

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

DÜNAAMIKA

Loengukonspekt EMR5170, EMR0020, 4,0 AP

Tallinn 2003/2004/2005

Eessõna

Käesolev loengukonspekt on mõeldud kasutamiseks Tallinna Tehnikaülikooli tehnilise füüsika eriala üliõpilastele dünaamika (EMR5170 ja EMR0020) kursuse õppimisel. Õppeaine laiendatud programm, «Dünaamika, EMR5170 JA EMR0020 laiendatud programm 2005/06 õ./a.» (vt. <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>), kujutab endast antud loengukonspekti lahutamatu lisa. Seal on esitatud õppeaine eesmärgid, maht, eeldused ja soovitatav kirjandus ning kirjeldatud antud aine õppimisel kehtivat töökorraldust.

Kuigi loengukonspekti käesoleva aasta versioon sisaldab palju jooniseid, valemite tuletuskäike ja teoreemide tõestusi, pole minu eesmärgiks olnud mitte uue õpiku vaid loengukonspekti kirjutamine. Kuna taolise loengukonspekti olemasolu korral on üliõpilased vabastatud keskaegse munga tasemel tööst, st. definitsioonide ja teoreemide järjekordsest ümberkirjutamisest, saab põhitähelepanu pöörata definitsioonide ja teoreemide sisu avamisele, valemite tuletuskäikudele, teoreemide tõestustele ning näiteülesannetele. Seega, tervikliku käsitluse saamiseks õppeainest dünaamika (programmi ulatuses) tuleb külastada ka loenguid ja neid vajalikus ulatuses konspekteerida.

Loengukonspekti koostamisel on kasutatud praktiliselt kõiki ülalnimetatud laiendatud programm kirjanduse loetelus esitatud õpikuid ja õppevahendeid. Kursuse ülesehitus tugineb Tallinna Tehnikaülikoolis teoreetilise mehaanika õpetamisel väljakujunenud traditsioonidele ja minu enda rohkem kui viieteistkümnepäevasele õpetamiskogemusele Tallinna Tehnikaülikoolis. Kahjuks aga puudub sellele struktuurile vastav väga hea eestikeelne õpik. Seetõttu on põhiõpikuna soovitatud kasutada Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi õpikut «Teoreetiline mehaanika». Pean seda parimaks eestikeelseks õpikuks antud valdkonnas, sest definitsioonid ja teoreemid on seal sõnastatud lühidalt ja selgelt ning käsitletavate probleemide olemus on avatud põhjalikult. Teised eestikeelsed õpikud ja õppevahendid jäävad selles osas Lepiku ja Rootsi õpikust kaugemale maha. Selguse poolest järgmine on minu arvamuse järgi vene keelest tõlgitud teoreetilise mehaanika õpik, mille autoriks on Semjon Targ.

Näiteülesandeid on loengukonspekti käesolevas versioonis mõned üksikud. Seetõttu tuleks kontrolltöödeks ja eksamiksi õppimisel ning kodutööde tegemisel kasutada harjutustundide materjale ning laiendatud programmi kirjanduse loetelus meetoodiliste abimaterjalidena esitatud õppevahendeid. Harjutustundides lahendatavad ülesanded on valdavalt esitatud ülesannete kogus — A. Salupere. Dünaamika ülesanded. Tallinn 2003/2004/2005, <http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html>.

Andrus Salupere

Sissejuhatus

Mehaanika on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.

Liikumisena ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega jäigalt koordinaatsüsteem. Tulemust nimetatakse **taustsüsteemiks**.

Teoreetiline mehaanika ehk absoluutselt jäiga keha mehaanika ehk klassikaline mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimet. Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks* ja *dünaamikaks*.

Absoluutselt jäiga keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne. Kõik kehad, mida me antud kursuses vaatleme, loeme **absoluutselt jäikadeks**.

Staatika uurib: 1) kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja 2) jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

Dünaamika Käesolev dünaamika kursus koosneb kolmest osast: 1) *kinemaatika*; 2) *klassikaline dünaamika* (punktmasside ja jäikade kehade dünaamika); 3) *analüütiline mehaanika*

Kinemaatika uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.

Klassikaline dünaamika uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimet.

Analüütiline mehaanika baseerub integraal- ja diferentsiaalarvutusel ning tegeleb mehaanikaülesannete üldiste lahendusmeetodite leidmisega. Selliste meetodite saamiseks rakendatakse tihti variatsioonarvutust.

Punktmassiks nimetatakse materiaalselt keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

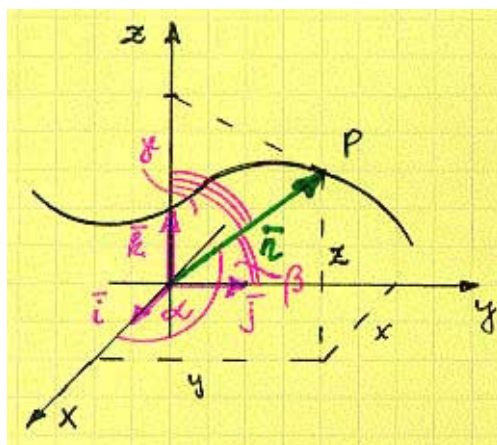
Aeg loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

Peatükk 1

Kinemaatika

1.1 Punkti liikumise määramisviisid

Trajektor. Punkti **trajektoriks** nimetatakse pidevat joont, mille joonistab liikuv punkt taustsüsteemi suhtes (joonis 1.1).



Joonis 1.1: Punkti kohavektor ja Descartes'i ristkoordinaadid.

Punkti liikumisseaduseks nimetatakse eeskirja, mis määrab punkti asukoha igal aja-
hetkel.

Kolm viisi punkti liikumise määramiseks.

Vektoriaalne viis. Punkti asukoht ruumis määratakse tema kohavektoriga (joonis 1.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1.1)$$

Koordinaatviis. Punkti asukoht ruumis määratakse tema kolme koordinaadiga (joonis 1.1). Näiteks Descartes'i ristkoordinaatide (DRK) puhul

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

On ilmselge, et punkti kohavektor ja tema moodul avalduvad läbi DRK kujul

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.3)$$

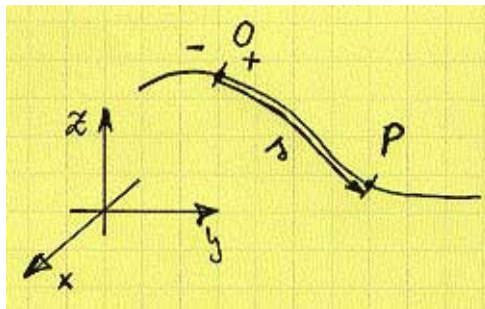
ning kohavektori suunakoosinused kujul

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}. \quad (1.4)$$

Loomulik viis. Punkti asukoht ruumis määratakse tema loomuliku koordinaadiga (joonis 1.2) —

$$s = s(t). \quad (1.5)$$

Loomuliku viisi puhul peab punkti trajektoori teada olema. Punkti loomulik koordinaat ja tema poolt hetkeks t läbitud teepikkus üldjuhul ei ühti.



Joonis 1.2: Loomulik koordinaat.

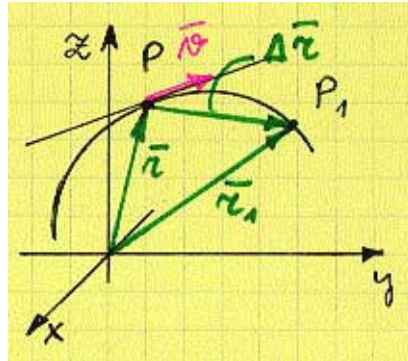
Elementaarkaare pikkuse ruut $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Korrutame ja jagame viimase võrduse parema poole suurusega dt^2 , võtame ruutjuure, integreerime ning saame seose loomuliku koordinaadi ja DRK vahel:

$$s = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1.6)$$

1.2 Punkti kiirus ja kiirendus

1.2.1 Punkti kiirus

Vaatleme liikuvat punktmassi (joonis 1.3), mis asub hetkel t ruumipunktis P ja hetkel $t + \Delta t$ ruumipunktis P_1 . Vastavaid kohavektoreid tähistame \mathbf{r} ja \mathbf{r}_1 . Seega on massipunkti siire ajavahemikus Δt määratud siirdevektoriga $\Delta \mathbf{r}$.



Joonis 1.3: Punkti kiirus.

Suhet $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ nimetatakse *punkti keskmiseks kiiruseks ajavahemikus Δt* . Minnes piirile $\Delta t \rightarrow 0$ saame *punkti kiiruse hetkel t* —

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.7)$$

Kuna vaadeldavas piirprotsessis muutub trajektoori lõikaja PP_1 trajektoori puutujaks punktis P , siis on kiirusvektor suunatud piki trajektoori puutujat liikumise suunas.

Kokkuvõte

Punkti kiiruseks nimetatakse tema kohavektori esimest tuletist aja järgi.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.8)$$

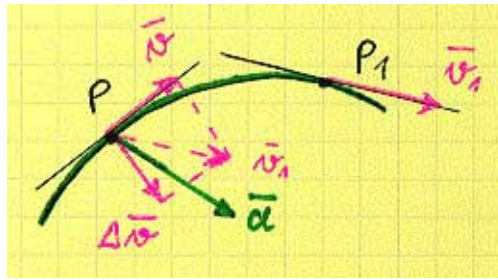
Kiirus on vektor, mis

- on suunatud piki trajektoori puutujat liikumise suunas;
- iseloomustab nii kohavektori pikkuse kui suuna muutumist.

1.2.2 Punkti kiirendus

Vaatleme jällegi liikuvat punktmassi (joonis 1.4), mis asub hetkel t ruumipunktis P ja hetkel $t + \Delta t$ ruumipunktis P_1 . Vastavaid kiirusvektoreid tähistame \mathbf{v} ja \mathbf{v}_1 . Seega kiiruse muut ajavahemikus Δt on $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$. Suhet $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ nimetatakse *punkti keskmiseks kiirenduseks ajavahemikus Δt* . Minnes piirile $\Delta t \rightarrow 0$ saame *punkti kiirenduse hetkel t* —

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.9)$$



Joonis 1.4: Punkti kiirendus.

Kokkuvõte

Punkti kiirenduseks nimetatakse kiirusvektori esimest tuletist aja järgi ehk tema kohavektori teist tuletist aja järgi.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1.10)$$

Kiirendus on vektor, mis

- on suunatud trajektoori sisse (v.a. sirgjooneline liikumine);
- iseloomustab kiiruse muutumist (nii kiirusvektori pikkuse kui suuna muutumist).

1.2.3 Kiirus ja kiirendus Descartes'i ristkoordinaatides

Lähtume seosest (1.3) ning kiiruse ja kiirenduse definitsioonidest (1.8) ja (1.10). Seega

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (1.11)$$

ja

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (1.12)$$

Viimase kahe valemi põhjal toome sisse järgmised mõisted (joonis 1.5):

kiirusvektori projektsioonid: $v_x = \dot{x}$ $v_y = \dot{y}$ $v_z = \dot{z}$;

kiirusvektori komponendid: $\mathbf{v}_x = \dot{x}\mathbf{i}$ $\mathbf{v}_y = \dot{y}\mathbf{j}$ $\mathbf{v}_z = \dot{z}\mathbf{k}$;

kiirendusvektori projektsioonid: $a_x = \ddot{x}$ $a_y = \ddot{y}$ $a_z = \ddot{z}$;

kiirendusvektori komponendid: $\mathbf{a}_x = \ddot{x}\mathbf{i}$ $\mathbf{a}_y = \ddot{y}\mathbf{j}$ $\mathbf{a}_z = \ddot{z}\mathbf{k}$.

