

Tallinna Tehnikaülikool  
Mehaanikainstituut  
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

# Staatika

/EMR0010/

Loengukonspekt

Tallinn 2006

## Eessõna

Käesolev loengukonspekt on mõeldud kasutamiseks Tallinna Tehnikaülikooli tehnilise füüsika eriala üliõpilastele staatika kursuse EMR0010 õppimisel (sobib ka vana õppekava samanimelisele ainele koodiga EMR3020). Kursuse programm — «Staatika EMR0010 laiendatud programm» (vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>) — kujutab endast antud loengukonspekti lahutamatu lisa. Seal on esitatud õppeaine eesmärgid, maht, eeldused ja soovitatav kirjandus ning kirjeldatud töökorraldust.

Loengukonspekti koostamisel oli mul algseks eesmärgiks vabastada üliõpilased keskaegse munga tasemel tööst, st. definitsioonide ja teoreemide järjekordsest ümberkirjutamisest. Kuigi loengukonspekti käesolev versioon sisaldab palju jooniseid, valemite tuletuskäike ja teoreemide tõestusi, pole minu eesmärgiks olnud mitte uue õpiku, vaid loengukonspekti kirjutamine. Sellise loengukonspekti olemasolu korral saab loengutes ja harjutustundides pöörata põhitähelepanu definitsioonide ja teoreemide sisu avamisele, valemite tuletuskäikudele, teoreemide tõestustele ning näiteülesannetele. Teisisõnu, käesolev loengukonspekt annab vaid koos loengutes ja harjutustundides kirjapanduga tervikliku käsitluse õppeainest staatika (ja sedagi vaid programmi ulatuses).

Loengukonspekti koostamisel on kasutatud praktiliselt kõiki ülalnimetatud «Staatika programmi» kirjanduse loetelus esitatud õpikuid ja õppevahendeid. Kursuse ülesehitus tugineb Tallinna Tehnikaülikoolis teoreetilise mehaanika õpetamisel väljakujunenud traditsioonidele ja minu enda ligi kahekümneaastasele õpetamiskogemusele Tallinna Tehnikaülikoolis. Põhiõpikuna soovitan kasutada Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi õpikut «Teoreetiline mehaanika», mida pean parimaks eestikeelseks õpikuks selles valdkonnas. Definitsioonid ja teoreemid on seal sõnastatud lühidalt ja selgelt ning käsitletavate probleemide olemus on avatud põhjalikult. Teised eestikeelsed õpikud ja õppevahendid jäävad selles osas Lepiku ja Rootsi õpikust kaugemale maha. Selguse poolest järgmine on minu arvamuse järgi vene keelest tõlgitud teoreetilise mehaanika õpik, mille autoriks on Semjon Targ.

Harjutustundides lahendatavad ülesanded on valdavas osas esitatud ülesannetekogus — A. Salupere. Staatika ülesanded. Tallinn 2006, <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>. Näiteülesandeid on loengukonspekti käesolevas versioonis suhteliselt vähe. Seetõttu tuleks kontrolltöödeks ja eksamiks õppimisel ning kodutööde tegemisel kasutada loengu ja harjutustundide materjale ning «Staatika Programmi» kirjanduse loetelus metoodiliste abimaterjalidena esitatud õppevahendeid.

Andrus Salupere

# 1 Sissejuhatus

Kursuse alguseks avame mõnede põhimõistete sisu.

**Mehaanika** on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.

**Teoreetiline mehaanika ehk absoluutselt jäiga keha mehaanika ehk klassikaline mehaanika** uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimetel.

**Absoluutselt jäiga keha** mis tahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne. Kõik kehad, mida me antud kursuses vaatleme, loeme absoluutselt jäikadeks. Tegelikult on siin loomulikult tegu abstraktsiooniga — me loeme deformatsioonid väikesteks ja ei võta neid arvutuste tegemisel arvesse.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks* ja *dünaamikaks*.

**Staatika** uurib:

1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu);
2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

**Dünaamika** võib omakorda jagada kolmeks osaks:

1. **Kinemaatika**, mis uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
2. **Punktmasside ja jäikade kehade dünaamika ehk klassikaline dünaamika**, mis uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimetel.
3. **Analüütiline mehaanika**, mis baseerub integraal-, diferentsiaal- ja variatsioonarvutusel ning tegeleb mehaanikaülesannete üldiste lahendusmeetodite leidmisega.

## 2 Jõud ja jõusüsteem

### 2.1 Jõu mõiste

Klassikalistes mehaanikakursustes käsitletakse *jõudu* kui kehade vastastikuse mõju mõõtu. Selline lähenemisviis on täiesti piisav nii käesoleva staatika kui ka järgneva dünaamika kursuse puhul. Seega kasutame järgnevat jõu definitsiooni:

**Jõud** on kehade vastastikuse mõju mõõduks.

- Vastastikune mõju võib olla nii otsene (kehad on omavahel konaktis) kui kaudne (näiteks gravitatsioonijõud).
- Jõu päritolu võib olla väga erinev. Näiteks elastsusjõud, gravitatsioonijõud, elektromagnetjõud jne. Tavaliselt uuritakse mehaanikas vaid jõu mõju vaadeldavale kehale ning ei tunta jõu füüsikalise olemuse või päritolu vastu huvi.
- Jõu toimel võib keha kas deformeeruda või omandada kiirenduse.
- Jõud on vektor (vektoriaalne suurus)! Teda iseloomustavad: 1) moodul ehk arväärtus ehk suurus; 2) suund (siht); 3) rakenduspunkt. Trükikirjas tähistatakse jõuvektoreid tavaliselt  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$  jne., käsitsi kirjutades aga tehakse vastava tähe kohale kriips või nool.

**Jõu mõjusirgeks** nimetatakse sirget, mille sihis antud jõud mõjub. Teisisõnu, jõu mõjusirge on sirge, millel on antud jõuvektoriga rohkem kui üks ühine punkt.

#### Välisjõud ja sisejõud

**Välisjõud** — jõud, millega teised kehade mõjuvad vaadeldavale kehale.

**Sisejõud** — vaadeldava keha osade vahel mõjuvad jõud.

### 2.2 Jõusüsteemi mõiste

**Jõusüsteemiks** nimetatakse kehale mõjuvate jõudude kogumit.

Jaotus:

**Koonduv jõusüsteem** — koonduvasse jõusüsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

**Paralleeljõudude süsteem** — paralleeljõudude süsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged on paralleelsed.

**Üldine jõusüsteem** — jõusüsteemi, mis pole ei koonduv jõusüsteem ega paralleeljõudude süsteem, nimetatakse üldiseks jõusüsteemiks.

