^k_l(t)x^l(\mathbf{X}, t) + b^k(t)$ suhtes, kus

$t' = t - a$ ja $Q^k_l Q_m^l = Q^l_m Q^k_l = \delta^k_m$. Selgub, et deformatsioonienergia Σ jääb invariantseks kui ta ei sõltu ruumikoordinaadist \mathbf{x} ning sõltuvused suurustest g^k_K ja $x^k_{,K}$ on asendatud sõltuvustega suurustest $Q^k_l g^l_K$ ja $Q^k_l x^l_{,K}$. Seega

$$\Sigma = \Sigma(X^K, Q^k_l g^l_K, \mathbf{G}_K, Q^k_l x^k_{,K}) \quad (5.8)$$

3) Toome sisse (aga ei tõesta) ühe Cauchylt pärineva teoreemi — *Kui $F(V^k_1, V^k_2, \dots, V^k_n)$ on üheselt määratud funktsioon n vektori süsteemist, mis on invariantne koordinaatide jäiga pöörde suhtes, siis F taandub funktsiooniks vektorite moodulitest, skalaarkorrutistest $I_{\Gamma\Delta} = g_{kl} V^k_\Gamma V^l_\Delta$ ja determinantidest $D_{\Gamma\Delta\Upsilon} = \epsilon_{klm} V^k_\Gamma V^l_\Delta V^m_\Upsilon$.*

Meie juhul on piisavalt üldine eeldada, et F on polünoom oma argumentidest. Seega võib (5.8) argumentid asendada uutega:

$$\begin{cases} C_{KL} = \delta_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L}, \\ J = |g^k_K| |x^l_{,L}|, \\ G_{KLS} = \delta_{kl} Q^k_r Q^l_s g^r_K g^s_L \end{cases} \quad (5.9)$$

Kuna $|C^K_L| = J^2$, siis tähendab sõltuvus C_{KL} -st samal ajal sõltuvust J -st ja avaldis (5.8) saab kuju

$$\Sigma = \Sigma(X^K, \mathbf{G}_K, C_{KL}). \quad (5.10)$$

Homogeense anisotroopse materjali puhul saame valemist (5.10)

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{G}_K, C_{KL}) \quad (5.11)$$

ja mittehomogeense isotroopse materjali puhul

$$\Sigma = \Sigma(X^K, C_{KL}). \quad (5.12)$$

Tensori C_{KL} saab viia diagonaalkujule leides tema peaväärtused C_1, C_2 ja C_3 . sel juhul on (5.10) avaldatav kujul

$$\Sigma = \Sigma(X^K, \mathbf{G}_K, C_1, C_2, C_3). \quad (5.13)$$

Kuna peaväärtused C_α on funktsioonid invariantidest I_C, II_C ja III_C , siis võib viimse avaldise kirjutada kujul

$$\Sigma = \Sigma(X^K, \mathbf{G}_K, I_C, II_C, III_C). \quad (5.14)$$

Teame, et erinevate deformatsioonitensorite invariantid on omavahel seotud. Seega pole oluline, millise deformatsioonitensori invariante kasutada.

Kokkuvõttes: hüperelastset isotroopset keha saab kirjeldada deformatsioonienergia funktsiooniga Σ , mis on ühene funktsioon materiaalistest koordinaatidest \mathbf{X} ja ühest materiaalsest või ruumilisest deformatsioonitensorist, st.,

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \Sigma(\mathbf{X}, \mathbf{E}) = \Sigma(\mathbf{X}, \mathbf{c}) = \Sigma(\mathbf{X}, \mathbf{c}^{-1}) \dots \quad (5.15)$$

Anisotroopse keha puhul lisanduvad siia ka baasivektorid \mathbf{G}_K . Asendades erinevad Σ -d avaldisest (5.15) avaldisse (5.6) saame erinevad pingede-deformatsiooni sõltuvused, st., erinevad olekuvõrrandid.

Boussinesq'i mudel [1870, 1872]. Deformatsioonienergia Σ argumentid on kas C_{KL} või E_{KL} . Valemist (5.6) saame nüüd

$$t^{kl} d_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x^k_{,K} x^l_{,L} d_{kl}. \quad (5.16)$$

Kuna viimane peab kehtima iga d_{kl} puhul, siis

$$t^{kl} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x^k_{,K} x^l_{,L} \stackrel{\bullet}{=} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} x^k_{,K} x^l_{,L}. \quad (5.17)$$

Kelvini-Cosserat' mudel (Kelvin [1863], Cosserat [1896]). Kasutab Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensoreid. Valemite (5.6) põhjal saadakse

$$T^{Kl} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KN}} x^l_{,N} \quad \text{ja} \quad T^{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}}. \quad (5.18)$$

Neumanni-Kirchhoffi mudel. Siin valitakse sõltumatuteks muutujateks deformatsioonigradiendid $x^k_{,K}$ ning lähtutakse Bousinesq'i mudelist (5.17). Avaldist

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x^k_{,M}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \frac{\partial E_{KL}}{\partial x^k_{,M}} \quad (5.19)$$

teisendades saadakse sellest olekuvõrrand (Neumanni mudel [1860])

$$t^k_l = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x^l_{,K}} x^k_{,K}. \quad (5.20)$$