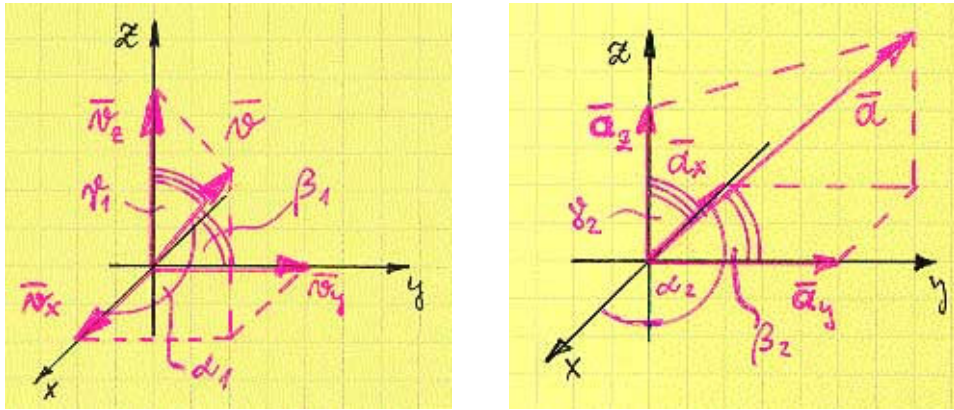
Analoogselt alajaotusega 1.1 saame nüüd seosed kiirus- ja kiirendusvektorite moodulite ning nende DRK-s esitatud projektsioonide vahel kujul

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (1.13)$$

ja

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (1.14)$$

Vastavad suunakoosinused (joonis 1.5)



Joonis 1.5: Kiirus- ja kiirendusvektori komponendid Descartes'i ristkoordinaatides

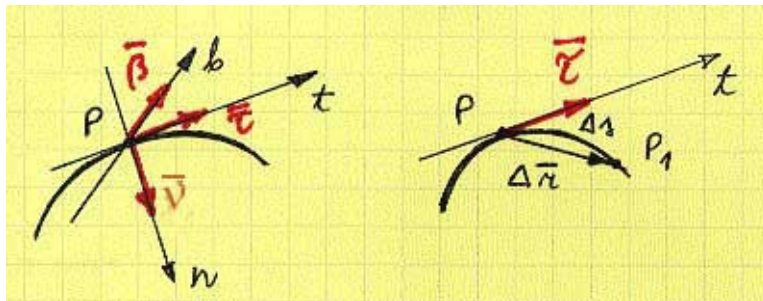
$$\cos \alpha_1 = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{\dot{z}}{v} \quad (1.15)$$

ja

$$\cos \alpha_2 = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{\ddot{z}}{a}. \quad (1.16)$$

1.2.4 Kiirus ja kiirendus loomulikes koordinaatides

Loomulik teljestik. Toome sisse parema käe teljestiku $t-n-b$, kus telg t on puutuja, n peanormaali ja b binormaali sihis (joonis 1.6). Vastavaid ühikvektoreid tähistatakse tavaliselt τ , ν ja β . Loomulik teljestik liigub koos vaadeldava punktiga.



Joonis 1.6: Loomulik teljestik.

Koordinaattasandid: $t-n$ — kooldumistasand, $t-b$ — sirgestumistasand, $b-n$ — normaaltasand.

Kiirus. Lähtudes kiiruse definitsioonist

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \stackrel{ds}{=} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}} \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}}$$

Seega,

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}. \quad (1.17)$$

Viimase valemi põhjal on kiirusvektori moodul ja projektsioon t teljel vastavalt

$$v = |\dot{s}| \text{ ja } v_t = \dot{s}. \quad (1.18)$$

Kiirendus. Valemi (1.17) põhjal

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\dot{\boldsymbol{\tau}}.$$

Viimase avaldise pp. esimese liikmega on kõik selge — \ddot{s} on kiirenduse projektsioon t -teljel. Teise liikmega on lugu pisut keerukam. Saab näidata¹, et $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{s}\boldsymbol{\nu}/\rho$, kus ρ on trajektoori kõverusraadius.

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{\nu} \quad (1.19)$$

Vastavaid kiirendusvektori komponente

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} \text{ ja } \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{\nu} \quad (1.20)$$

nimetatakse **puutekiirenduseks** (tangentsiaalkiirenduseks) ja **normaalkiirenduseks**. Vastavad projektsioonid

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}_t \text{ ja } a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.21)$$

Puutekiirendus \mathbf{a}_t iseloomustab kiirusvektori mooduli muutumist ja normaalkiirendus \mathbf{a}_n kiirusvektori suuna muutumist.

Kuna kiirenduse projektsioon b -teljel (binormaalil) on null, siis kiirenduse moodul

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.22)$$

Seos DRK-ga Järgneva valemi tuletamise puhul eeldatakse, et kiirusvektor \mathbf{v} ja baasivektor $\boldsymbol{\tau}$ on samasuunalised, st., et kiiruse projektsioon puutujal on positiivne ja $v_t = v$. Sellisel juhul vastab positiivne puutekiirendus kiirenevale liikumisele ja negatiivne puutekiirendus aeglustuvale liikumisele. Valemi (1.21) põhjal

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}_t = \dot{v} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \dots = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{v}.$$

Kokku oleme saanud valemi

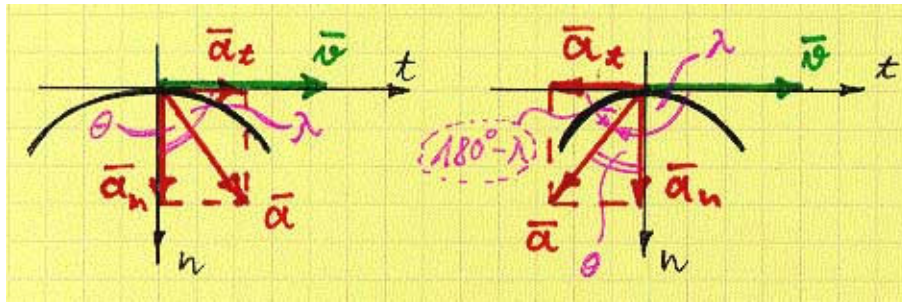
$$a_t = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{v}, \quad (1.23)$$

mis koos valemiga (1.22) seob kiirenduse projektsioonid loomulikel koordinaatidel DRK-ga.

Nurk kiirus- ja kiirendusvektori ning kiirendusvektori ja trajektoori kõverusraadiuse vahel. Tähistame nurga kiirus- ja kiirendusvektori vahel λ (joonis 1.7). Kiireneva liikumise puhul

$$\tan \lambda = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\dot{s}^2}{\rho\ddot{s}} \quad (1.24)$$

¹Vt. näiteks Ülo Lepik ja Lembit Roots "Teoreetiline mehaanika"



Joonis 1.7: Kiirus- ja kiirendusvektori vaheline nurk.

ja aeglustuva liikumise puhul

$$\tan(180^\circ - \lambda) = \left| \frac{a_n}{a_t} \right| = \frac{\dot{s}^2}{\rho |\dot{s}|}. \quad (1.25)$$

Nurk kiirendusvektori ja trajektoori kõverusraadiuse vahel θ on leitav valemist

$$\tan |\theta| = \left| \frac{a_t}{a_n} \right| = \frac{\rho |\dot{s}|}{\dot{s}^2}. \quad (1.26)$$

1.2.5 Erijuhud

Liikumisi võib eristada trajektoori kuju või liikumise iseloomu järgi.

Trajektoori järgi:

- Sirgjooneline liikumine
- Kõverjooneline liikumine
- Tasapinnaline liikumine
- Ruumiline liikumine

Liikumise iseloomu järgi:

- Ühtlane liikumine
- Ühtlaselt muutuv liikumine
- Kiirenev liikumine
- Aeglustuv liikumine

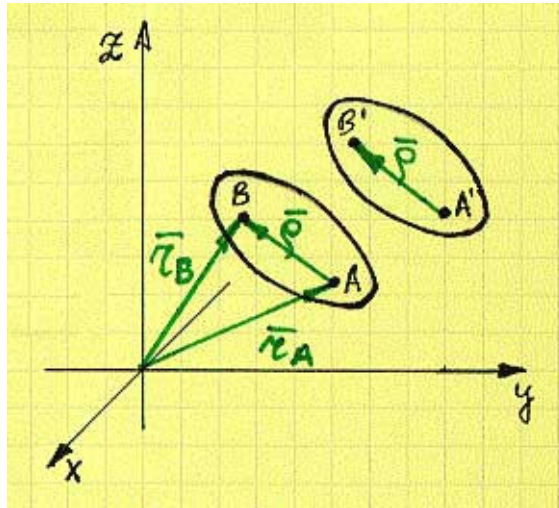
1.2.6 Kokkuvõte

- Liikumisseadus.
- Kiiruse muutumise seadus.
- Kiirenduse muutumise seadus.
- Kiirus ja kiirendus on vektoriaalsed suurused.
- Tüüpilised ülesanded põhinevad diferentseerimisel ja integreerimisel.

1.3 Jäiga keha rööpliikumine

Rööpliikumiseks nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul iga kehaga muutmatault seotud sirge jääb kogu liikumise kestel oma algsihiga paralleelseks.

Teoreem: Rööpliikumisel liiguvad kõik keha punktid võrdse kiirusega ja võrdse kiirendusega.



Joonis 1.8: Keha rööpliikumine.

Tõestus: Vaatleme keha kahte meelevaldset punkti A ja B kohavektoritega \mathbf{r}_A ja \mathbf{r}_B (joonis 1.8). Kui tähistame vektori $\overline{AB} = \boldsymbol{\rho}$, siis

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}. \quad (1.27)$$

Kuna tegu on jäiga keha rööpliikumisega, siis $\dot{\boldsymbol{\rho}} = 0$ ja

$$\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_B}_{\mathbf{v}_B} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_A}_{\mathbf{v}_A}.$$

Seega

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \quad \text{ja} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A. \quad (1.28)$$

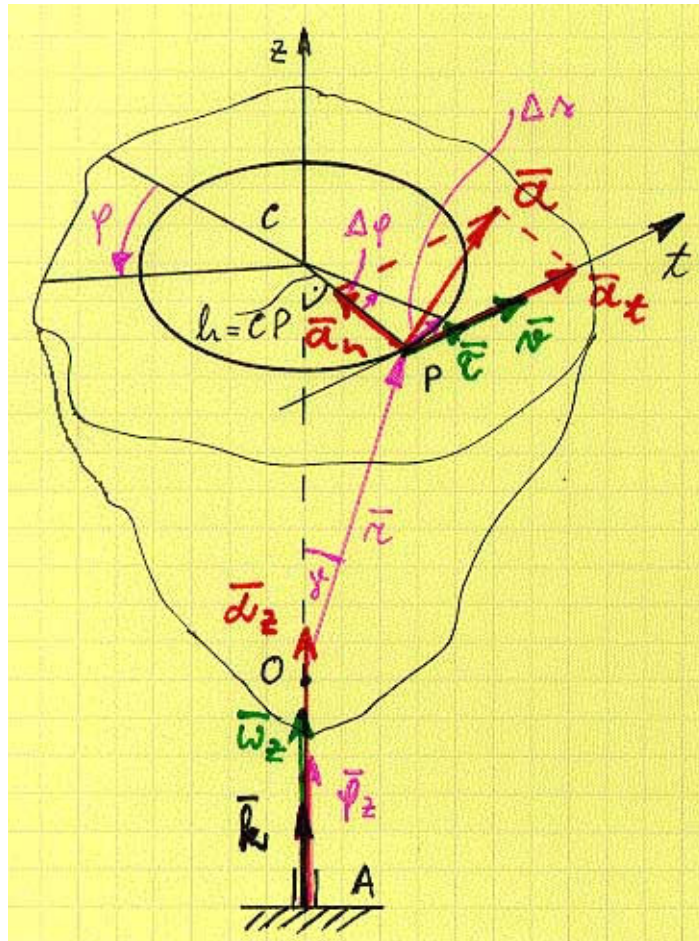
Teoreem on tõestatud, sest valem (1.28) kehtib suvaliste punktide A ja B puhul.