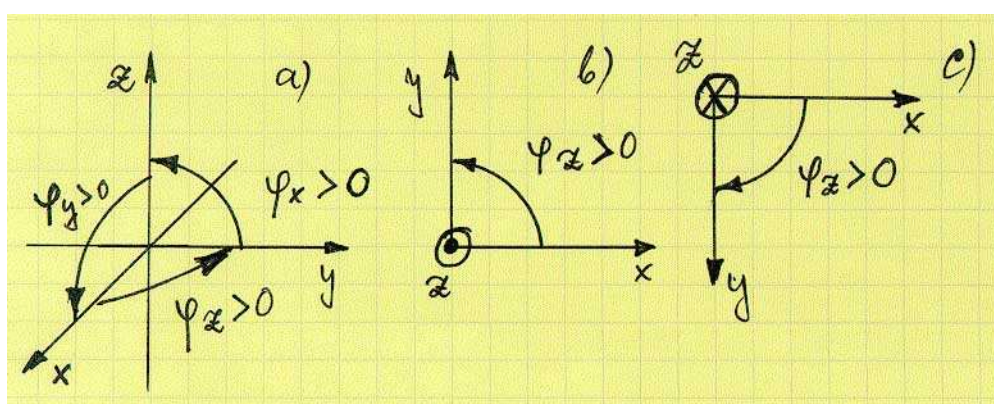
**Tasapinnaline jõusüsteem** — tasapinnalisse jõusüsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged asuvad ühel ja samal tasandil.

**Ruumiline jõusüsteem** — ruumilisse jõusüsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged ei asu ühel ja samal tasandil.

Ülaltoodud jõusüsteemide liigid pole üksteist välistavad. Näiteks võib koonduv jõusüsteem olla nii ruumiline kui tasapinnaline.

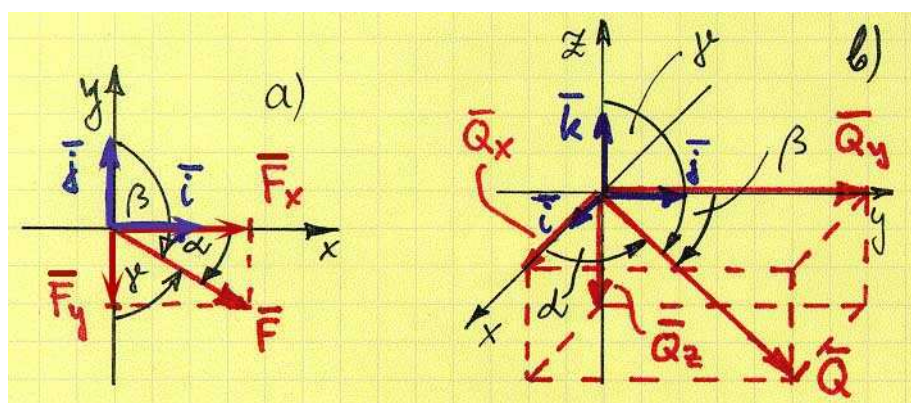
### 2.3 Jõu projektsioon teljel, jõu komponendid ja jõu projektsioon tasandil

**Koordinaadid ja koordinaatteljed.** Üldjuhul kasutame Descartes'i ristkoordinaate (DRK). *Koordinaatteljed peavad moodustama parema käe kolmiku* (vt. joonis 1). Ümber telje toimuva **pöörde positiivne suund** määratakse kruvireeglga — pöörde suund on positiivne, kui selle käigus liigub parema käe kruvi telje positiivses suunas.



Joonis 1: Parema käe teljestikud ja pöörde positiivsed suundad.

**Jõu projektsioon teljel** on skalaar. Vastavalt definitsioonile on vektori projektsioon võrdne teljesuunalise ühikvektori ja selle vektori skalaarkorrutisega. Joonisel 2 kujutatud juhtudel seega



Joonis 2: Jõuvektori projektsioonid ja jõuvektori komponendid.

$$\begin{aligned} F_x &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}; & F_y &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{j}; \\ Q_x &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}; & Q_y &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}; & Q_z &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Samas on selge, et arvutuste teostamisel on mugavam kasutada valemeid

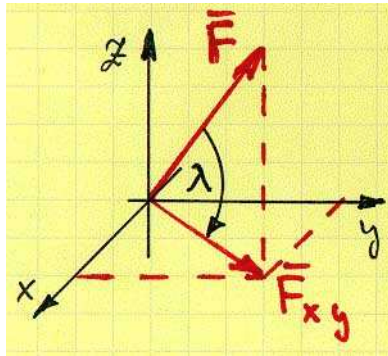
$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = F \sin \gamma; & Q_x &= Q \cos \alpha; \\ F_y &= F \cos \beta = -F \sin \alpha = -F \cos \gamma; & Q_y &= Q \cos \beta; \\ & & Q_z &= Q \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

**Jõu komponent** on vektor. Vaadaldaval juhul seega

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}; \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_z = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Valemis (3) on suurused  $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_y$  ja  $\mathbf{Q}_z$  jõudude  $\mathbf{F}$  ja  $\mathbf{Q}$  koordinaattelgede  $x, y$  ja  $z$  sihilised komponendid ning suurused  $F_x, F_y, Q_x, Q_y$  ja  $Q_z$  jõudude  $\mathbf{F}$  ja  $\mathbf{Q}$  projektsioonid koordinaattelgedel  $x, y$  ja  $z$ .

**Jõu projektsioon tasandil** on vektor. Joonisel 3 kujutatud juhul on projektsiooni  $\mathbf{F}_{xy}$  moodul  $F_{xy} = F \cos \lambda$ .



Joonis 3: Jõu projektsioon tasandil.

Jõudude tähistamise puhul joonistel loobume edaspidi üldjuhul vektori märkidest (rasvast kirjust trükitud töö puhul) ja kirjutame jõuvektori juurde vaid tema pikkuse.

## 2.4 Jõudude liitmine

Kuna jõud on vektor, siis toimub jõudude liitmine täpselt samuti kui vektorite liitmine:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (4)$$

**Geomeetriline liitmine.** Jõudude geomeetriliseks liitmiseks tuleb konstrueerida jõurööpkülik või jõuhulknurk.

**Analüütiline liitmine.** Jõudude analüütiliseks liitmiseks tuleb kõik liidetavad jõud projekteerida koordinaattelgedele, liita saadud projektsioonid ning seejärel arvutada resultandi moodul ja suunakoosinused.

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix}, & R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy}, & R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz}, \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{R_x}{R}, & \cos \beta &= \frac{R_y}{R}, & \cos \gamma &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

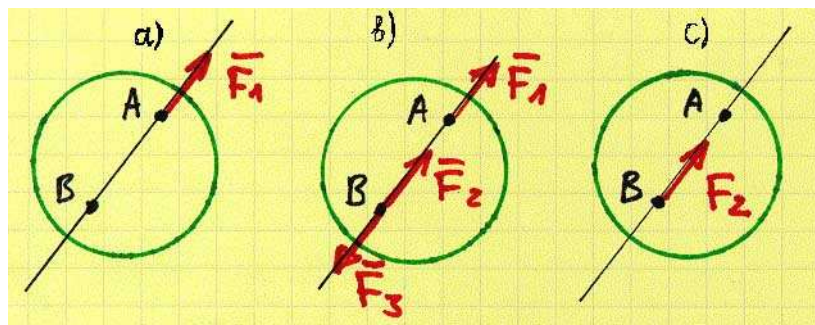
### 3 Staatika aksioomid ja põhiülesanded

**I Tasakaalu aksioom:** Kaks absoluutselt jäigale kehale rakendatud jõudu on tasakaalus siis ja ainult siis, kui neil on ühine mõjusirge ja nad on võrdvastupidised.