Kui tuua sisse tensor T^K_l , siis saame Kirchhoffi mudeli [1852]

$$T^K_l = \frac{\partial \Sigma}{\partial x^l_{,K}}. \quad (5.21)$$

Need avaldised kehtivad kokkusurutava keskkonna kohta. Kokkusu-
rumatu materjali puhul võime ilma energia balanssi rikkumata lisa-
da olekuvõrrandisse (5.20) nn. surve liikme, saades *Poincaré mudeli*
[1892]

$$t^k_l = -p \delta^k_l + \frac{\partial \Sigma}{\partial x^l_{,K}} x^k_{,K}. \quad (5.22)$$

Hameli ruumiline mudel [1912] Antud juhul on sõltumatuteks muutujateks deformatsioonigradiendid $X^K_{,k}$. Kõigepealt esitame valemi (5.6) kujul

$$t^k_l v^l_{;k} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial X^K_{,k}} \frac{D}{Dt} (X^K_{,k}) \stackrel{(2.345)}{=} - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial X^K_{,k}} X^K_{,l} v^l_{;k}. \quad (5.23)$$

Kuna viimane peab kehtima suvalise $v^l_{;k}$ jaoks, siis

$$t^k_l = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial X^K_{,k}} X^K_{,l}. \quad (5.24)$$

Murnaghan'i ruumilised mudelid [1937]. Esitab ruumilised mudelid lähtudes deformatsioonitensoreist C^{-1KL} , c_{kl} , c^k_l ja e^k_l kui sõltumatutest muutujatest. Tulemused on järgmised:

$$\begin{aligned} t^{kl} &= - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial C^{-1KM}} \frac{\partial C^{-1KM}}{\partial X^{L,l}} X^{L,k}, \\ t^k_l &= - \frac{2\rho}{\rho_0} c_{lm} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{km}} = - \frac{2\rho}{\rho_0} c^k_m \frac{\partial \Sigma}{\partial c^l_m} = \frac{\rho}{\rho_0} (\delta^k_m - 2e^k_m) \frac{\partial \Sigma}{\partial e^l_m}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Kõik eeltoodud mudelid kehtivad ka anisotroopsete kehade puhul kui eeldada, et Σ sõltub lisaks veel ka baasivektoritest \mathbf{G}_K . Isotroopse keskkonna puhul olekuvõrrandid lihtsustuvad, seda vaatleme ülejäärgmises punktis.

5.5 Elastse keskkonna olekuvõrrandid — Cauchy meetod

Cauchy meetodit, võib käsitleda kui alternatiivi Greeni meetodile. Siin eeldatakse, et pinged on deformatsiooni funktsioon. Ta kehtib ideaalselt elastsete kehade jaoks kuid on laiendatav ka dissipatiivsetele süsteemidele, kus Greeni meetod ei tööta. Seega on Cauchy meetod üldisem kui Greeni meetod. Lõpmata väikeste deformatsioonide puhul annavad mõlemad meetodid sama tulemuse.

Eeldame, et pingekomponendid on ühesed funktsioonid deformatsioonigradientidest $x^m_{,K}$, st.

$$t^{kl} = f^{kl}(x^m_{,K}). \quad (5.26)$$

Kuna käesolevas kursuses vaatleme nn. mittepolaarset juhtu (momentpinge puudub), siis $t^{kl} = t^{lk}$ ja järelikult ka $f^{kl} = f^{lk}$ ning tegu on vaid 6 funktsiooniga.

Pärast invariantsusnõuete täitmist saame kovariantsete pingekomponentide jaoks avaldise

$$t_{rs} = F_{RS} X^R_{,r} X^S_{,s}, \quad (5.27)$$

kus

$$F_{RS}(\mathbf{C}) = g^k_M g^l_N \tilde{C}^M_{,R} \tilde{C}^N_{,S} f_{kl}(\mathbf{C}) \quad (5.28)$$

on sümmeetriline materiaalne tensor(funktsioon), mille komponendid avalduvad LK-s ja mida nim *mõjufunktsiooniks*². Kui materjal on anisotroopne, siis lisandub veel argument \mathbf{G}_K , kui aga mittehomogene, siis \mathbf{X} . Tensori C_{KL} asemel võib ka siin kasutada peaväärtusi C_1, C_2, C_3 või invariante I_C, II_C, III_C . Seega võib mõju-funktsioon omada näiteks kuju

$$F_{RS} = F_{RS}(I_C, II_C, III_C, \mathbf{G}_K, \mathbf{X}). \quad (5.29)$$

Kokkusurumatu materjali puhul asendatakse t_{rs} summaga $t_{rs} + pg_{rs}$ (kus p on hüdrostaatiline surve ning valem (5.27) saab kuju

$$t_{rs} = -pg_{rs} + F_{RS} X^R_{,r} X^S_{,s}. \quad (5.30)$$

Kuna antud juhul $III_C = 1$, siis saame ümber defineerida ka mõju-funktsiooni (5.29)

$$F_{RS} = F_{RS}(I_C, II_C, \mathbf{G}_K, \mathbf{X}). \quad (5.31)$$

Olekuvõrrandile (5.27) saame anda alternatiivse kuju kui kasutada deformatsioonitensorit $\tilde{c}^{-1kl} = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L}$, mida nimetatakse ka *Fingeri deformatsioonitensoriks* —

$$t^{rs} = f^{rs}(\tilde{c}^{-1}_{kl}, \mathbf{G}_K, \mathbf{X}), \quad (5.32)$$

kus $\tilde{c}^{-1}_{kl} = g_{km} g_{ln} \tilde{c}^{-1mn}$.

