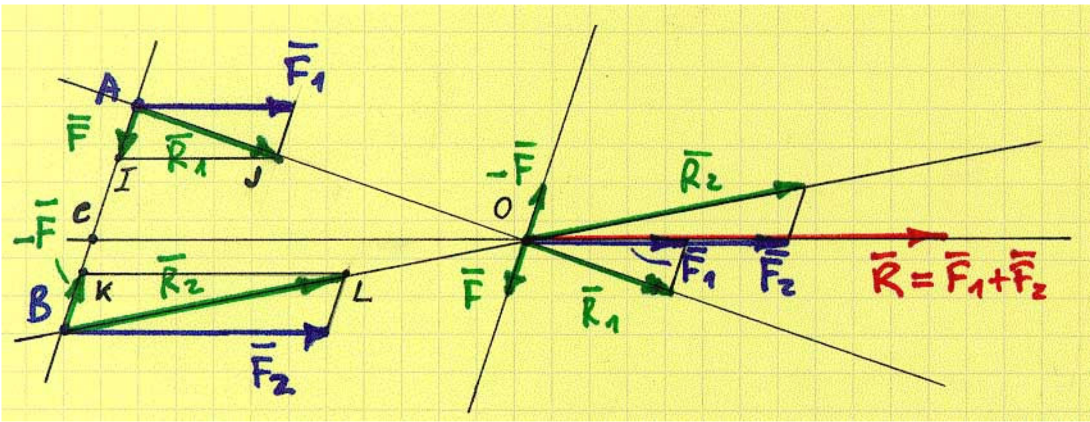
6 Paralleljõudude liitmine, jõupaar

Paralleeljõud. Kui jõudude mõjusirged on paralleelsed, siis nimetatakse neid parallelseteks jõududeks ehk paralleeljõududeks. Eristatakse samasuunalisi ja vastassuunalisi paralleljõude. Viimaseid nimetatakse mõnes õpikus *antiparalleelseteks jõududeks*.

6.1 Kahe samasuunalise paralleeljõu liitmine



Joonis 20: Samasuunaliste paralleeljõudude liitmine.

Vaatleme keha mille punktidesse A ja B on rakendatud kaks samasuunalist paralleeljõudu $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ (joonis 20). Nende kahe jõu liitmine toimub järgmiselt:

1. Tõmbame läbi punktide A ja B sirge ning lisame superpositsiooniaksioomi põhjal sirge AB sihilise tasakaalus oleva jõusüsteemi $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$.
2. Asendame jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}, -\mathbf{F}$ jõududega $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} = \mathbf{R}_1$ ja $\mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}) = \mathbf{R}_2$, mille mõjusirged lõikuvad punktis O.
3. Kanname jõud $\mathbf{R}_1$ ja $\mathbf{R}_2$ piki nende mõjusirgeid punkti O.
4. Tõmbame läbi punkti O sirgega AB paralleelse sirge ja lahutame jõud $\mathbf{R}_1$ ja $\mathbf{R}_2$ algkomponentideks
5. Superpositsiooniaksioomi põhjal jätame ära tasakaalus oleva jõusüsteemi $\mathbf{F}, -\mathbf{F}$. Alles jäävad punkti O rakendatud ühise mõjusirgega jõud $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$. Nende summa $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ (moodul $R = F_1 + F_2$).
6. Jõu $\mathbf{R}$ mõjusirge lõikab sirget AB punktis C, mille asukoht on määratud avaldisega
$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB} \tag{10}$$
Viimase avaldise tuletamiseks vaatleme kahte sarnaste kolmnurkade paari — $\triangle AOC \sim \triangle AJI$ ja $\triangle BOC \sim \triangle BLK$ —
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{F_1}{CO} = \dfrac{F}{AC} \Rightarrow F \cdot CO = F_1 \cdot AC \\ \text{ja} \\ \dfrac{F_2}{CO} = \dfrac{F}{BC} \Rightarrow F \cdot CO = F_2 \cdot BC \end{array}\right\} \Rightarrow F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC.$$

Teisendame saadud avaldist

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC \mid +F_2 \cdot AC \Rightarrow \underbrace{(F_1 + F_2)}_{R} \cdot AC = F_2 \cdot \underbrace{(AC + BC)}_{AB} \Rightarrow \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB},$$

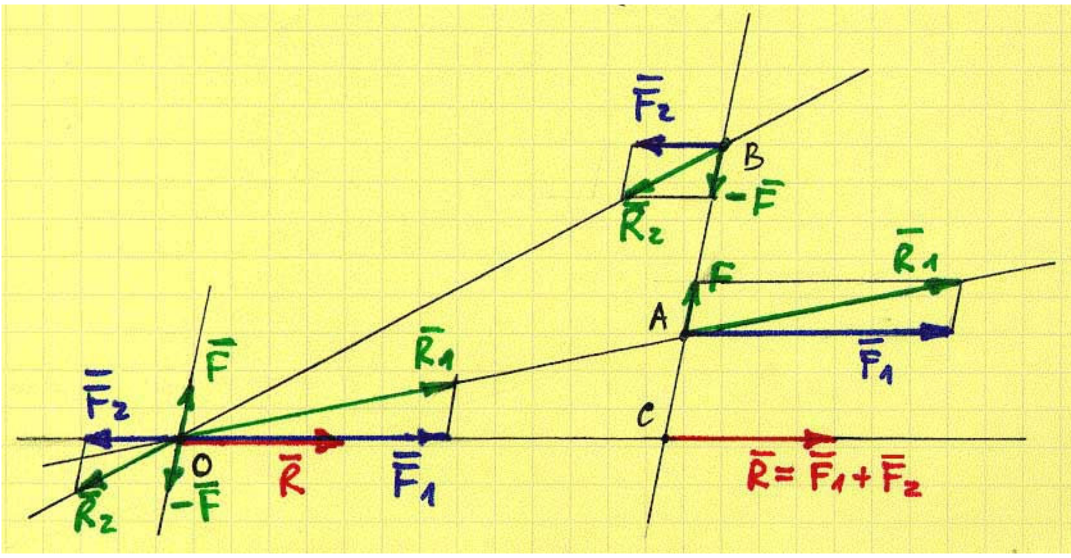
$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC \mid +F_1 \cdot BC \Rightarrow F_1 \cdot \underbrace{(AC + BC)}_{AB} = \underbrace{(F_1 + F_2)}_{R} \cdot BC \Rightarrow \frac{F_1}{BC} = \frac{R}{AB}.$$

Kokku saame avaldise (10).