**II Superpositsiooni aksioom:** Tasakaalus olevate jõudude lisamine või ärajätmine ei mõjuta keha tasakaalu.

Näitame, et superpositsiooni aksioomi põhjal võib lugeda jõu rakendatuks tema mõjusirge mis tahes punkti.

1. Algselt on punkti  $A$  rakendatud jõud  $\mathbf{F}_1$  (joonis 4 a).
2. Valime jõu  $\mathbf{F}_1$  mõjusirgelt suvalise punkti  $B$ . Vastavalt superpositsiooni aksioomile võime punkti  $B$  lisada tasakaalus olevad jõud  $\mathbf{F}_2$  ja  $\mathbf{F}_3$  nii, et  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$  (joonis 4 b).
3. Kuna jõud  $\mathbf{F}_1$  ja  $\mathbf{F}_3$  on tasakaalus, siis võib nad ära jätta. Seega olemegi asendanud punkti  $A$  rakendatud jõu  $\mathbf{F}_1$  punkti  $B$  rakendatud jõuga  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1$ .



Joonis 4: Järeldus superpositsiooni aksioomist.

**Järeldus:** Jõud on libisev vektor — teda võib lugeda rakendatuks oma mõjusirge mis tahes punkti.

**III Jõurööpküliku aksioom:** Kaks ühte punkti rakendatud jõudu võib asendada ühe jõuga, mis on rakendatud samasse punkti ja kujutab endast antud jõududele ehitatud rööpküliku diagonaali.

Jõudu, millega saab asendada need kaks antud jõudu, nimetatakse **resultandiks**.

**IV Mõju ja vastumõju aksioom (Newtoni III seadus):** Kaks keha mõjutavad teineteist sama mõjusirget omavate võrdvastupidiste jõududega.

**V Jäigastumisaksioom:** Kui deformeeruv keha lugeda deformeerunud olekus absoluutselt jäigaks, siis antud jõusüsteemi puhul keha tasakaal ei muutu.

Näiteks rihm, ahel, nöör jne.



**VI Sidemete aksioom ehk sidemetest vabastatavuse printsiip:** Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana, kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega. (Sidemeid ja sidemetest vabastamist vaadeldakse lähemalt järgmises paragrahvis.)

**Tasakaalus olev jõusüsteem.** Jõusüsteemi, mis mõjudes paigalseisvale kehale ei kutsu esile selle liikumist, nimetatakse *tasakaalus olevaks jõusüsteemiks*.

**Ekvivalentsed jõusüsteemid.** Jõusüsteeme nimetatakse *ekvivalentseteks*, kui neil on sama mõju vaadeldavale kehale või nad on saadud üksteisest, kasutades staatika aksioome.

### Newtoni seadused

I Punktmass on paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, kui talle mõjuvad jõud on tasakaalus

II Punktmassi kiirendus on talle mõjuva jõuga võrdeline ja samasuunaline:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

III Vt. IV aksioom

### Newtoni gravitatsiooniseadus:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \text{ kus } G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

### Staatika põhiülesanded:

1. Antud jõusüsteemi taandamine lihtsaimale kujule.
2. Antud jõusüsteemi tasakaalutingimuste määramine.

## 4 Sidemed, sidemereaktsioonid ja sidemetest vabastatavuse printsiip

**Sidemeteks** nimetatakse keha liikumist kitsendavaid tingimusi. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha. *Näited*

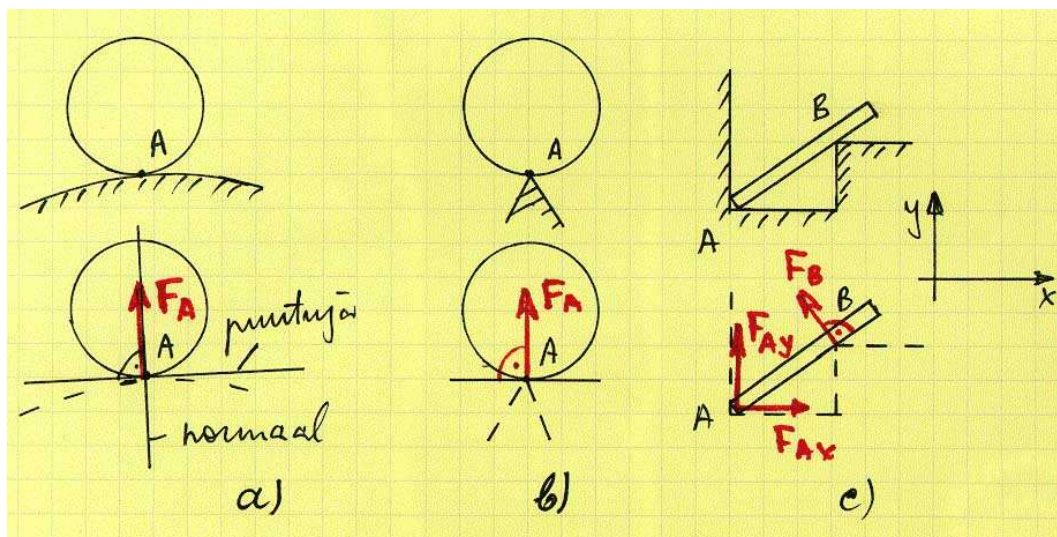
**Vabaks kehaks** nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mis tahes uude asendisse.

**Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud** on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale. Reaktsioonjõudusid nimetatakse ka **passiivseteks jõududeks**, kõiki teisi jõudusid aga **aktiivseteks jõududeks**.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

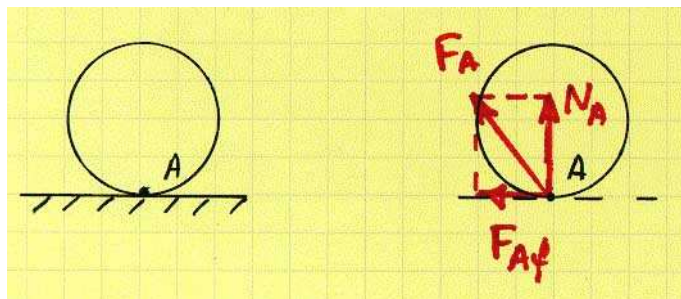
**Sidemetest vabastatavuse printsiip:** Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana, kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

**Sidemete liigid.** Selleks, et määrata kehale mõjuva jõusüsteemi tasakaalutingimusi, see tähendab lahendada üht kahest staatika põhiülesandest, tuleb vaadeldavale kehale rakendada sidemetest vabastatavuse printsiipi. Viimase rakendamiseks on omakorda vaja teada millised reaktsioonjõud vastavad konkreetsele sidemele. Allpool ongi esitatud mehaanikaülesannetes sagedamini esinevad sidemed ja vastavad reaktsioonjõud. Parema loetavuse huvides on enamikel juhtudel joonistele 5–12 kantud vaid reaktsioonjõud.