²I.k. *response function*

5.6 Isotroopse ideaalselt elastse tahke keha olekuvõrrandid

5.6.1 Greeni meetod

Isotroopne ideaalselt elastne keha omab elastse pinge potentsiaali ehk deformatsioonienergiat kujul

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}, I, II, III), \quad (5.33)$$

kus I, II, III on invariantid ühest deformatsioonitensorist \mathbf{C} , \mathbf{c} , \mathbf{E} jne. Lähtume Murnaghan'i mudelist (5.25)₂ —

$$t^k_l = -\frac{2\rho}{\rho_0} c^k_m \frac{\partial \Sigma}{\partial c^l_m}. \quad (5.34)$$

Osatuletis

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial c^l_m} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial c^l_m} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial c^l_m} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III} \frac{\partial III}{\partial c^l_m}. \quad (5.35)$$

Kui kasutada invariantide I_c, II_c ja III_c leidmiseks valemitega (2.192) analoogseid valemeid, siis osatuletised

$$\begin{cases} \frac{\partial I_c}{\partial c^l_m} = \delta^m_l, & \frac{\partial II_c}{\partial c^l_m} = I_c \delta^m_l - c^m_l, \\ \frac{\partial III_c}{\partial c^l_m} = c^m_n c^n_l - I_c c^m_l + II_c \delta^m_l. \end{cases} \quad (5.36)$$

Kuna $\rho/\rho_0 = 1/J = \sqrt{III_c}$, siis tähistades

$$\begin{cases} a_0(\mathbf{X}, I_c, II_c, III_c) = -2(III_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial III_c}, \\ a_1(\mathbf{X}, I_c, II_c, III_c) = -2\sqrt{III_c} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Sigma}{\partial II_c} \right), \\ a_2(\mathbf{X}, I_c, II_c, III_c) = 2\sqrt{III_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial II_c} \end{cases} \quad (5.37)$$

ja kasutades valemeid (5.35) ja (5.36) saame anda avaldisele (5.34) kuju

$$t^k_l = a_0 \delta^k_l + a_1 c^k_l + a_2 c^k_m c^m_l. \quad (5.38)$$

Et saada lahti $c^k_m c^m_n$ tüüpi liikmetest kasutatakse Cayley-Hamiltoni teoreemi maatriksi $[c^k_l]$ jaoks ³ ning elimineerime selle abil $c^k_m c^m_l$ valemis (5.38). Tulemusena saame pingedeformatsiooni seose, mis on tuntud kui *Fingeri [1894] olekuvõrrand* —

$$t^k_l = b_{-1} \bar{c}^{-1k}_l + b_0 \delta^k_l + b_1 c^k_l, \quad (5.39)$$

kus

$$\begin{cases} b_{-1} = 2 (\text{III}_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c}, \\ b_0 = -2 \sqrt{\text{III}_c} \left(\text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right), \\ b_1 = -2 \sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c}. \end{cases} \quad (5.40)$$

Kokkusurumatu materjali puhul $\text{III}_c = 1$ ja lisandub hüdrostaatiline surve p —

$$t^k_l = -p \delta^k_l + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}} \bar{c}^{-1k}_l - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}} c^k_l. \quad (5.41)$$

Viimane on tuntud kui *Ariano [1939] ja Rivlini [1948] olekuvõrrand*.

Loomulikus olekus on keskkond pingede- ja deformatsioonivaba. Panes tingimuse $t^k_l = 0$ olekuvõrrandisse (5.39), saame täiendava tingimuse deformatsioonienergia funktsioonile Σ —

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}} \right)_0 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_{-1}} \right)_0 = 0. \quad (5.42)$$

³Maatriksi $[c^k_l]$ rahuldab karakteristlikku võrrandit $c^k_m c^m_n c^n_l - \text{I}_c c^k_m c^m_l + \text{II}_c c^k_l - \text{III}_c \delta^k_l = 0$

Võrrandi (5.39) saab esitada ka läbi peapikenemiste ja peapingete:

$$t_\alpha = b_{-1} \lambda_\alpha^2 + b_0 + b_1 \lambda_\alpha^{-2}. \quad (5.43)$$

On loomulik eeldada, et

$$t_\alpha \geq t_\beta \text{ alati kui } \lambda_\alpha \geq \lambda_\beta. \quad (5.44)$$

Avaldades valemities (5.40) invariantid peapikenemiste λ_α kaudu, saame võrratusest (5.44) (kasutades (5.43)) lisatingimused olekuvõrranditele

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}} \geq 0 \quad (5.45)$$

Samad tingimused (5.45) kehtivad ka kokkusurumatu materjali jaoks.

5.6.2 Cauchy meetod

Lähtudes paragrahvis 5.5 toodud mudelist on võimalik jõuda olekuvõrrandini

$$t^k_l = g_0 \delta^k_l + g_1 \bar{c}^{-1k}_l + g_2 \bar{c}^{-1k}_m \bar{c}^{-1m}_l, \quad (5.46)$$

kus g_α sõltuvad vaid deformatsioonitensori invariantidest. Raken-dades viimasele avaldisele Cayley-Hamiltoni teoreemi saame olekuvõrrandi

$$t^k_l = h_{-1} \bar{c}^{-1k}_l + h_0 \delta^k_l + h_1 c^k_l, \quad (5.47)$$

kus

$$h_{-1} = g_1 + g_2 \text{I}_{-1}, \quad h_0 = g_0 - g_2 \text{II}_{-1}, \quad h_1 = g_2 \text{III}_{-1} \quad (5.48)$$

ja mis on kujult sama, mis Greeni mudelile vastav olekuvõrrand (5.39). Greeni meetodi elastsuskonstandid b_α avaldusid läbi potentsiaali Σ . Konstantide h_α seos selle potentsiaaliga vajab selgitamist. Nimelt, saab näidata, et kui h_α rahuldavad tingimusi