Kokku: Kahe samasuunalise paralleeljõu $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ resultant $\mathbf{R}$ on liidetavate jõududega samasuunaline vektor, mille moodul $R = F_1 + F_2$. Resultandi $\mathbf{R}$ mõjusirge jaotab jõudude $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ rakenduspunktide vahelise sirglõigu AB osadeks AC ja BC pöördvõrdeliselt liidetavate jõudude moodulitega, st., vastavalt avaldisele (10).

6.2 Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine

Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine liitmine toimub eelnevaga analoogse geomeetrilise konstruktsiooni abil. Valem (10) jääb kehtima kuid $R = |F_1 - F_2|$ ja punkt C asub väljaspool lõiku AB.

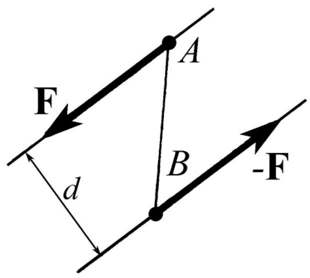


Joonis 21: Vastassuunaliste paralleeljõudude liitmine.

Kokku: Kahe vastassuunalise paralleeljõu $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ resultant $\mathbf{R}$ on vektor, mis on suunatud vektoritest $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ suurema suunas. Resultandi $\mathbf{R}$ mõjusirge lõikab jõudude $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ rakenduspunkte läbivat sirget punktis C väljaspool lõiku AB. Lõikude AC ja BC pikkused on pöördvõrdelised liidetavate jõudude moodulitega F_1 ja F_2, st., kehtib valem (10).

Eelpool toodud tuletuskäiku saab kasutada ka juhtudel kui on vaja lahutada ühte jõudu kaheks temaga paralleelseks komponendiks.

6.3 Jõupaar



Vaatleme, paralleeljõudude erijuhtu $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Nüüd on vektorite $\mathbf{R}_1$ ja $\mathbf{R}_2$ mõjusirged paralleelsed ja $\mathbf{R} = 0$. Kuna aga jõudude $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_2$ mõjusirged ei ühti siis pole vaadeldav jõusüsteem tasakaalus. Samas ei saa neid kahte jõudu asendada ühe jõuga. Järelikult on antud juhul tegu jõusüsteemi elemendiga, mida ei saa lihtsustada.

Jõupaariks nimetatakse kahest mittekollineaarsest jõust $\mathbf{F}$ ja $-\mathbf{F}$ koosnevat jõusüsteemi. Tähistatakse $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$.

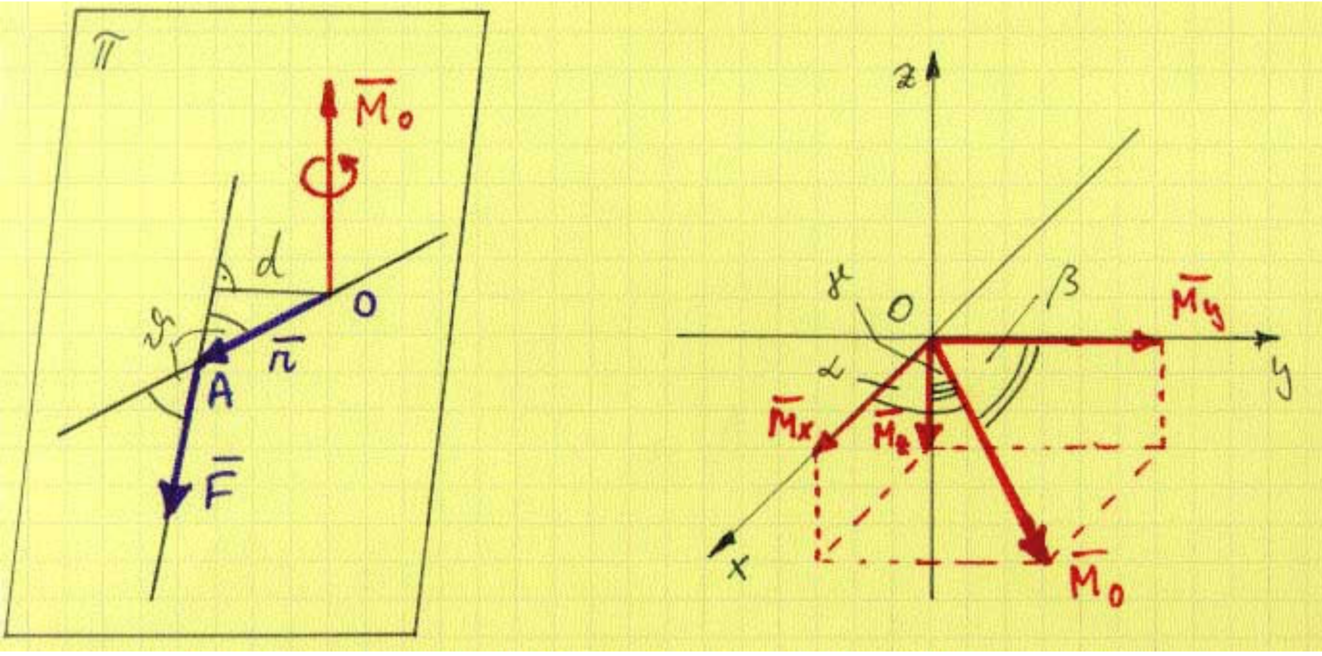
Jõupaari õlaks nimetatakse jõudude $\mathbf{F}$ ja $-\mathbf{F}$ mõjusirgete vahelist kaugust d.