Järeldus: Rööpliikumise puhul kirjeldab ühe punkti liikumine kogu keha liikumise.

1.4 Jäiga keha pöörlemine

1.4.1 Nurkkiirus ja nurkkiirendus

Pöörlemiseks nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kaks kehaga muutu-
matult seotud punkti jäävad kogu liikumise kestel paigale.



Joonis 1.9: Jäiga keha nurkkiirus ja nurkkiirendus ning pöörleva keha punktide kiirus ja kiirendus.

Need kaks liikumatut punkti määravad **pöörlemistelje**. Pöörlemistelg ei pruugi läbida vaadeldavat keha.

Kõik vaadeldava keha punktid, mis asuvad väljaspool pöörlemistelge liiguvad tasapindades, mis on risti pöörlemisteljega. Nende trajektoorideks on ringjooned keskpunktiga pöörlemisteljel.

Keha asendi pöörlemisel määrab ära **pöördenurk** (pöördenurga vektor) φ . Vektor φ määrab seega nii pöörde suuruse kui suuna (joonis 1.9).

Keha pöörlemisseaduseks nimetatakse pöördenurga muutumise eeskirja $\varphi = \varphi(t)$. Kui pöörlemine toimub ümber z telje, siis võib pöörlemisseaduse esitada kujul

$$\varphi = \varphi(t) = \varphi_z(t)\mathbf{k} \quad (1.29)$$

Nurkkiiruseks nimetatakse pöördenurga vektori esimest tuletist aja järgi.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (1.30)$$

Kuna tegu on vektoriga, siis määrab nurkkiirus nii pöörlemise suuna kui selle kui kiiresti keha pöörleb (joonis 1.9).

Nurkkiirenduseks nimetatakse nurkkiiruse vektori esimest tuletist aja järgi ehk pöördenurga vektori teist tuletist aja järgi (joonis 1.9).

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (1.31)$$

Erijuhud. Analoogselt punkti liikumisega saab eristada

- ühtlast pöörlemist,
- ühtlaselt muutuvat pöörlemist,
- kiirenevat pöörlemist,
- aeglustuvat pöörlemist.

1.4.2 Pöörleva keha punktide kiirused

Vaatleme pöörleva keha meelevaldset punkti P (joonis 1.9). Selle punkti trajektooriks on ringjoon, mille keskpunkt C asub pöörlemisteljel z . Vaatleme vaid seda keha tasapinda, kus asub punkti P trajektoor. Valime pöörlemistelje suvalise punkti O koordinaatide alguseks ja tõmbame sealt punkti P kohavaktori \mathbf{r} . Tähistame punkti P kauguse pöörlemisteljest $CP = h$. Pöörlemise suund on määratud nurkkiirusvektoriga $\boldsymbol{\omega}$. Eesmärgiks on leida punkti P kiirus \mathbf{v} .

Ajavahemikus Δt teeb keha elementaarpöörde $\Delta\varphi_z$ ja punkt P läbib trajektooril teepikkuse Δs . Kiiruse projektsioon loomulikul teljel t avaldub seega kujul

$$v_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_z h}{\Delta t} = \dot{\varphi}_z h = \omega_z h \quad (1.32)$$

ning kiirusvektor

$$\mathbf{v} = \dot{\varphi}_z h \boldsymbol{\tau} = \omega_z h \boldsymbol{\tau}. \quad (1.33)$$

Vaatleme nüüd vektorkorrutist $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (joonised 1.10 ja 1.9). Osutub, et $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ja kiirus \mathbf{v} on samasuunalised ning vektorkorrutise moodul

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \sin \gamma = \omega h = v. \quad (1.34)$$

Seega, punkti kiirus

$$\mathbf{v} = \omega_z h \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.35)$$

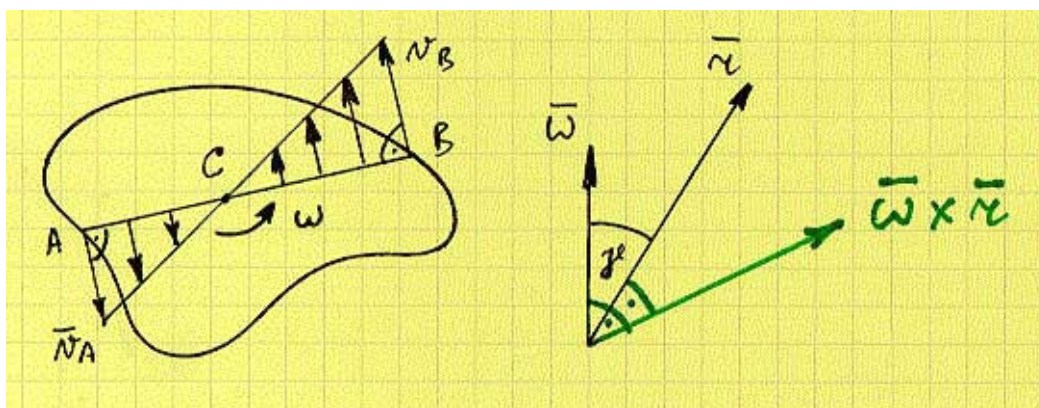
kiiruse projektsioon loomulikul teljel t

$$v_t = \omega_z h = \dot{\varphi}_z h \quad (1.36)$$

ja kiiruse moodul

$$v = \omega h = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|. \quad (1.37)$$

Pöörleva keha punkti kiirus on risti trajektoori raadiusega ja on võrdeline punkti kaugusega pöörlemisteljest (joonis 1.10).



Joonis 1.10: Pöörleva keha punktide kiirused (vasakul). Keha nurkkiiruse ja punkti kohavektori vektorkorrutis (paremal).

1.4.3 Pöörleva keha punktide kiirendused

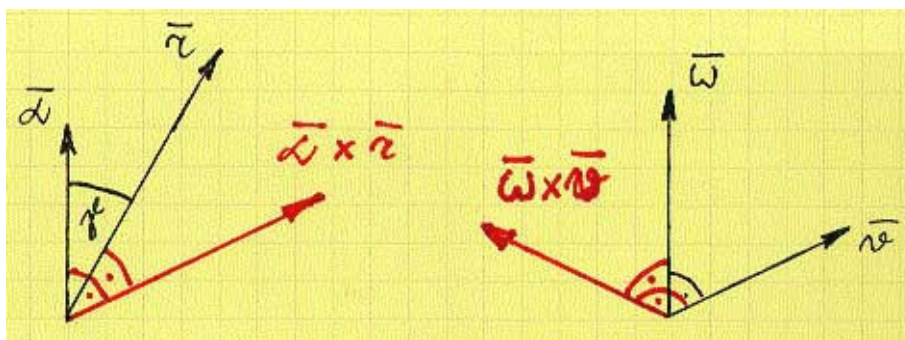
Lähtume valemist (1.35) —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (1.38)$$

Viimase avaldise esimene liidetav kujutab endast punkti P puutekiirendust (joonised 1.11 ja 1.9) —

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad |a_t| = \alpha r \sin \gamma, \quad (1.39)$$

kus γ on nurk punkti kohavektori ja nurkkiirendusvektori vahel.



Joonis 1.11: Keha nurkkiirenduse ja punkti kohavektori vektorkorrutis (vasakul). Keha nurkkiiruse ja punkti kiiruse vektorkorrutis (paremal).

Teine liidetav avaldises (1.38) esitab aga punkti normaalkiirendust, sest $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ on suunatud punktist P punkti C (joonised 1.11 ja 1.9) ja

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v \sin 90^\circ = \omega v = \omega^2 h. \quad (1.40)$$

Kokku oleme saanud valemid

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{cases} \quad (1.41)$$

pöörleva keha punkti kiirenduse, puutekiirenduse ja normaalkiirenduse leidmiseks. Vastavad moodulid

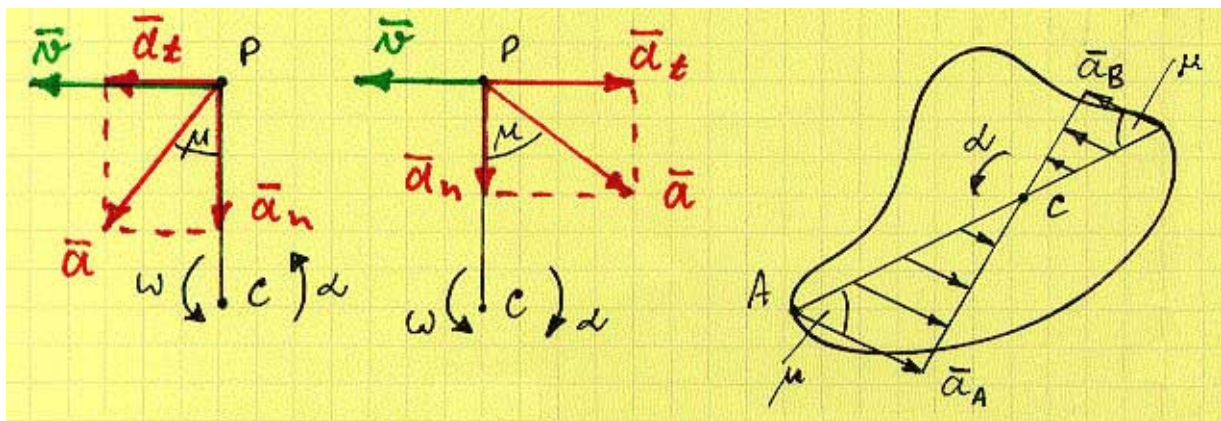
$$\begin{cases} a = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4 h}, \\ |a_t| = \alpha h, \\ a_n = \omega^2 h \end{cases} \quad (1.42)$$

Seega, pöörleva keha punkti kiirenduse moodul on võrdeline punkti kaugusega pöörlemisteljest (joonis 1.12).

Nurk kiirenduse ja trajektoori raadiuse vahel.

$$\tan |\mu| = \frac{|a_t|}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2} \quad (1.43)$$

Pöörleva keha punktide kiirendusvektorid moodustavad trajektoori raadiusega võrdse nurga μ (joonis 1.12).



Joonis 1.12: Nurk punkti kiirenduse ja kohavektori vahel (vasakul ja keskel). Pöörleva keha punktide kiirendused (paremal).

