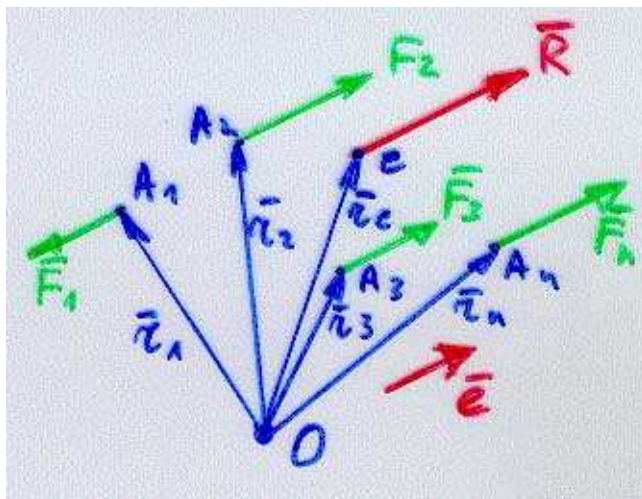


10 Raskuskese

10.1 Paralleeljõudude kese

Vaatleme jõusüsteemi, mis koosneb n paralleelsest jõust $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ rakenduspunktidega A_1, \dots, A_n . Teame, et selline jõusüsteem taandub resultandiks. Toome sisse ühikvektori



Joonis 32: Paralleeljõudude kese

$\mathbf{e} \parallel \mathbf{F}_i$. Nüüd $\mathbf{F}_i = \pm F_i \mathbf{e}$ ja resultant $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \sum \pm F_i \mathbf{e}$.

Kui nüüd pöörata kõiki jõudusid \mathbf{F}_i ühe ja sama nurga α võrra, siis ka \mathbf{R} pöörduv sama nurga α võrra. Järgnevalt näitame, et erinevatele nurkadele α vastavate resultantide mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis C , mida nimetatakse *paralleeljõudude keskmeks*. Tähistame punktide A_i kohavektorid \mathbf{r}_i ja rakendame Varignon'i teoreemi —

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} &= \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ ehk} \\ \mathbf{r}_C \times \sum (\pm F_i) \mathbf{e} &= \sum \mathbf{r}_i \times (\pm F_i) \mathbf{e} \text{ ehk} \\ \left[\sum (\pm F_i) \right] \mathbf{r}_C \times \mathbf{e} &= \left[\sum (\pm F_i \mathbf{r}_i) \right] \times \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (39)$$

Kui nüüd pöörata vektoreid \mathbf{e} ja tahta, et valem (39) kehtiks iga \mathbf{e} puhul, siis peavad nii vasakul kui paremal pool võrdusmärgi olema ka esimesed tegurid võrdsed, see tähendab $[\sum (\pm F_i)] \mathbf{r}_C = [\sum (\pm F_i \mathbf{r}_i)]$ ehk

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum \pm F_i \mathbf{r}_i}{\sum \pm F_i}. \quad (40)$$

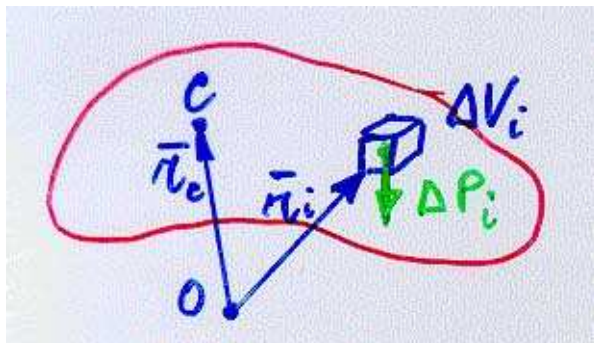
Kui projekteerida viimane avaldis koordinaattelgedele saame

$$x_C = \frac{\sum \pm F_i x_i}{\sum \pm F_i}, \quad y_C = \frac{\sum \pm F_i y_i}{\sum \pm F_i}, \quad z_C = \frac{\sum \pm F_i z_i}{\sum \pm F_i}. \quad (41)$$

Saadud punkti C ongi *paralleeljõudude kese*.

10.2 Raskuskese

Jäiga keha raskuskeskme leidmiseks rakendame eelmises punktis saadud valemeid. Eeldame, et keha on homogeenne, st. $\rho = \text{const.}$. Tähistame elementaarruumala ΔV . Elementaarruumalale ΔV_i mõjub raskusjõud $\Delta \mathbf{P}_i = \rho \mathbf{g} \Delta V_i$.



Joonis 33: Keha raskuskese

Raskusjõud $\Delta \mathbf{P}_i$ moodustavad paralleeljõudude süsteemi, mille kese

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum \mathbf{r}_i \Delta P_i}{\sum \Delta P_i} = \dots = \frac{\sum \mathbf{r}_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}. \quad (42)$$

Kui minna piirile $\Delta V_i \rightarrow 0$, siis saame

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \quad (43)$$

Kui projekteerime saadud tulemuse koordinaattelgedele, saame

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (44)$$

Sümmeetriateoreemid.

1. Kui kehal leidub sümmeetriatasand, siis raskuskese asub sellel tasandil.

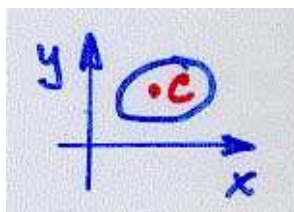
Tõestus. Olgu x - y -tasand keha sümmeetriatasandiks. Järelikult vastab igale suurusele $z dV$ suurus $-z dV$ ja $\int_V z dV = 0$ ning valemite (44) põhjal $z_C = 0$, see tähendab raskuskese asub x - y -tasandil.

————— *q. e. d.* —————

2. Kui kehal leidub sümmeetriatelg, siis raskuskese asub sellel teljel.

Tõestus. Olgu z -telg keha sümmeetriateljeks. Seega vastavad igale suurusele $x dV$ ja $y dV$ suurused $-x dV$ ja $-y dV$. Seega $\int_V x dV = 0$ ja $\int_V y dV = 0$ ning valemite (44) põhjal $x_C = y_C = 0$ s.t., raskuskese asub z -teljel.

————— *q. e. d.* —————



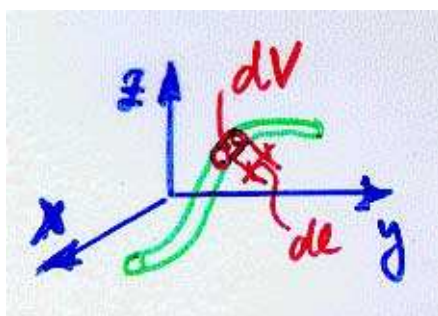
Joonis 34: Tasapinnalise kujundi raskuskese

Tasapinnalise kujundi raskuskese (pinnakese). Vaatleme konstantse paksusega tasapinnalist kujundit, mille paksus h on konstantne ja x - y -tasand on sümmeetriatasand. Nüüd $V = Ah$ ja $dV = dAh$ (A kujundi pindala) ja valemid (44) saavad kuju

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad y_C = \frac{\int_A y dA}{A}. \quad (45)$$

Saadud punkti C nimetatakse tihti ka pinnakeskmeks (eeldades, et $h \rightarrow 0$).

Joone (kaare, kõvera) raskuskese. Vaatleme ühtlase (konstantse) ristlõikega traadist kõverat. Nüüd $V = Al$ ja $dV = Adl$ (A traadi ristlõike pindala, l traadi pikkus) ja valemid



Joonis 35: Joone raskuskese

(44) saab esitada kujul

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int_l z dl}{l}. \quad (46)$$

Siin $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Kui $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ siis saame viimasest avaldisest $dl = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$.

10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod

Sageli õnnestub jagada vaadeldav keha lihtsateks osakujundeiks, mille raskuskeskme koordinaadid on teada. Vaatleme algul homogeeniseid kehi. Kui tähistada i -nda osakujundi ruumala V_i ja raskuskeskme koordinaati $(x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$, siis saab 3D keha raskuskeskme määrata valemeist

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} V_i}{\sum V_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} V_i}{\sum V_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} V_i}{\sum V_i}. \quad (47)$$

Seda nimetatakse *tükeldusmeetodiks*.

Tasapinnalise kujundi puhul kasutatakse valemuid

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} A_i}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} A_i}{\sum A_i}, \quad z_C = 0 \quad (48)$$

ja kaare puhul

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} l_i}{\sum l_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} l_i}{\sum l_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} l_i}{\sum l_i}. \quad (49)$$

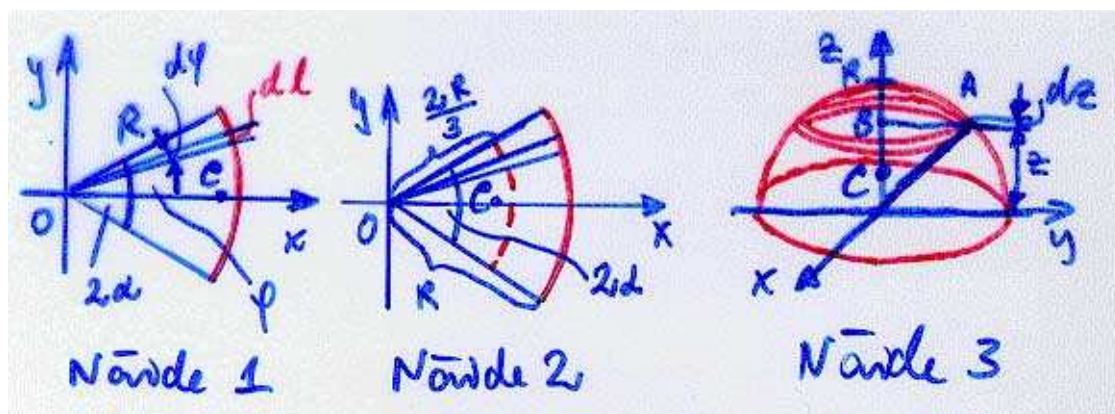
Kui kehal esineb väljalõikeid, siis valemis (47)–(49) loetakse väljalõigete ruumalad, pindalad või pikkused negatiivseteks. Seda nimetatakse *täiendusmeetodiks*. Nimetatud meetodite samaaegsel rakendamisel on aga tegu *tükeldus- ja täiendusmeetodiga*.