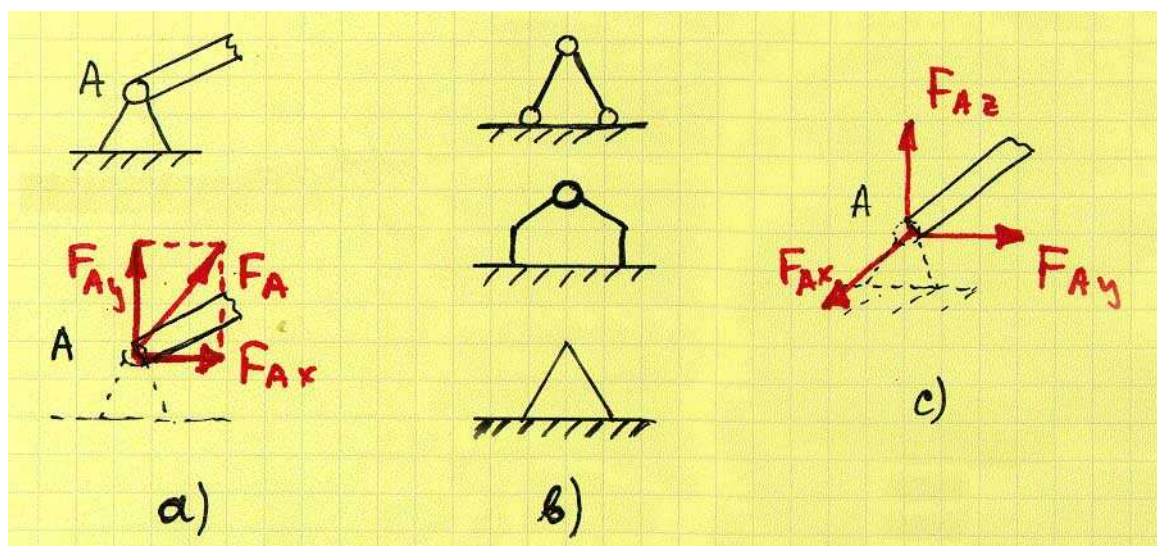
Joonis 5: Sileda pinna reaktsioon

**Sile pind (joonis 5).** Kui keha toetub siledale pinnale, siis hõõrdejõudu ülesande lahendamise puhul arvesse ei võeta. Järelikult on keha liikumine takistatud vaid kokkupuutepunktis määratud ühise normaali sihis ja side tuleb asendada selle ühise normaali sihilise jõuga (joonis 5 a). Tihti nimetatakse sellist sidemereaktsiooni normaalreaktsiooniks ja vastavat sidet vabaks toetuseks. Joonistel 5 b) ja c) on kujutatud mõned sileda pinna reaktsiooni erijuhud.



Joonis 6: Kareda pinna reaktsioon.

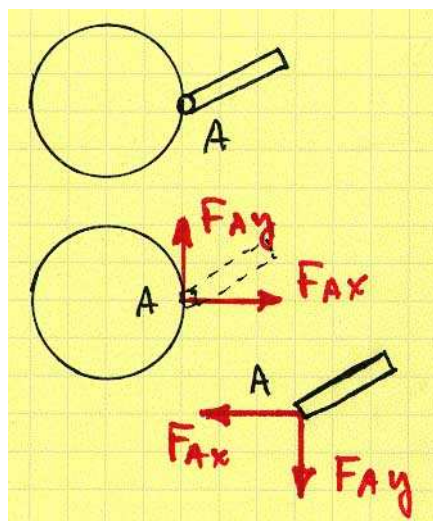
**Kare pind (joonis 6).** Kareda pinna puhul võetakse arvesse ka hõõrdejõud ja seetõttu on keha liikumine takistatud nii normaali, kui puutuja sihis. Summaarne reaktsioonjõud (kareda pinna reaktsioon) on normaalreaktsiooni  $N_A$  ja hõõrdejõu  $F_{Af}$  geomeetiline summa, st.  $F_A = N_A + F_{Af}$ .



Joonis 7: Liikumatu liigend reaktsioon.

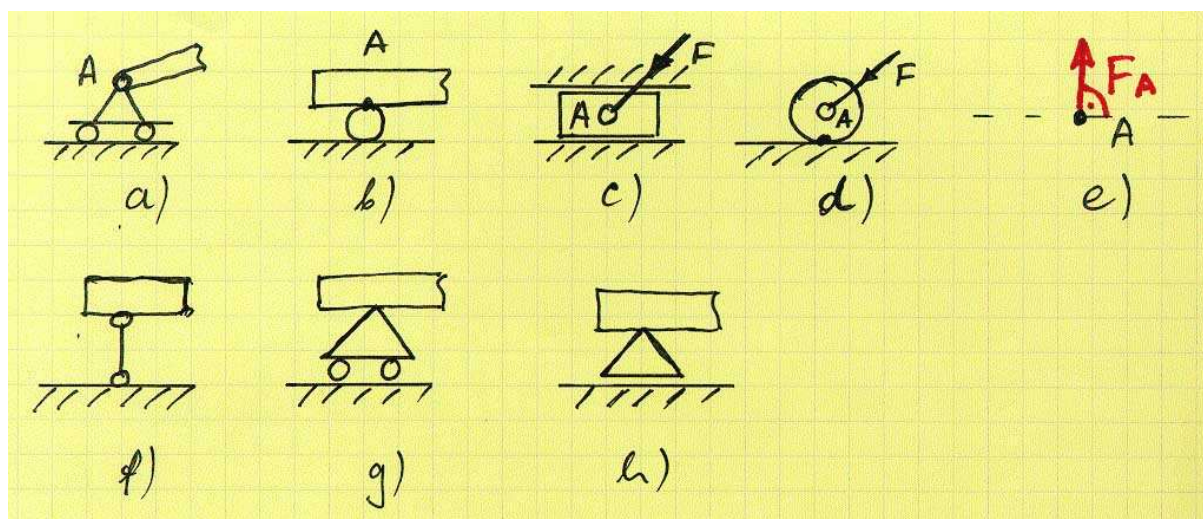
**Liikumatu liigend<sup>1</sup> (joonis 7).** Punktis, kus keha on kinnitatud liikumatu liigendiga, on takistatud kõik siirded (see tähendab, et see punkt peab jääma paigale), kuid lubatud on keha pöörded ümber kinnituspunkti. Liikumatu liigendi reaktsiooni suund sõltub aktiivsetest jõududest ning pole üldjuhul ette teada. Seetõttu väljendatakse ta tavaliselt koordinaattelgede sihiliste komponentide kaudu. Tasapinnalise jõusüsteemi puhul näiteks  $F_A = F_{Ax} + F_{Ay}$  (joonis 7 a) ja ruumilise puhul  $F_A = F_{Ax} + F_{Ay} + F_{Az}$  (joonis 7 c). Vastavaid liigendeid nimetatakse silindriliseks ja sfääriliseks. Kuna ka komponentide  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$  ja  $F_{Az}$  suund pole üldjuhul enne ülesande lahendamist teada, siis märgitakse nad joonisele tavaliselt nii, kuidas on mugavam. Kui ülesande lahendamisel saadi vastavale projektsioonile positiivne väärtus, siis on joonisel näidatud suund õige. Kui aga projektsioonile saadi negatiivne väärtus, siis on reaktsioonjõu tegelik suund vastupidine joonisel näidatule. Liikumatu liigendi tähistamiseks kasutatakse väga erinevaid tingmärke, mõned nend on esitatud joonisel 7 b).