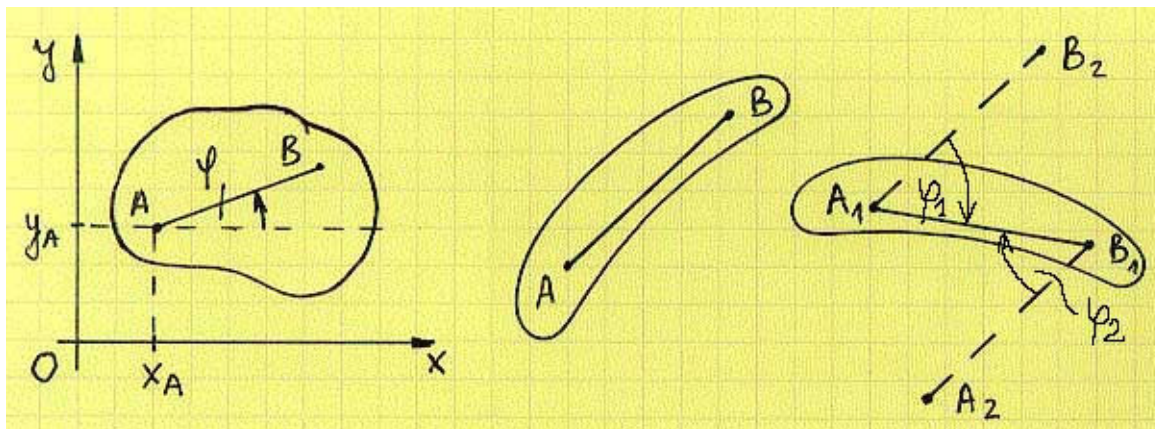
1.4.4 Kokkuvõte

- Pöörlemine.
- Keha pöörlemisseadus.
- Keha nurkkiiruse muutumise seadus.
- Keha nurkkiirenduse muutumise seadus.
- Pöördenurk, nurkkiirus ja nurkkiirendus on vektoriaalsed suurused.
- Keha punktide kiirused ja kiirendused.
- Tüüpilised ülesanded põhinevad diferentseerimisel ja integreerimisel.

1.5 Jäiga keha tasapinnaline liikumine

1.5.1 Tasapinnalise liikumise olemus

Tasapinnaliseks liikumiseks nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kõik keha punktid liiguvad tasapindades, mis on paralleelsed ühe paigalseisva tasapinnaga.



Joonis 1.13: Tasapinnalise kujundi asendi määramine (vasakul). Lõigu viimine asendist AB asendisse A_1B_1 (paremal).

Seega piisab tasapinnalise liikumise uurimise puhul sellest, kui uurida ühe tasapinnalise kujundi liikumist. On ilmselge, et vaadeldav kujund peab olema paraleelne eelpool nimetatud paigalseisva tasapinnaga. Tasapinnalise kujundi asendi võib määrata sellel kujundil asuva suvalise sirglõigu AB asendiga. Viimast saab omakorda määrata näiteks punkti A koordinaatide (x_A ja y_A) ning lõigu AB kaldenurgaga x -telje suhtes (φ) (joonis 1.13). Seda suvalist punkti A nimetatakse seejuures *pooluseks*. Sõltuvusi

$$\begin{cases} x_A = f_1(t), \\ y_A = f_2(t), \\ \varphi = f_3(t) \end{cases} \quad (1.44)$$

nimetatakse *jäiga keha tasapinnalise liikumise võrrandeks*.

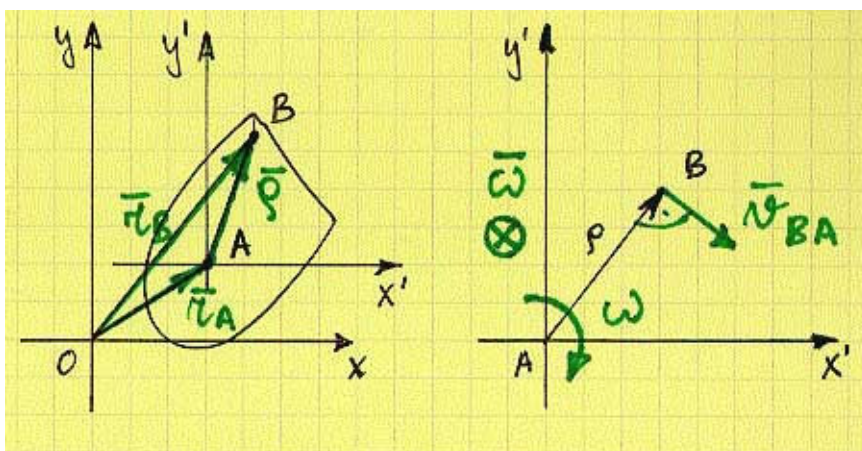
Järgnevalt vaatleme kuidas viia lõik AB uude asendisse A_1B_1 (joonis 1.13). Vaatleme kahte võimalust. 1) Lõik AB viiakse paralleellükkega asendisse A_1B_2 ning pöördega φ_1 asendisse A_1B_1 . 2) Lõik AB viiakse paralleellükkega asendisse A_2B_1 ning pöördega φ_2 asendisse A_1B_1 . On selge, et $\varphi_1 = \varphi_2$.

Järelikult, *tasapinnalise liikumise võib lahutada tasapinnaliseks rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja pöörlemiseks ümber selle pooluse* (täpsemalt öeldes küll pöörlemiseks ümber seda poolust läbiva ja vaadeldava tasandiga ristuva telje). *Rööpliikumine sõltub pooluse valikust, pöörlemine aga mitte*. Jäiga keha tasapinnalist liikumist iseloomustavad suurused on *rööpliikumise kiirus ja kiirendus ning ümber pooluse pöörlemise nurkkiirus ja nurkkiirendus*. Kuna pooluse valik on vaba, siis *nimetatud nurkkiirus ja nurkkiirendus on liikumistasandiga ristuvad vabavektorid*.

1.5.2 Tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiirused

Vaatleme tasapinnaliselt liikuvat keha. Liikugu kõik vaadeldava keha punktid paralleelselt xy tasandiga. Seega piisab kui uurime keha lõikamisel xy tasanduga tekkinud kujundi liikumist (joonis 1.14). Kasutame järgmisi tähistusi:

- xy — paigalseisev teljestik;
- A ja B — vaadeldava kujundi suvalised punktid, kusjuures A on poolus ja $\rho = \overrightarrow{AB}$;
- $x'y'$ — liikuv teljestik, mis liigub koos punktiga A jäädes paralleelseks teljestikuga xy).



Joonis 1.14: Tasapinnaliselt liikuv kujund (vasakul). Punkti B kiirus pooluse A suhtes (paremal).

Punkti B kohavektor $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \rho$ (joonis 1.14) ja kiirus

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_A}_{\mathbf{v}_A} + \underbrace{\dot{\rho}}_{\mathbf{v}_{BA}}. \quad (1.45)$$

Vaadeldavas protsessis vektori ρ pikkus ei muutu, muutub vaid tema orientatsioon. Kui vaatleja (silm) asuks punktis A , siis näeks ta, et punkt B liigub ümber tema mööda ringjoont. Seega pöörleb vektor ρ ümber punkti A läbiva kujutletava pöörlemistelje. Lühidalt öeldes, vektor ρ pöörleb ümber pooluse A . Kiirus $\dot{\rho} = \mathbf{v}_{BA}$ on seega punkti B kiirus pooluse A suhtes (joonis 1.14) ning pöörleva keha punkti kiiruse valemite põhjal

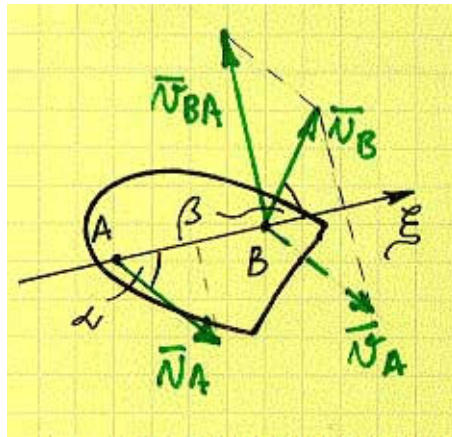
$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \rho, \quad v_{BA} = \omega \rho. \quad (1.46)$$

Siin $\rho = |\rho| = \left| \overrightarrow{AB} \right|$ ja ω on nurkkiirus, millega keha pöörleb ümber pooluse A .

Kokkuvõttes: Tasapinnaliselt liikuva keha mistahes punkti kiiruse leidmiseks tuleb pooluseks valitud punkti kiirusele liita vaadeldava punkti kiirus pooluse suhtes, st.,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \quad (1.47)$$

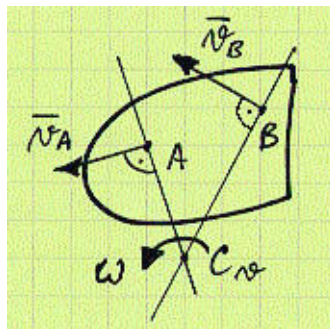
Teoreem tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiiruste projektsioonidest:² Tasapinnaliselt liikuva keha kahe punkti kiiruste projektsioonid neid punkte läbival teljel (sirgel) on võrdsed.



Joonis 1.15: Teoreem tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiiruste projektsioonidest.

Tõestus: Teatavasti $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$ (joonis 1.15). Kuna $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$, siis $v_{BA\xi} = 0$ ja $v_{B\xi} = v_{A\xi}$ ehk $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$.

Hetkeliseks kiiruste tsentriks nimetatakse sellist tasapinnalise kujundiga seotud punkti, mille kiirus antud hetkel on null. Tähistatakse tavaliselt C_v .



Joonis 1.16: Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimine.

Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimine (joonis 1.16).

1. On vaja teada keha kahe punkti kiiruste sihte.
2. Tõmbame läbi nende kahe punkti ristsirged kiirusvektoritele. Üldjuhul pole saadud sirged paralleelsed, vaid lõikuvad punktis C_v .

²**Märkus:** Antud teoreemi nimetatakse tihti teoreemiks tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiirustest. Õigem oleks siiski nimetada teda teoreemiks tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiiruste projektsioonidest.

Näitame, selliselt leitud punkti kiirus on tõepoolest null. Tõestuseks oletame vastuväiteliselt, et saadud punkti C_v kiirus $v_{C_v} \neq 0$. Vaatleme sirget AC_v . Punkti A kiiruse projektsioon sellel sirgel on null, sest $v_A \perp AC_v$. Vastavalt teoreemile tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiiruste projektsioonidest peab ka punkti C_v kiiruse projektsioon vaadeldaval sirgel olema null. See on võimalik kahel juhul — kiirus on kas null või on kiirusvektor risti vaadeldava sirgega. Kuna eeldasime $v_{C_v} \neq 0$, siis peab $v_{C_v} \perp AC_v$. Nüüd vaatleme sirget BC_v . Eelnevaga analoogse mõttekäigu põhjal peab nüüd kiirus $v_{C_v} \perp BC_v$. Kuna aga vektor ei saa olla korraga risti kahe lõikuva sirgega, siis oli tehtud oletus väär. Seega peab punkti C_v kiirus olema null.