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{I}_c} = -\mathbf{II}_c \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{II}_c}, \\ \frac{h_1}{2} + \mathbf{III}_c \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{III}_c} = \frac{\partial h_0}{\partial \mathbf{I}_c} + \frac{\mathbf{II}_c}{\mathbf{III}_c} \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{I}_c}, \\ \frac{h_{-1}}{2} - \mathbf{III}_c \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{III}_c} = h_{-1} + \mathbf{II}_c \frac{\partial h_{-1}}{\partial \mathbf{II}_c} + \mathbf{III}_c \frac{\partial h_0}{\partial \mathbf{II}_c}, \end{cases} \quad (5.49)$$

siis leidub deformatsioonienergia funktsioon Σ nii, et Greeni meetodil saadud olekuvõrrandid (5.39) ühtivad Cauchy meetodil saadud võrranditega (5.47). Seega tõepoolest on Cauchy meetod üldisem.

5.7 Isotroopsete ideaalselt elastsete tahkete kehade olekuvõrrandite aproksimatsioonid

Lõpmata väikeste deformatsioonide puhul annab Cauchy meetod 36 elastsuskonstanti, Greeni meetod aga 21. Nii 21 kui 36 konstanti on liiga palju. Katseliselt pole neid võimalik määrata. Seega on vaja asendada olekuvõrrandid teiste, neist vähe erinevate võrranditega. Selleks on vaja matemaatilisi ja füüsikalisi lisaeldusi, mis mudelit lihtsustaksid. Näiteks

- 1) Deformatsioonipiirkond enne purunemist on piiratud — osa materjale puruneb juba väikeste deformatsioonide puhul.
- 2) Kokkusurumatu materjali mudel — osadel kehadel muutub maht väga vähe.

Seega on lisaeldused võimalikud.

Polünomiaalne aproksimatsioon deformatsiooni komponentides

Iga (meid huvitav) funktsioon on arendatav astmeritta. Olgu potentsiaal Σ funktsioon mingist deformatsiooni mõõdust. Arendame

ta ritta nn. loomuliku oleku suhtes. Olgu näiteks $\Sigma = \Sigma(E_{KL})$ ja arendame ta astmeritta koha $C_{KL} = G_{KL}$ ümbruses. Säilitades liikmed vaid teatud astmeteni, saame kaks enamlevinud aproksimatsiooni

$$\begin{aligned} \Sigma = \alpha_E \mathbf{I}_E + \frac{1}{2} (\lambda_E + 2\mu_E) (\mathbf{I}_E)^2 + 2\mu_E \mathbf{II}_E + \\ + l_E (\mathbf{I}_E)^3 + m_E \mathbf{I}_E \mathbf{II}_E + n_E \mathbf{III}_E \dots \end{aligned} \quad (5.50)$$

ja

$$\begin{aligned} \Sigma = \alpha_e \mathbf{I}_e + \frac{1}{2} (\lambda_e + 2\mu_e) (\mathbf{I}_e)^2 + 2\mu_e \mathbf{II}_e + \\ + l_e (\mathbf{I}_e)^3 + m_e \mathbf{I}_e \mathbf{II}_e + n_e \mathbf{III}_e \dots \end{aligned} \quad (5.51)$$

Kasutades \mathbf{E} ja \mathbf{e} invariantide vahelisi seoseid saab tuletada vastavate konstantide vahelised seosed (mida siin ei esita).

Kelvini-Cosserat' mudeli (5.18)₂, s.o.

$$T^{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}}.$$

põhjal võib saada nüüd

$$\begin{aligned} T^K_L = [\alpha_E + \lambda_E \mathbf{I}_E + (3l_E + m_e) (\mathbf{I}_E)^2 + \\ + (m_E + n_E) \mathbf{II}_E + \dots] \delta^K_L + \\ + [2\mu_E - (m_E + n_E) \mathbf{I}_E + \dots] E^K_L + \\ + (n_E + \dots) E^K_M E^M_L. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Murnaghan'i ruumilise mudelist (5.25)₂ s.o.

$$t^k_l = \frac{\rho}{\rho_0} (\delta^k_m - 2e^k_m) \frac{\partial \Sigma}{\partial e^l_m}.$$

aga saame

$$\begin{aligned}
t^k_l = & [\alpha_e + (\lambda_e - \alpha_e)\mathbf{I}_e + (3l_e + m_e - \lambda_e - \alpha_e/2)(\mathbf{I}_e)^2 + \\
& + (m_e + n_e - 2\alpha_e)\mathbf{I}_e + \dots] \delta^k_l + \\
& + [2(\mu_e - \alpha_e) - \\
& - (m_e + n_e + 2\lambda_e + 2\mu_e - 2\alpha_e)\mathbf{I}_e + \dots] e^k_l + \\
& + (-4\mu_e + n_e + \dots) e^k_m e^m_l.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Nii võrrandis (5.52) kui ka (5.53) on piiratud deformatsioonikomponentide ruutudega — kõrgemat järku liikmed on hüljatud.