<sup>1</sup>Mõnes õpikus nimetatakse liigendit liigendtoeks ja mõnes šarniiriks



Joonis 8: Liigendi reaktsioon.

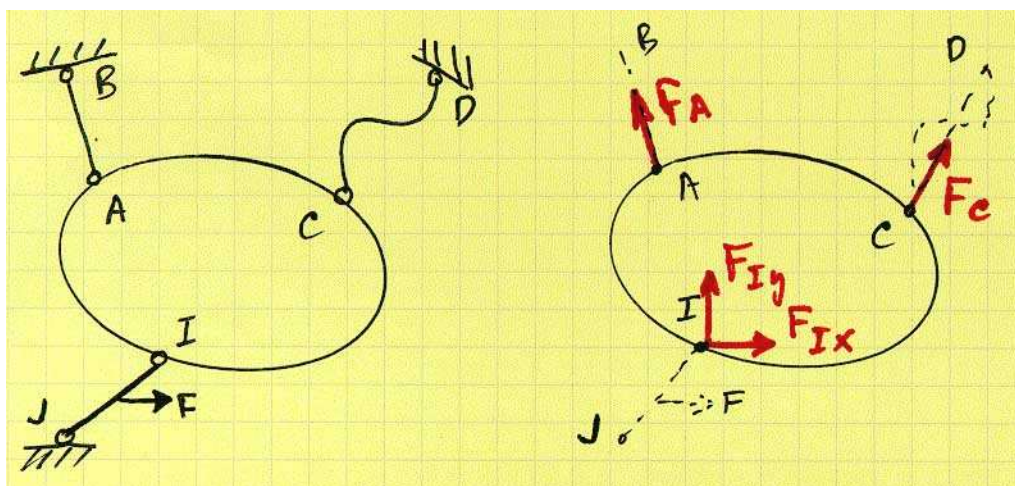
**Liigend (joonis 8).** Kui kaks keha on omavahel ühendatud liigendiga, siis tuleb ühenduspunkti vaadelda kui liikumatut liigendit: ühenduspunktis mõjuva reaktsioonjõu suund pole teada ja joonisele märgitakse kaks koordinaattelgede sihilist komponenti. Seejuures tuleb muidugi jälgida, et oleks rahuldatud Newtoni kolmas seadus: kaks keha mõjutavad teineteist võrdvastupidiste jõududega.



Joonis 9: Liikuva liigendi, rulli, liuguri ja ratta reaktsioonid.

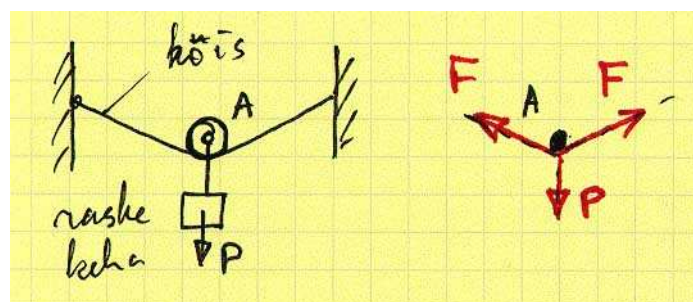
**Liikuv liigend, rull (või kuul), liugur, ratas.** Vastavad sidemed (toed) on kujutatud joonistel 9 a)–d). Selliste sidemete reaktsioonid on analoogsed sileda pinna reaktsiooniga ning on suunatud piki toetuspinna normaali (joonis 9 e). Nagu liikumatu liigendi puhul, pole ka liikuva liigendi tähistamisel erinevate õpikute autorid üksmeelel: joonistel 9 a), f), g) ja h) on toodud neli enamlevinud tähistust.

**Kerge varras (joonis 10).** Selliste sidemete puhul on mõlemas varda otsas liigendid, kuid kuna kerge varda puhul ei võeta arvesse varda kaalu, siis tuleb reaktsioonjõu leidmisel vaadelda kahte juhtu.



Joonis 10: Kerge varda reaktsioon.

1. Varda otspunktide vahel ei mõju jõudusid ega momente: vardad  $AB$  ja  $CD$  joonisel 10. Antud juhul on reaktsioonjõud suunatud piki varda otspunkte ühendavat sirget, sõltumata sellest, kas on tegu sirget või kõvera vardaga.
2. Varda otspunktide vahel mõjub jõud või moment: varras  $IJ$  joonisel 10. Sel juhul on reaktsioonjõud analoogne liikumatu liigendi reaktsiooniga.

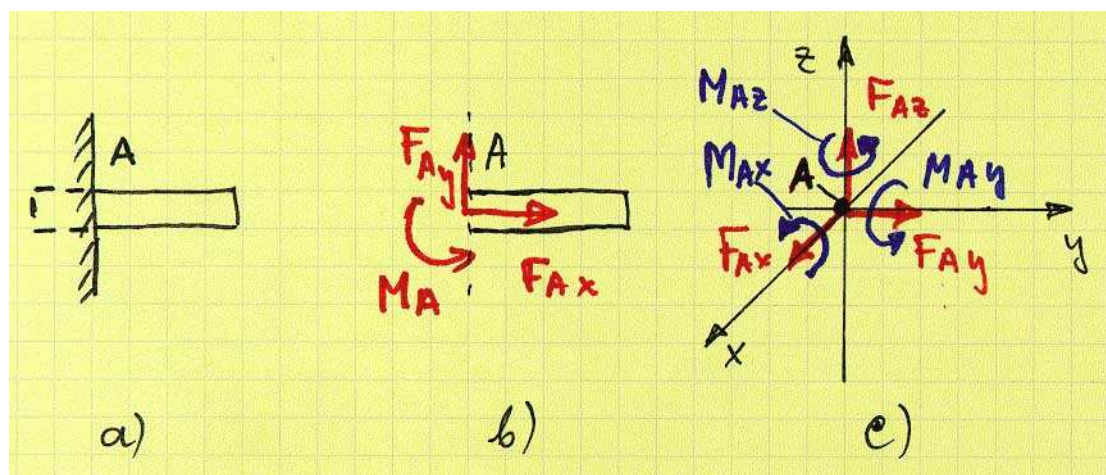


Joonis 11: Painduva ühenduse reaktsioon.

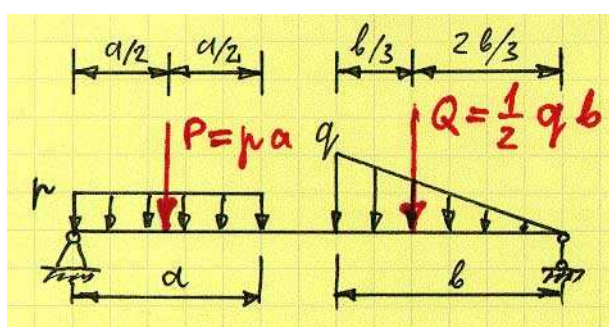
**Painduv ühendus (nöör, köis, tross jms. joonis 11).** Nagu kerge varda puhul, jäetakse ka siin sidet moodustava keha (trossi jms.) kaal tavaliselt arvesse võtmata. Erinevalt kergest vardast, mis võib töötada nii survele kui tõmbele, saab painduv ühendus töötada vaid tõmbele. Reaktsioonjõud on suunatud piki painduvat ühendust.