Mittemhomogeensed kehad. Valemid (42)–(49) kehtivad homogeensete kehade jaoks. Kui vaadeldav keha koosneb aga erinevast materjalist osakujundeist, siis tuleb tükeldus- ja täiendusmeetodi puhul seda arvesse võtta, st. valemis (47)–(49) tuleb ruumalade, pindalade ja pikkuste asemel kasutada kas masse või kaale. Näiteks valemid (47) saavad kuju

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} m_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} m_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum z_{C_i} m_i}{\sum m_i}. \quad (50)$$

10.4 Näited

1. Leida ringjoone kaare raskuskeskme koordinaat, kui ringjoone raadius on R , vastav kesknurk 2α , ringjoone keskpunkt asub koordinaatide alguses ja x -telg on sümmeetriateljeks.



Joonis 36: Raskuskeskme leidmise näited.

Lahendus. Kuna x -telg on sümmeetriateljeks, siis $y_C = 0$ ja vastavalt valemile (46)

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}. \quad (51)$$

Toome sisse polaarkoordinaadid r ja φ . Nüüd $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$ ja $l = 2\alpha R$ ning

$$x_C = \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi = \dots \dots = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (52)$$

2. Leida ringi sektori ja poolringi raskuskeskme koordinaat, kui ringi raadius on R , vastav kesknurk 2α , ringi keskpunkt asub koordinaatide alguses ja x -telg on sümmeetriateljeks.

Lahendus. Jaotame vaadeldava sektori elementaarsektoriteks kesknurgaga $d\varphi$. Piiril $d\varphi \rightarrow 0$ on need sektorid lähendatavad kolmnurkadega. Selliste kolmnurkade raskuskeskmed asuvad ringi keskpunktist kaugusel $2R/3$. Rakendades eelmises näites tuletatud valemit ja võttes raadiuse võrdseks $2R/3$, saame nüüd

$$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (53)$$

Sümmeetria tõttu $y_C = 0$. Poolringi puhul $\alpha = 0.5\pi$ ja $x_C = \frac{4R}{3\pi}$.

3. Leida poolkera raskuskeskme koordinaat, kui kera raadius on R , kera keskpunkt asub koordinaatide alguses ja z -telg on sümmeetriateljeks.

Lahendus. Sümmeetria tõttu $x_C = y_C = 0$ ja valemist (44)

$$z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (54)$$

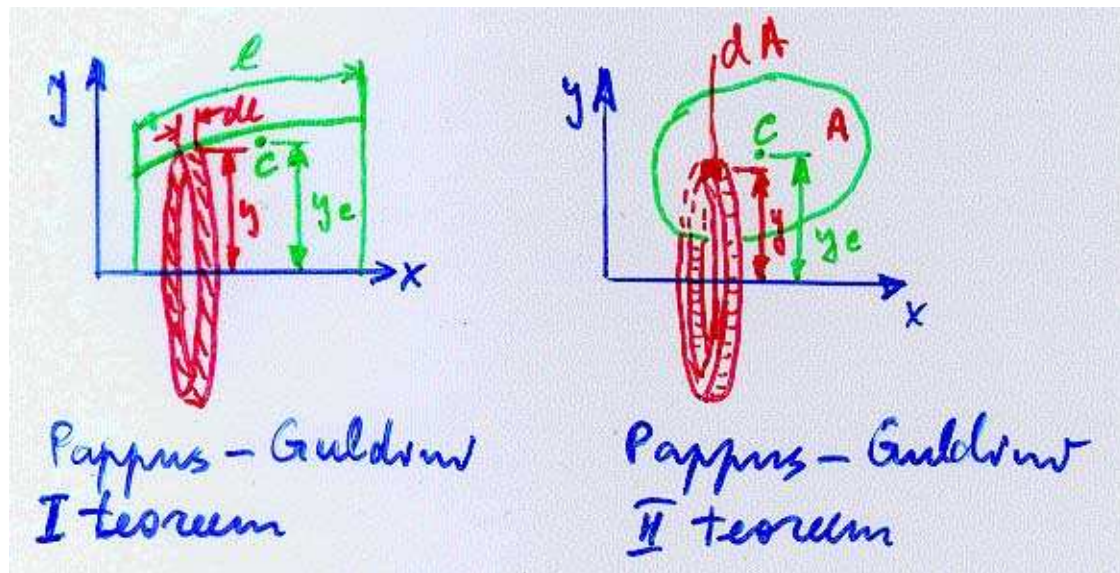
Elementaarruumalaks dV valime horisontaalse ketta, mille paksus on dz ja mis asub x - y -tasapinnast kaugusel z . Nüüd

$$dV = \pi(R^2 - z^2) dz \quad (55)$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_0^R z \pi(R^2 - z^2) dz = \dots \dots = \frac{3R}{8} \quad (56)$$

10.5 Pappus-Guldini teoreemid

Pappus-Guldini I teoreem: Pöördpinna pindala on võrdne teda genereerinud kõvera kaarepikkuse ja selle kõvera raskuskeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.



Joonis 37: Pappus-Guldini teoreemid

Tõestus: Vaatleme pöördpinda, mille teljeks on x -telg ja mille on genereerinud kõver pikkusega l (joonis 37). Kõvera elemendi dl poolt genereeritud pöördpinna pindala on $2\pi y dl$ ja kogu pöördpinna pindala

$$A = 2\pi \int_l y dl. \quad (57)$$

Kuna vastavalt valemitele (46) on joone raskuskeskme y koordinaat

$$y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad (58)$$

siis

$$A = 2\pi y_C l. \quad \text{—————} q.e.d. \text{—————} \quad (59)$$

Pappus-Guldini II teoreem: Pöördkeha ruumala on võrdne teda genereerinud pinna pindala ja selle pinna raskuskeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.

Tõestus: Vaatleme pöördkeha, mille teljeks on x -telg ja mille on genereerinud tasapinnaline kujund pindalaga A (joonis 37). Elementaarpinna dA poolt genereeritud elementaarrõnga ruumala on $2\pi y dA$ ja kogu pöördkeha ruumala

$$V = 2\pi \int_A y dA. \quad (60)$$

Kuna vastavalt valemitele (45) on pinna raskuskeskme y koordinaat

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A}, \quad (61)$$

siis

$$V = 2\pi y_C A. \quad \text{—————} q.e.d. \text{—————} \quad (62)$$

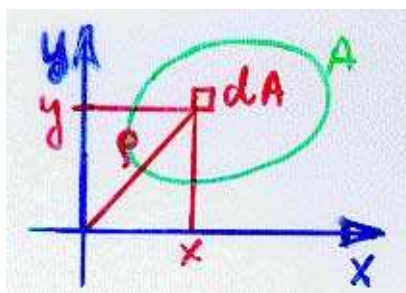
11 Pinnamomendid

11.1 Sissejuhatus

Vaatleme tasapinnalist kujundit (joonis 38). Integraali

$$\int_A x^m y^n dA \quad (63)$$

nimetatakse *tasapinnalise kujundi* $m+n$ *astme pinnamomendiks*. Sõltuvalt summa $m+n$



Joonis 38: Tasapinnalise kujundi pinnamomendid.

väärtusest eristatakse 0-astme, 1. astme, 2. astme jne. pinnamomente. 0-astme pinnamoment kujutab endast kujundi pindala, 1. astme pinnamomente nimetatakse sageli staatilisteks momentideks ja 2. astme pinnamomente inertsimomentideks. Kõrgemat järku pinnamomente kasutatakse väga harva ja neid me ei käsitle.

11.2 Staatilised momendid

Tasapinnalise kujundi (joonis 38) *staatilised momendid* x - ja y -telje suhtes on defineeritud järgmiselt:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (64)$$

Staatilise momendi dimensioon: $\dim S = m^3$.

Arvestades valemit (64), saame anda tasapinnalise kujundi raskuskeskmee valemeile (45) kuju

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad \text{ja} \quad y_c = \frac{S_x}{A}, \quad (65)$$

kust

$$S_y = x_c A \quad \text{ja} \quad S_x = y_c A. \quad (66)$$

Viimaste valemite abil on mugav leida lihtsate geomeetriliste kujundite staatilisi momente. Kui vaadeldavat kujundit on võimalik jagada osakujundeiks, nii et $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, siis

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA + \dots + \int_{A_n} y dA = \\ \quad = S_x^{(1)} + \dots + S_x^{(n)} = y_{C_1} A_1 + \dots + y_{C_n} A_n, \\ S_y = \int_A x dA = \int_{A_1} x dA + \dots + \int_{A_n} x dA = \\ \quad = S_y^{(1)} + \dots + S_y^{(n)} = x_{C_1} A_1 + \dots + x_{C_n} A_n. \end{array} \right. \quad (67)$$

Nagu raskuskeskme leidmise puhul, nii ka siin, tuleb väljalõigetele vastavad pindalad ja/või staatilised momendid lugeda negatiivseks.