Loomulikus olekus $\mathbf{E} = \mathbf{e} = 0$ ja seega $T^K_L = \alpha_E \delta^K_L$ ja $t^k_l = \alpha_e \delta^k_l$, mis esitab hüdrostaatilist survet $p = -\alpha_E = -\alpha_e$. Kui loomulik olek on pingevaba, siis $\alpha_E = \alpha_e = 0$. Nn. esimest järku teooria annab vtl. juhul olekuvõrrandid

$$\begin{cases} T^K_L = \lambda_E \mathbf{I}_E \delta^K_L + 2\mu_E E^K_L \\ t^k_l = \lambda_e \mathbf{I}_e \delta^k_l + 2\mu_e e^k_l \end{cases} \tag{5.54}$$

See pole aga mitte midagi muud kui Hooke'i(-Cauchy) seadus⁴ klassikalise isotroopse elastsusteooria jaoks ja konstandid λ ja μ on tuntud kui Lamé konstandid⁵. Selle teooria puhul on deformatsioonid nii väikesed, et erinevus E^K_L ja e^k_l vahel kaob — enamgi veel e^k_l asemel vaadeldakse lõpmata väikeste deformatsioonide tensorit

$$\tilde{e}^k_l = \frac{1}{2} (u^k_{;l} + u_{l; }^k). \tag{5.55}$$

Pannes (5.55) ja (5.54)₂ Cauchy esimesse liikumisseadusse, saame kuulsa Navier' võrrandi

$$(\lambda_e + \mu_e) u^k_{;kl} + \mu_e u_{l; }^k + \rho (f_l - \ddot{u}_l) = 0, \tag{5.56}$$

⁴Rohkem tuntud siiski kui üldistatud Hooke'i seadus.

⁵Elastusteoorias on kombeks nimetada valemities (5.52) ja (5.53) esinevaid konstante järgmiselt α — esimest järku elastsus konstant; λ, μ — teist järku elastsus konstandid; l, m, n — kolmandat järku elastsus konstandid.

mis mängib fundamentaalset rolli klassikalises homogeensete isotroopsete elastsete kehade elastsusteoorias.

Kokkusurumatu materjali jaoks kasutatakse tavaliselt *Mooney-Rivlini arendust*, mis on leitud olevat mugavam —

$$\Sigma = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{rs} (\mathbf{I}_{-c} - 3)^r (\mathbf{II}_{-c} - 3)^s, \tag{5.57}$$

millest tavaliselt kasutatakse varianti, kus alles jäävad vaid liikmed, kus $r = 0, s = 1$ ja $r = 1, s = 0$, st.,

$$\Sigma = \alpha (\mathbf{I}_{-c} - 3) + \beta (\mathbf{II}_{-c} - 3), \tag{5.58}$$

kus $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$ on tarvilik ja piisav, et $\Sigma \geq 0$.

Polünomiaalne aproksimatsioon siirdegradientides

Deformatsioonienergia funktsiooni on võimalik avaldada kui polünoomi siirdegradientidest $U_{K;L}$ või $u_{k;l}$ —

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_N + \tag{5.59}$$

Kus Σ_M on M astme homogeenne polünoom gradientidest $U_{K;L}$. † Kui loomulik olek on pingevaba, siis $\Sigma_1 = 0$, ülejäänud sõltuvad E_{KL} -st. Teist järku aproksimatsiooni jaoks näiteks $\Sigma = \Sigma_2 = A^{KLMN} \tilde{E}_{KL} \tilde{E}_{MN}$, kus materjalikonstandid A^{KLMN} peavad rahuldama tingimusi $A^{KLMN} = A^{LKMN} = A^{KLN M} = A^{MNKL}$, mis tagab, et $\Sigma \geq 0$.

5.8 Elastsusteooria fundamentaalne võrrandisüsteem

1. Massi jäävuse seadus:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\text{III}_c} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c^{-1}}}. \quad (5.60)$$

2. Cauchy I ja II liikumisseadus:

$$\begin{cases} t^{kl}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^{kl} = t^{lk}. \end{cases} \quad (5.61)$$

✓

3. Keskkonna olekuvõrrandid (isotroopne keskkond).

a) kokkusurutav — Fingeri olekuvõrrand (5.39)

$$t^k_l = b_{-1} \bar{c}^{-1k}_l + b_0 \delta^k_l + b_1 c^k_l, \quad (5.62)$$

$$\begin{cases} b_{-1} = 2 (\text{III}_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c}, \\ b_0 = -2 \sqrt{\text{III}_c} \left(\text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right), \\ b_1 = -2 \sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c}. \end{cases} \quad (5.63)$$

b) kokkusurumatu — Ariano-Rivlini olekuvõrrand (5.41)

$$t^k_l = -p \delta^k_l + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}} \bar{c}^{-1k}_l - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}} c^k_l. \quad (5.64)$$

Olekuvõrrandid peavad rahuldama lisatingimusi (5.45)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-1}} \geq 0. \quad (5.65)$$

4. Geomeetrilised ja kinemaatilised seosed.

Deformatsioonitensordid —

$$\begin{cases} c_{kl} = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l}, \\ \bar{c}^{-1}_{kl} = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{cases} \quad (5.66)$$

Kiirus ja kiirendus —

$$v^k = \frac{Du^k}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u^k_{;l} v^l, \quad (5.67)$$

$$a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v^k_{;l} v^l. \quad (5.68)$$

5. Alg- ja rajatingimused. Kui keha pinnal (keskkonna piiril) S on pinged $t^k_{(n)}$ teada, siis

$$t^k_{(n)} = t^{lk} n_l = s^k, \quad \text{pinnal } S. \quad (5.69)$$

Kui teame pinna S siirdeid, siis võime kirjeldada kas x^k või u^k pinnal S . Võimalik on ka nn. segarajatingimuste juht, kus osal rajapinnal on antud siirded, osal pinged.