**Jäik kinnitus<sup>2</sup> (joonis 12).** Vaadeldava sideme puhul on takistatud nii kinnituspunkti siirded kui keha pöörded ümber kinnituspunkti. Näiteks on tala kas seina müüritud või teise keha külge keevitatud. Seega on tasapinnalise jõusüsteemi puhul reaktsioonideks kaks jõu komponenti ja üks moment:  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$  ja  $M_A$  (joonis 12 b) ning ruumilise jõusüsteemi puhul kolm jõu komponenti ja kolm momendi komponenti  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$ ,  $F_{Az}$ ,  $M_{Ax}$ ,  $M_{Ay}$  ja  $M_{Az}$  (joonis 12 c).

<sup>2</sup>Kasutatakse ka terminit kinnistugi



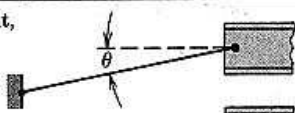
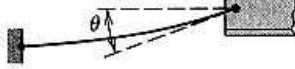
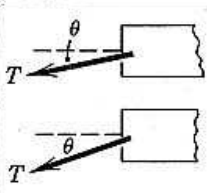




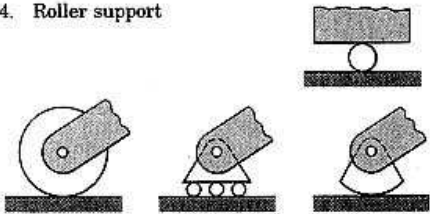
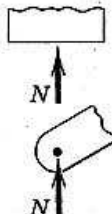
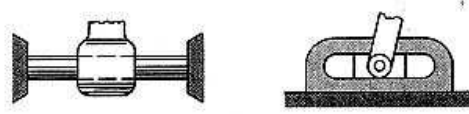
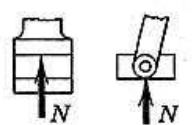
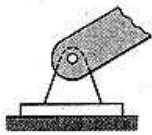
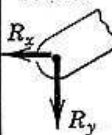
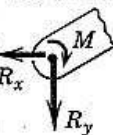
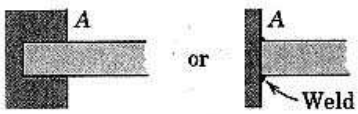
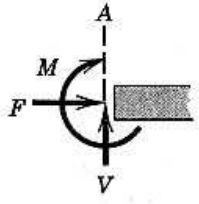
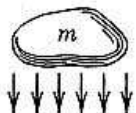
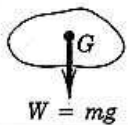

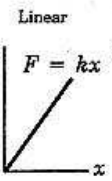
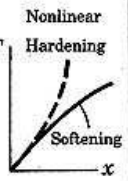
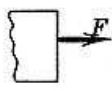
Joonis 12: Jäiga kinnituse reaktsioon.



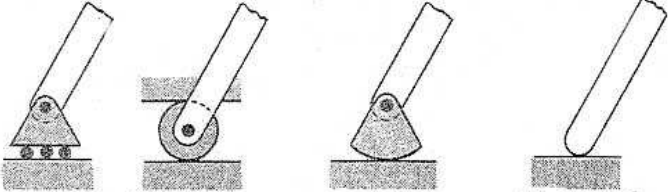
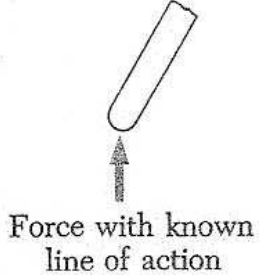
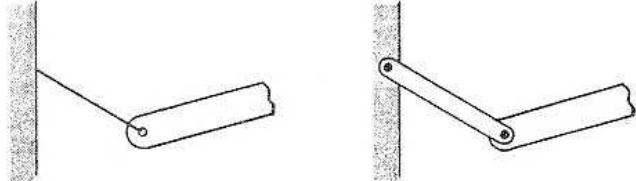
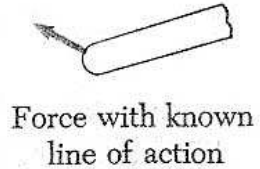
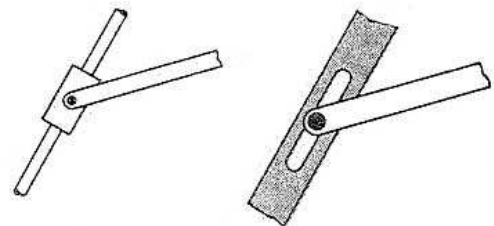
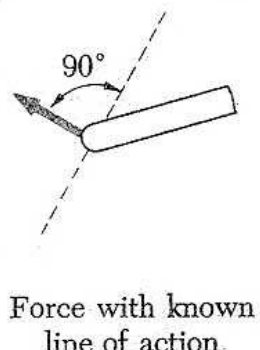

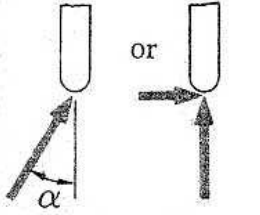
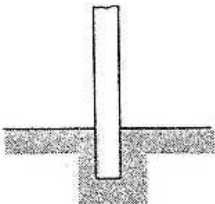
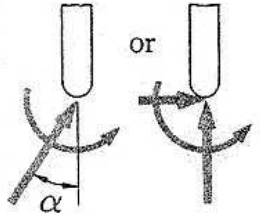
Joonis 13: Jäiga kinnituse reaktsioon.

**Joonkoormus.** Tasapinnaliste staatika ülesannete puhul on sageli mõistlik osa koormusi esitada nn. joonkoormusena. Joonkoormuse mõõtühikuks on N/m. Joonisel 13 on esitatud kaks enamesinevat joonkoormust: ristkülikkoormus ja kolmnurkkoormus. Esimene neist mõjub lõigul pikkusega  $a$  ja tema intensiivsus on  $p$ , teine mõjub lõigul pikkusega  $b$  ja tema maksimaalne intensiivsus on  $q$ . Nooled näitavad koormuse mõjumise suunda. Selliseid joonkoormust iseloomustavaid diagramme (graafikuid) nimetatakse joonkoormuse epüürideks. Staatika ülesannete puhul asendatakse joonkoormused üksikjõududega, mis mõjuvad läbi epüüri pinnakeskme ja mille moodul on võrdne epüüri pindalaga.

**Kokkuvõttes** tuleb öelda, et kuna erinevate riikide ja erinevate koolkondade autorid kasutavad sidemete jaoks erinevaid tähistusi, siis tuleb ülesannete lahendamise puhul lugeda tähelepanelikult ülesande teksti, et oleks võimalik otsustada, milline side on millises keha punktis. Joonistel 14–16 on esitatud mõned inglisekeelsest kirjandusest pärit näited sidemetest ja sidemereaktsioonidest.

