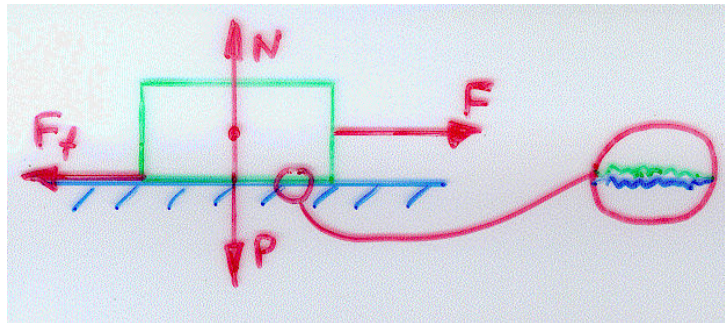


13 Hõõre

13.1 Liugehõõre

Senini oleme staatika ülesannete püstitamisel tihti lisanud lause: “Hõõret mitte arvestada!” Seega oleme eeldanud, et kokkupuutuvad pinnad on ideaalselt siledad. Selline eeldus pole aga tegelikult mitte kunagi täidetud ja paljudel juhtudel tuleb hõõret arvesse võtta. Vaatleme karedale pinnale asetatud keha, millele on rakendatud horisontaalne jõud \mathbf{F} (joonis esitatakse loengus). Kui kokkupuutuvad pinnad oleks ideaalselt siledad, st. mitte midagi ei takistaks libisemist, siis hakkaks keha liikuma mistahes $F > 0$ puhul. Kuid kuna tegelikkuses on tegu karedate pindadega, siis nii ei juhtu. Järelikult mõjub jõuga \mathbf{F} vastassuunaline jõud, mida nimetatakse hõõrdejõuks ja mida on soovitatav tähistada \mathbf{F}_f . Kui keha on paigal, siis $\mathbf{F} = \mathbf{F}_f$. Kuna teatud suurusega jõu \mathbf{F} puhul hakkab keha liikuma, siis järelikult leidub $\max \mathbf{F}_f$.



Joonis 42: Liugehõõre

Staatika ülesannete puhul, kus arvestatakse hõõret, lähtutakse *Coulomb'i hõõrdeseadustest*:

1. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus ei sõltu kokkupuutuvate pindade suurusest vaid ainult nende pindade iseloomust (siledus, karedus) ja materjalist.
2. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus on võrdeline normaalreaktsiooniga, st.

$$\max F_f = fN \quad (95)$$

kus f on *hõõrdetegur* (mida tihti tähistatakse ka μ). Tasakaalu puhul

$$F_f \leq \max F_f = fN \quad (96)$$

Hõõrdejõu suund on alati vastupidine võimaliku liikumissuunaga.

Eristatakse

- kuivhõõret ja märghõõret;
- paigalseisu ehk staatilist hõõret ja kinemaatilist hõõret. Kinemaatiline hõõrdetegur on kuni 25% väiksem kui staatiline hõõrdetegur ja tema väärtus sõltub ka keha kiirusest.

Käesolevas punktis käsitletud hõõret nimetatakse täpsemalt *liugehõõrdeks* ja vastavat tegurit *liugehõõrdeteguriks*.

Täpsemad uuringud on näidanud, et (liuge)hõõrdetegur ja seega ka (liuge)hõõrdejõud võib lisaks kokkupuutuvate pindade iseloomule sõltuda

- molekulaarse päritoluga jõududest;
- kõrgetest lokaalsetest temperatuuridest (kleepuvus, libedus);
- kokkupuutuvate pindade relatiivsest kõvadusest;
- kokkupuutuvate pindade suurusest.

Käesoleva kursuse raames käsitletavate staatika ülesannete lahendamisel viimaseid effekte aga ei arvestata ning lähtutakse vaid Coulomb'i hõõrdeseadustest.