Keskteljed. Valemite (64) ja (66) põhjal on selge, et staatilised momendid võivad olla nii positiivsed, negatiivsed kui nullid. Mehaanikas omavad sageli suurt tähtsust teljed, mis läbivad pinnakeset (või raskuskeset). Neid telgi nimetatakse *kesktelgedeks*. Valemeist (66) järeldub, et kui x ja y on keskteljed, siis $S_x = S_y = 0$, sest $x_C = y_C = 0$.

Staatilise momendi mõistet saab üldistada ka tasapinnalise kõvera ja 3D keha jaoks, vastavalt

$$S_x = \int_l y dl, \quad S_y = \int_l x dl$$

ja

$$S_{xy} = \int_V z dV, \quad S_{xz} = \int_V y dV, \quad S_{yz} = \int_V x dV.$$

11.3 Inertsimomendid

Tasapinnalise kujundi (joonis 38) *inertsimomendid* x - ja y -telje suhtes on defineeritud järgmiselt:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (69)$$

Inertsimomendi dimensioon: $\dim I = m^4$.

Peale nn. telginertsimomentide (69) on laialdaselt kasutatavad ka *tseentrifugaalinertsimoment* (lühidalt tseentrifugaalmoment)

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (70)$$

ja *polaarinertsimoment*

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (71)$$

Kuna $\rho^2 = x^2 + y^2$, siis

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y. \quad (72)$$

Inertsimomendid I_x, I_y ja I_ρ on alati positiivsed, inertsimoment I_{xy} võib olla nii positiivne kui negatiivne.

Liitkujundi inertsimomentide leidmine toimub samuti, kui staatiliste momentide puhul —

$$I = I^{(1)} + \dots + I^{(n)}, \quad (73)$$

kusjuures väljalõigetele vastavad inertsimomendid loetakse negatiivseteks.

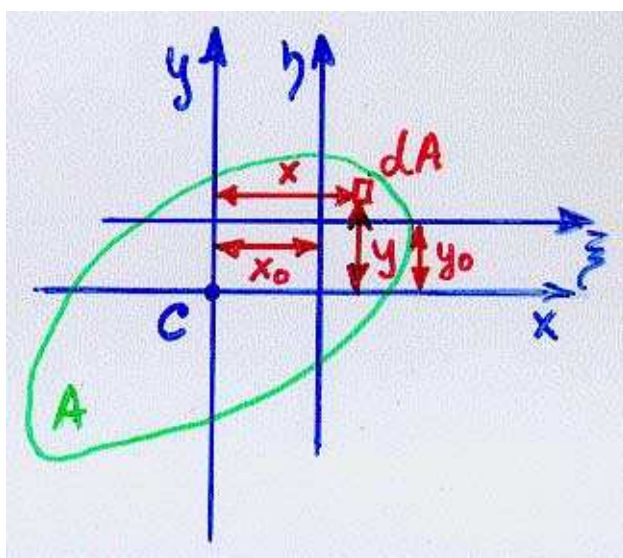
Inertsiraadius. Suurus

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_\rho = \sqrt{\frac{I_\rho}{A}} \quad (74)$$

nimetatakse kujundi *inertsiraadiusteks*. Seega esitab inertsiraadius pinnaelementide ruutkeskmist kaugust vastavast teljest (i_x ja i_y puhul) või koordinaatide algusest (i_ρ puhul). Teisisõnu, kui kogu vaadeldav pind oleks jaotatud kitsa ribana inertsiraadiuse kaugusele vastavast teljest või koordinaatide algusest, siis $I_x = i_x^2 A$, $I_y = i_y^2 A$ ja $I_\rho = i_\rho^2 A$.

11.4 Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes

Vaatleme tasapinnalist kujundit pindalaga A . Kujundi pinnakese asugu punktis C ja x - y -teljed on keskteljed (joonis 39). Eeldame, et inertsimomendid I_x , I_y ja I_{xy} on teada. Leiame inertsimomendid x - y -telgedega paralleelsete telgede $\xi = x - x_o$ ja $\eta = y - y_o$ suhtes.



Joonis 39: Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes.

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y - y_o)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2y_o \int_A y dA + \int_A y_o^2 dA = \dots$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = \dots$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \dots$$

Seega

$$\begin{cases} I_\xi = I_x + y_o^2 A, \\ I_\eta = I_y + x_o^2 A, \\ I_{\xi\eta} = I_{xy} + x_o y_o A. \end{cases} \quad (75)$$

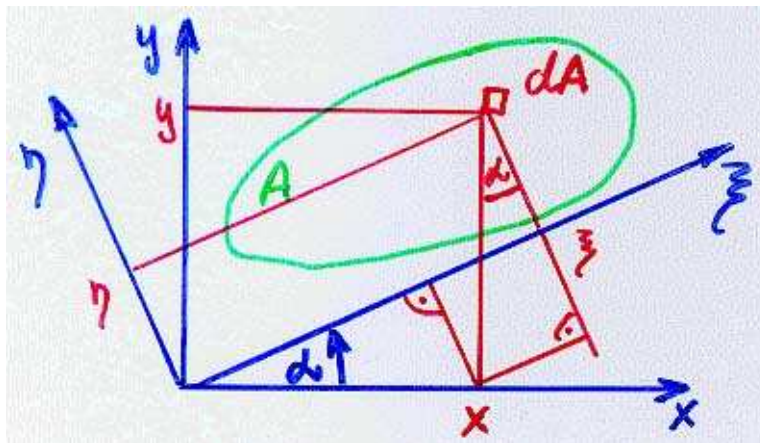
Neis valemeis nimetatakse esimest liidetavat *omainertsimomendiks* ja teist *lökkemomendiks*. Viimased valemid võib üldistatult kokku võtta kujul

$$I_{kp} = I_k + e^2 A, \quad (76)$$

kus k tähistab kesktelge, kp keskteljega paralleelset telge, ja e vaadeldavate telgede vahelist kaugust.

11.5 Inertsimomendid pööratud telgede suhtes

Vaatleme tasapinnalist kujundit pindalaga A . Eeldame, et inertsimomendid I_x, I_y ja I_{xy} on teada. Leiame inertsimomendid telgede ξ - η suhtes, mis omavad telgedega x - y ühist alguspunkti kuid on viimaste suhtes pööratud nurga α võrra (joonis 40).



Joonis 40: Inertsimomendid pööratud telgede suhtes.

Kuna

$$\begin{cases} \xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ \eta = y \cos \alpha - x \sin \alpha, \end{cases} \quad (77)$$

siis

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yx dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA = \dots$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = \dots$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \dots$$

Seega

$$\begin{cases} I_\xi = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_\eta = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{\xi\eta} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (78)$$

Kui tuua sisse abisuurused

$$\begin{cases} I_o = \frac{I_x + I_y}{2}; & I_* = \frac{I_x - I_y}{2}, \\ D_o = \sqrt{I_*^2 + I_{xy}^2}, & \alpha_1 = \arctan \frac{I_* - D_o}{I_{xy}} = \arctan \frac{I_x - I_1}{I_{xy}}, \end{cases} \quad (79)$$

mida kasutame ka järgmises alajaotuses, siis saame anda valemitele (78) kuju

$$\begin{cases} I_\xi = I_o + D_o \cos 2(\alpha - \alpha_1), \\ I_\eta = I_o - D_o \cos 2(\alpha - \alpha_1), \\ I_{\xi\eta} = D_o \sin 2(\alpha - \alpha_1). \end{cases} \quad (80)$$

Valemeist (80) või (78) järeldub, et

$$I_\xi + I_\eta = I_x + I_y = 2I_o, \quad (81)$$

see tähendab I_o on telgede pööramise suhtes invariantne suurus. Telgede pööramise suhtes invariantseks osutub ka suurus D_o . Seega omavad D_o ja I_o suvalise ristteljestiku puhul üht ja sama väärtust.

11.6 Peateljed ja peainertsimomendid

Valemite (80) ja (78) põhjal on selge, et α muutudes muutuvad ka inertsimomentide I_ξ , I_η ja $I_{\xi\eta}$ väärtused ning et kui $\alpha = \alpha_1$, siis omab I_ξ maksimaalset väärtust, I_η minimaalset väärtust ja $I_{\xi\eta} = 0$.

Teljepaari, mille puhul telginertsimomendid I_ξ ja I_η omavad ekstremaalseid väärtusi ning tsentrifugaalinertsimoment $I_{\xi\eta} = 0$, nimetatakse *peatelgedeks*. Vastavaid telginertsimomente nimetatakse *peainertsimomentideks*.

Tavaliselt tähistatakse $I_1 = \max I$ ja $I_2 = \min I$. Vastavaid peatelgi tähistatakse numbritega 1 ja 2. Peatelgede tunnus on $I_{\xi\eta} = 0$. *Keskpeateljed* on peateljed, mis läbivad pinnakeset.