Jõupaari tasandiks nimetatakse tasandit, mis on määratud jõuvektoritega $\mathbf{F}$ ja $-\mathbf{F}$.

Keha, millele mõjub vaid jõupaar hakkab pöörlema ümber jõupaari tasandiga ristuva telje. Seega, kuigi $\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0$, pole keha tasakaalus.

7 Jõu moment. Jõupaari moment

7.1 Jõu moment punkti suhtes



Joonis 22: Jõu moment punkti suhtes.

Jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti kohavektori ja jõuvektori vektorkorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \tag{11}$$

Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet. Momentvektori $\mathbf{M}_O$ suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti O valikust kuid ei sõltu punkti A valikust jõu mõjusirgel. Momentvektori $\mathbf{M}_O$ mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud $\mathbf{F}$ püüab tekitada pöörlemist. Pöörde suund määratakse kruvireegliga — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

Momentvektori projektsioonid ja momentvektori komponendid.
Kui $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ja $\mathbf{r} = (x, y, z)$, siis

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z. \tag{12}$$

Siin $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y$ ja $\mathbf{M}_z$ on momentvektori $\mathbf{M}_O$ koordinaattelgede x, y, z sihilised komponendid ning M_x, M_y ja M_z momentvektori $\mathbf{M}_O$ projektsioonid koordinaattelgedele x, y, z. On selge, et momentvektori $\mathbf{M}_O$ projektsioonid

$$M_x = yF_z - zF_y, \qquad M_y = zF_x - xF_z, \qquad M_z = xF_y - yF_x, \tag{13}$$

moodul

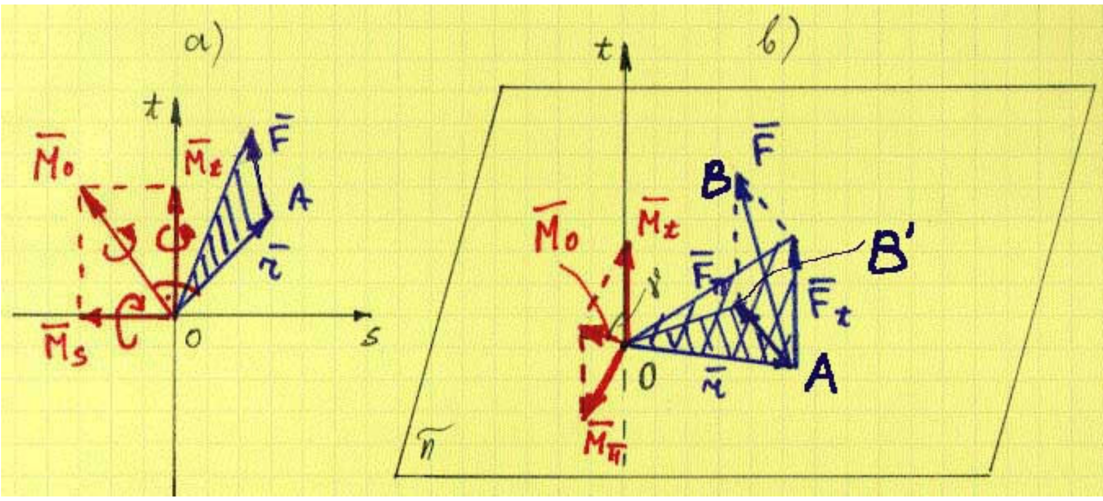
$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \tag{14}$$

ja suunakoosinused

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M_O}, \qquad \cos\beta = \frac{M_y}{M_O}, \qquad \cos\gamma = \frac{M_z}{M_O}. \tag{15}$$

Momendid $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y$ ja $\mathbf{M}_z$ iseloomustavad jõu $\mathbf{F}$ pööravat toimet telgede x, y ja z suhtes.

7.2 Jõu moment telje suhtes



Joonis 23: Jõu moment telje suhtes.

Eelmises alajaotuses käsitletud momentvektori komponente (ja projektsioone) võib leida suvaliste telgede jaoks. Näiteks $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_s$, kus momendid $\mathbf{M}_t$ ja $\mathbf{M}_s$ iseloomustavad jõu $\mathbf{F}$ pööravat toimet vastavalt telgede t ja s suhtes (joon. 23 a).

Momente $\mathbf{M}_t$ ja $\mathbf{M}_s$ (samuti $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y$ ja $\mathbf{M}_z$) nimetame jõu momentideks telgede t ja s $(x, y$ ja $z)$ suhtes.

Järgnevalt näitame, et jõu moment telje suhtes võrdub momendiga, mille annab selle jõu projektsioon vaadeldava teljega ristuval tasandil telje ja tasandi lõikepunkti suhtes.

Vaatleme jõudu $\mathbf{F}$, mis on rakendatud punkti A (joon. 23 b). Paneme läbi punkti A tasandi $\pi \perp t$ ja lahutame jõu $\mathbf{F}$ kaheks komponendiks: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_\pi$. Leiame momendi

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_\pi) = \ldots$$

Seega moment $\mathbf{M}_t(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_\pi)$,

q.e.d.