Kui valida pooluseks hetkeline kiiruste tsenter, siis

$$\begin{cases} \mathbf{v}_A = \underbrace{\mathbf{v}_{C_v}}_0 + \mathbf{v}_{AC_v} = \mathbf{v}_{AC_v}, \\ \mathbf{v}_B = \underbrace{\mathbf{v}_{C_v}}_0 + \mathbf{v}_{BC_v} = \mathbf{v}_{BC_v} \\ \dots \end{cases} \quad (1.48)$$

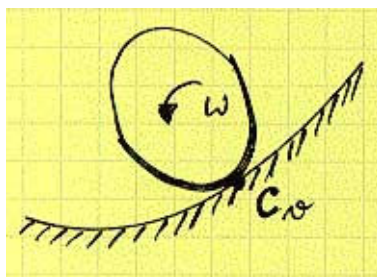
ja

$$\frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_B}{BC_v} = \dots = \omega \quad (1.49)$$

Kokkuvõttes: *Tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiiruste moodulid on võrdelised nende punktide kaugustega hetkelisest kiiruste tsentrist. Võrdeteguriks on nurkkiirus ω . Seetõttu nimetatakse seda punkti ka hetkeliseks pöörlemistsentriks.*

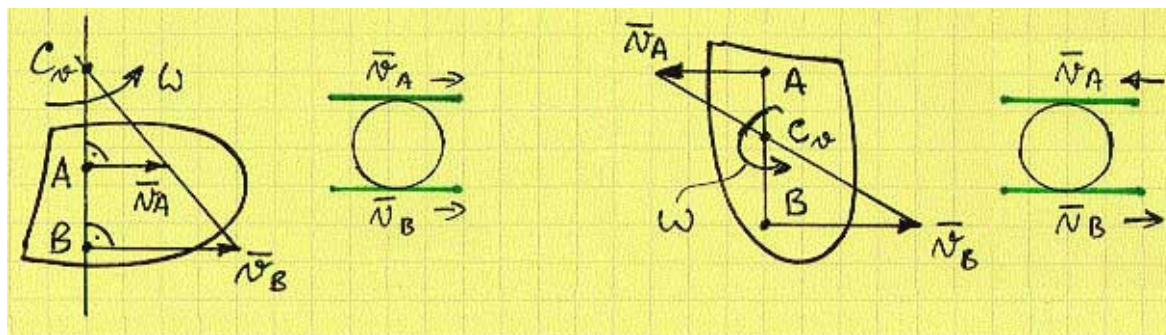
Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimise erijuhud.

1. Keha veereb ilma libisemata mööda liikumatut pinda (joonis 1.17). Kahe keha kokkupuutepunktis peavad libisemata veeremise korral olema neil võrdsed kiirused. Seega asub hetkeline kiiruste tsenter (kehaga seotud punkt, mille kiirus on null) C_v kehade kokkupuutepunktis.



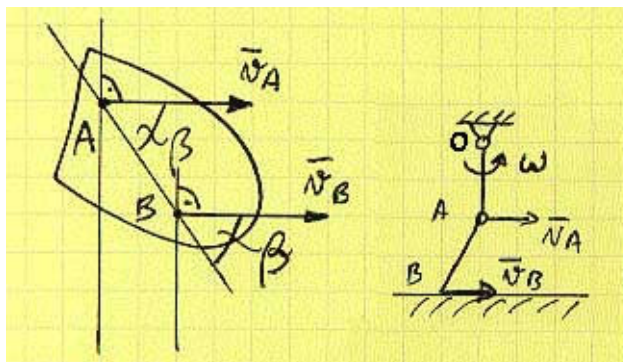
Joonis 1.17: Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimise 1. erijuht.

2. Punktide A ja B kiirused on risti sirgega AB , kuid moodulilt ja/või suunalt erinevad ($\mathbf{v}_A \parallel \mathbf{v}_B \perp AB$ ja $v_A \neq v_B$, joonis 1.18). Selliselt liigub silinder, mis asub kahe paralleelselt liikuva tasandi vahel. Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimiseks tuleb tõmmata kaks sirget: üks läbi punktide A ja B ning teine läbi kiirusvektorite lõpppunktide. Nende kahe sirge lõikepunkt ongi hetkeliseks kiiruste tsentriks C_v .



Joonis 1.18: Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimise 2. erijuht.

3. Tasapinnaliselt liikuva keha kahel punktil on võrdsed kiirused ($\mathbf{v}_A \parallel \mathbf{v}_B$ ja $v_A = v_B$, joonis 1.19). Antud juhul on keha nurkkiirus null ja tegu on (hetkelise) rööplikumisega ning kõik keha punktid liiguvad võrdse kiirusega. Kuna $\omega = v_A/AC_v = 0$, siis öeldakse ka, et hetkeline kiiruste tsepter asub käesoleval juhul lõpmatuses.



Joonis 1.19: Hetkelise kiiruste tsentri konstrueerimise 3. erijuht.

1.5.3 Tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiirendused

Lähtume valemist (1.47). Seega

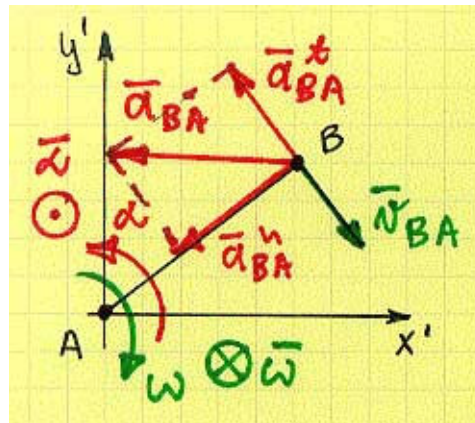
$$\mathbf{a}_B = \dot{\mathbf{v}}_B = \underbrace{\dot{\mathbf{v}}_A}_{\mathbf{a}_A} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{\boldsymbol{\alpha}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{v}_{BA}} \quad (1.50)$$

Tähistame

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{BA}^t = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho}, & a_{BA}^t = \alpha AB \\ \mathbf{a}_{BA}^n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}, & a_{BA}^n = \omega^2 AB = \frac{v_{BA}^2}{AB} \\ \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n, & a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^t)^2 + (a_{BA}^n)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} AB \end{cases} \quad (1.51)$$

ja saame

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}. \quad (1.52)$$

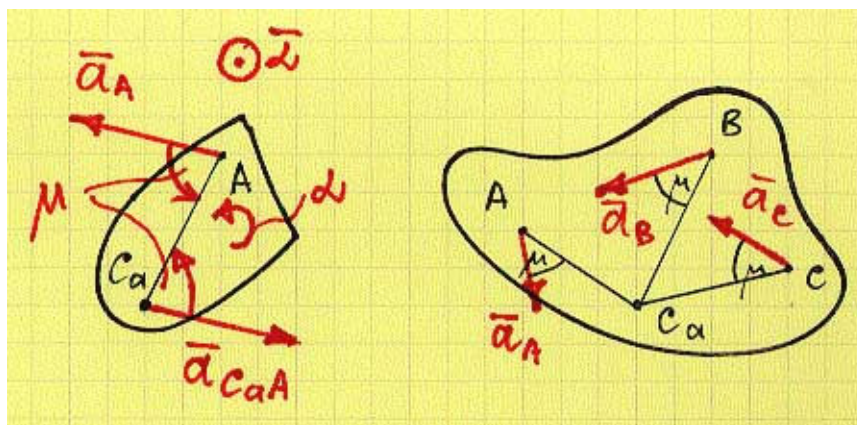
Joonis 1.20: Punkti B kiirendus pooluse A suhtes.

Seega, tasapinnaliselt liikuva keha mistahes punkti kiirenduse leidmiseks tuleb pooluseks valitud punkti kiirendusele liita vaadeldava punkti kiirendus pooluse suhtes (joonis 1.20).

Üldjuhul koosnevad kõik need kolm kiirendust kahest komponendist, st.

$$\mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_B^n = \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n. \quad (1.53)$$

Hetkeliseks kiirenduste tsentriks nimetatakse sellist tasapinnalise kujundiga seotud punkti, mille kiirendus antud hetkel on null. Tähistatakse C_a .



Joonis 1.21: Hetkelise kiirenduste tsentri konstrueerimine (vasakul). Hetkeline kiirenduste tsenter ja punktide kiirendused (paremal).

Hetkelise kiirenduste tsentri konstrueerimine (joonis 1.21).

1. Teada peab olema α , $\omega = |\omega|$ ja ühe punkti, näiteks A , kiirendus \mathbf{a}_A .
2. Mõõdame vektorist \mathbf{a}_A nurkkiirendusega α määratud suunas nurga μ : $\tan \mu = \alpha/\omega^2$.
3. Mõõdame saadud nurga haarale lõigu $AC_a = a_A/\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$.

Näitame, et $a_{C_a} = 0$. Selleks leiame $\mathbf{a}_{C_a} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C_aA}$, st., leiame punkti C_a kiirenduse läbi punkti A kui pooluse kiirenduse. Kiirendus \mathbf{a}_A on teada, \mathbf{a}_{C_aA} aga mitte. Vastavalt teostatud konstruktsioonile on moodul $a_{C_aA} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} AC_a = a_A$. Kuna vektori \mathbf{a}_{C_aA} ja sirge AC_a vaheline nurk on $\mu = \arctan \alpha/\omega^2$, siis $\mathbf{a}_{C_aA} = -\mathbf{a}_A$ ja $\mathbf{a}_{C_a} = 0$.

Kui valida pooluseks hetkeline kiirenduste tsenter, siis

$$\begin{cases} \mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_{C_a}}_0 + \mathbf{a}_{AC_a} = \mathbf{a}_{AC_a} \\ \mathbf{a}_B = \underbrace{\mathbf{a}_{C_a}}_0 + \mathbf{a}_{BC_a} = \mathbf{a}_{BC_a} \\ \dots \end{cases} \quad (1.54)$$

ja

$$\frac{a_A}{AC_a} = \frac{a_B}{BC_a} = \dots = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (1.55)$$

Tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiirenduste moodulid on võrdelised nende punktide kaugustega hetkelisest kiirenduste tsentrist. Võrdeteguriks on suurus $\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$. Suvalise punkti kiirendus moodustab seda punkti hetkelise kiirenduste tsentriga ühendava sirglõiguga nurga μ (joonis 1.21):

$$\tan \mu = \alpha/\omega^2. \quad (1.56)$$

Märkus: *Hetkeline kiiruste tsenter ja hetkeline kiirenduste tsenter ei lange üldjuhul kokku.*

1.5.4 Kokkuvõte

- Tasapinnaline liikumine kui rööpliikumise ja pöörlemise summa. Poolus.
- Rööpliikumise kiirus ja kiirendus — sõltub pooluse valikust. Ümber pooluse pöörlemise nurkkiirus ja nurkkiirendus — vabavektorid.
- Suvalise punkti kiiruse ja kiirenduse avaldamine pooluse läbi pooluse kiiruse ja kiirenduse.
- Hetkeline kiiruste tsenter. Hetkeline kiirenduste tsenter.
- Ülesannete lahendamise puhul leitakse kiirusi tavaliselt hetkelise kiiruste tsentri abil ja kiirendusi läbi pooluse kiirenduse.

1.6 Liitliikumine

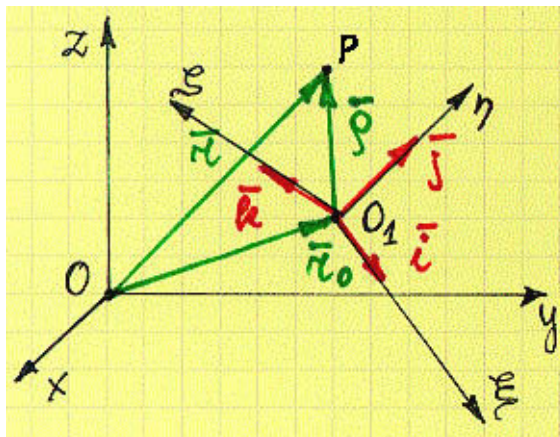
1.6.1 Liitliikumise mõiste

Vaatleme liikumist, kus masspunkt või keha liigub mingis taustsüsteemis, mis ise liigub mingi paigalseisva taustsüsteemi suhtes. Näiteks inimene liigub rongis (liikuv taustsüsteem on seotud rongiga) ja rong ise liigub maapinna suhtes (liikumatu taustsüsteem on seotud Maaga). Kui uuritakse liikumisi, mis mis toimuvad Maa suhtes, siis tavaliselt seotaksegi nn. liikumatu taustsüsteem Maaga (kuigi Maa ise liigub). Kui aga uuritakse näiteks planeetide liikumist päikesesüsteemis, siis seotakse liikumatu taustsüsteem Päikesega (kuigi ka päikesesüsteem liigub) jne.