Algtingimused kirjeldavad olukorda mahus \mathcal{V} alghetkel $t = 0$ —

$$x^k(\mathbf{X}, 0) = x_0^k, \quad \dot{x}^k(\mathbf{X}, 0) = v_0^k \quad (5.70)$$

6. Sobivus- ehk pidevustingimused. Juhul kui põhimuutuujateks on deformatsioonid või pinged, või kui teoorias esineb olulisi lihtsustusi (näiteks plaatide ja koorikute teoorias), läheb üldjuhul vaja veel nn. sobivus- ehk pidevustingimusi (vt. paragrahv 2.8).

5.9 Vedelike dünaamika

5.9.1 Stokesi vedelik ja Newtoni vedelik

Eelmistes alajaotustes vaatlesime elastseid materjale, st. materjale, kus pinge sõltus vaid deformatsioonist. Taoliste materjalide puhul on tähtis teatud deformeerumata olek, mida nimetatakse loomulikuks olekuks. Selline käitumine on tavaliselt omane tahkistele (tahketele kehadele).

Teise tähtsa materjalide klassi moodustavad vedelikud. Tegelikult on kõik vedelikud kokkusurutavad ja viskoossed. Kuna aga nimetatud omadused varieeruvad vedelike puhul väga suurtes piirdes, siis on väga tihti võimalik vähemalt üht neist hüljata. Väga suur osa vedelikest on praktiliselt kokkusurumatud. Edaspidises piirdumegi vaid kokkusurumatute vedelikega. Vedelikku, mille puhul viskoossed efektid on hüljatud, nimetatakse *ideaalseks vedelikuks*. Viskoosete vedelike puhul on leitud, et pinged ei sõltu mitte deformatsioonist, vaid deformatsiooni kiirusest. Sellist vedelikku nimetatakse *Stokesi vedelikuks* ja tema olekuvõrrand on esitatav kujul

$$t^k_l = -p\delta^k_l + {}_D t^k_l(d^q_s), \quad {}_D t^k_l(0) = 0. \quad (5.71)$$

kus p on hüdrostaatiline surve ja ${}_D t^k_l$ viskoossusest põhjustatud dissipatiivne pinged. Kui deformatsiooni kiirus on null, on null ka vastav dissipatiivne pinged. Kui kokkusurumatu vedeliku olekuvõrrand on esitatud kujul

$$t^k_l = -p\delta^k_l + 2\mu d^k_l, \quad (5.72)$$

st., pinged ${}_D t^k_l$ ja deformatsiooni kiiruse d^k_l vaheline seos on lineaarne, siis nimetatakse teda *Newtoni vedelikuks*. Viimases nimetatakse kordajat $\mu \geq 0$ viskoossuskoeffitsendiks.

5.9.2 Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem

Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem on oma olemuselt analoogne elastsusteooria põhivõrrandite süsteemiga, koosnedes jäävusseadustest, olekuvõrrandest, kinemaatilistest (geomeetrisest) seostest ning raja- ja algtingimustest.

1. Massi jäävuse seadus:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\text{III}_c} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_{-c}^{-1}}}. \quad (5.73)$$

2. Cauchy I ja II liikumisseadus:

$$\begin{cases} t^{kl};l + \rho(f^k - a^k) = 0, \\ t^{kl} = t^{lk}. \end{cases} \quad (5.74)$$

3. Olekuvõrrandid (kokkusurumatu Stokesi vedelik):

$$t^k_l = -p\delta^k_l + {}_D t^k_l(d^q_s), \quad {}_D t^k_l(0) = 0. \quad (5.75)$$

Aproksimatsioonid

1) Lineaarne (Newtoni vedelik)

$$t^k_l = -p\delta^k_l + 2\mu d^k_l. \quad (5.76)$$

2) Ruutpolünoom

$$t^k_l = -p\delta^k_l + \alpha_1 d^k_l + \alpha_2 d^k_m d^m_l, \quad (5.77)$$

kus kordajad

$$\alpha_\gamma = \alpha_\gamma(\text{II}_d, \text{III}_d), \quad \gamma = 1, 2 \quad (5.78)$$

peavad rahuldama tingimusi

$$-2\alpha_1 \text{II}_d + \alpha_2 \text{III}_d \geq 0. \quad (5.79)$$

4. Kinemaatilised seosed: Deformatsioonikiiruse tensor

$$2d^k_l = v^k_{;l} + v_{l;^k} \quad (5.80)$$

kiirus ja kiirendus

$$v^k = \frac{Dx^k}{Dt}, \quad a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k_{;l}v^l. \quad (5.81)$$

5. Raja- ja algtingimused: Kui pinge $t^k_{(n)}$ on ette antud pinnal S , siis rajatingimused esitatakse kujul

$$t^k_{(n)} = t^{lk}n_l = s^k, \quad \text{pinnal } S. \quad (5.82)$$

Lamb tõestas, et vabal vedeliku pinnal või eri vedelike kontaktpinnal peab pingevektor olema pidev funktsioon. Siit järeldub kiirusvektori pidevus vaadeldaval pinnal.

Tahke keha ja vedeliku kontaktpinna puhul on vaidlusaluseks küsimuseks olnud hõõrde arvesse võtmine. Klassikalises teoorias hõõret ei arvetata, st. kiiruste erinevus vedeliku ja tahke keha pinnal

$$\Delta \mathbf{v} = 0. \quad (5.83)$$

Levinuim kompromiss —

$$\Delta \mathbf{v}_n = 0, \quad \Delta \mathbf{v}_t = k\mathbf{t}_t, \quad (5.84)$$

kus indeksid n ja t tähistavad kiirus- ja pingevektori normaali ja puutujasuunalisi komponente. Koefitsent k sõltub termodünaamilistest muutujatest. Üldiselt on k väärtus nulli lähedane, v.a. väikestel survetel.