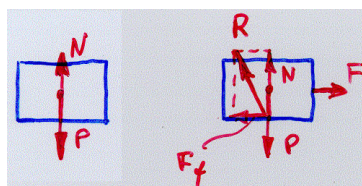
Näiteid hõõrdeteguri väärtustest. Järgnevas tabelis on toodud staatilise hõõrdeteguri väärtused mõnede enamlevinud materjalide jaoks. Toodud arvud on pärit kahest õpikust: 1) R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics, Statics; 2) F.P. Beer, E.R. Johnston, Mechanics For Engineers, Statics.

Materjalid	Staatiline hõõrdetegur
metall jääl	0.03 – 0.05
puit puidul	0.3 – 0.7
puit puidul	0.3 – 0.7
nahk puidul	0.2 – 0.5
nahk metallil	0.3 – 0.6
metall metallil	0.15 – 0.6
metall puidul	0.2 – 0.6
metall kivil	0.3 – 0.7
kummi betoonil	0.6 – 0.9

Nagu on tabelist näha, kõiguvad toodud väärtused küllaltki suures vahemikus. Enamgi veel, teistes õpikutes või teatmeteostes esitatud staatilise hõõrdeteguri väärtused võivad erineda alltoodutest. Praktikas tuleks igal konkreetsel juhul valmistada kasutatavatest materjalides katsekehad ning määrata hõõrdeteguri väärtus katseliselt.

13.2 Hõõrdenurk ja hõõrdekoonus

Staatikas eristatakse kahte tüüpi pinnareaktsioone, mida nimetatakse vastavalt sileda pinna reaktsiooniks ja kareda pinna reaktsiooniks.

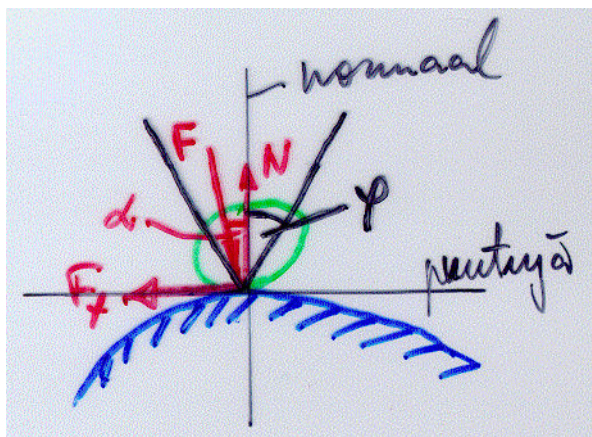


Joonis 43: Sileda (vasakul) ja kareda pinna reaktsioon.

Sileda pinna reaktsioon koosneb vaid normaalreaktsioonist, mis on risti kehade kokupuutepunktis leitud ühise puutujaga.

Kareda pinna reaktsioon koosneb normaalreaktsioonist ja hõõrdejõust ning on võrdne nende kahe jõu (geomeetrilise) summaga, st. $\mathbf{R} = \mathbf{F}_f + \mathbf{N}$.

Hõõrdenurk. Vaatleme karedale pinnale toetuvat keha, millele mõjub jõud \mathbf{F} . Jõud



Joonis 44: Hõõrdenurk

\mathbf{F} kujutab endast kõigi kehale mõjuvate aktiivsete jõudude (kaasa arvatud keha kaal) summat. Hõõrdeegur keha ja pinna vahel on f ja jõu \mathbf{F} mõjusirge moodustab puutepinna normaaliga nurga α . Tahame teada, millise nurga α puhul jääb keha tasakaalu.

On selge, et tasakaalu puhul

$$N = F \cos \alpha \text{ ja } F_f = F \sin \alpha. \quad (97)$$

Teisest küljest, on hõõrdejõu maksimaalne väärtus $\max F_f = fN$, st.

