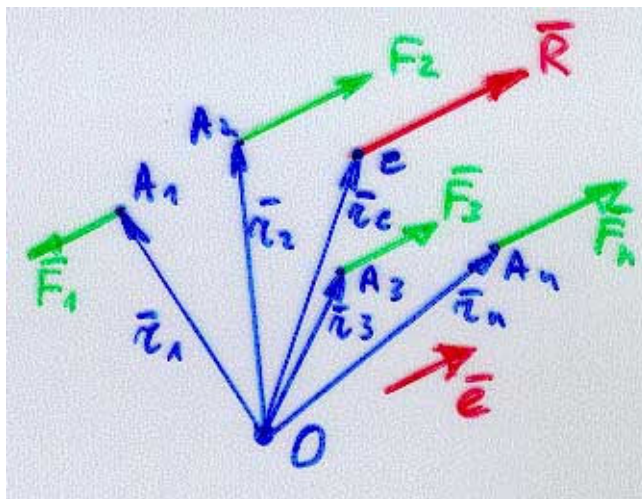


10 Raskuskese

10.1 Paralleeljõudude kese

Vaatleme jõusüsteemi, mis koosneb n paralleelsest jõust $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, rakenduspunktidega A_1, \dots, A_n . Teame, et selline jõusüsteem taandub resultandiks. Toome sisse ühikvektori



Joonis 32: Paralleeljõudude kese

$\mathbf{e} \parallel \mathbf{F}_i$. Nüüd $\mathbf{F}_i = \pm F_i \mathbf{e}$ ja resultant $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \sum \pm F_i \mathbf{e}$.

Kui nüüd pöörata kõiki jõudusid \mathbf{F}_i ühe ja sama nurga α võrra, siis ka \mathbf{R} pöörduv sama nurga α võrra. Järgnevalt näitame, et erinevatele nurkadele α vastavate resultantide mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis C , mida nimetatakse *paralleeljõudude keskmeks*. Tähistame punktide A_i kohavektorid \mathbf{r}_i ja rakendame Varignon'i teoreemi —

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\mathbf{R}) &= \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ ehk} \\ \mathbf{r}_C \times \sum (\pm F_i) \mathbf{e} &= \sum \mathbf{r}_i \times (\pm F_i) \mathbf{e} \text{ ehk} \\ \left[\sum (\pm F_i) \right] \mathbf{r}_C \times \mathbf{e} &= \left[\sum (\pm F_i \mathbf{r}_i) \right] \times \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (39)$$

Kui nüüd pöörata vektoreid \mathbf{e} ja tahta, et valem (39) kehtiks iga \mathbf{e} puhul, siis peavad nii v.p. kui p.p. võrdusmärgi olema ka esimesed tegurid võrdsed, st., $[\sum (\pm F_i)] \mathbf{r}_C = [\sum (\pm F_i \mathbf{r}_i)]$ ehk

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum \pm F_i \mathbf{r}_i}{\sum \pm F_i}. \quad (40)$$

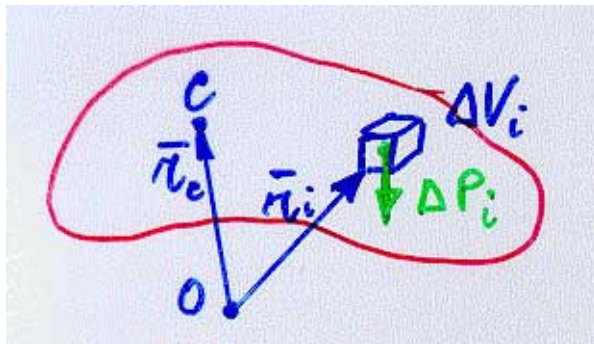
Kui projekteerida viimane avaldis koordinaattelgedele saame

$$x_C = \frac{\sum \pm F_i x_i}{\sum \pm F_i}, \quad y_C = \frac{\sum \pm F_i y_i}{\sum \pm F_i}, \quad z_C = \frac{\sum \pm F_i z_i}{\sum \pm F_i}. \quad (41)$$

Saadud punkti C ongi *paralleeljõudude kese*.

10.2 Raskuskese

Jäiga keha raskuskeskme leidmiseks rakendame eelmises punktis saadud valemeid. Eeldame, et keha on homogeenne, st. $\rho = \text{const.}$. Tähistame elementaarruumala ΔV . Elementaarruumalale ΔV_i mõjub raskusjõud $\Delta \mathbf{P}_i = \rho \mathbf{g} \Delta V_i$.



