3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul keha ruumala (maht) muutub deformatsiooni käigus. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli $dV = dxdydz$. Serva AB pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on dx ja peale deformatsiooni $dx_1 = dx(1+\varepsilon_x)$. Analoogiliselt $dy \to dy_1 = dy(1+\varepsilon_y)$ ja $dz \to dz_1 = dz(1+\varepsilon_z)$.

Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et suhtelised pikenemised ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hüljatakse ka teist ja kolmandat järku väkesed liikmed, saame deformeerunud elementaarristküliku mahuks $dV_1 = dx_1dy_1dz_1 = dV(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$ ning suhteliseks mahumuutuseks

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{3.15}$$

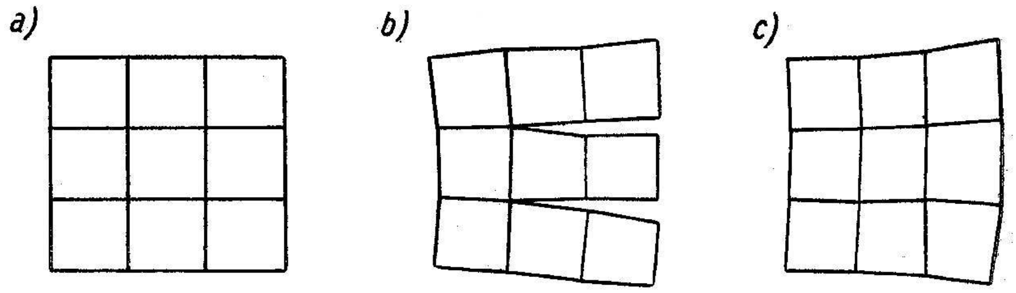
3.4 Pidevustingimused

Cauchy võrrandid (3.6) seovad kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ kolme siirdekomponendiga u, v, w.

- Kui on antud kolm siirdekomponenti u, v, w, siis võrrandite (3.6) abil on võimalik üheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.
- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, siis pole võrrandite (3.6) abil võimalik kolme siirdekomponenti u, v, w üheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsioonikomponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks.*[4]

[4]Pidevustingimusi nimetatakse ka pidevusvõrranditeks või sobivustingimusteks. Ingl. k. *compatibility conditions.*

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

Pidevusvõrrandite tuletamine. Diferentseerime võrrandit $(3.6)_1$ kaks korda koordinaadi y järgi ja võrrandit $(3.6)_2$ kaks korda koordinaadi x järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{3.16}$$

Kombineerides võrrandeid $(3.6)_{1-3}$ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist $(3.6)_{4-6}$ osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame $(3.6)_{4-5}$ ja lahutame saadud summast $(3.6)_6$. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \tag{3.17}$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit. Seega oleme kokku saanud kuus pidevusvõrrandit (tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\
\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}
\end{cases}
\tag{3.18}
$$

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenemised) kolmes ristuvas sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega $(3.18)_{1-3}$.

2. Viimsed kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristuvas tasapinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega $(3.18)_{4-6}$