Mehaanikaülesannete lahendamise puhul on peaasjalikult vaja leida momendi projektsioone koordinaattelgedel. Üldjuhul on need projektsioonid leitavad valemist $M = \pm Fd$, kus

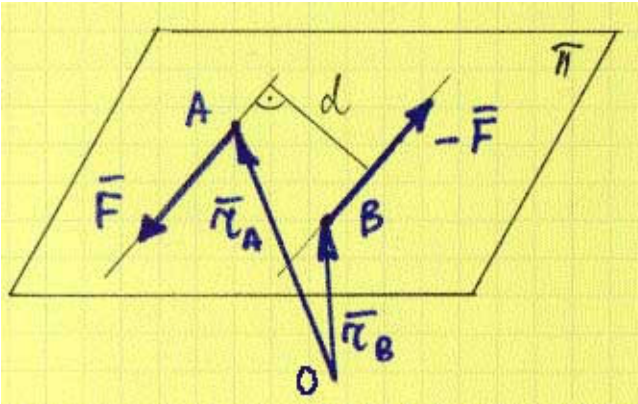
d on jõu õlg ja märk («+» või «-») määratakse kruvireegli abil. Tavaliselt lihtsustub momentvektori projektsioonide leidmine kui lahutada vaadeldav jõud $\mathbf{F}$ (koordinaat)telgede sihilisetks komponentideks. Näiteks, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$. Väga tihti vaadeldaksegi momenti telje suhtes kui skalaarset (märgiga) suurust.

Antud alajaotuse lõpetuseks näitame, et telje t mistahes punkti O suhtes leitud momendi projektsioon vaadeldaval teljel on konstantne.

Vastavalt vektorkorrutise definitsioonile on $M_0 = 2S_{\triangle_{OAB}}$, $\mathbf{M}_0 \perp \triangle_{OAB}$, $M_t = 2S_{\triangle_{OAB'}}$ ja $\mathbf{M}_t \perp S_{\triangle_{OAB'}}$ (joon. 23 b). Teiselt poolt, $M_t = M_0 \cos\gamma$ ja $S_{\triangle_{OAB'}} = S_{\triangle_{OAB}} \cos\gamma$ (sest γ on nurk vaadeldavate kolmnurkadega määratud tasandite vahel). Kui muutub punkti O asukoht vaadeldaval teljel, siis muutuvad nii nurk γ kui moment $\mathbf{M}_0$ (ning vastav $S_{\triangle_{OAB}}$). Samas jääb $S_{\triangle_{OAB'}}$ konstantseks. Järelikult jääb konstantseks ka vastav moment $\mathbf{M}_t$.

7.3 Jõupaari moment

Jõupaari moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu $\mathbf{F}$ ja $-\mathbf{F}$ millel on erinev mõjusirge.



Joonis 24: Jõupaari moment.

Jõupaari moodustavad jõuvektorid $\mathbf{F}$ ja $-\mathbf{F}$ määravad ära **jõupaari tasandi**.

Teoreem. Jõupaari moment võrdub ühe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes.

Tõestus: Leiame jõupaari momendi meelevaldse punkti O suhtes:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, -\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(-\mathbf{F}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \overline{AB} \times \mathbf{F}.$$

See on jõu $\mathbf{F}$ moment punkti B suhtes. Analoogselt näitame, et

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, -\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(-\mathbf{F}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = -(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (-\mathbf{F}) = \overline{BA} \times (-\mathbf{F}).$$

Viimane on aga jõu $-\mathbf{F}$ moment punkti A suhtes. Kokku olemegi näidanud, et jõupaari $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$ moment suvalise punkti O suhtes

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, -\mathbf{F}) = \mathbf{M}_A(-\mathbf{F}) = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}). \tag{16}$$

———————*q.e.d.*———————

Jõupaari moment on vabavektor, mis on risti jõupaari tasandiga ja teda võib lugeda rakendatuks suvalisse punkti.

Käesoleva alajaotuse lõpuks on sõnastatud kolm teoreemi, mille tõestused leiab lugeja Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi teoreetilise mehaanika õpikust.

Teoreem. Jõupaari võib tema tasandis ülekanda teise asendisse ilma, et tema mõju vaadeldavale kehale muutuks.

Teoreem. Jõupaari mõju kehale ei muutu kui see jõupaar kanda üle mistahes teise tasapinda, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

Teoreem. Jõupaarid mille momentvektorid on võrdsed on ekvivalentsed.

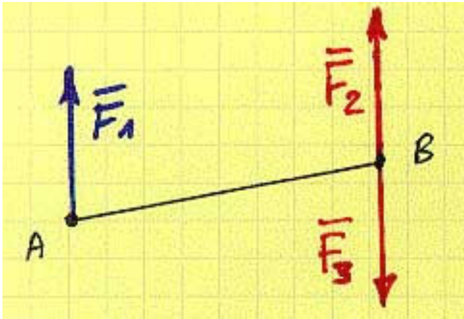
Kokku: Jõupaari mõju kehale on täielikult määratud selle jõupaari momentvektoriga.

Jõupaaride liitmine toimub nagu vektorite liitmine. Tulemuseks on samuti jõupaar.

8 Jõusüsteemi taandamine

8.1 Lemma jõu paraleellükkest

Lemma. Jäiga keha mistahes punktis A rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti B kui lisada punktis A rakendatud jõu moment punkti B suhtes.



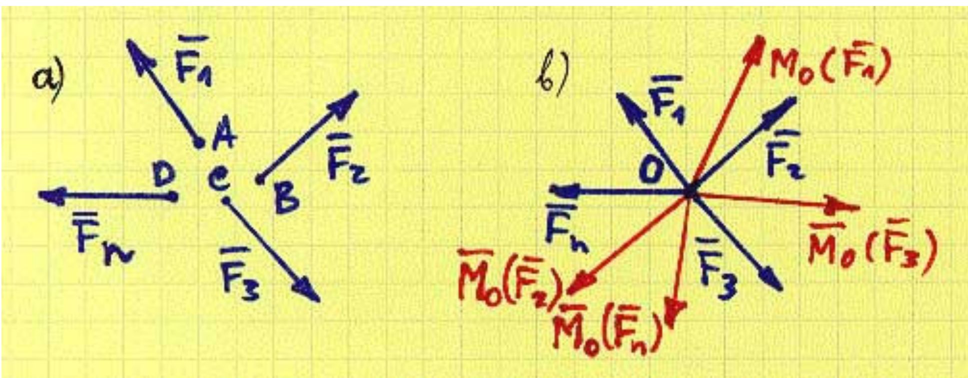
Joonis 25: Lemma jõu paraleellükkest

Tõestus: Algselt on keha punkti A rakendatud jõud $\mathbf{F}_1$ (joonis 25). Lisame punkti B tasakaalus olevad jõud $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$. Nüüd aga moodustavad jõud $\mathbf{F}_1$ ja $\mathbf{F}_3$ jõupaari, mille moment $\mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3) = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1)$. Seega oleme asendanud punktis A mõjuva jõu $\mathbf{F}_1$ punktis B mõjuva jõuga $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1$ ja momendiga $\mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1)$.