Joonis 33: Keha raskuskese

Raskusjõud $\Delta \mathbf{P}_i$ moodustavad paralleeljõudude süsteemi, mille kese

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum \mathbf{r}_i \Delta P_i}{\sum \Delta P_i} = \dots = \frac{\sum \mathbf{r}_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}. \quad (42)$$

Kui minna piirile $\Delta V_i \rightarrow 0$, siis saame

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \quad (43)$$

Kui projekteerime saadud tulemuse koordinaattelgedele, saame

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (44)$$

Sümmeetriateoreemid.

1. Kui kehal leidub sümmeetriatasand, siis raskuskese asub sellel tasandil.

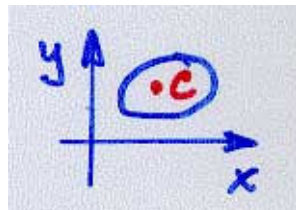
Tõestus. Olgu $x - y$ tasand keha sümmeetriatasandiks. Järelikult vastab igale suurusele $z dV$ suurus $-z dV$ ja $\int_V z dV = 0$ ning valemite (44) põhjal $z_C = 0$ s.t., raskuskese asub $x - y$ tasandil.

————— *q. e. d.* —————

2. Kui kehal leidub sümmeetriatelg, siis raskuskese asub sellel teljel.

Tõestus. Olgu z telg keha sümmeetriateljeks. Seega vastavad igale suurusele $x dV$ ja $y dV$ suurused $-x dV$ ja $-y dV$. Seega $\int_V x dV = 0$ ja $\int_V y dV = 0$ ning valemite (44) põhjal $x_C = y_C = 0$ s.t., raskuskese asub z teljel.

————— *q. e. d.* —————



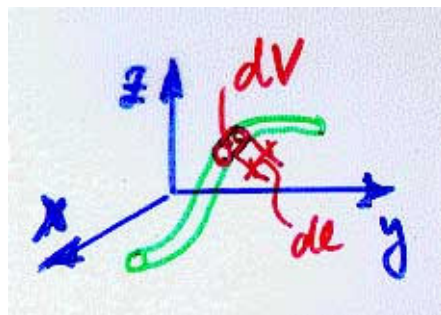
Joonis 34: Tasapinnalise kujundi raskuskese

Tasapinnalise kujundi raskuskese (pinnakese). Vaatleme konstantse paksusega tasapinnalist kujundit, mille paksus h on konstantne ja xy tasand on sümmeetriatasand. Nüüd $V = Ah$ ja $dV = dAh$ (A kujundi pindala) ja valemid (44) saavad kuju

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad y_C = \frac{\int_A y dA}{A}. \quad (45)$$

Saadud punkti C nimetatakse tihti ka pinnakeskmeks (eeldades, et $h \rightarrow 0$).

Joone (kaare, kõvera) raskuskese. Vaatleme ühtlase (konstantse) ristlõikega traadist kõverat. Nüüd $V = Al$ ja $dV = Adl$ (A traadi ristlõike pindala, l traadi pikkus) ja valemid



Joonis 35: Joone raskuskese

(44) saab esitada kujul

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int_l z dl}{l}. \quad (46)$$

Siin $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Kui $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ siis saame viimasest avaldisest $dl = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$.

10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod

Sageli õnnestub jagada vaadeldav keha lihtsateks osakujundeiks, mille raskuskeskme koordinaadid on teada. Vaatleme algul homogeeniseid kehi. Kui tähistada i -nda osakujundi ruumala V_i ja raskuskeskme koordinaati $(x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$, siis saab 3D keha raskuskeskme määrata valemist

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} V_i}{\sum V_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} V_i}{\sum V_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} V_i}{\sum V_i}. \quad (47)$$

Seda nimetatakse *tükeldusmeetodiks*.

Tasapinnalise kujundi puhul kasutatakse valemeid

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} A_i}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} A_i}{\sum A_i}, \quad z_C = 0 \quad (48)$$

ja kaare puhul

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} l_i}{\sum l_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} l_i}{\sum l_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} l_i}{\sum l_i}. \quad (49)$$