Sellisel juhul:

- **absoluutseks liikumiseks** nimetatakse punkti (keha) liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes;
- **relatiivseks liikumiseks** nimetatakse punkti (keha) liikumist liikuva taustsüsteemi suhtes;
- **kaasaliikumiseks**³ nimetatakse liikuva taustsüsteemiga muutumatult seotud punktide liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes.
- Vastavalt eristatakse ka trajektoore — *absoluutne, relatiivne ja kaasaliikumise trajektoor*.

1.6.2 Kiiruste liitmise teoreem



Joonis 1.22: Punkti P kohavektorid liikuvast ja liikumatus taustsüsteemis (vastavalt ρ ja r ning liikuva taustsüsteemi alguspunkti O_1 kohavektor r_0)

Vaatleme punkti P , mis liigub liikuva taustsüsteemi $O_1\xi\eta\zeta$ suhtes. Viimane liigub omakorda liikumatu taustsüsteemi $Oxyz$ suhtes (joonis 1.22). Kasutage järgnevaid tähistusi:

- \mathbf{v} — absoluutne kiirus (mõõdetakse $Oxyz$ suhtes);

³Eesti keeles on samas tähenduses kasutusel ka termin ülekandeliikumine.

- \mathbf{v}_r — relatiivne kiirus (mõõdetakse $O_1\xi\eta\zeta$);
- \mathbf{v}_e — kaasaliikumise kiirus (mõõdetakse $Oxyz$ suhtes).

Punkti P kohavektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}$, kus $\boldsymbol{\rho} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$. Seega

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}, \quad (1.57)$$

kust punkti P kiirus

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dots = \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\xi}\mathbf{i} + \dot{\eta}\mathbf{j} + \dot{\zeta}\mathbf{k} \right) + \left(\xi\dot{\mathbf{i}} + \eta\dot{\mathbf{j}} + \zeta\dot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.58)$$

- Oletame, et relatiivne liikumine puudub ning ainukeseks liikumiseks on kaasaliikumine. Seega koordinaadid ξ , η ja ζ ei muutu ($\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$) ja punkti kiirus

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e = \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \xi\dot{\mathbf{i}} + \eta\dot{\mathbf{j}} + \zeta\dot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.59)$$

- Oletame, et kaasaliikumine puudub, st. liikuv taustsüsteem on paigal. Seega $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{k}} = 0$ ning punkti kiirus

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r = \left(\xi\dot{\mathbf{i}} + \eta\dot{\mathbf{j}} + \zeta\dot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.60)$$

Kokku saime **kiiruste liitmise teoreemi**: Absoluutne kiirus võrdub relatiivse kiiruse ja kaasaliikumise kiiruse geomeetrilise summaga,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e. \quad (1.61)$$

1.6.3 Kiirenduste liitmise teoreem

Lähtume kiiruse avaldisest (1.58):

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \dots = \left(\ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\xi}\mathbf{i} + \ddot{\eta}\mathbf{j} + \ddot{\zeta}\mathbf{k} \right) + 2 \left(\dot{\xi}\dot{\mathbf{i}} + \dot{\eta}\dot{\mathbf{j}} + \dot{\zeta}\dot{\mathbf{k}} \right) + \left(\xi\ddot{\mathbf{i}} + \eta\ddot{\mathbf{j}} + \zeta\ddot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.62)$$

- Oletame, et relatiivne liikumine puudub ning ainukeseks liikumiseks on kaasaliikumine. Seega koordinaadid ξ , η ja ζ ei muutu ($\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = \ddot{\xi} = \ddot{\eta} = \ddot{\zeta} = 0$) ja punkti kiirendus

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e = \left(\ddot{\mathbf{r}}_0 + \xi\ddot{\mathbf{i}} + \eta\ddot{\mathbf{j}} + \zeta\ddot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.63)$$

- Oletame, et kaasaliikumine puudub, st. liikuv taustsüsteem on paigal. Seega $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{i}} = \ddot{\mathbf{j}} = \ddot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{k}} = 0$ ning punkti kiirendus

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r = \left(\xi\ddot{\mathbf{i}} + \eta\ddot{\mathbf{j}} + \zeta\ddot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.64)$$

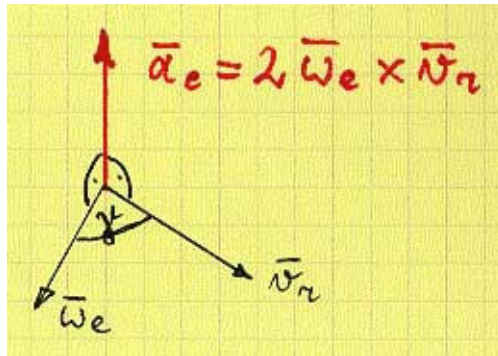
- Järele jäänud liige saab esineda vaid juhul kui korraga esinevad nii relatiivne liikumine kui kaasaliikumine ja seda nimetatakse **Coriolise kiirenduseks**⁴

$$\mathbf{a}_C = 2 \left(\dot{\xi}\dot{\mathbf{i}} + \dot{\eta}\dot{\mathbf{j}} + \dot{\zeta}\dot{\mathbf{k}} \right). \quad (1.65)$$

⁴Gaspard Gustave Coriolis [21.05.1792–19.04.1842], Prantsuse füüsik ja matemaatik, L'Ecole Polytechnique professor, Prantsuse TA liige (1836), \mathbf{a}_C — 1816.

Arvestades, et $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{i}$, $\dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{j}$ ja $\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{k}$ (Vt. Ü. Lepik & L. Roots, Teoreetiline mehaanika, lk.156) saame

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= 2 \left[\dot{\xi}(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{i}) + \dot{\eta}(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{j}) + \dot{\zeta}(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{k}) \right] = \\ &= 2 \left(\boldsymbol{\omega}_e \times \dot{\xi} \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}_e \times \dot{\eta} \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega}_e \times \dot{\zeta} \mathbf{k} \right) = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \left(\dot{\xi} \mathbf{i} + \dot{\eta} \mathbf{j} + \dot{\zeta} \mathbf{k} \right) = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r. \end{aligned} \quad (1.66)$$



Joonis 1.23: Coriolise kiirendus.

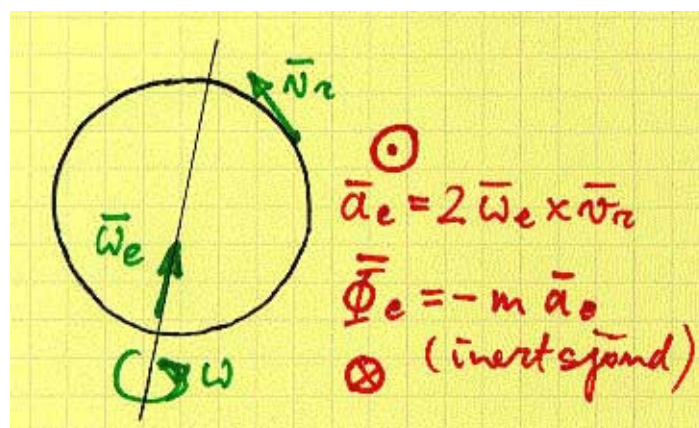
Kui $\boldsymbol{\omega}_e$ ja \mathbf{v}_r vaheline nurk on γ (joonis 1.23), siis moodul

$$a_C = 2\omega_e v_r \sin \gamma. \quad (1.67)$$

Seega on Coriolise kiirendus $a_C = 0$ kui $\omega_e = 0$ või $v_r = 0$ või $\boldsymbol{\omega}_e \parallel \mathbf{v}_r$.

Kokku olema saanud **kiirenduste liitmise teoreemi**: absoluutne kiirendus võrdub relatiivse kiirenduse, kaasaliikumise kiirenduse ja Coriolise kiirenduse geomeetrilise summaga,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C. \quad (1.68)$$



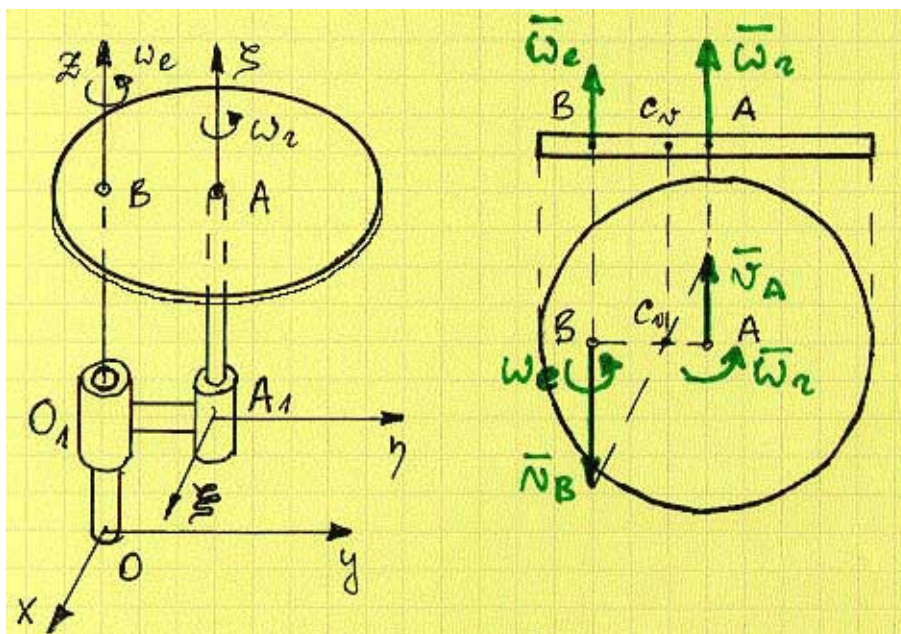
Joonis 1.24: Baeri-Babinet' seadus.

1.6.4 Kokkuvõte

- Relatiivne liikumine, kaasaliikumine, absoluutne liikumine
- Kiiruste liitmise teoreem
- Kiirenduste liitmise teoreem
- Coriolise kiirendus
- Baeri-Babinet' seadus: Põhjapoolkeral uhuvad lõunast põhja voolavad jõed paremat kallast rohkem kui vasakut. Taoline uhtmine toimub nn. Coriolise inertsjõu Φ_C toimel (joonis 1.24).

1.7 Paralleelsete telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine

Vaatleme keha, mis pöörleb ümber telje ζ (joonis 1.25). Telg ζ pöörleb omakorda ümber paigalseisva ja temaga paralleelse telje z . Kasutame paigalseisvat teljestikku xyz ja liikuvat teljestikku $\xi\eta\zeta$.



Joonis 1.25: Paralleelsete telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine. Samasuunaliste nurkkiiruste juht.