Keskpeatelgede ja peainertsimomentide leidmine. Praktikaspakuvad huvi eeskätt keskpeateljed ja neile vastavad peainertsimomendid. Seetõttu vaatlemegi allpool eeskätt nende leidmist.

Sümmeetriline kujund. Olgu x -telg sümmeetriateljeks. Sel juhul leiduvad muutuja x iga väärtuse jaoks suurused $xydA$ ja $-xydA$. Järelikult, $I_{xy} = \int_A xydA = 0$ ja *peatelgedeks* on sümmeetriatelg ning iga temaga ristuv telg. *Keskpeatelgedeks* on aga sümmeetriatelg ja temaga ristuv pinnakeset läbiv telg.

Kui kujundil on rohkem kui 2 mitteristuvat sümmeetriatelge (näiteks ruut, ring või võrdkülgne kolmnurk), siis on inertsimomendid kõigi keskelgede suhtes võrdsed ja kõik keskeljed on keskpeateljed. Olgu teljed $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ kujundi mitteristuvad sümmeetriateljed ja $\eta_i, i = 1, 2, \dots$ nendega vastavalt ristuvad keskeljed. Tähistame nurga, mille moodustab ξ_i - η_i -teljestik x - y -tejestikuga, α_i^s . Sümmeetrilise kujundi tsentrifugaalinertsimomendid $I_{\xi_i\eta_i} = 0$. Valemi (80)₃ põhjal peab seega $D_o \sin 2(\alpha - \alpha_1) = 0$ iga $\alpha = \alpha_i^s$ puhul. See on aga võimalik vaid siis, kui $D_o = 0$. Viimasest järeldub omakorda, et $I_\xi = I_\eta = I_o$ suvalise nurga α puhul. Seega võib antud juhul tõesti valida keskpeateljeks suvalise keskelje, omavahel ristuvaks keskpeatelje paariks aga suvalise ristuva keskelje paari.

Mittesümmeetriline kujund. 1) Määratakse pinnakeskme koordinaadid mingis sobivas teljestikus ξ - η . 2) Tuuakse sisse keskeljed x - y , leitakse inertsimomendid I_x , I_y ja I_{xy} ning abisuurused I_o , I_* , D_o ja α_1 . 3) Pöörates keskelgi x - y nurga α_1 võrra saadakse keskpeateljed 1 ja 2. 4) Leitakse (kesk)peainertsimomendid kasutades valemit

$$I_p = I_o \pm D_o, \quad p = 1, 2. \quad (82)$$

11.7 Massiinertsimomendid

Dünaamika- ja füüsikakursustes on samuti kasutusel inertsimomendid. Erinevus on vaid selles, et dünaamikas on üldjuhul uurimisobjektiks kolmemõõtmelised kehad, elementaarpinna asemel vaadeldekse elementaarmasse ja integreeritakse samuti üle massi. Kui on vaja neil kahel suurusel vahet teha, siis nimetatakse massiga seotud inertsimomente massiinertsimomentideks ja pinnaga seotuid pinnainertsimomentideks või teist järku pinnamomentideks.

Kui tähistada elementaarmassi dm kaugust x -teljest r_x , y -teljest r_y , z -teljest r_z ja koordinaatide algusest ρ , siis on telg- ja polaarinertsimomendid defineeritud järgmiselt:

$$\begin{cases} I_x = \int_m r_x^2 dm = \int_m (y^2 + z^2) dm, \\ I_y = \int_m r_y^2 dm = \int_m (x^2 + z^2) dm, \\ I_z = \int_m r_z^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm, \\ I_\rho = \int_m \rho^2 dm = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm. \end{cases} \quad (83)$$

Inertsiraadius, inertsimomendid paralleelsete telgede, inertsimomendid pööratud telgede suhtes ja liitkeha inertsimomendid on massiinertsimomentide korral leitavad pinnainertsimomentidega analoogselt.

11.8 Näide

Leida joonisel 41 kujutatud viirutatud kujundi keskpeateljed ja keskpeainertsimomendid. Kõik mõõtmised on antud sentimeetrites.

Lahendus. Kuna tegu on mittesümmeetrilise kujundiga, siis toimub peainertsimomentide leidmine vastavalt leheküljel 47 esitatud skeemile. Vaadeldav liitkujund koosneb kolmest osakujundist: ristkülikust (1), kolmnurgast (2) ja poolringist (3).

1. Pinnakeskme leidmiseks kasutame joonisel esitatud koordinaate ξ ja η . Leiame osakujundite pinnakeskmete koordinaadid

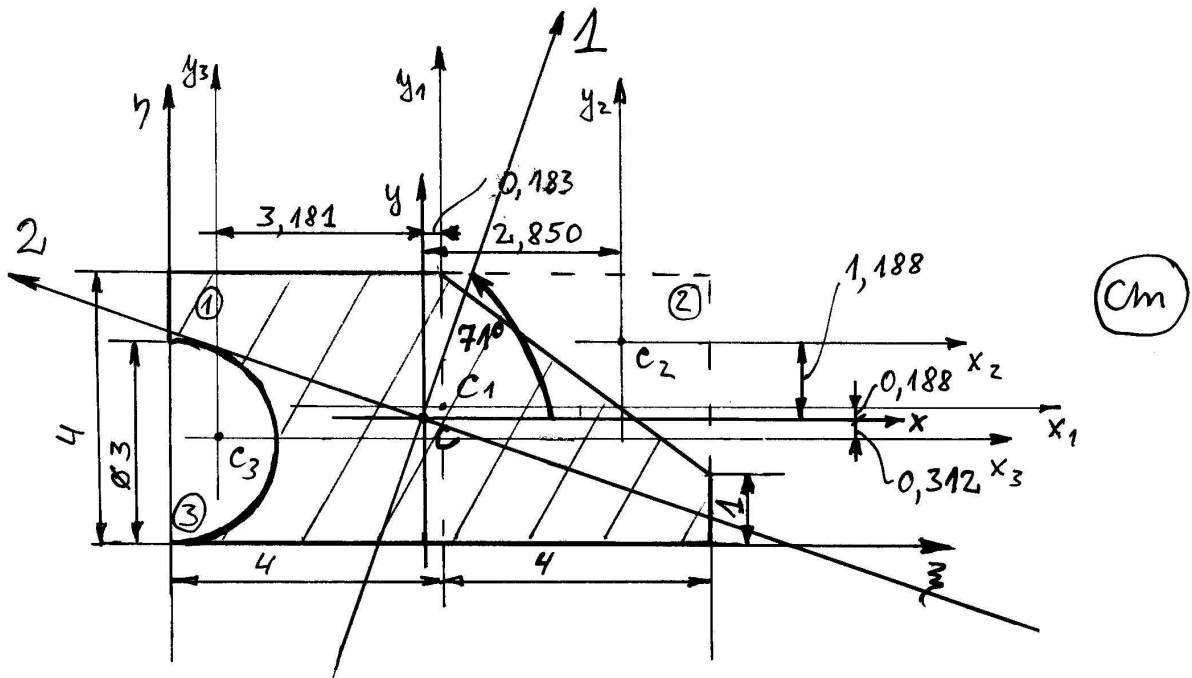
$$\begin{cases} \xi_{C_1} = 4, & \eta_{C_1} = 2, \\ \xi_{C_2} = 4 + \frac{2 \cdot 4}{3} = 6,667, & \eta_{C_2} = 1 + \frac{2 \cdot 3}{3} = 3, \\ \xi_{C_3} = \frac{2 \cdot 3}{3\pi} = 0,212 \cdot 3 = 0,636, & \eta_{C_3} = 1,5, \end{cases} \quad (84)$$

pindalad A_i ja liitkujundi pindala A

$$A_1 = 32, \quad A_2 = 6, \quad A_3 = 3,534, \quad A = 22,466. \quad (85)$$

Liitkujundi pinnakese

$$\xi_C = \frac{\sum_{i=1}^3 \xi_{C_i} A_i}{A} = 3,817, \quad \eta_C = \frac{\sum_{i=1}^3 \eta_{C_i} A_i}{A} = 1,812. \quad (86)$$



Joonis 41: Mittesümmeetrilise kujundi painertsimomentide leidmine.

2. Tõmbame läbi pinnakeskme C keskteljed $x \parallel \xi$ ja $y \parallel \eta$ ning läbi osakujundite pinnakesete C_i omakeskteljed $x_i \parallel \xi$ ja $y_i \parallel \eta$. Edaspidistes arvutustes kasutame vaid kesktelgedele ja omakesktelgedele vastavaid koordinaate x, y, x_i ja y_i . Järgnevalt leiame osakujundite pinnakeskmete koordinaadid $x_{C_i} = \xi_{C_i} - \xi_C$ ja $y_{C_i} = \eta_{C_i} - \eta_C$:

$$\begin{cases} x_{C_1} = 0,183, & y_{C_1} = 0,188, \\ x_{C_2} = 2,850, & y_{C_2} = 1,188, \\ x_{C_3} = -3,181, & y_{C_3} = -0,312. \end{cases} \quad (87)$$

On selge, et $|x_{C_i}|$ on võrdne telgede y_i ja y vahelise kaugusega ning $|y_{C_i}|$ telgede x_i ja x vahelise kaugusega. Kanname vastavad kaugused joonisele.