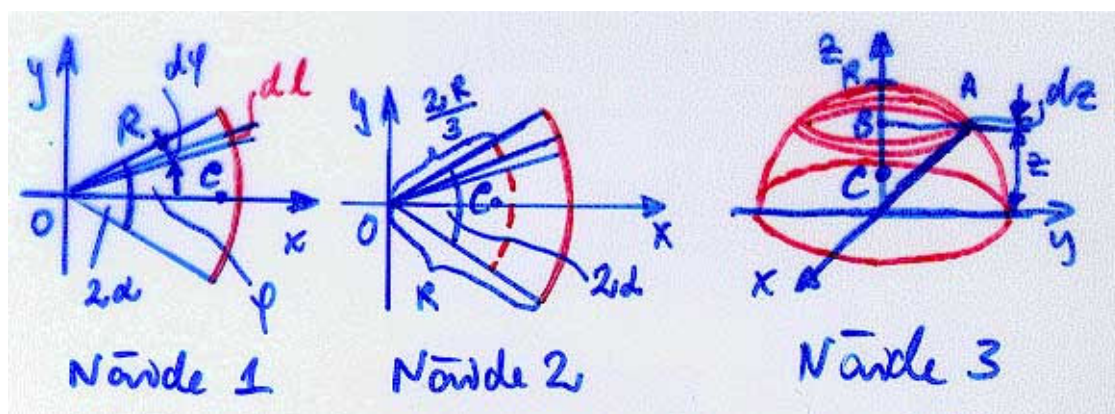
Kui kehal esineb väljalõikeid, siis valemeis (47)–(49) loetakse väljalõigete ruumalad, pindalad või pikkused negatiivseteks. Seda nimetatakse *täiendusmeetodiks*. Nimetatud meetodite samaaegsel rakendamisel on aga tegu *tükeldus- ja täiendusmeetodiga*.

Mittehomogeensed kehad. Valemid (42)–(49) kehtivad homogeensete kehade jaoks. Kui vaadeldav keha koosneb aga erinevast materjalist osakujundeist, siis tuleb tükeldus- ja täiendusmeetodi puhul seda arvesse võtta, st. valemities (47)–(49) tuleb ruumalade, pindalade ja pikkuste asemel kasutada kas masse või kaale. Näiteks valemid (47) saavad kuju

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} m_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} m_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} m_i}{\sum m_i}. \quad (50)$$

10.4 Näited

1. Leida ringjoone kaare raskuskeskme koordinaat kui ringjoone raadius on R , vastav kesknurk 2α , ringjoone keskpunkt asub koordinaatide alguses ja x telg on sümmeetriateljeks.



Joonis 36: Raskuskeskme leidmise näited.

Lahendus. Kuna x telg on sümmeetria teljeks, siis $y_C = 0$ ja vastavalt valemile (46)

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}. \quad (51)$$

Toome sisse polaarkoordinaadid r ja φ . Nüüd $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$ ja $l = 2\alpha R$ ning

$$x_C = \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi = \dots \dots = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (52)$$

2. Leida ringi sektori ja poolringi raskuskeskme koordinaat kui ringi raadius on R , vastav kesknurk 2α , ringi keskpunkt asub koordinaatide alguses ja x telg on sümmeetriateljeks.

Lahendus. Jaotame vaadeldava sektori elementaarsektoriteks kesknurgaga $d\varphi$. Piiril $d\varphi \rightarrow 0$ on need sektorid lähendatavad kolmnurkadega. Selliste kolmnurkade raskuskeskmed asuvad ringi keskpunktist kaugusel $2R/3$. Rakendades eelmises näites tuletatud valemit ja võttes raadiuse võrdseks $2R/3$, saame nüüd

$$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (53)$$

Sümmeetria tõttu $y_C = 0$. Poolringi puhul $\alpha = 0.5\pi$ ja $x_C = \frac{4R}{3\pi}$.

3. Leida poolkera raskuskeskme koordinaat kui kera raadius on R , kera keskpunkt asub koordinaatide alguses ja z telg on sümmeetriateljeks.

Lahendus. Sümmeetria tõttu $x_C = y_C = 0$ ja valemist (44)