——————*q.e.d.*——————

8.2 Jõusüsteemi peavektor ja peamoment

Staatika põhiteoreem (Poinsot' teoreem): Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 26: Staatika põhiteoreem

Tõestus: Vaatleme meelevaldset jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$. Viime kõik need n jõudu paralleellükkega suvalisse ruumipunkti O. Vastavalt eelnevale lemmale tuleb igale jõule $\mathbf{F}_i$ lisada moment $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$. Tulemuseks on, et punktis O on nüüd rakendatud n jõuvektorit ja n momentvektorit ehk jõupaari momenti. Liidame need jõud ja momendid:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i, \qquad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i). \tag{17}$$

Siin ja edaspidi nimetame punkti O *taandamistsentriks*, vektorit $\mathbf{R}$ *jõusüsteemi peavektoriks* ja vektorit $\mathbf{M}_O$ *jõusüsteemi peamomendiks* taandamistsentri (punkti O) suhtes.

Kuna nii vaadeldava jõusüsteemi kui taandamistsentri valik oli meelevaldne, siis kehtib ülaltoodu iga jõusüsteemi korral.

q.e.d.

Märkus: Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab taandada ka kaheks kiiva mõjusirgega jõuks. Tõestust vaata Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi teoreetilise mehaanika õpikust.

Teoreem. Kõik jõusüsteemid, millel on sama peavektor ja sama peamoment fikseeritud taandamistsentri suhtes on ekvivalentsed.

Tõestus: Vaatleme kahte jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ ja $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \ldots, \mathbf{F}'_m$, mis mõlemad taanduvad üheks ja samaks peavektoriks $\mathbf{R}$ ja peamomendiks $\mathbf{M}_O$ taandamistsentri O suhtes.

Kuna kõik teisendused toimuvad staatika aksioomide põhjal, siis on nad pööratavad. See tähendab, et läbi peavektori $\mathbf{R}$ ja peamomendi $\mathbf{M}_O$ on võimalik teisendada jõusüsteem $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ jõusüsteemiks $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \ldots, \mathbf{F}'_m$ ja vastupidi. Kuna teisendused põhinevad staatika aksioomidel, siis on need kaks jõusüsteemi ekvivalentsed.

q.e.d.

8.3 Jõusüsteemi invariandid

Püüame leida kaks jõusüsteemi iseloomustavat suurust, mis ei sõltu taandamistsentri valikust. Teisisõnu, meie eesmärgiks on leida kaks *jõusüsteemi invarianti*.

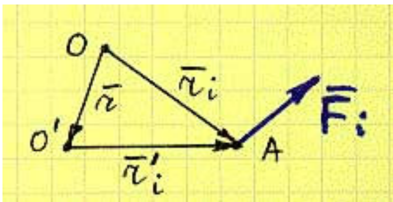
Esimeseks invariandiks on jõusüsteemi peavektor $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$. Tõepoolest, on ükskõik, kus ruumipunktis me liidame vektorid $\mathbf{F}_i$, tulemus on ikka sama.

Uurime, kuidas on lugu peamomendiga. Vaatleme kahte taandamistsentrit O ja O' (joonis 27). Vastavad peamomendid

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ ja } \mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i. \tag{18}$$

Kuna $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$, siis

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}. \tag{19}$$



Joonis 27: Punkti A kohavektorid $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$.

Seega on selge, et $\mathbf{M}_O$ pole invariant. Korrutame avaldist (19) skalaarselt peavektoriga $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} + \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}}_{=0, \text{ sest } \mathbf{r}\times\mathbf{R}\perp\mathbf{R}} .$$

Seega

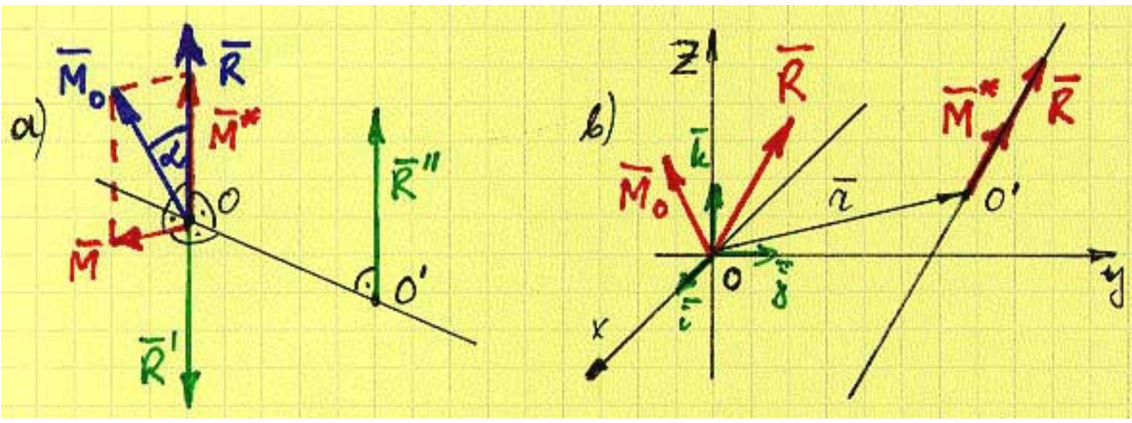
$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \tag{20}$$

ja suurus $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$ on invariantne suurus. Kuna vastavalt skalaarkorrutise definitsioonile $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = M_O R \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R})$ ja $\mathbf{R}$ on invariant, siis ka peamomendi projektsioon peavektori suunal $M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R})$ on invariant.