Keha relatiivseks liikumiseks on sel juhul liikumine teljestiku $\xi\eta\zeta$ suhtes ja see toimub relatiivse nurkkiirusega ω_r . Kaasaliikumiseks on teljestiku $\xi\eta\zeta$ liikumine paigalseisva teljestiku xyz suhtes. See toimub kaasaliikumise nurkkiirusega ω_e . Absoluutne liikumine toimub nurkkiirusega $\omega = \omega_e + \omega_r$ ja selleks on keha liikumine paigalseisva teljestiku xyz suhtes. Kõik kolm nurkkiirust ω_r , ω_e ja ω on omavahel paralleelsed ning relatiivse ja kaasaliikumise nurkkiiruse liitmine toimub analoogselt paralleelsete jõudude liitmisega. Absoluutse nurkkiiruse mõjusirge määrab ära **hetkelise pöörlemistelje**.

Tõestame eelöeldu. Nurkkiiruse ω_r mõjusirge läbib punkti A ja ω_e mõjusirge punkti B . Seega osaleb A vaid kaasaliikumises (sest asub relatiivse pöörlemise teljel) ja B vaid relatiivses liikumises (sest asub kaasapöörlemise teljel) ning kiirused

$$v_A = \omega_e AB \text{ ja } v_B = \omega_r AB. \quad (1.69)$$

Teisest küljest on ilmselge, et tegu on tasapinnalise liikumisega. Vaatleme kahte juhtu:

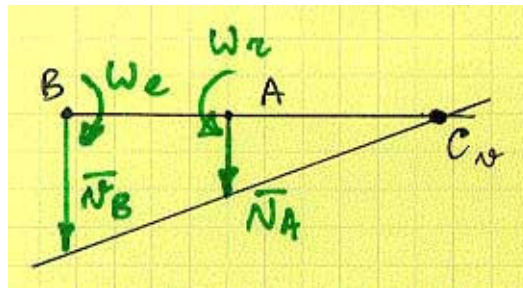
1) Olgu vaadeldavad pöörlemised samasuunalised (joonis 1.25). Vastavalt tasapinnalise liikumise teorialle

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{v_A + v_B}{AB} = \frac{v_A}{AB} + \frac{v_B}{AB} = \omega_e + \omega_r. \quad (1.70)$$

Kasutades avaldisi (1.69) saab viimasele valemile anda kuju

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_e}{AC_v} = \frac{\omega_r}{BC_v}. \quad (1.71)$$

2) Olgu vaadeldavad pöörlemised vastassuunalised (joonis 1.26) ja $\omega_r > \omega_e$. Valem (1.70)



Joonis 1.26: Paralleelsete telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine. Vastassuunaliste nurkkiiruste juht.

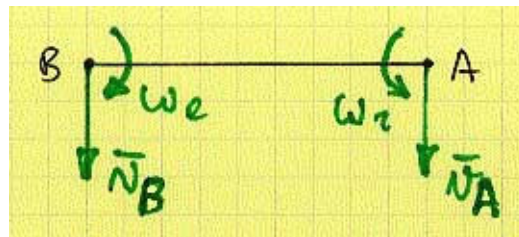
saab nüüd kuju

$$\omega = \omega_r - \omega_e \quad (1.72)$$

(1.71) jääb aga kehtima. Kokkuvõttes tuleb öelda, et

$$\omega = \omega_e + \omega_r. \quad (1.73)$$

Mõlemal juhul on meil tegu (hetkelise) pöörlemisega ümber hetkelise kiiruste tsentri. Antud kontekstis kasutatakse seetõttu tihti ka termineid hetkeline pöörlemistsenter ja hetkeline pöörlemistelg.



Joonis 1.27: Pöörlemispaar.

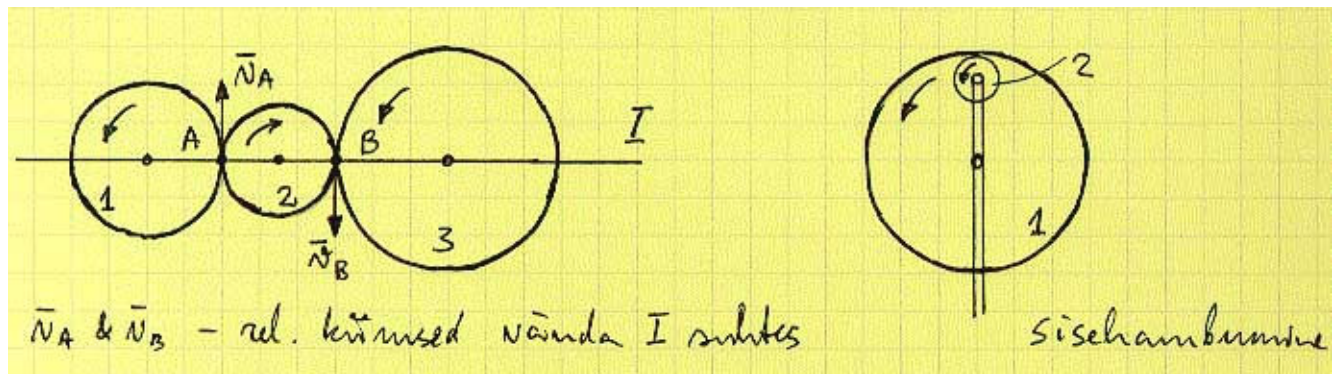
Pöörlemispaariks nimetatakse erijuhtu, kus $\omega_e = -\omega_r$ (joonis 1.27). Sel juhul on keha liikumiseks rööpliikumine või hetkeline rööpliikumine. Näiteks jalgratta pedaali liikumine jalgratta raami suhtes.

Willise meetod

Willise meetodit kasutatakse tavaliselt ülesannete puhul, kus mingi vänt või raam kannab omavahel hambuvaid hammasrattaid (joonis 1.28). Selliste ülesannetega tuleb tegelda näiteks reduktorite arvutamise puhul.

Tähistame vända I (absoluutse) nurkkiiruse ω_I , k -nda hammasratta absoluutse nurkkiiruse ω_k ja relatiivse nurkkiiruse vända I suhtes ω_{kI} . Antud kontekstis mõistetakse kõiki neid kolme nurkkiirust kui märgiga suurust, st., rangelt võttes on tegu vastavate nurkkiirusvektorite projektsioonidega ühele ja samale teljele. Kuna rataste teljed on vända suhtes liikumatud, siis on relatiivsed nurkkiirused seotud järgmiselt:

$$\frac{\omega_{1I}}{\omega_{2I}} = -\frac{r_2}{r_1} \quad \text{ja} \quad \frac{\omega_{2I}}{\omega_{3I}} = -\frac{r_3}{r_2}. \quad (1.74)$$



Joonis 1.28: Willise meetod. Välisahbumine (vasakul) ja sisehambumine (paremal).

Üleminekul 1. hammasrattalt 3. hammasrattale saame aga seose

$$\frac{\omega_{1I}}{\omega_{2I}} \cdot \frac{\omega_{2I}}{\omega_{3I}} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \left(-\frac{r_3}{r_2}\right). \quad (1.75)$$

Kuna k -nda hammasratta absoluutne nurkkiirus

$$\omega_k = \omega_I + \omega_{kI} \quad (1.76)$$

siis üleminekul 1. hammasrattalt k -ndale

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_k - \omega_I} = (-1)^m i, \quad (1.77)$$

kus m on välisahbumiste arv⁵ ja i ülekandearv. Ülekandearvu leidmisel võib raadiuste asemel kasutada ka hammaste arvu.

Näited: 1) A.A. Jablonski jt., Teoreetilise mehaanika kursusetööde ülesannete kogu, ülesanne K10; 2) E. Topnik, Kinemaatika ülesannetest.

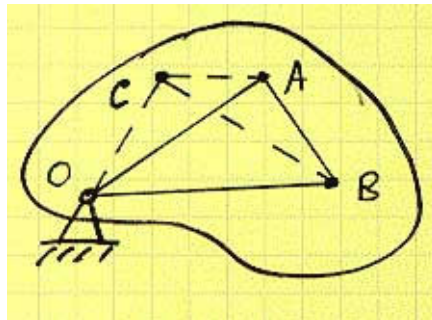
⁵Välisahbumises olevad hammasrattad pöörlevad vastas suundades, sisehambumises olevad aga samas suunas.

1.8 Jäiga keha sfääriline liikumine

1.8.1 Sfäärilise liikumise olemus

Sfääriliseks liikumiseks nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul üks kehaga muutumatult seotud punkt jääb liikumatuks. Seda liikumatut punkti nimetatakse **kinnispunktiks**⁶. Seega liiguvad kõik vaadeldava keha punktid mööda kontsentrilisi sfääre.

Teoreem: Sfääriliselt liikuva keha asend on täielikult määratud tema kahe punktiga, mis ei asetse kinnispunktiga samal sirgel.



Joonis 1.29: Sfääriliselt liikuva keha asendi määramine.

Tõestus: 1) Valime kaks meelevaldset punkti A ja B nii, et sirge AB ei läbi kinnispunkti O . Ühendame nad omavahel ja kinnispunktiga O — saame kolmnurga ABO . Kuna tegu on jäiga kehaga, siis jäävad keha liikumisel $\triangle ABO$ küljepikkused konstantseks. 2) Valime neljanda (meelevaldse) punkti C ja ühendame ta kolmnurga ABO tippudega. Jäiga keha definitsiooni põhjal on lõikude CO , CA ja CB pikkused konstantsed. Järelikult on punkt C ühendatud kolmnurgaga ABO muutumatult ning tema liikumine on täielikult määratud selle kolmnurga liikumisega. Kuna vaadeldav kolmnurk on omakorda määratud punktidega A ja B , siis on teoreem tõestatud.

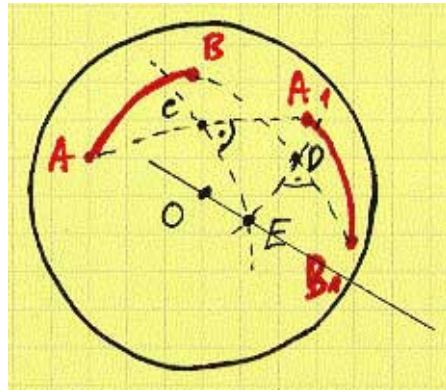
Euleri-D'Alembert'i teoreem: Jäiga keha sfäärilisel liikumisel saab keha iga asendimuutust teostada ühe pöördega ümber telje, mis läbib kinnispunkti.⁷

Tõestus: 1) Moodustame kinnispunkti O ümber suvalise raadiusega sfääri (joonis 1.30). 2) Valime sellel sfääril kaks meelevaldset punkti A ja B . 3) Liikugu need kaks punkti ajavahemiku Δt jooksul uude asendisse A_1 ja B_1 . Teoreemi tõestuseks on vaja näidata, et kaare AB saab viia asendisse A_1B_1 ühe pöördega.

Ühendame omavahel punktid A ja A_1 ning B ja B_1 suuringi kaartega. Tähistame nende kaarte keskpunktid C ja D ning tõmbame läbi saadud punktide kaared, mis on vastavalt

⁶Siit tuleneb ka uuritava liikumise teine nimetus — jäiga keha liikumine kinnispunkti ümber.

⁷1) Seda teoreemi nimetatavad mõned autorid Euleri-D'Alembert'i teoreemiks, mõned aga D'Alembert'i teoreemiks. 2) Siin üksnes käsitletakse võimalust muuta keha asendit ühe pöördega. See ei pruugi kokku langeda tegeliku liikumisega.