Algtingimustega antakse ette kiiruste väli \mathbf{v} kogu vedeliku mahu \mathcal{V} ulatuses, st.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (5.85)$$

Seega määratlevad alg- ja rajatingimused vedeliku oleku vastavalt alghetkel ja vaadeldavat mahtu \mathcal{V} ümbritseval pinnal S . Nad peavad olema sellised, et võrrandisüsteemi lahend oleks ühene.

Ülaltoodud võrranditele ja seostele võib sõltuvalt ülesande iseloomust lisanduda näiteks energia jäävuse seadus, Fourier' soojusjuhtivuse seadus jne., jne.

5.9.3 Navier'-Stokesi võrrandid

Kui asendame pingetensori olekuvõrrandist (5.72) Cauchy esimesse liikumisseadusesse (liikumishulga tasakaalu seadus)

$$t^k_{l;l} + \rho(f^k - a^k) = 0$$

ning arvestame, et deformatsioonikiiruse tensor

$$2d^k_l = (v^k_{;l} + v_{l;^k}),$$

siis saame kuulsad *Navier'-Stokesi võrrandid* kokkusurumatu materjali jaoks —

$$\rho \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k_{;l}v^l \right) = \rho f^k - p_{;k} + \mu (v^k_{;l} + v_{l;^k})_{;l}. \quad (5.86)$$

Kokkusurumatuse tingimust võib vaadelda kui tiheduse ρ konstant-sust ajas $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ja ruumis $\nabla \cdot \rho \equiv \rho_{;k} = 0$. Seega, lokaalse massi jäävuse seaduse põhjal

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + (\rho v^k)_{;k} = \underbrace{\rho_{;k}}_{=0} v^k + \rho v^k_{;k} = \rho v^k_{;k} = 0.$$

Seega on vedeliku kokkusurumatuse tingimus väljendatav kujul

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v^k_{;k} = 0. \quad (5.87)$$

Teisisõnu, kokkusurumatu vedeliku puhul on kiiruse divergents null. Vedelike korral on tingimust (5.87) mugav kasutada, sest nende käitumise uurimisel ongi peatähelepanu pööratud kiirusele \mathbf{v} .

Arvestades kokkusurumatuse tingimust (5.87) ning pinge- ja deformatsioonitensori sümmeetriat, saame Navier'-Stokesi võrranditele (5.86) kuju

$$\rho \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k{}_{;l} v^l \right) = \rho f^k - p_{,k} + \mu v_{k;l}{}^l. \quad (5.88)$$

Kui arvestada järgmisi seoseid

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{k;l}{}^l \mathbf{g}^k = \text{grad } I_d - \text{curl } \mathbf{w}, \\ I_d = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = v^k{}_{;k}, \\ \nabla = \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \text{grad } p = \nabla p, \\ \text{curl } \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w}, \\ \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}, \end{array} \right. \quad (5.89)$$

siis saame esitada Navier'-Stokesi võrrandid (5.88) vektorkujul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \mu \text{grad div } \mathbf{v} - \mu \text{curl curl } \mathbf{v} \\ \text{ehk} \\ \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \end{array} \right. \quad (5.90)$$

Epiloog

Olles oma õpingutega jõudnud siia punkti, peaks lugejat valdama tunne, et pideva keskkonna mehaanika on midagi ebareaalset⁶. Vaadeldud näited kujutavad endast idealiseeritud probleeme. Kui aga mõelda ükskõik millise praktilise probleemi peale, saame aru, et mitte ükski pakutud lahendustest pole otseselt rakendatav: reaalse materjalide käitumine on komplitseeritud; reaalsed objektid pole korrapärase kujuga, pigem vastupidi, nad on üldjuhul ebaregulaarse kujuga; materjali omadustest prevaleerivad mittehomoogeensus ja anisotroopia; mittelineaarsus ilmutab end kõikjal jne. jne. Siit kerrib küsimus — kui näited on nii lihtsad, kas siis teooria on ikka piisavalt üldine, et käsitleda kõiki praktikas ette tulevaid olukordi.

Kahjuks ei saa anda kindlat vastust. On tõsi, et seoses moodstate arvutite rakendamisega on osutunud võimalikuks mitmete analüütiliste meetodite võimsuse suurendamine selliste piirideni, millest nende meetodite loojad poleks osanud undki näha (NB! Fungi raamat ilmus 1965. aastal! Sel ajal ei osatud omakorda undki näha sellest, millised arvutusvõimsused on meil kasutada tänapäeval!). Samas on paljud fundamentaalsed probleemid siiani lahendamata. Enamgi veel, kui välja arvata lineariseerimine, siis paljudel juhtudel pole tegu mitte üksnes piiratud analüüsivõimega, vaid isegi ei teata, mida ja kuidas küsida.

⁶Käesolev epiloog põhineb Y.C.Fungi õpiku *Foundation of solid mechanics* epiloogil.

Teisest küljest ei ole siin eesmärgiks jätta muljet, et inseneriprobleeme võib lahendada suvaliste idealisatsioonide abil. Vastupidi, idealiseeritud tulemuste õige interpretatsioon võimaldab saada adekvaatseid lahendusi keeruketele probleemidele. Näiteks, paljud sillad ja hooned on projekteeritud (lihtsate) trosside ja talade teooriate baasil. Lennukid, laevad ja isegi kosmoselaevad on projekteeritud peamiselt elastsusteooria baasil. Näib, et tuntud teadmiste õige kasutamisega võib saavutada hämmastavaid tulemusi.