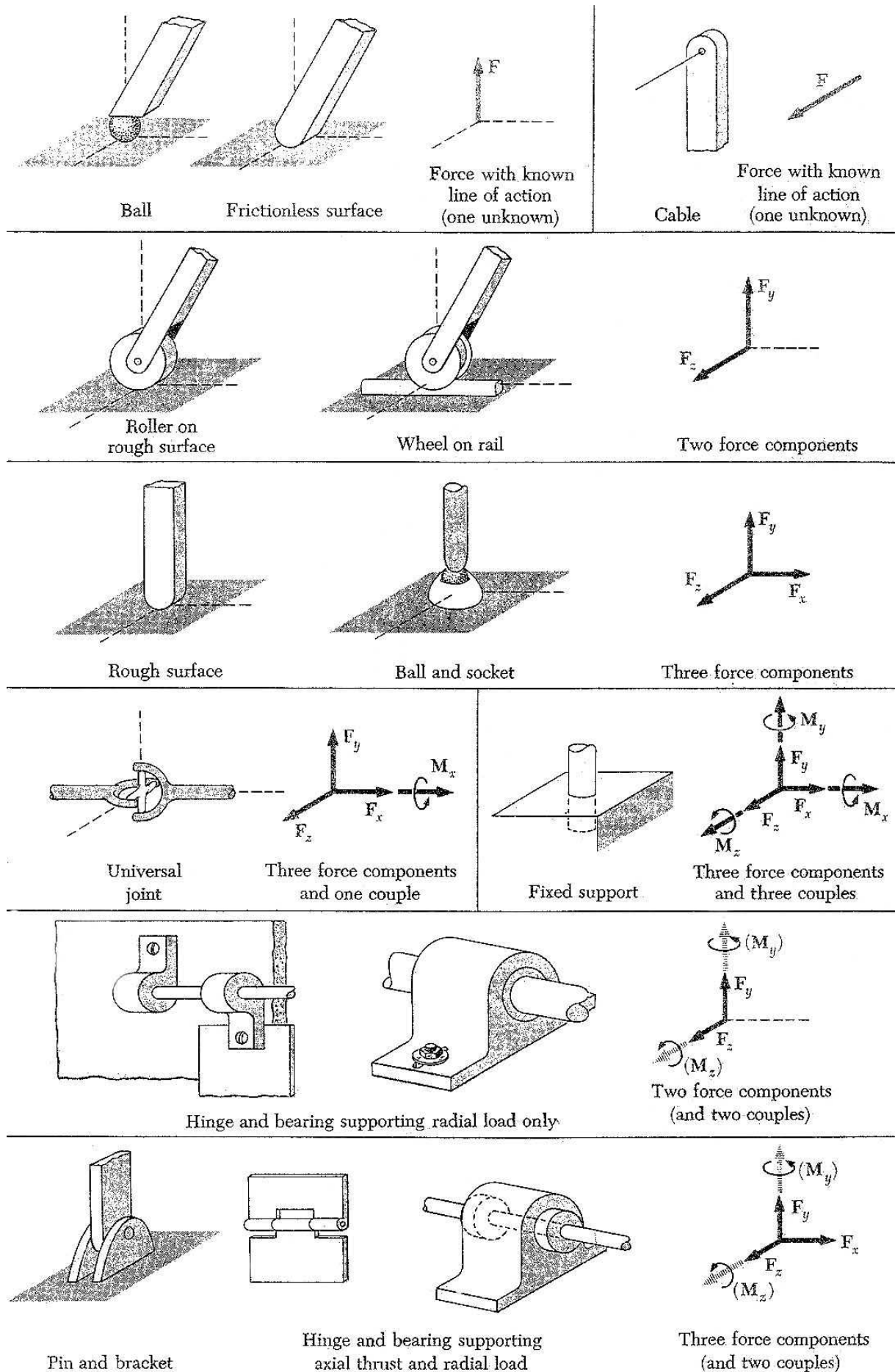
MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to be Isolated
<p>1. Flexible cable, belt, chain, or rope</p> <p>Weight of cable negligible </p> <p>Weight of cable not negligible </p>	 <p>Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.</p>
<p>2. Smooth surfaces</p> 	 <p>Contact force is compressive and is normal to the surface.</p>
<p>3. Rough surfaces</p> 	 <p>Rough surfaces are capable of supporting a tangential component <math>F</math> (frictional force) as well as a normal component <math>N</math> of the resultant contact force <math>R</math>.</p>
<p>4. Roller support</p> 	 <p>Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.</p>
<p>5. Freely sliding guide</p> 	 <p>Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.</p>
<p>6. Pin connection</p> 	<p>Pin free to turn  Pin not free to turn </p> <p>A freely hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the axis; usually shown as two components <math>R_x</math> and <math>R_y</math>. A pin not free to turn may also support a couple <math>M</math>.</p>
<p>7. Built-in or fixed support</p> 	 <p>A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force <math>F</math>, a transverse force <math>V</math> (shear force), and a couple <math>M</math> (bending moment) to prevent rotation.</p>
<p>8. Gravitational attraction</p> 	 <p>The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass <math>m</math> is the weight <math>W = mg</math> and acts toward the center of the earth through the center of mass <math>G</math>.</p>
<p>9. Spring action</p> <p>Neutral position </p> <p>Linear  Nonlinear </p>	 <p>Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness <math>k</math> is the force required to deform the spring a unit distance.</p>

Joonis 14: Näiteid sidemetest ja sidemereaktsioonidest I

Support or Connection	Reaction	Number of Unknowns
 <p>Rollers      Rocker      Frictionless surface</p>	 <p>Force with known line of action</p>	1
 <p>Short cable      Short link</p>	 <p>Force with known line of action</p>	1
 <p>Collar on frictionless rod      Frictionless pin in slot</p>	 <p>Force with known line of action</p>	1
 <p>Frictionless pin or hinge      Rough surface</p>	 <p>Force of unknown direction</p>	2
 <p>Fixed support</p>	 <p>Force and couple</p>	3

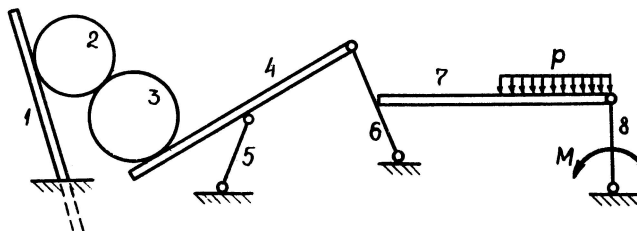
Joonis 15: Näiteid sidemetest ja sidemereaktsioonidest II





Joonis 16: Näiteid sidemetest ja sidemereaktsioonidest III

**Näide.**<sup>3</sup> Vabastada nummerdatud kehad sidemetest ja märkida neile mõjuvad jõud. Kehad 1, 2, 3, 4 ja 7 on rasked, ülejäänud lugeda kergeteks<sup>4</sup>.



Joonis 17: Näide: jõudude märkimine

<sup>3</sup>Ülesande lahendus esitatakse loengus.

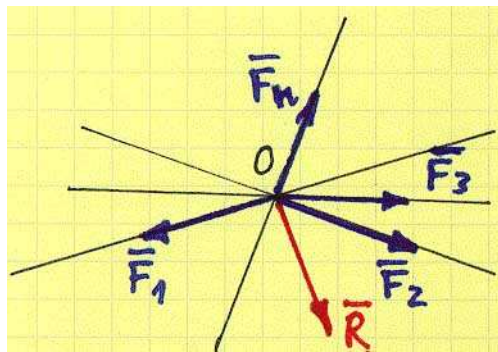
<sup>4</sup>Raskete kehade puhul tuleb võtta arvesse nende kaal, kuid kergete puhul mitte.