3. Inertsimomendid kesktelgede suhtes

$$\begin{cases} I_x = \sum_{i=1}^3 I_x^{(i)} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i}^{(i)} + y_{C_i}^2 A_i) = \dots = 43,803 - 11,474 - 2,331 = 29,998, \\ I_y = \sum_{i=1}^3 I_y^{(i)} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i}^{(i)} + x_{C_i}^2 A_i) = \dots = 171,738 - 54,056 - 36,319 = 81,363, \\ I_{xy} = \sum_{i=1}^3 I_{xy}^{(i)} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i y_i}^{(i)} + x_{C_i} y_{C_i} A_i) = \dots = 1,103 - 18,319 - 3,503 = -20,719. \end{cases} \quad (88)$$

4. Peainertsimomentide määramiseks tuleb leida abisuurused

$$\begin{cases} I_o = \frac{I_x + I_y}{2} = 55,680, \\ I_* = \frac{I_x - I_y}{2} = -25,683, \\ D_o = \sqrt{I_*^2 + I_{xy}^2} = 32,998, \\ \alpha_1 = \arctan \frac{I_* - D_o}{I_{xy}} = 70,553^\circ. \end{cases} \quad (89)$$

Neist viimane, st. $\alpha_1 = 70,553^\circ \approx 71^\circ$ määrab nurga, mille võrra tuleb pöörata kesktelgi $x - y$, et saada keskpeateljed 1 – 2.

Keskpeainertsimomendid (inertsimomendid keskpeatelgedes suhtes) $I_p = I_o \pm D_o$, $p = 1, 2$. Seega

$$I_1 = I_o + D_o = 88,679 \text{ ja } I_2 = I_o - D_o = 22,682. \quad (90)$$

Kontrolliks leiame nurga, mille võrra tuleb pöörata kesktelgi $x - y$, et nad ühtiks keskpeatelgedega teise valemi abil (vt. avaldise (79)): $\alpha_1 = \arctan \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} = 70,553^\circ$. Kuna tulemused langevad kokku, siis on lootust arvata, et ülesande lahendus on õige.

*Vastus*⁶: Vaadeldava kujundi pinnakese asub punktis C , mille koordinaadid on $\xi_C = 3,8$ cm ja $\eta_C = 1,8$ cm. Keskpeateljed 1 – 2 on kesktelgedes $x - y$ suhtes pööratud nurga $\alpha_1 = 71^\circ$ võrra. Keskpeainertsimomendid $I_1 = 88,7$ cm⁴ ja $I_2 = 22,7$ cm⁴.

⁶Käesolevas näites on vastused esitatud täpsusega üks koht peale koma ja vahearvutuste tulemused täpsusega kolm kohta peale koma. Kodu- ja kontrolltöodes piisab vahearvutuste puhul täpsusest kaks kohta peale koma.

12 Jõuväli

Kasutatakse ka termineid jaotatud koormus, lauskoormus, lausjõud.

Võib eristada kolme juhtu

1. Ruumjõuväli ehk ruumkoormus - intensiivsus $p(x, y, z)$ — $\dim p = N/m^3$. Näit. raskusjõudu põhjustav gravitatsiooniväli.
2. Pindjõuväli ehk pindkoormus - intensiivsus $p(x, y)$ — $\dim p = N/m^2$. Näit. hüdrostaatiline surve.
3. Joonjõuväli ehk joonkoormus - abstraktsioon, mida kasutatakse varraste puhul - intensiivsus $p(x)$ - $\dim p = N/m$. Näiteks ka selles kursuses kasutatud nn. ristkülikkoormus või kolmnurkkormus.

Joonkoormus. Vaatleme vardale rakendatud joonkoormust (joonis esitatakse loengus), mille intensiivsus on esitatud kujul $p = p(x)$ ja mis mõjub risti varda teljega, see tähendab varras on koormatud jõuga, mille intensiivsus sõltub vaid koordinaadist x . Vastavat joonist nimetatakse joonkoormuse epüüriks. Tegu on paralleeljõudude süsteemiga, seega on vaadeldav jõusüsteem taandatav resultandiks. Leiame selle resultandi suuruse (mooduli) ja mõjusirge asukohta. Tähistades epüüri elementaarpindala $dA = p(x)dx$, on vaadeldava joonkoormuse resultant

$$R = \int_0^b p(x)dx = \int_A dA = A, \quad (91)$$

kus b on varda pikkus ja A on epüüri pindala. Vastavalt Varignoni teoreemile peab $\int_0^b \mathbf{M}_O[\mathbf{p}(x)]dx = \mathbf{M}_O(\mathbf{R})$. Seega

$$M_O = \int_0^b xp(x)dx = x_R R \quad \text{ehk} \quad M_O = \int_A x dA = x_R A, \quad (92)$$

kust resultandi \mathbf{R} mõjusirget määrav koordinaat

$$x_R = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{S_y}{A} \quad (93)$$

avaldub kui epüüri pinnakeskme x koordinaat.

Pindkoormus. Analoogselt joonkoormusega saab leda ka pindkoormuse $p(x, y)$ resultanti ja tema mõjusirge asukohta:

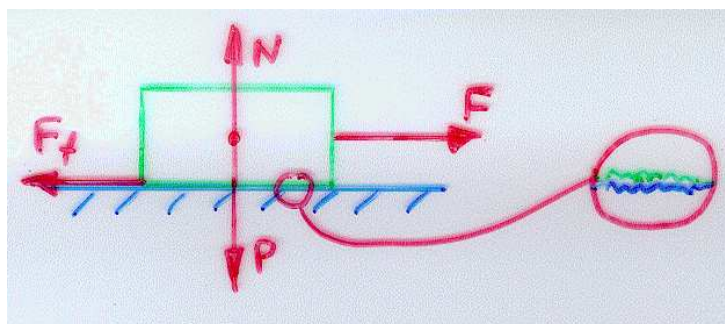
$$\left\{ \begin{array}{l} R = \int_A p(x, y)dA = \int_V dV = V, \\ x_R = \frac{\int_V x dV}{V}, \\ y_R = \frac{\int_V y dV}{V}. \end{array} \right. \quad (94)$$

Näited. Pinged paindel ja väändel; vedeliku surve anuma otstele.

13 Hõõre

13.1 Liugehõõre

Senini oleme staatikaülesannete püstitamisel tihti lisanud lause: “Hõõret mitte arvestada!” Seega oleme eeldanud, et kokkupuutuvad pinnad on ideaalselt siledad. Selline eeldus pole aga tegelikult mitte kunagi täidetud ja paljudel juhtudel tuleb hõõret arvesse võtta. Vaatleme karedale pinnale asetatud keha, millele on rakendatud horisontaalne jõud \mathbf{F} (joonis esitatakse loengus). Kui kokkupuutuvad pinnad oleks ideaalselt siledad, st. mitte midagi ei takistaks libisemist, siis hakkaks keha liikuma mistahes $F > 0$ puhul. Kuid kuna tegelikkuses on tegu karedate pindadega, siis nii ei juhtu. Järelikult mõjub jõuga \mathbf{F} vastassuunaline jõud, mida nimetatakse hõõrdejõuks ja mida on soovitatav tähistada \mathbf{F}_f . Kui keha on paigal, siis $\mathbf{F} = \mathbf{F}_f$. Kuna teatud suurusega jõu \mathbf{F} puhul hakkab keha liikuma, siis järelikult leidub $\max \mathbf{F}_f$.



Joonis 42: Liugehõõre

Staatikaülesannete puhul, kus arvestatakse hõõret, lähtutakse *Coulomb'i hõõrdeseadustest*:

1. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus ei sõltu kokkupuutuvate pindade suurusest, vaid ainult nende pindade iseloomust (siledus, karedus) ja materjalist.
2. Hõõrdejõu maksimaalne väärtus on võrdeline normaalreaktsiooniga, st.

$$\max F_f = fN, \quad (95)$$

kus f on *hõõrdetegur* (mida tihti tähistatakse ka μ). Tasakaalu puhul

$$F_f \leq \max F_f = fN \quad (96)$$

Hõõrdejõu suund on alati vastupidine võimaliku liikumissuunaga.

Eristatakse

- kuivhõõret ja märgihõõret;
- paigalseisu- ehk staatilist hõõret ja kinemaatilist hõõret. Kinemaatiline hõõrdetegur on kuni 25% väiksem kui staatiline hõõrdetegur ja tema väärtus sõltub ka keha kiirusest.

Käesolevas punktis käsitletud hõõret nimetatakse täpsemalt *liugehõõrdeks* ja vastavat tegurit *liugehõõrdeteguriks*.

Täpsemad uuringud on näidanud, et (liuge)hõõrdetegur ja seega ka (liuge)hõõrdejõud võib lisaks kokkupuutuvate pindade iseloomule sõltuda

- molekulaarse päritoluga jõududest;
- kõrgetest lokaalsetest temperatuuridest (kleepuvus, libedus);
- kokkupuutuvate pindade relatiivsest kõvadusest;
- kokkupuutuvate pindade suurusest.

Käesoleva kursuse raames käsitletavate staatikaülesannete lahendamisel viimaseid efekte aga ei arvestata ning lähtutakse vaid Coulomb'i hõõrdeseadustest.