Inseneride jaoks on aga põhiküsimus ikka ja alati olnud järgmine: "Kuidas idealiseerida probleeme selliselt, et nad oleks käsitletavad ja samas oleks vastavuses reaalse situatsiooniga?" Ka sellele küsimusele pole otsest vastust. Võib vaid öelda, et akumulierides kogemusi, täiustades analüüsi meetodeid, luues üldisemaid (või vastupidi spetsiifilisemaid) ja täpsemaid teooriaid, õpime me samm sammult aru saama reaalsest maailmast.

Lõpetuseks tuleb veelkord rõhutada, et käesoleva kursuse peaeesmärgiks oli anda ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhi-meetodeist ja põhivõrrandest, mis kehtivad nii tahkete kehade kui vedelike ja gaaside puhul. Seetõttu ei olnud konkreetsetele rakendustele pööratud samapalju tähelepanu.

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Pideva keskkonna mehaanika aine ja meetodid	3
1.2 Pideva keskkonna mehaanika põhieeldused	4
1.3 Kirjandus	5
2 Deformeeruva keha kinemaatika	6
2.1 Pideva keskkonna liikumise kirjeldamise kaks viisi	6
2.1.1 Euleri ja Lagrange'i koordinaadid	6
2.1.2 Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide kaudu	8
2.1.3 Liikumise kirjeldamine	12
2.2 Deformatsioon ja siire	15
2.2.1 Skalaar, vektor ja tensor	15
2.2.2 Baasivektor, meetriline tensor	17
2.2.3 Samaväärtuspinnad, tuletis antud suunas, gradient	29
2.2.4 Deformatsioon ja siire	31
2.2.5 Deformatsioonitensorid	35

2.2.6	Deformatsioonitensorite avaldamine siirete kaudu	37
2.2.7	Vektorite ja tensorite füüsikalised komponendid	46
2.3	Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded	48
2.3.1	Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid	48
2.3.2	Pöördetensorid ja pöördevektorid	49
2.3.3	Väikeste deformatsioonide ligikaudsed teooriad	51
2.3.4	Lõpmata väikeste deformatsioonide tensori geomeetriline tõlgendus	52
2.4	Pikenemine, nurga muutus ja deformatsioonitensorite geomeetriline tõlgendus	54
2.4.1	Pikenemine, pikenemiskoeffitsendid ja suhteline pikenemine	54
2.4.2	Nurga muutus ja nihkedeformatsioon	58
2.5	Deformatsiooniellipsoid	61
2.6	Deformatsioonitensori invariantid, peaväärtused ja peasuunad	64
2.7	Pööre	72
2.8	Pidevustingimused ehk sobivustingimused	79
2.9	Lihtsustatud deformatsiooniteooriad	82
2.10	Deformatsioonide erijuhud	86
2.11	Kiirus ja kiirendus	99
2.11.1	Materiaalne tuletis	99
2.11.2	Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus	103
2.11.3	Trajektoor, voolujoon, voolupind	106
2.11.4	Deformatsioonikiiruse tensor	107
2.11.5	Elementaaruumala muutumise kiirus	109

2.11.6	Elementaarpinna muutumise kiirus	111
2.12	Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika	112
2.13	Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus	116
2.13.1	Keeriselisus	116
2.13.2	Deformatsioonikiiruse tensori füüsikaline sisu	117
2.13.3	Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised	118
2.13.4	Kiirusvälja tsirkulatsioon	119
2.13.5	Keeriselisuse füüsikaline interpretatsioon	120
2.13.6	Keerisevaba ja keeriseline liikumine	122
3	Deformeeruva keskkonna dünaamika	124
3.1	Mass	124
3.2	Liikumishulk, kineetiline moment, energia	126
3.3	Pinge	129
3.3.1	Sise- ja välisjõud	129
3.3.2	Pingehüpotees	132
3.4	Pingetensor	134
3.5	Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal	137
3.6	Peapinged ja pingetensori invariantid	139
3.7	Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides	142
4	Energia ja entroopia	146
4.1	Energia jäävuse seadus — termodünaamika esimene seadus	147
4.2	Potentsiaalne energia	149
4.3	Deformatsiooni energia	150
4.4	Entroopia	152
4.4.1	Entroopia mõiste	152
4.4.2	Termodünaamiline olek	153

4.4.3	Entroopia tootmine	156
4.4.4	Entroopia seadus — termodünaamika teine seadus	157
5	Olekuvõrrandid	160
5.1	Sissejuhatus	160
5.2	Kasutatavad meetodid	161
5.3	Olekuvõrrandite invariantisus	162
5.4	Ideaalselt elastse keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod	164
5.5	Elastse keskkonna olekuvõrrandid — Cauchy meetod . . .	169
5.6	Isotroopse ideaalselt elastse tahke keha olekuvõrrandid . .	171
5.6.1	Greeni meetod	171
5.6.2	Cauchy meetod	173
5.7	Olekuvõrrandite aproksimatsioonid	174
5.8	Elastsusteooria fundamentaalne võrrandisüsteem	178
5.9	Vedelike dünaamika	180
5.9.1	Stokesi vedelik ja Newtoni vedelik	180
5.9.2	Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem	181
5.9.3	Navier'-Stokesi võrrandid	183
	Epiloog	185