$$F_f \leq \max F_f = fN. \quad (98)$$

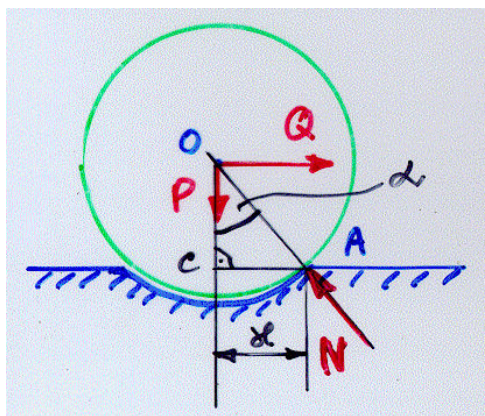
Viimaste avaldiste põhjal on tasakaalu korral

$$F \sin \alpha \leq fF \cos \alpha \text{ ja } \tan \alpha \leq f. \quad (99)$$

Et anda viimasele mugavamalt kuju, tähistame $\tan \varphi = f$, kus nurka φ nimetatakse *hõõrde-nurgaks*. Keha on tasakaalus kui

$$\alpha \leq \varphi. \quad (100)$$

Hõõrdekoonus on koonus mille tipp asub punktis A , teljeks on puutepinna normaal ja tipunurgaks hõõrdenurk φ .



Joonis 45: Veerehõõre

13.3 Veerehõõre ehk veeretakistus

Vaatleme horisontaalsele pinnale toetuvat silindrit kaaluga \mathbf{P} ja raadiusega r , mille tsentrisse on rakendatud horisontaalne jõud \mathbf{Q} . Kogemusest on teada, et silinder ei hakka veerema mistahes $Q > 0$ puhul. Takistust, mida silinder avaldab veeremisele, nimetatakse *veerehõõrdeks*. Erinevalt liugehõõrdest, on veerehõõre põhjustatud veereva keha ja aluspinna deformeerumisest.

Silinder hakkab veerema kui $|M_A(\mathbf{Q})| > |M_A(\mathbf{P})|$. Kuna momendid $|M_A(\mathbf{Q})| = Q \cdot OC$ ja $|M_A(\mathbf{P})| = P \cdot AC$, siis saab viimane tingimus kuju $Q \cdot OC > P \cdot AC$.

Tähistame deformatsiooni iseloomustava pikkuse $AC = \varkappa$. Kuna α on väike, siis $\cos \alpha \sim 1$, $OC \sim r$ ja $P \sim N$. Seega silinder hakkab veerema kui

$$Q > \varkappa \frac{P}{OC} \sim \varkappa \frac{N}{r} = F_r. \quad (101)$$

Suurust \varkappa nimetatakse *veerehõõrdeteguriks* (dim $\varkappa = \text{m}$) ja jõu dimensiooni omavat suurust F_r *veerehõõrdejõuks*.

Ülesannete lahendamisel on otstarbekas kasutada veerehõõrdejõu asemel *veerehõõrdemomenti*, mille moodul

$$M_r = rF_r = \varkappa N. \quad (102)$$

Sarnaselt liugehõõrdega on ka veerehõõrdejõud ja veerehõõrdemoment suunatud vastupidiselt võimalikule liikumisele.

Märkused:

- Sageli kasutatakse termini veerehõõrde asemel terminit *veeretakistus*. Vastavalt kasutatakse siis ka termineid *veeretakistustegur*, *veeretakistusjõud* ja *veeretakistusmoment*.
- Veeretakistustegur \varkappa iseloomustab veereva keha ja aluspinna deformatsiooni suurust.
- Tegelikult määravad avaldised (101) ja (102) vastavalt veerehõõrdejõu ja veerehõõrdemomendi maksimaalsed väärtused ning analoogselt liugehõõrdega kehitvad veerehõõrde puhul võrratused $0 \leq M_r \leq \max M_r = \varkappa N$ ja $0 \leq F_r \leq \max F_r = \varkappa \frac{N}{r}$.