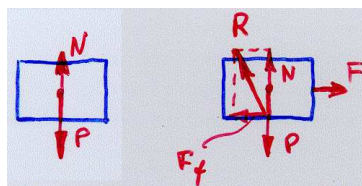
Näiteid hõõrdeteguri väärtustest. Järgnevas tabelis on toodud staatilise hõõrdeteguri väärtused mõnede enamlevinud materjalide jaoks. Toodud arvud on pärit kahest õpikust: 1) R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics, Statics; 2) F.P. Beer, E.R. Johnston, Mechanics For Engineers, Statics.

Materjalid	Staatiline hõõrdetegur
metall jääl	0.03 – 0.05
puit puidul	0.3 – 0.7
nahk puidul	0.2 – 0.5
nahk metallil	0.3 – 0.6
metall metallil	0.15 – 0.6
metall puidul	0.2 – 0.6
metall kivil	0.3 – 0.7
kummi betoonil	0.6 – 0.9

Nagu on tabelist näha, kõiguvad toodud väärtused küllaltki suures vahemikus. Enamgi veel, teistes õpikutes või teatmeteostes esitatud staatilise hõõrdeteguri väärtused võivad erineda alltoodutest. Praktikas tuleks igal konkreetsel juhul valmistada kasutatavatest materjalides katsekehad ning määrata hõõrdeteguri väärtus katseliselt.

13.2 Hõõrdenurk ja hõõrdekoonus

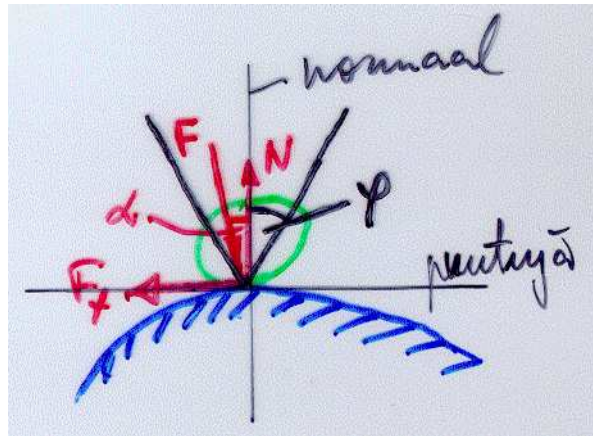
Staatikas eristatakse kahte tüüpi pinnareaktsioone, mida nimetatakse vastavalt sileda pinna reaktsiooniks ja kareda pinna reaktsiooniks.



Joonis 43: Sileda (vasakul) ja kareda pinna reaktsioon.

Sileda pinna reaktsioon koosneb vaid normaalreaktsioonist, mis on risti kehade kokupuutepunktis leitud ühise puutujaga.

Kareda pinna reaktsioon koosneb normaalreaktsioonist ja hõõrdejõust ning on võrdne nende kahe jõu (geomeetrilise) summaga, st. $\mathbf{R} = \mathbf{F}_f + \mathbf{N}$.



Joonis 44: Hõõrdenurk

Hõõrdenurk. Vaatleme karedale pinnale toetuvat keha, millele mõjub jõud \mathbf{F} . Jõud \mathbf{F} kujutab endast kõigi kehale mõjuvate aktiivsete jõudude (kaasa arvatud keha kaal) summat. Hõõrdetegur keha ja pinna vahel on f ja jõu \mathbf{F} mõjusirge moodustab puutepinna normaaliga nurga α . Tahame teada, millise nurga α puhul jääb keha tasakaalu.

On selge, et tasakaalu puhul

$$N = F \cos \alpha \text{ ja } F_f = F \sin \alpha. \quad (97)$$

Teisest küljest, on hõõrdejõu maksimaalne väärtus $\max F_f = fN$, st.

$$F_f \leq \max F_f = fN. \quad (98)$$

Viimaste avaldiste põhjal on tasakaalu korral

$$F \sin \alpha \leq fF \cos \alpha \text{ ja } \tan \alpha \leq f. \quad (99)$$

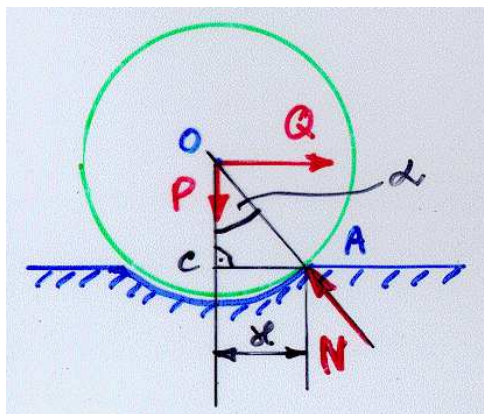
Et anda viimasele mugavamalt kuju, tähistame $\tan \varphi = f$, kus nurka φ nimetatakse *hõõrdenurgaks*. Keha on tasakaalus, kui

$$\alpha \leq \varphi. \quad (100)$$

Hõõrdekoonus on koonus mille tipp asub punktis A , teljeks on puutepinna normaal ja tipunurgaks kahekordne hõõrdenurk 2φ .

13.3 Veerehõõre ehk veeretakistus

Vaatleme horisontaalsele pinnale toetuvat silindrit kaaluga \mathbf{P} ja raadiusega r , mille tsentrisse on rakendatud horisontaalne jõud \mathbf{Q} . Kogemusest on teada, et silinder ei hakka



Joonis 45: Veerehõõre

veerema mis tahes $Q > 0$ puhul. Takistust, mida silinder avaldab veeremisele, nimetatakse *veerehõõrdeks*. Erinevalt liugehõõrdest on veerehõõre põhjustatud veereva keha ja aluspinna deformeerumisest.

Silinder hakkab veerema, kui $|M_A(\mathbf{Q})| > |M_A(\mathbf{P})|$. Kuna momendid $|M_A(\mathbf{Q})| = Q \cdot OC$ ja $|M_A(\mathbf{P})| = P \cdot AC$, siis saab viimane tingimus kuju $Q \cdot OC > P \cdot AC$.

Tähistame deformatsiooni iseloomustava pikkuse $AC = \varkappa$. Kuna α on väike, siis $\cos \alpha \sim 1$, $OC \sim r$ ja $P \sim N$. Seega silinder hakkab veerema, kui

$$Q > \varkappa \frac{P}{OC} \sim \varkappa \frac{N}{r} = F_r. \quad (101)$$

Suurust \varkappa nimetatakse *veerehõõrdeteguriks* (dim $\varkappa = \text{m}$) ja jõu dimensiooni omavat suurust F_r *veerehõõrdejõuks*.

Ülesannete lahendamisel on otstarbekas kasutada veerehõõrdejõu asemel *veerehõõrdemomenti*, mille moodul

$$M_r = rF_r = \varkappa N. \quad (102)$$

Sarnaselt liugehõõrdega on ka veerehõõrdejõud ja veerehõõrdemoment suunatud vastupidiselt võimalikule liikumisele.

Märkused:

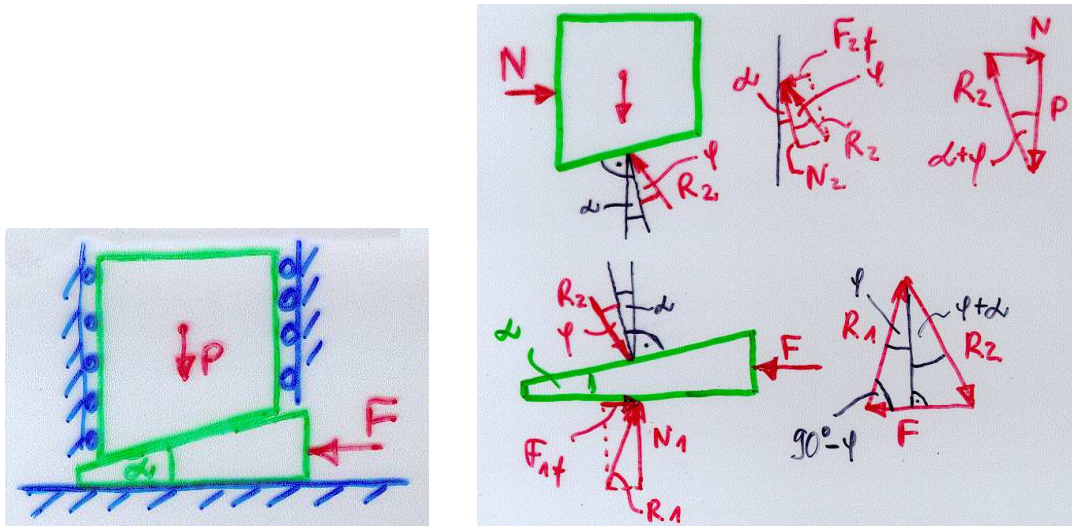
- Sageli kasutatakse termini veerehõõrde asemel terminit *veeretakistus*. Vastavalt kasutatakse siis ka termineid *veeretakistustegur*, *veeretakistusjõud* ja *veeretakistusmoment*.
- Veeretakistustegur \varkappa iseloomustab veereva keha ja aluspinna deformatsiooni suurust.
- Tegelikult määravad avaldised (101) ja (102) vastavalt veerehõõrdejõu ja veerehõõrdemomendi maksimaalsed väärtused ning analoogselt liugehõõrdega kehitvad veerehõõrde puhul võrratused $0 \leq M_r \leq \max M_r = \varkappa N$ ja $0 \leq F_r \leq \max F_r = \varkappa \frac{N}{r}$.
- Peale liugehõõrde ja veerehõõrde eristatakse ka pöördehõõret ehk keerlemishõõret, kuid käesolevas kursuses seda ei käsitleta (Vt. Lepik & Roots, TM lk. 79-80).