## 5 Koonduva jõusüsteemi tasakaal

Kõigepealt tuletame meelde koonduv jõusüsteemi ja jõusüsteemi resultandi definitsioonid.

Jõusüsteemi nimetatakse *koonduvaks*, kui kõikide vaadeldavasse süsteemi kuuluvate jõudude mõjusirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

*Jõusüsteemi resultant* on (üks) jõud, mis on ekvivalentne vaadeldava jõusüsteemiga. (Resultandi mõiste juurde tuleme tagasi 8. peatükis, kui käsitleme jõusüsteemi taandamist.)



Joonis 18: Koonduva jõusüsteemi asendamine resultandiga.

**Teoreem.** Koonduv jõusüsteem on ekvivalentne resultandiga, mis on rakendatud vaadeldava süsteemi jõudude mõjusirgete lõikepunkti.

**Tõestus.** Vaatleme  $n$  jõust koosnevat koonduvat jõusüsteemi. Lähtudes superpositsiooniaksioomist (täpsemalt öeldes järeldusest, et jõud on libisev vektor) rakendame kõik jõud nende mõjusirgete lõikepunkti  $O$  (joonis 18). Seejärel rakendame korduvalt jõurööpküliliku aksioomi:

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{R}_{123} = \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_{12}, \quad \mathbf{R}_{1234} = \mathbf{F}_4 + \mathbf{R}_{123}, \quad \dots \quad \mathbf{R}_{1\dots n} = \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Seega olemegi asendanud  $n$  jõust koosneva koonduva jõusüsteemi ühe jõuga, mis on rakendatud punkti  $O$ .

————— *q. e. d.* —————

**Teoreem.** Koonduv jõusüsteem on tasakaalus siis ja ainult siis, kui tema resultant on võrdne nulliga (nullvektoriga)

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0. \quad (6)$$

**Tõestus.** Antud juhul tuleb tõestada nii tarvilikkus kui piisavus.

*Piisavuse* tõestamiseks tuleb näidata, et kui koonduv jõusüsteem on tasakaalus, siis on tema resultant võrdne nulliga.

Kui tähistada

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{F}_i, \quad (7)$$

siis avaldub jõusüsteemi resultant kujul

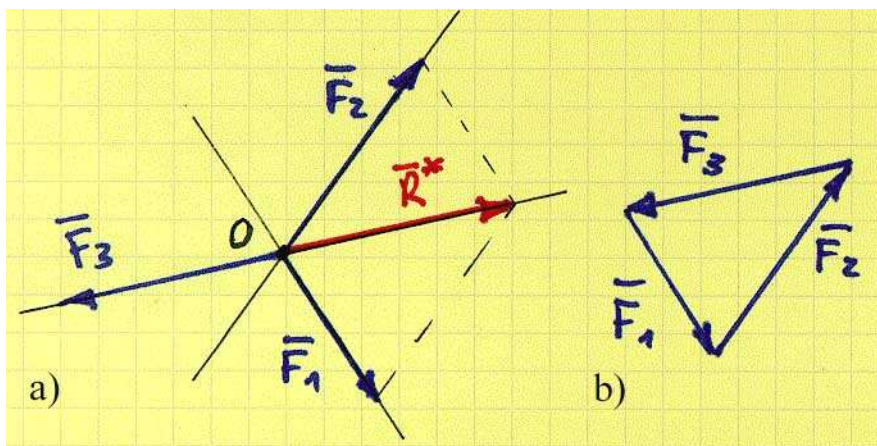
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^* + \mathbf{F}_n, \quad (8)$$

st. kahe jõu summana. Kuna jõusüsteem on tasakaalus, siis vastavalt tasakaalu aksioomile peavad need kaks jõudu olema võrdvastupidised ja omama sama mõjusirget. Järelikult  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* + \mathbf{F}_n = 0$  ja piisavus on tõestatud.

*Tarvilikkuse* tõestamiseks näitame, et kui koonduva jõusüsteemi resultant on võrdne nulliga, siis on koonduv jõusüsteem tasakaalus.

Tuleme tagasi avaldiste (7) ja (8) juurde. Kuna  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* + \mathbf{F}_n = 0$ , siis vastavalt tasakaalu aksioomile peavad jõud  $\mathbf{R}^*$  ja  $\mathbf{F}_n$  olema tasakaalus.

—————*q.e.d.*—————



Joonis 19: Teoreem kolmest mitteparalleelsest jõust.

**Teoreem kolmest mitteparalleelsest jõust<sup>5</sup>** Kui kolm mitteparalleelset jõudu on tasakaalus, siis nad moodustavad tasapinnalise koonduva jõusüsteemi.

**Tõestus.** Vaatleme kolme jõudu  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  ja  $\mathbf{F}_3$  (joonis 19 a), mis vastavalt eeldusele moodustavad tasakaalus oleva jõusüsteemi. Seega peab nende jõuvektorite summa olema null. Teisisõnu, nende kolme jõu geomeetrilisel liitmisel saame kolmnurga (joonis 19 b). Kuna kolmnurk omakorda määrab tasandi, siis on tegu tasapinnalise jõusüsteemiga.

Tähistame jõudude  $\mathbf{F}_1$  ja  $\mathbf{F}_2$  mõjusirgete lõikepunkti  $O$  (joonis 19 a). Vastavalt jõurööpküliku aksioomile võime jõud  $\mathbf{F}_1$  ja  $\mathbf{F}_2$  asendada ühe jõuga  $\mathbf{R}^* = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ . Kuna jõusüsteem on tasakaalus, siis  $\mathbf{R}^* + \mathbf{F}_3 = 0$ . Tasakaaluaksioomi põhjal peavad seega jõud  $\mathbf{R}^*$  ja  $\mathbf{F}_3$  omama sama mõjusirget ja olema võrdvastupidised. Järelikult peab ka jõu  $\mathbf{F}_3$  mõjusirge läbima punkti  $O$ . Seega moodustavad jõud  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  ja  $\mathbf{F}_3$  tasapinnalise koonduva jõusüsteemi.

—————*q.e.d.*—————

<sup>5</sup>Erinevad õpikud annavad sellele teoreemile väga erinevaid sõnastusi

**NB!** Antud teoreemi pöördteoreem ei kehti!

**Tasakaalu analüütilised tingimused.** Projekteeritme koonduva jõusüsteemi tasakaalutingimuse (6) kolmele koordinaatteljele, näiteks Descartes'i ristkoordinaatidele  $x, y$  ja  $z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

Tulemuseks ongi koonduva jõusüsteemi tasakaalu analüütilised tingimused — koonduv jõusüsteem on tasakaalus siis ja ainult siis, kui vaadeldavate jõudude projektsioonide summad kõigil kolmel koordinaatteljel võrduvad nulliga.

**Märkus.** Need kolm koordinaattelge ei pruugi olla üksteisega risti, kuid nad ei tohi asuda ühel ja samal tasandil ja ükski paar kolmest ei tohi olla paralleelne telgede paar.