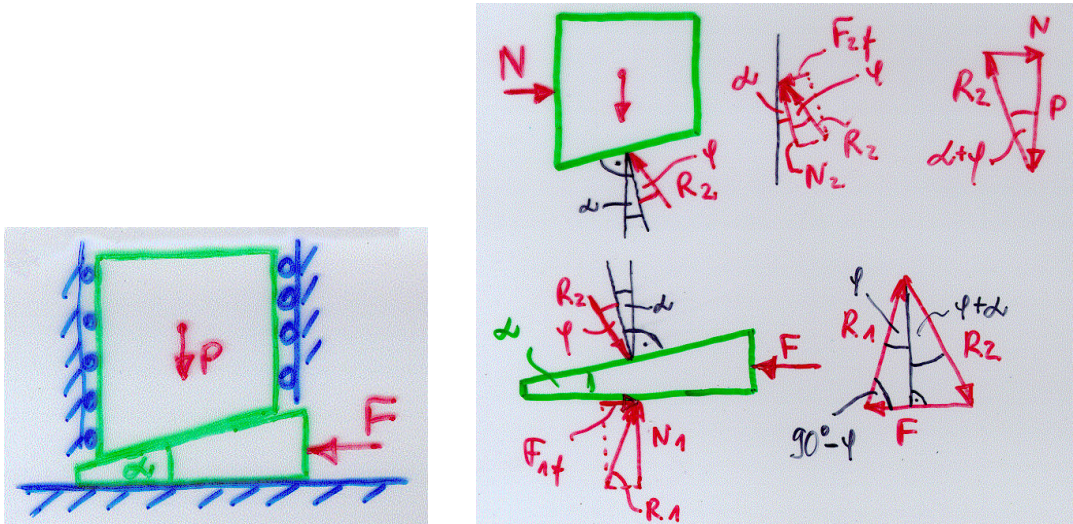
- Peale liugehõõrde ja veerehõõrde eristatakse ka pöördehõõret ehk keerlemishõõret kuid käesolevas kursuses seda ei käsitleta (Vt. Lepik & Roots, TM lk. 79-80).

13.4 Hõõrde rakendusi

13.4.1 Kiilud

Ülesanne.

Vaatleme keha kaaluga P , mille all on kerge kiil⁷ kaldenurgaga α . Hõõrdetegur kiilu mõle-



Joonis 46: Keha ja kiil(vasakul). Kiilu liikumine keha alla (paremal).

mal pinnal on f . Kui suurt horisontaalset jõudu F tuleks rakendada kiilule, et kiil rohkem keha alla liiguks? Kui suurt horisontaalset jõudu F tuleks rakendada kiilule, et kiilu keha alt välja tõmmata? Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kiiluga (kiiluga, mis ei libise ise keha alt välja)?

Lahendus.

1) Kui suurt horisontaalset jõudu F tuleks rakendada kiilule, et kiil rohkem keha alla liiguks?

Tasakaalu korral moodustavad kehale mõjuvad kolm jõudu P, N ja R_2 täisnurkse jõukolmnurga ($\varphi = \arctan f$ on hõõrdenurk), kust leiame

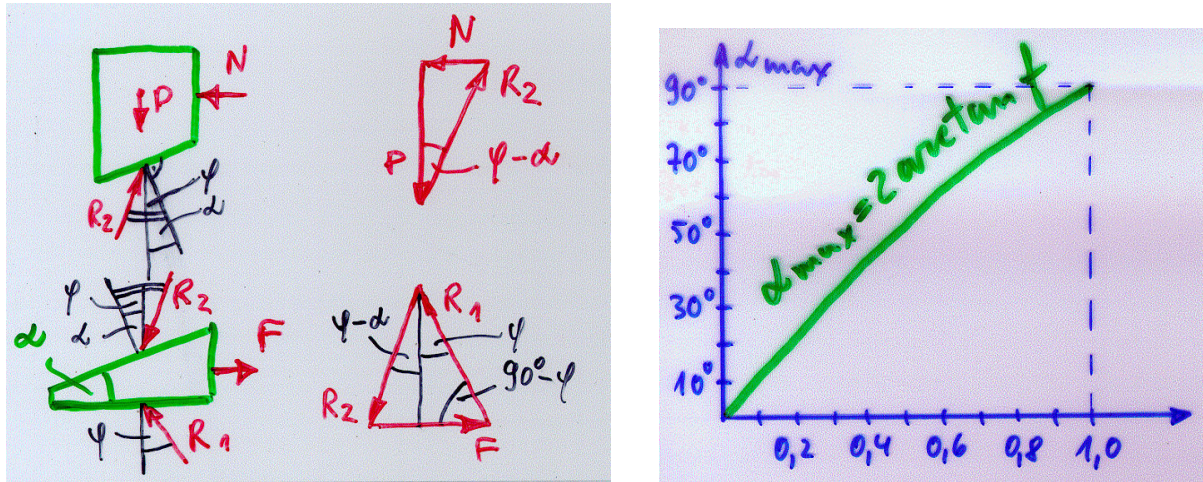
$$R_2 = \frac{P}{\cos(\alpha + \varphi)}. \quad (103)$$