Kokku: Jõusüsteemi invariandid on peavektor ja peamomendi projektsioon peavektori suunal.

8.4 Jõukruvi ehk dünaam

Olgu jõusüsteem taandatud punkti O. Üldiselt pole peavektor $\mathbf{R}$ ja peamoment $\mathbf{M}_O$ paralleelsed. Seame eesmärgiks leida selline taandamistsenter O', mille puhul jõusüsteemi peavektor ja peamoment on paralleelsed (joonis 28 a).



Joonis 28: Jõukruvi ehk dünaam

Tähistame peamomendi projektsiooni peavektori suunal

$$M^* = M_O \cos\alpha = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R}. \tag{21}$$

Lahutame momendi $\mathbf{M}_O$ kaheks

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}, \tag{22}$$

kus $\mathbf{M}^*$ on invariant ja $\mathbf{M} \perp \mathbf{R}$. Seega on eesmärgiks leida taandamistsenter O', mille puhul $\mathbf{M} = 0$ ja $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}^*$. Selleks asendame kõigepealt momendi $\mathbf{M}$ jõupaariga $(\mathbf{R}', \mathbf{R}'')$, kus $R = R' = R''$. Tulemuseks on jõusüsteem $\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{M}^*$. Punkti O rakendatud tasakaalus olevad jõud $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ võib ära jätta ja momendi $\mathbf{M}^*$ kui invariandi võib rakendada punkti O'. Kuna $M = R \cdot OO'$, siis punktide O ja O' vaheline kaugus

$$OO' = \frac{M}{R}. \tag{23}$$

Kokkuvõttes oleme taandanud vaadeldava jõusüsteemi punkti O' rakendatud üheks jõuks $\mathbf{R}$ ja üheks jõupaari momendiks $\mathbf{M}^*$, mis omab jõuga $\mathbf{R}$ sama mõjusirget. Seega on jõupaari tasand risti jõusüsteemi peavektoriga $\mathbf{R}$. Tulemust nimetatakse *jõukruviks* ehk *dünaamiks*.

Nii $\mathbf{M}^*$ kui $\mathbf{R}$, rakendatuna punkti O', määravad ära sirge (nende mõjusirge). Seda sirget nimetatakse *tsentraalteljeks*. Igas selle sirge punktis taandub vaadeldav jõusüsteem dünaamiks.

Teoreem: Peamoment $\mathbf{M}^*$ on minimaalne kõikvõimalikest jõusüsteemi peamomentidest.

Tõestus: Tsentraalteljel asuva punkti O' puhul $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}^*$. Suvalise punkti O'' puhul, mis ei asu tsentraalteljel, $\mathbf{M}_{O''} = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}$, kus $\mathbf{M} = \overline{O''O'} \times \mathbf{R}$. Seega tsentraaltelje välise punkti O'' korral $\mathbf{M}_{O''} > \mathbf{M}^*$.

———————*q.e.d.*———————

Järgnevalt leiame tsentraaltelje võrrandi (joonis 28 b). Avaldise (19) põhjal $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}$. Kuna $\mathbf{M}^* \parallel \mathbf{R}$, siis $\mathbf{M}^* = p\mathbf{R}$, kus konstanti p nimetatakse jõukruvi parameetriks. Kokku seega

$$p\mathbf{R} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}. \tag{24}$$

Arvestades, et

$$\begin{cases} \mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \end{cases} \tag{25}$$

saab avaldis (24) kuju

$$\begin{aligned} p(R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}) &= (M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}) - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\ &= [M_x - (yR_z - zR_y)]\mathbf{i} + [M_y - (zR_x - xR_z)]\mathbf{j} + [M_z - (xR_y - yR_x)]\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{26}$$

Järgnevalt võrrutame vektorite $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ kordajad:

$$\begin{cases} pR_x = M_x - (yR_z - zR_y), \\ pR_y = M_y - (zR_x - xR_z), \\ pR_z = M_z - (xR_y - yR_x). \end{cases} \tag{27}$$

Viimaste põhjal saamegi *tsentraaltelje võrrandi*

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p = \frac{M^*}{R}. \qquad (28)$$

Võrrandist (28) saab tuletada kaks lineaarselt sõltumatut tasandi võrrandit. Nende tasandite lõikejoon ongi tsentraaltelg.

Kokkuvõte. Öeldakse, et jõusüsteem on taandatud lihtsaimale kujule kui algne n jõust koosnev süsteem on taandatud peavektoriks $\mathbf{R}$ ja minimaalseks peamomendiks $\mathbf{M}^*$, mis mõlemad mõjuvad tsentraaltelje sihis.

Jõusüsteemi taandamine lihtsaimele kujule toimub järgmise skeemi põhjal.

1. Jõusüsteem taandatakse suvalisse punkti O — saadakse jõusüsteemi peavektor $\mathbf{R}$ ja peamoment $\mathbf{M}_O$.
2. Leitakse vähim peamoment
$$\mathbf{M}^* = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R}$$
3. Võrrandite (28) abil määratakse tsentraaltelg.