13.4 Hõõrde rakendusi

13.4.1 Kiilud

Ülesanne.

Vaatleme keha kaaluga \mathbf{P} , mille all on kerge kiil⁷ kaldenurgaga α . Hõõrdetegur kiilu mõle-



Joonis 46: Keha ja kiil(vasakul). Kiilu liikumine keha alla (paremal).

mal pinnal on f . Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiil rohkem keha alla liiguks? Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiilu keha alt välja tõmmata? Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kiiluga (kiiluga, mis ei libise ise keha alt välja)?

Lahendus.

1) Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiil rohkem keha alla liiguks?

Tasakaalu korral moodustavad kehale mõjuvad kolm jõudu \mathbf{P} , \mathbf{N} ja \mathbf{R}_2 täisnurkse jõukolmnurga ($\varphi = \arctan f$ on hõõrdenurk), kust leiame

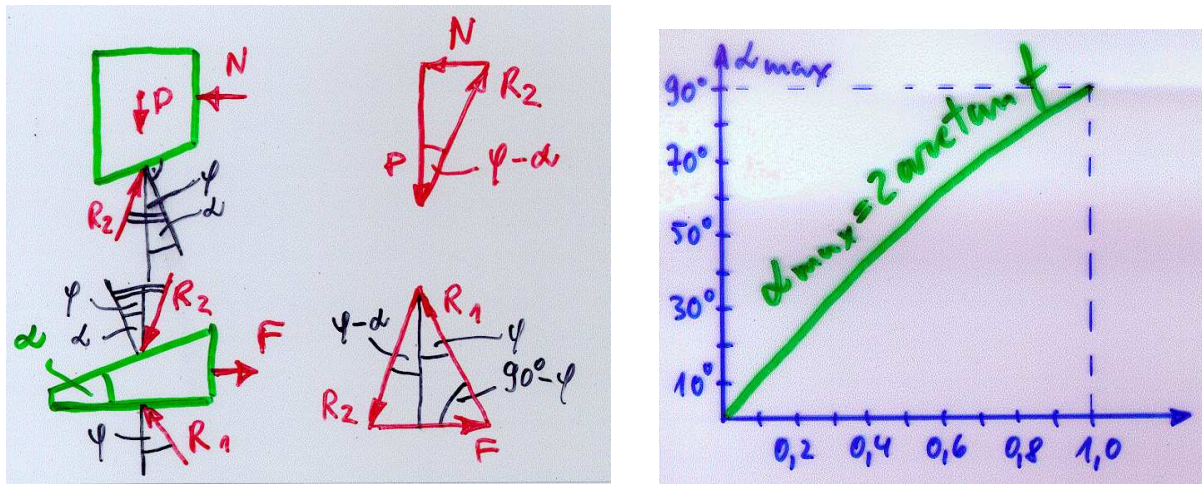
$$R_2 = \frac{P}{\cos(\alpha + \varphi)}. \quad (103)$$

Kiilule mõjuvad jõud \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 ja \mathbf{F} . Vaatleme kiilu tasakaalu ja moodustame vastava jõukolmnurga. Siinusteoreemi ja avaldise (103) põhjal

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{F}{\sin(2\varphi + \alpha)} \Rightarrow \underline{F} = \frac{R_2 \sin(2\varphi + \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P \sin(2\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cos(\alpha + \varphi)}. \quad (104)$$

2) Kui suurt horisontaalset jõudu \mathbf{F} tuleks rakendada kiilule, et kiilu keha alt välja tõmmata?

⁷St. kiilu kaalu ei arvesta.



Joonis 47: Kiilu liikumine keha alt välja (vasakul). Iselukustuv kiil: maksimaalse kalde-nurga sõltuvus hõõrdetegurist (paremal).

Võrreldes eelnevalt käsitletud juhuga on kiilu välja tõmbamise puhul (eeldatav) liikumise suund vastupidine. Vaatleme keha ja kiilu tasakaalu, moodustame kaks jõukolmnurka, rakendame siinusteoreemi ja saame

$$R_2 = \frac{P}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{F}{\sin(2\varphi - \alpha)}, \quad (105)$$

$$\underline{F} = \frac{R_2 \sin(2\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P \sin(2\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)}.$$

3) Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kiiluga?

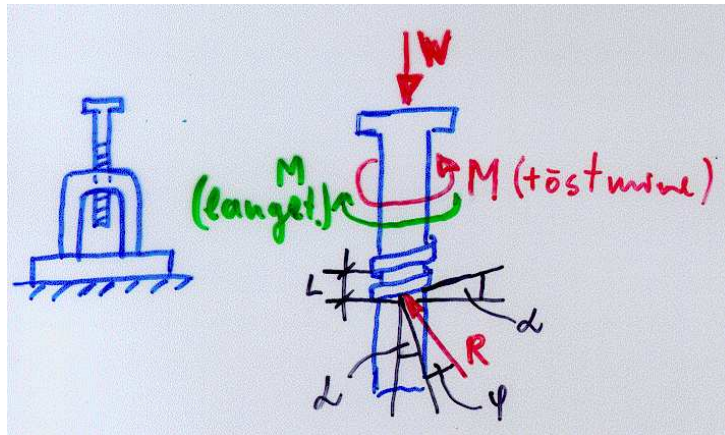
Iselukustuva kiilu puhul hakkab kiil keha alt välja liikuma vaid vasakult paremale suunatud jõu \mathbf{F} toimel. Teisisõnu, avaldisega (105)₃ esitatud jõud peab olema positiivne. Uurime seda avaldist. Kui hõõrdetegur $0 \leq f \leq 1$, siis hõõrdenurk $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ ja $\cos \varphi > 0$. Kui kiilu nurk $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, siis ka $\cos(\varphi - \alpha) > 0$. Suurus $\sin(2\varphi - \alpha) > 0$, kui $2\varphi > \alpha$.

Seega, iselukustuva kiiluga on tegu, kui nurk $\alpha < \alpha_{\max} = 2\varphi = 2 \arctan f$. Vastasel korral tuleb kiilu keha all hoidmiseks rakendada paremalt vasakule suunatud jõudu $-\mathbf{F}$, mis on määratud avaldisega (105)₃. Kui hõõrdetegur $f = 0,3$ (puit puidul), siis $\alpha_{\max} = 33,40^\circ$ ja kui $f = 0,6$ (teras terasel), siis $\alpha_{\max} = 61,93^\circ$. Hõõrdeteguri väärtuse $f = 0,9$ puhul oleks $\alpha_{\max} = 83,97^\circ$.

13.4.2 Kruvid

Ülesanne.

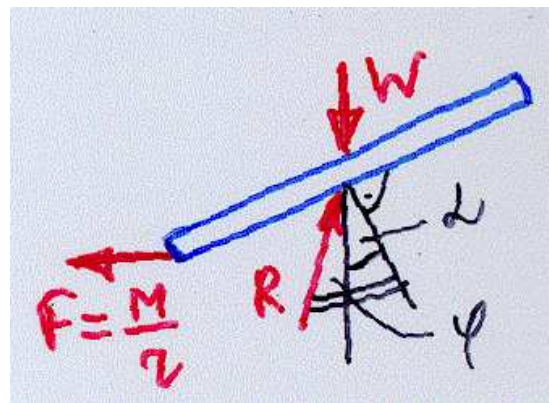
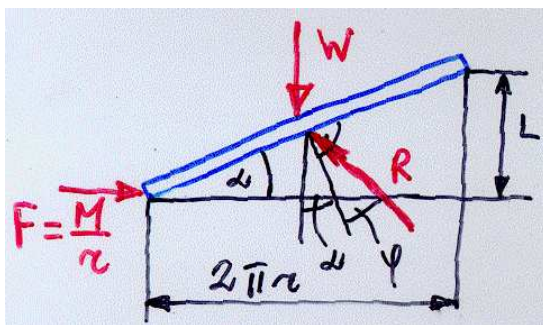
Vaatleme nn. ristkülikulist kruvi (vinti). Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et tõsta raskust W ? Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et langetada raskust W ? Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kruviga? Hõõrdetegur on f , kruvisamm L ja kruvi (keskmise) raadius r .



Joonis 48: Kruvi.

Lahendus.

1) Kui suurt jõupaari momenti M tuleb kruvile rakendada, et tõsta raskust W ?



Joonis 49: Tõstmine (vasakul) ja langetamine.

Vaatleme kruvi ühte keeret, kerime ta mõtteliselt sirgeks ja asendame momendi M jõuga $F = M/r$. Keerme kaldenurk $\alpha = \arctan(L/2\pi r)$ ja hõõrdenurk $\varphi = \arctan f$. Projektee-rides tasakaaluvõrrandi $\mathbf{W} + \mathbf{R} + \mathbf{F} = 0$ kahele ristuvale teljele saame

$$R = \frac{W}{\cos(\alpha + \varphi)},$$

$$F = R \sin(\alpha + \varphi),$$

$$M = W r \tan(\alpha + \varphi).$$
(106)

2) Kui suurt jõupaari momenti \mathbf{M} tuleb kruvile rakendada, et langetada raskust \mathbf{W} ?

Raskuse \mathbf{W} langetamise puhul muutuvad jõudude \mathbf{R} ja \mathbf{F} suunad ning moment

$$M = Wr \tan(\varphi - \alpha). \quad (107)$$

3) Millisel juhul on tegu nn. iselukustuva kruviga?