Kiilule mõjuvad jõud R_1, R_2 ja F . Vaatleme kiilu tasakaalu ja moodustame vastava jõukolmnurga. Siinusteoreemi ja avaldise (103) põhjal

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{F}{\sin(2\varphi + \alpha)} \Rightarrow F = \frac{R_2 \sin(2\varphi + \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P \sin(2\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cos(\alpha + \varphi)}. \quad (104)$$

2) Kui suurt horisontaalset jõudu F tuleks rakendada kiilule, et kiilu keha alt välja tõmmata?

⁷St. kiilu kaalu ei arvesta.



Joonis 47: Kiilu liikumine keha alt välja (vasakul). Iselukustuv kiil: maksimaalse kalde-nurga sõltuvus hõõrdetegurist (paremal).

Võrreldes eelnevalt käsitletud juhuga on kiilu välja tõmbamise puhul (eeldatav) liikumise suund vastupidine. Vaatleme keha ja kiilu tasakaalu, moodustame kaks jõukolmnurka, rakendame siinusteoreemi ja saame

$$R_2 = \frac{P}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{F}{\sin(2\varphi - \alpha)}, \quad (105)$$

$$\underline{F} = \frac{R_2 \sin(2\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P \sin(2\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)}.$$

3) Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kiiluga?

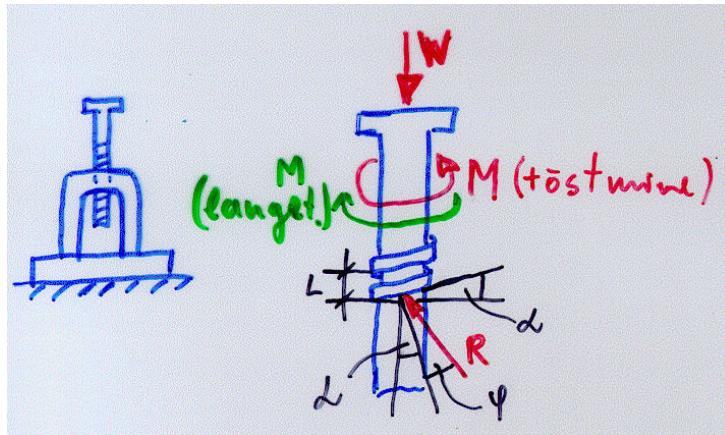
Iselukustuva kiilu puhul hakkab kiil keha alt välja liikuma vaid vasakult paremale suunatud jõu \mathbf{F} toimel. Teisisõnu, avaldisega (105)₃ esitatud jõud peab olema positiivne. Uurime seda avaldist. Kui hõõrdetegur $0 \leq f \leq 1$, siis hõõrdenurk $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ ja $\cos \varphi > 0$. Kui kiilu nurk $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, siis ka $\cos(\varphi - \alpha) > 0$. Suurus $\sin(2\varphi - \alpha) > 0$ kui $2\varphi > \alpha$.

Seega, iselukustuva kiiluga on tegu kui nurk $\alpha < \alpha_{\max} = 2\varphi = 2 \arctan f$. Vastasel korral tuleb kiilu keha all hoidmiseks rakendada paremalt vasakule suunatud jõudu $-\mathbf{F}$, mis on määratud avaldisega (105)₃. Kui hõõrdetegur $f = 0,3$ (puit puidul), siis $\alpha_{\max} = 33,40^\circ$ ja kui $f = 0,6$ (teras terasel), siis $\alpha_{\max} = 61,93^\circ$. Hõõrdeteguri väärtuse $f = 0,9$ puhul oleks $\alpha_{\max} = 83,97^\circ$.