8.5 Jõusüsteemi taandamise erijuhud

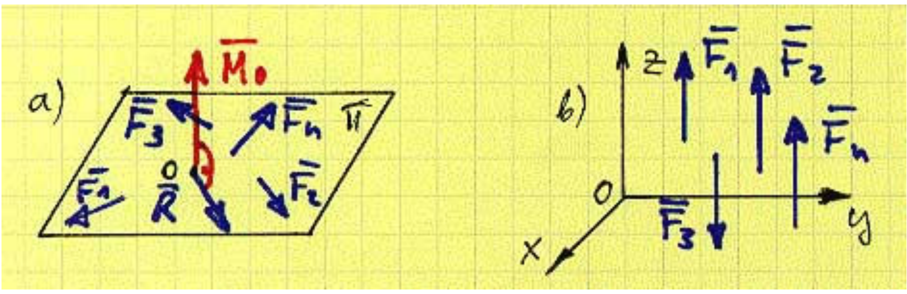
1. $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \neq 0$ (see tähendab, et $\mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{R} \neq 0$ ja $\mathbf{M}^* \neq 0$) — jõusüsteem taandub dünaamiks.
2. $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ — neli erijuhtu
   (a) $\mathbf{M}_O = \mathbf{R} = 0$ — jõusüsteem on tasakaalus
   (b) $\mathbf{M}_O = 0$, $\mathbf{R} \neq 0$ — punkti O rakendatud resultant, kusjuures $\mathbf{R}$ mõjusirge on tsentraalteljeks. Sama olukord, st. $\mathbf{M}_O = 0$, $\mathbf{R} \neq 0$, on $\mathbf{R}$ mõjusirge igas punktis.
   (c) $\mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{R} = 0$ — jõupaar, tsentraaltelg puudub ja taandamistsentri valik on vaba.
   (d) $\mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{M}^* = 0$ — resultant, mis mõjub tsentraalteljel (28).

Resultanti ja peavektorit ei tohi ära segada! *Jõusüsteemi peavektor* leidub alati ja ta on võrdne kõigi vaadeldavasse jõusüsteemi kuuluvate jõudude geomeetrilise summaga. *Jõusüsteemi resultant* on üks jõud millega võib asendada vaadeldava jõusüsteemi. Jõusüsteemil saab olla resultant vaid siis kui $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ (vt. juhud 2(b) ja2(d)).

8.6 Erikujuliste jõusüsteemide taandamine

Koonduv jõusüsteem. Taandamistsentriks tuleb valida jõudude mõjusirgete lõikepunkt ning jõusüsteem on kas (a) tasakaalus või (b) taandub resultandiks.

Tasapinnaline jõusüsteem. Antud juhul asuvad kõik jõud ühel ja samal tasandil, näiteks tasandil π (joonis 29 a). Seega ka peavektor $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ asub samal tasandil ja



Joonis 29: Tasapinnalise jõusüsteemi ja paralleeljõudude süsteemi taandamine

peamoment $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$ on risti vaadaldava tasandiga. Järelikult $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ ja jõusüsteem ei taandu dünaamiks. Seega jääb kolm võimalust (vaata eelmise alajaotuse juhtu 2):

(a) jõusüsteem on tasakaalus;

(b) jõusüsteem taandub jõupaariks;

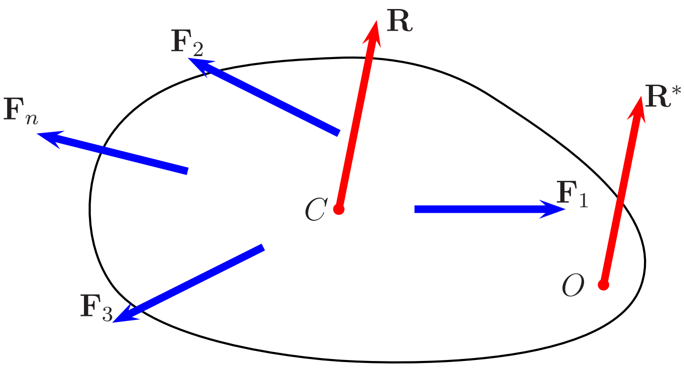
(c) jõusüsteem taandub resultandiks.

Paralleeljõudude süsteem. Siin on tasapinnalise jõusüsteemiga analoogne olukord. Olgu kõik jõud paralleelsed z teljega (joonis 29 b). Seega on ka peavektor $\mathbf{R}$ paralleelne z teljega ning peamoment $\mathbf{M}_O$ temaga risti. Järelikult skalaarkorrutis $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$, jõusüsteem ei taandu dünaamiks ja jäävad samad võimalused kui tasapinnalise jõusüsteemi puhul.

8.7 Varignon'i teoreem

Teoreem. Kui jõusüsteem taandub resultandiks, siis resultandi moment mingi fikseeritud punkti suhtes võrdub kõigi vaadeldava jõusüsteemi jõudude sama punkti suhtes leitud momentide geomeetrilise summaga.

Tõestus: Vaatleme jõusüsteemi $\mathbf{F}_1, \ldots \mathbf{F}_n$, mis taandub punktis C rakendatud resultandiks $\mathbf{R}$. Kui viime $\mathbf{R}$ paralleellükkega punkti O ($\mathbf{R}^*$ joonisel 30), siis peame lisama momendi $\mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \overline{OC} \times \mathbf{R}$. Teisest küljest, kui taandame vaadeldava jõusüsteemi punkti O, siis saame peavektori $\mathbf{R}$ ja peamomendi $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$. Kuna kõik kolm jõusüsteemi, 1) $\mathbf{R}$ punktis C, 2) $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ punktis O ja 3) $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$



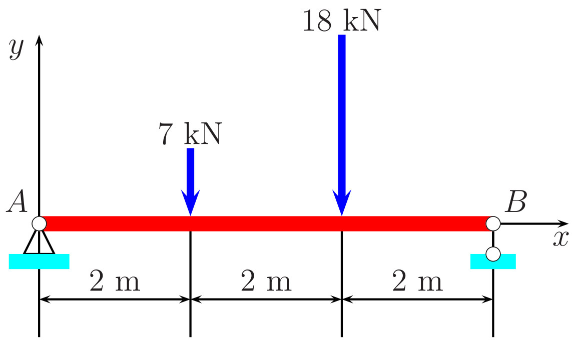
Joonis 30: Varignon'i teoreem

punktis O, on ekvivalentsed esialgse süsteemiga $\mathbf{F}_1, \ldots \mathbf{F}_n$, siis peavad neil olema ka samad peamomendid punkti O suhtes, seed tähendab

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i). \tag{29}$$

q.e.d.