Iselukustuva kruviga on tegu juhul, kui raskuse \mathbf{W} toimel ei hakka kruvi ise langema, vaid selleks tuleb rakendada jõupaari momenti. Teisisõnu, avaldisega (107) määratud moment peab olema positiivne. Kuna nii $W > 0$ kui $r > 0$, siis on $M > 0$, kui

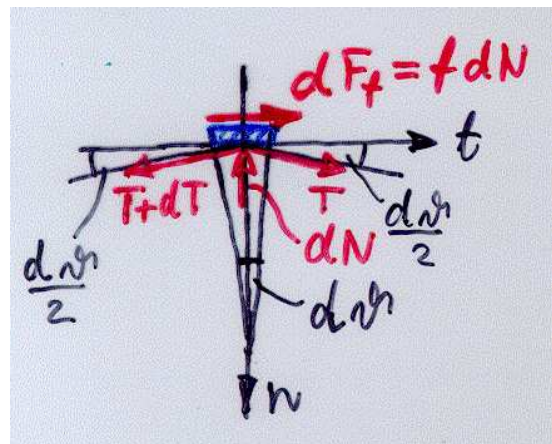
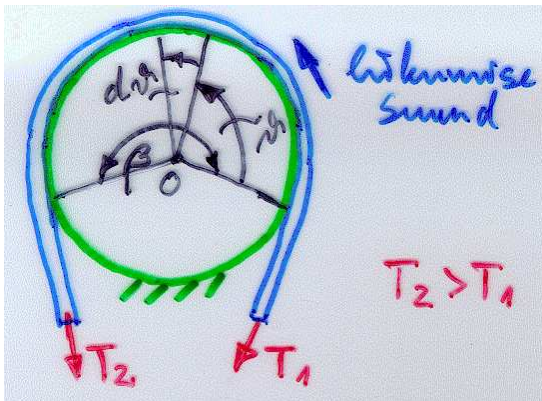
$$\tan(\varphi - \alpha) > 0 \Rightarrow \alpha < \varphi. \quad (108)$$

Seega, iselukustuva kruvi puhul $\alpha < \alpha_{\max} = \varphi = \arctan f$.

13.4.3 Niidi hõõre vastu silindrilist pinda

Ülesanne.

Vaatleme järgalt kinnitatud silindrit, millel oleva niidi⁸ harudes mõjuvad tõmbejõud $\mathbf{T}_1 < \mathbf{T}_2$. Hõõrdetegur niidi ja silindri vahel on f . Leida niidi harudes mõjuvate jõudude moodulite suhe T_2/T_1 .



Joonis 50: Niidi hõõre.

Lahendus.

Vaatleme kesknurgale $d\vartheta$ vastava niidielemendi tasakaalu. Sellisele elemendile mõjuvad jõud \mathbf{T} , $\mathbf{T} + d\mathbf{T}$, $d\mathbf{N}$ ja $d\mathbf{F}_f$. Arvestades, et $dF_f = f dN$, saame tasakaalutingimuse $\sum \mathbf{F}_i = 0$ projekteerimisel telgedele t ja n

$$\begin{cases} f dN = dT, \\ dN = T d\vartheta, \end{cases} \Rightarrow f T d\vartheta = dT. \quad (109)$$

⁸Niidi mõiste on siin küllaltki lai. Niidina käsitletakse näiteks köisi, trosse, rihmasid ja muid painduvaid kehasid.

Eraldame muutujad ja integreerime:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = f \int_0^\beta d\vartheta \Rightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = f\beta. \quad (110)$$

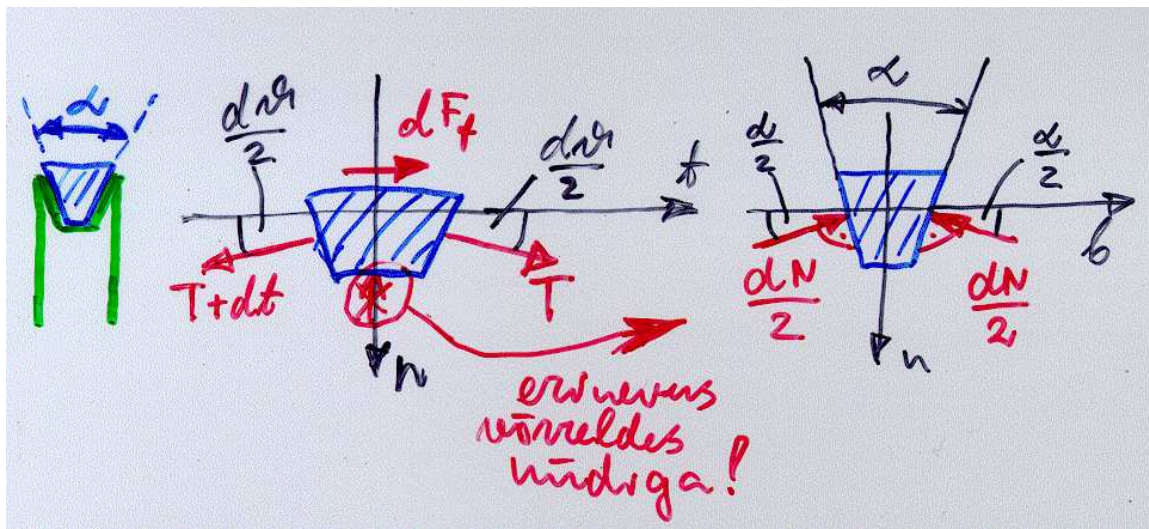
Seega jõudude moodulite suhe⁹

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp f\beta. \quad (111)$$

Märkused:

- Valem (111) kehtib ka mitteringjoonelise ristlõike puhul (näiteks kivid), sest tema tuletamisel ei kasutatud silindri raadiust r .
- Valemit (111) saab kasutada vaid juhul, kui niit libiseb silindril või on just libisema hakkamas. Viimane on nn. piirjuht.
- Silinder ei pruugi olla järgalt kinnitatud — teda võib paigal hoida jõupaari moment.
- Kiiirihma puhul on normaalreaktsioon $dN = Td\vartheta / \sin(0,5\alpha)$ (vt. joonist) ja valem (111) saab kuju

$$\frac{T_2}{T_1} = \exp \frac{f\beta}{\sin(0,5\alpha)}. \quad (112)$$



Joonis 51: Kiiirihma reaktsioonid.

- Põhilised rakendused:
 - Jõudu T_2 tasakaalustava jõu T_1 leidmine.
 - Lintpidurite arvutus.
 - Rihmülekande vedavas ja veetavas harus mõjuvate tõmbejõudude määramine või maksimaalse ülekantava momendi leidmine.

⁹ $\exp x \equiv e^x$

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	2
2 Jõud ja jõusüsteem	3
2.1 Jõu mõiste	3
2.2 Jõusüsteemi mõiste	3
2.3 Jõu projektsioon teljel, jõu komponendid ja jõu projektsioon tasandil . . .	4
2.4 Jõudude liitmine	5
3 Staatika aksioomid ja põhiülesanded	7
4 Sidemed, sidemereaktsioonid ja sidemetest vabastatavuse printsiip	9
5 Koonduva jõusüsteemi tasakaal	18
6 Paralleeljõudude liitmine, jõupaar	21
6.1 Kahe samasuunalise paralleeljõu liitmine	21
6.2 Kahe vastassuunalise paralleeljõu liitmine	22
6.3 Jõupaar	23
7 Jõu moment. Jõupaari moment	24
7.1 Jõu moment punkti suhtes	24
7.2 Jõu moment telje suhtes	25
7.3 Jõupaari moment	26
8 Jõusüsteemi taandamine	28
8.1 Lemma jõu paraleellükkest	28
8.2 Jõusüsteemi peavektor ja peamoment	28
8.3 Jõusüsteemi invariandid	29
8.4 Jõukruvi ehk dünaam	30
8.5 Jõusüsteemi taandamise erijuhud	32
8.6 Erikujuliste jõusüsteemide taandamine	33
8.7 Varignon'i teoreem	33
9 Jõusüsteemi tasakaal	35
9.1 Jõusüsteemi tasakaalu tingimused	35
9.2 Staatiliselt määratud ja staatiliselt määramata ülesanded	36

10 Raskuskese	37
10.1 Paralleeljõudude kese	37
10.2 Raskuskese	38
10.3 Tükeldus- ja täiendusmeetod	39
10.4 Näited	40
10.5 Pappus-Guldini teoreemid	41
11 Pinnamomendid	43
11.1 Sissejuhatus	43
11.2 Staatilised momendid	43
11.3 Inertsimomendid	44
11.4 Inertsimomendid keskteljega paralleelsete telgede suhtes	45
11.5 Inertsimomendid pööratud telgede suhtes	46
11.6 Peateljed ja peainertsimomendid	47
11.7 Massiinertsimomendid	48
11.8 Näide	48
12 Jõuväli	51
13 Hõõre	52
13.1 Liugehõõre	52
13.2 Hõõrdenurk ja hõõrdekoonus	53
13.3 Veerehõõre ehk veeretakistus	54
13.4 Hõõrde rakendusi	56
13.4.1 Kiilud	56
13.4.2 Kruvid	58
13.4.3 Niidi hõõre vastu silindrilist pinda	59