13.4.2 Kruvid

Ülesanne.

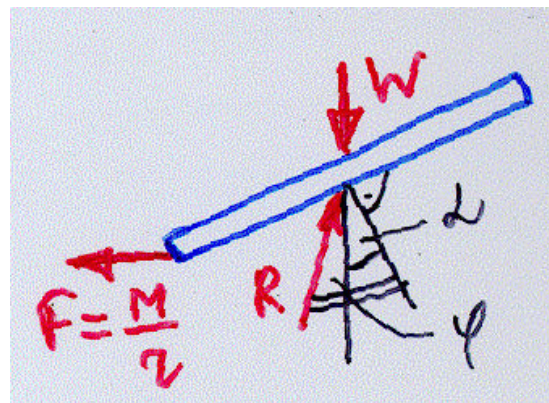
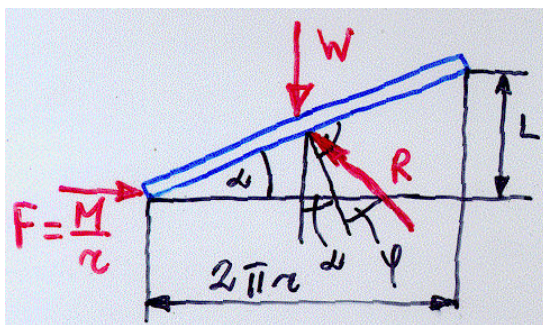
Vaatleme nn. ristkülikulist kruvi (vinti). Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et tõsta raskust W ? Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et langetada raskust W ? Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kruviga? Hõõrdetegur on f , kruvisamm L ja kruvi (keskmise) raadius r .



Joonis 48: Kruvi.

Lahendus.

1) Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et tõsta raskust W ?



Joonis 49: Tõstmise (vasakul) ja langetamine.

Vaatleme kruvi ühte keeret, kerime ta mõtteliselt sirgeks ja asendame momendi M jõuga $F = M/r$. Keerme kaldenurk $\alpha = \arctan(L/2\pi r)$ ja hõõrdenurk $\varphi = \arctan f$. Projektee-rides tasakaaluvõrrandi $W + R + F = 0$ kahele ristuvale teljele saame

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{W}{\cos(\alpha + \varphi)}, \\
 F &= R \sin(\alpha + \varphi), \\
 M &= W r \tan(\alpha + \varphi).
 \end{aligned}
 \tag{106}$$

2) Kui suurt jõupaari momenti \mathbf{M} tuleb kruvile rakendada, et langetada raskust \mathbf{W} ?

Raskuse \mathbf{W} langetamise puhul muutuvad jõudude \mathbf{R} ja \mathbf{F} suunad ning moment

$$M = Wr \tan(\varphi - \alpha). \quad (107)$$

3) Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kruviga?

Iselukustuva kruviga on tegu juhul kui raskuse \mathbf{W} toimel ei hakka kruvi ise langema, vaid selleks tuleb rakendada jõupaari momenti. Teisisõnu, avaldisega (107) määratud moment peab olema positiivne. Kuna nii $W > 0$ kui $r > 0$, siis on $M > 0$ kui