Rakendamise näide. Vaatelme tala, millele on rakendatud kaks parallelest jõudu joonisel 31 näidatud viisil. Leida nende kahe paralleeljõu resultandi rakenduspunkti x koordinaat.



Joonis 31: Varignon'i teoreemi rakendamine.

Varignon'i teoreemi põhjal $M_A(R) = -Rx = -2 \cdot 7 - 4 \cdot 18$. Kust $x = 86/25 \approx 3,44m$.

On selge, et paralleelsete jõudude liitmiseks tuletatud valemeid on tunduvalt tülikam kasutada kui Varignon'i teoreemi.

9 Jõusüsteemi tasakaal

9.1 Jõusüsteemi tasakaalu tingimused

Jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis kui peavektor $\mathbf{R}$ ja mingi punkti O suhtes leitud peamoment $\mathbf{M}_O$ on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{30}$$

Analüütiliste tasakaalutingimuste leidmiseks tuleb (vektoriaalsed) tasakaalutingimused (30) projekteerida kolmele koordinaatteljele (näiteks DRK):

Analüütiliste tasakaalutingimuste leidmiseks tuleb nii jõusüsteemi peavektor kui peamoment projekteerida kolmele koordinaatteljele:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Tasakaalus olev keha ei pea ilmtingimata paigal seisma — ta võib liikuda ühtlaselt ja sirgjooneliselt (inertsiaalselt).

Tasapinnaline jõusüsteem. Valime z telje nii, et kõik jõud asuvad $x - y$ tasapinnas. Sellisel juhul on osa tingimustest (31) automaatselt täidetud ja järele jääb kolm võrrandit

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = 0, \tag{32}$$

mis esitavad tasapinnalise jõusüsteemi tasakaalu tarvilikud ja piisavad tingimused. Tasapinnaline jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis kui

(i) kõigi jõudude projektsioonide summad koordinaattelgedel on võrdsed nulliga ja

(ii) kõigi jõudude momentide summa mingi punkti suhtes võrdub nulliga.

Tasakaaluvõrrandite (32) asemel võib kasutada ka järgmisi võrrandeid

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \tag{33}$$

või

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0 \tag{34}$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Cz}(\mathbf{F}_i) = 0, \tag{35}$$

kus punktid A, B ja C ei asetse samal sirgel. M_{Az}, M_{Bz} ja M_{Cz} tähistavad siin punktide A, B ja C suhtes leitud momentide projektsioone z teljel. Ülesannete lahendamise puhul tähistatakse neid tavaliselt M_A, M_B ja M_C ja öeldakse, et tegu on vastavalt momentidega punktide A, B ja C suhtes. Momentide märkide määramisel tuleb aga lähtuda kruvireeglist ja eeldada, et pööre toimub ümber z telje.

Tõestus. *1) Tarvilikkus.* Tingimuste (33)–(35) tarvilikkus on ilmselge — kui vaadeldav jõusüsteem on tasakaalus, siis on vaadeldavad tingimused täidetud.

2) Piisavus. Oletame vastuväiteliselt, et tingimused (33) on täidetud, kuid jõusüsteem pole tasakaalus ja taandub resultandiks $\mathbf{R}$, mille mõjusirge läbib punkte A ja B. Kuna x telje valik on vaba, siis valime ta mitte risti resultandi $\mathbf{R}$ mõjusirgega. Sellisel juhul aga $R_x = \sum_i F_{ix} \neq 0$, mis on vastuolus eeldusega, et tingimused (33) on täidetud. Seega ei saa selline jõusüsteem taanduda resultandiks ja peab olema tasakaalus.

Valemite (34) puhul on piisavuse tõestus analoogne eelnenuga — nüüd on vaid x telje asemel vaatluse all y telg.

Valemite (35) piisavuse tõestamise puhul oletame jällegi vastuväiteliselt, et (35) on täidetud, kuid jõusüsteem pole tasakaalus ja taandub resultandiks $\mathbf{R}$. $\mathbf{R} \neq 0$ puhul saab aga (35) olla täidetud vaid juhul kui punktid A, B ja C asuvad $\mathbf{R}$ mõjusirgel. See on aga vastuolus eeldusega, et A, B ja C ei asu ühel sirgel. Seega peab $\mathbf{R} = 0$ ja jõusüseteem seega olema tasakaalus.

—————*q.e.d.*—————

Paralleeljõudude süsteem. Valime z telje $\|\mathbf{F}_i$. Sel juhul on analüütilised tasakaalu tingimused (31) esitatavad kujul

$$\sum_i F_{iz} = 0, \quad \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, \tag{36}$$

sest ülejäänud kolm tingimust on automaatselt täidetud.

Tsasapinnalise paralleeljõudude süsteemi puhul väheneb võrrandite arv veel ühe võrra. Näiteks kui kõik jõud asuvad $x - y$ tasapinnas ja nende mõjusirged on paralleelsed y teljega, siis saame analüütilised tasakaalutingimused esitada kujul

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0 \tag{37}$$

või

$$\sum_i M_{Az}(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_{Bz}(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{38}$$

9.2 Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded

Kui on võimalik koostada nii sama palju tasakaaluvõrrandeid kui palju on tundmatuid toereaktsioone, siis on tegu *staatiliselt määratud ülesandega.* Vastupidisel juhul on tegu *staatiliselt määramata ülesandega.*

Märkus. Mitmetes õpikutes kasutatakse antud kontekstis ka termineid *staatikaga määratud ülesanded* ja *staatikaga määramata ülesanded.*

Mittevajalikud sidemed

Kõlbmatud sidemed

Osaliselt seotud kehad, ebastabiilsus

Sisukord