$$z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (54)$$

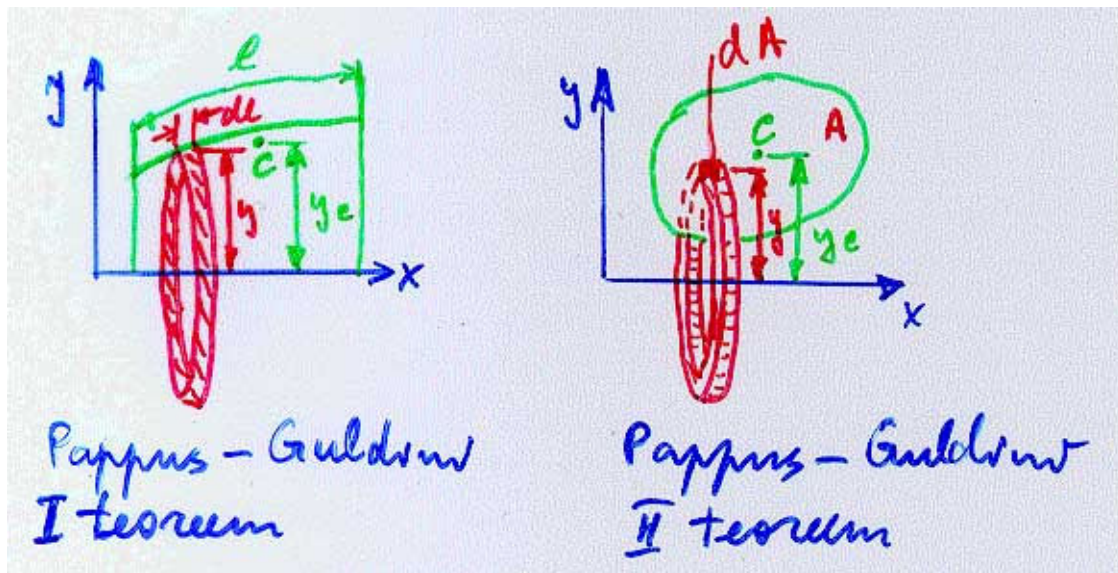
Elementaarruumalaks dV valime horisontaalse ketta, mille paksus on dz ja mis asub $x - y$ tasapinnast kaugusel z . Nüüd

$$dV = \pi(R^2 - z^2) dz \quad (55)$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_0^R z \pi(R^2 - z^2) dz = \dots \dots = \frac{3R}{8} \quad (56)$$

10.5 Pappus-Guldini teoreemid

Pappus-Guldini I teoreem: Pöördpinna pindala on võrdne teda genereerinud kõvera kaarepikkuse ja selle kõvera raskuskeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.



Joonis 37: Pappus-Guldini teoreemid

Tõestus: Vaatleme pöördpinda, mille teljeks on x telg ja mille on genereerinud kõver pikkusega l (joonis 37). Kõvera elemendi dl poolt genereeritud pöördpinna pindala on $2\pi y dl$ ja kogu pöördpinna pindala

$$A = 2\pi \int_l y dl. \quad (57)$$

Kuna vastavalt valemitele (46) on joone raskuskeskme y koordinaat

$$y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad (58)$$

siis

$$A = 2\pi y_C l. \quad \text{—————} q. e. d. \text{—————} \quad (59)$$

Pappus-Guldini II teoreem: Pöördkeha ruumala on võrdne teda genereerinud pinna pindalaga ja selle pinna raskuskeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.

Tõestus: Vaatleme pöördkeha, mille teljeks on x telg ja mille on genereerinud tasapinnaline kujund pindalaga A (joonis 37). Elementaarpinna dA poolt genereeritud elementaarrõnga ruumala on $2\pi y dA$ ja kogu pöördkeha ruumala

$$V = 2\pi \int_A y dA. \quad (60)$$

Kuna vastavalt valemitele (45) on pinna raskuskeskme y koordinaat

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A}, \quad (61)$$

siis

$$V = 2\pi y_C A. \quad \text{—————} q. e. d. \text{—————} \quad (62)$$

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	2
2 Jõud ja jõusüsteem	3
2.1 Jõu mõiste	3
2.2 Jõusüsteemi mõiste	3
2.3 Jõu projektsioon teljel, jõu komponendid ja jõu projektsioon tasandil . . .	4
2.4 Jõudude liitmine	5
3 Staatika aksioomid ja põhiülesanded	6
4 Sidemed, sidemereaktsioonid ja sidemetest vabastatavuse printsiip	8
5 Koonduva jõusüsteemi tasakaal	16
6 Paralleeljõudude liitmine, jõupaar	19
6.1 Kahe samasuunalise paralleeljõu liitmine	19
6.2 Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine	20
6.3 Jõupaar	21
7 Jõu moment. Jõupaari moment	22
7.1 Jõu moment punkti suhtes	22
7.2 Jõu moment telje suhtes	23
7.3 Jõupaari moment	24
8 Jõusüsteemi taandamine	26
8.1 Lemma jõu paraleellükkest	26
8.2 Jõusüsteemi peavektor ja peamoment	26
8.3 Jõusüsteemi invariandid	27
8.4 Jõukruvi ehk dünaam	28
8.5 Jõusüsteemi taandamise erijuhud	30
8.6 Erikujuliste jõusüsteemide taandamine	31
8.7 Varignon'i teoreem	31
9 Jõusüsteemi tasakaal	33
9.1 Jõusüsteemi tasakaalu tingimused	33
9.2 Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded	34

10 Raskuskese	35
10.1 Paralleeljõudude kese	35
10.2 Raskuskese	36
10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod	37
10.4 Näited	38
10.5 Pappus-Guldini teoreemid	39