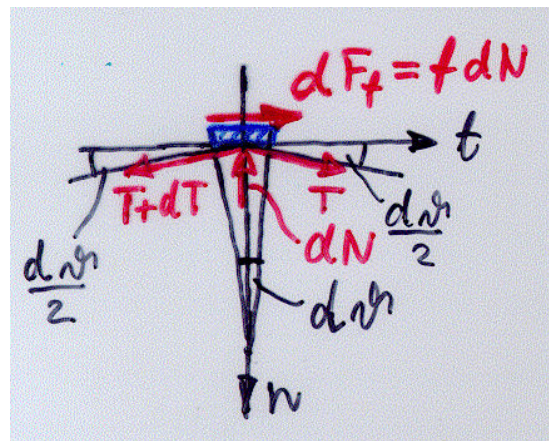
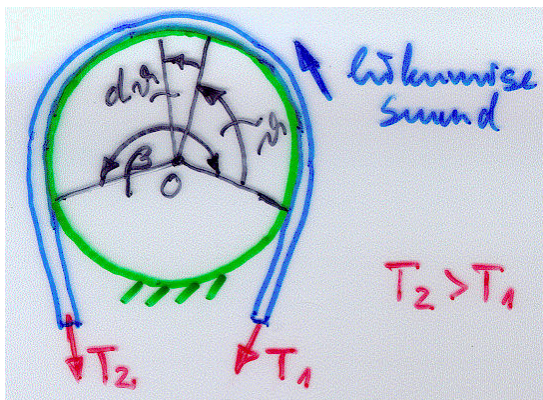
$$\tan(\varphi - \alpha) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha < \varphi. \quad (108)$$

Seega, iselukustuva kruvi puhul $\alpha < \alpha_{\max} = \varphi = \arctan f$.

13.4.3 Niidi hõõre vastu silindrilist pinda

Ülesanne.

Vaatleme jäigalt kinnitatud silindrit, millel oleva niidi⁸ harudes mõjuvad tõmbejõud $\mathbf{T}_1 < \mathbf{T}_2$. Hõõrdetegur niidi ja silindri vahel on f . Leida niidi harudes mõjuvate jõudude moodulite suhe $\mathbf{T}_2/\mathbf{T}_1$.



Joonis 50: Niidi hõõre.

Lahendus.

Vaatleme kesknurgale $d\vartheta$ vastava niidielemendi tasakaalu. Sellisele elemendile mõjuvad jõud \mathbf{T} , $\mathbf{T} + d\mathbf{T}$, $d\mathbf{N}$ ja $d\mathbf{F}_f$. Arvestades, et $dF_f = f dN$, saame tasakaalutingimuse $\sum \mathbf{F}_i = 0$ projekteerimisel telgedele t ja n

$$\begin{cases} f dN = dT, \\ dN = T d\vartheta, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f T d\vartheta = dT. \quad (109)$$

⁸Niidi mõiste on siin küllaltki lai. Niidina käsitletakse näiteks köisi, trosse, rihmasid ja muid painduvaid kehasid.

Eraldame muutujad ja integreerime:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = f \int_0^\beta d\vartheta \Rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = f\beta. \quad (110)$$

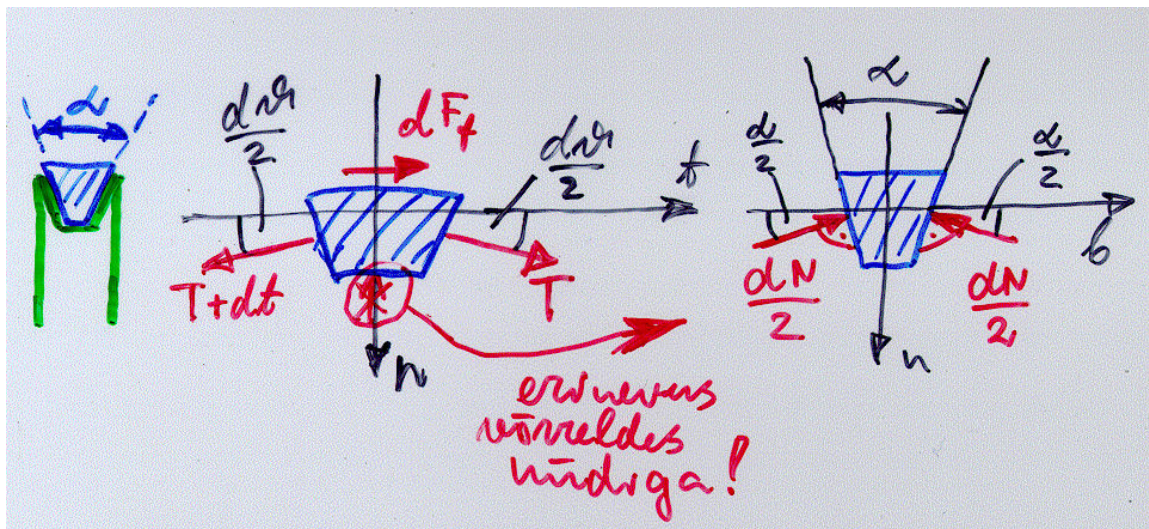
Seega jõudude moodulite suhe⁹

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp f\beta. \quad (111)$$

Märkused:

- Valem (111) kehtib ka mitteringjoonelise ristlõike puhul (näiteks kivid), sest tema tuletamisel ei kasutatud silindri raadiust r .
- Valemit (111) saab kasutada vaid juhul kui niit libiseb silindril või on just libisema hakkamas. Viimane on nn. piirjuht.
- Silinder ei pruugi olla jäigalt kinnitatud — teda võib paigal hoida jõupaari moment.
- Kiiirihma puhul on normaalreaktsioon $dN = Td\vartheta / \sin(0,5\alpha)$ (vt. joonist) ja valem (111) saab kuju

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp \frac{f\beta}{\sin(0,5\alpha)}. \quad (112)$$



Joonis 51: Kiiirihma reaktsioonid.

- Põhilised rakendused:
 - Jõudu T_2 tasakaalustava jõu T_1 leidmine.
 - Lintpidurite arvutus.
 - Rihmülekande vedavas ja veetavas harus mõjuvate tõmbejõudude määramine või maksimaalse ülekantava momendi leidmine.

⁹ $\exp x \equiv e^x$

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	2
2 Jõud ja jõusüsteem	3
2.1 Jõu mõiste	3
2.2 Jõusüsteemi mõiste	3
2.3 Jõu projektsioon teljel, jõu komponendid ja jõu projektsioon tasandil . . .	4
2.4 Jõudude liitmine	5
3 Staatika aksioomid ja põhiülesanded	6
4 Sidemed, sidemereaktsioonid ja sidemetest vabastatavuse printsiip	8
5 Koonduva jõusüsteemi tasakaal	16
6 Paralleeljõudude liitmine, jõupaar	19
6.1 Kahe samasuunalise paralleeljõu liitmine	19
6.2 Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine	20
6.3 Jõupaar	21
7 Jõu moment. Jõupaari moment	22
7.1 Jõu moment punkti suhtes	22
7.2 Jõu moment telje suhtes	23
7.3 Jõupaari moment	24
8 Jõusüsteemi taandamine	26
8.1 Lemma jõu paraleellükkest	26
8.2 Jõusüsteemi peavektor ja peamoment	26
8.3 Jõusüsteemi invariandid	27
8.4 Jõukruvi ehk dünaam	28
8.5 Jõusüsteemi taandamise erijuhud	30
8.6 Erikujuliste jõusüsteemide taandamine	31
8.7 Varignon'i teoreem	31
9 Jõusüsteemi tasakaal	33
9.1 Jõusüsteemi tasakaalu tingimused	33
9.2 Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded	34

10 Raskuskese	35
10.1 Paralleeljõudude kese	35
10.2 Raskuskese	36
10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod	37
10.4 Näited	38
10.5 Pappus-Guldini teoreemid	39
11 Pinnamomendid	41
11.1 Sissejuhatus	41
11.2 Staatilised momendid	41
11.3 Inertsimomendid	42
11.4 Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes	43
11.5 Inertsimomendid pööratud telgede suhtes	44
11.6 Peateljed ja peainertsimomendid	45
11.7 Massiinertsimomendid	46
11.8 Näide	46
12 Jõuväli	48
13 Hõõre	50
13.1 Liugehõõre	50
13.2 Hõõrdenurk ja hõõrdekoonus	51
13.3 Veerehõõre ehk veeretakistus	53
13.4 Hõõrde rakendusi	54
13.4.1 Kiilud	54
13.4.2 Kruvid	56
13.4.3 Niidi hõõre vastu silindrilist pinda	57