Joonis 1.30: Sfääriliselt liikuva keha asendimuutuse teostamine ühe pöördega.

risti kaartega AA_1 ja BB_1 . Lõikugu saadud kaared punktis E . Konstruktsiooni põhjal $AE = A_1E$ ja $BE = B_1E$. Kuna tegu on jäiga kehaga, siis kaarepikkused $AB = A_1B_1$. Järelikult on kolmnurgad ABE ja A_1B_1E kongruentsed. Seega, et viia $\triangle ABE$ asendisse A_1B_1E tuleb teda pöörata nurga AEA_1 võrra ümber telje OE . Teoreem on tõestatud, sest sfäärilise liikumise puhul on keha liikumine täielikult määratud tema kahe punkti liikumisega.

Kui vaadelda keha liikumist antud hetkel, tuleb uurida keha kahte lõpmata lähedast asendit ja konstrueerida **hetkeline pöörlemistelg** (kasutades eelneva teoreemi tõestust). Liikumise käigus kujundab hetkeline pöörlemistelg koonilise pinna mida nimetatakse **aksoidiks**.

1.8.2 Euleri nurgad

Sfääriliselt liikuva keha asendi määramiseks on otstarbekas kasutada nn. **Euleri nurki** (joonis 1.31). Vaatleme paigalseisvat teljestikku xyz ja kehaga jäigalt seotud liikuvat teljestikku $\xi\eta\zeta$. Mõlema teljestiku alguspunktid olgu kinnispunktis O .

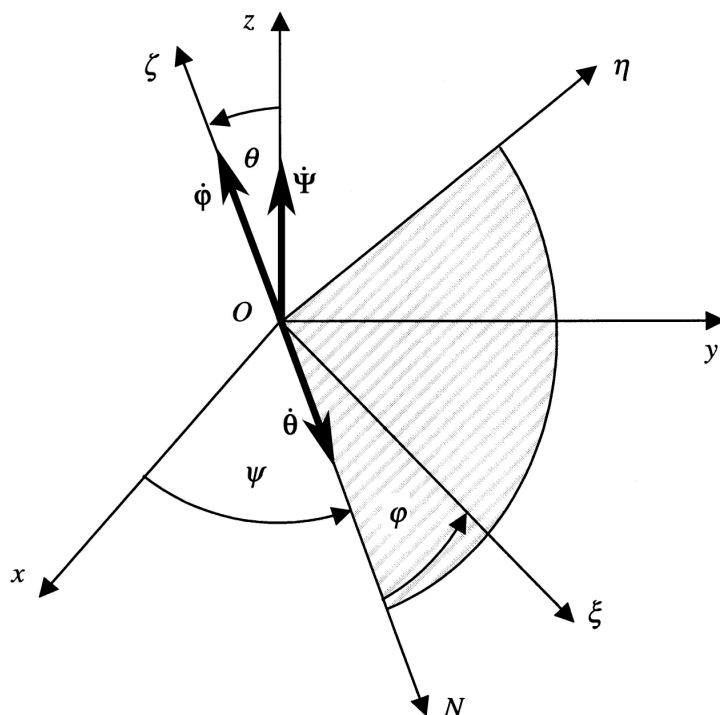
Tasandite xy ja $\xi\eta$ lõikejoont ON nimetatakse **sõlmjooneks**. Positiivne suund sõlmjoonel määratakse krüvireeglga: kui pöörata parema käe kruvi z telje poolt ζ telje poole vähimat nurka mööda, siis määrab kruvi liikumise suund sõlmjoone positiivse suuna.

Teljestiku xyz viimine asendisse $\xi\eta\zeta$ on võimalik kolme järjestikuse pöörde abil:

1. Teljestiku xyz pööre ümber z telje nurga ψ võrra. Nüüd ühtib x telg sõlmjoonega ON .
2. Saadud asendist pöörame xyz teljestikku ümber sõlmjoone ON nurga θ võrra. Nüüd ühtib z telg ζ teljega.
3. Saadud asendist pöörame xyz teljestikku ümber ζ telje nurga φ võrra. Sellega ongi viidud teljestiku xyz uude asendisse $\xi\eta\zeta$.

Nurki ψ , θ ja φ nimetatakse **Euleri nurkadeks** ja nad kannavad nimetusi, mis on pärit astronoomiast:

- φ — **omapöördenurk** (ζ telg — omapöörlemistelg)



Joonis 1.31: Euleri nurgad

- ψ — **pretsessiooninurk**⁸ (z telg — pretsessioonitelg)
- θ — **nutatsiooninurk**⁹ (ON — nutatsioonitelg)

Seoseid

$$\begin{cases} \psi = \psi(t), \\ \theta = \theta(t), \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (1.78)$$

nimetatakse jäiga keha *sfäärilise liikumise võrrandeiks*.

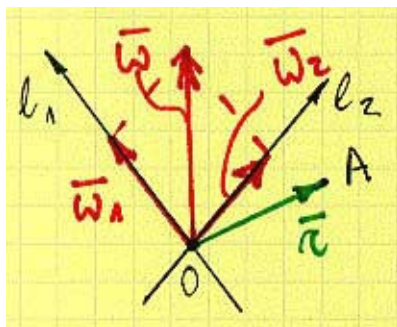
1.8.3 Lõikuvate telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine

Vaatleme jäika keha, mis pöörleb antud hetkel nurkkiirusega $\boldsymbol{\omega}_1$ ümber telje l_1 (joonis 1.32). Telg l_1 pöörleb omakorda nurkkiirusega $\boldsymbol{\omega}_2$ ümber telje l_2 . Kui l_1 ja l_2 pole paralleelsed ega kiivad, siis lõikuvad nad mingis punktis O, mis on paigal mõlema pöörlemise puhul. Järelikult on meil tegu sfäärilise liikumisega. Vaatleme keha suvalist punkti A, kohavektoriga \mathbf{r} . Selle punkti liikumine on liitliikumine, mis koosneb relatiivsest pöörlemisest ümber telje l_1 ja kaasaliikumisest ümber telje l_2 — vastavad kiirused $\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}$ ja $\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}$. Absoluutne kiirus

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}. \quad (1.79)$$

⁸Pretsessioon — (lad. *praecessio* — etteminek) omapöörlemistelje pöörlemine ümber mingi teise, paigaloleva telje. Koonilist pinda, mille see telg ruumis kujundab, nimetatakse pretsessioonikoonuseks.

⁹Nutatsioon — (lad. *nutare* — võnkuma) pöörleva ning pretsesseeriva keha pöörlemistelje võnkumine pretsessioonikoonuse suhtes.

Joonis 1.32: Telgede l_1 ja l_2 toimuvate pöörlemiste liitmine.

Tähistades

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (1.80)$$

saame

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.81)$$

Kokkuvõttes, antud hetkel on absoluutseks liikumiseks pöörlemine ümber nurkkiirusvektoriga $\boldsymbol{\omega}$ määratud hetkelise pöörlemistelje.

Saadud tulemus on üldistatav ka juhule, kus keha võtab osa n pöörlemisest (ümber lõikuvate telgede):

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i. \quad (1.82)$$

1.8.4 Euleri kinemaatilised võrrandid

Eelmise punkti valemi (1.82) põhjal

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (1.83)$$

Siin $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ nimetatakse **pretsessioonikiiruseks**, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ **nutatsioonikiiruseks** ja $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ **omapöörlemiskiiruseks**. Viimase vektorvalemi projekteerimisel telgedele xyz või $\xi\eta\zeta$ saadud skalaarseid võrrandeid

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \omega_\xi = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (1.84)$$

nimetatakse **Euleri kinemaatilisteks võrranditeks**. Nurkkiiruse moodul

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta}. \quad (1.85)$$

1.8.5 Sfääriliselt liikuva keha punktide kiirused ja kiirendused

Vaatleme sfääriliselt liikuvat keha. Kui see keha pöörleb antud hetkel nurkkiirusega $\boldsymbol{\omega}$ ümber hetkelise pöörlemistelje, siis tema suvalise punkti kiirus

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.86)$$

kus \mathbf{r} on vaadeldava punkti kohavektor ja $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}$. Kiirusvektori projektsioonid koordinaattelgedele xyz või $\xi\eta\zeta$ saadakse lähtudes vektorkorrutise definitsioonist

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}. \quad (1.87)$$

Viimases determinandis on \mathbf{i}', \mathbf{j}' ja \mathbf{k}' telgede $\xi\eta\zeta$ suunalised baasivektorid. Arendades determinante valemis (1.87) esimese rea järgi saame leida kiiruse projektsioonid xyz ja $\xi\eta\zeta$ telgedel ($v_x = \omega_y z - \omega_z y$ jne.).

Kui on teada vektorite $\boldsymbol{\omega}$ ja \mathbf{r} moodulid ning nende vaheline nurk λ , siis absoluutse kiiruse moodul $v = \omega r \sin \lambda$.

Kiirenduse leidmisel lähtume valemist (1.86):

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (1.88)$$

kus $\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$. Sfäärilise liikumise puhul pole vektorid $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ üldjuhul paralleelsed ning vektorid $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ ja \mathbf{r} komplanaarsed.

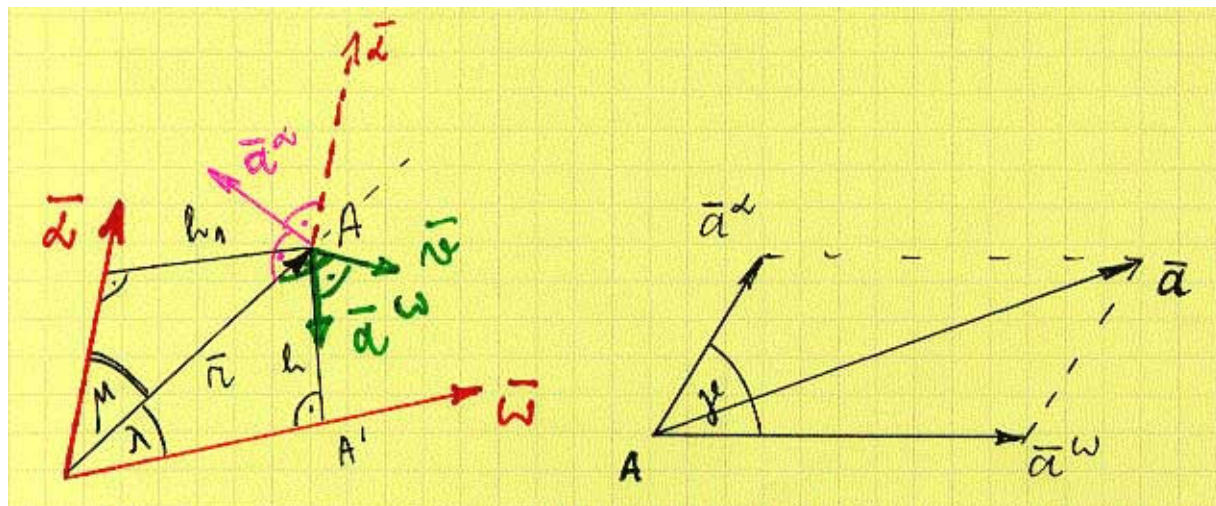
Esimest liidetavat valemis (1.88) tähistatakse

$$\mathbf{a}^\alpha = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad a^\alpha = \alpha r \sin \vartheta = \alpha h_1 \quad (1.89)$$

ja nimetatakse **pöörlemiskiirenduseks**, teist tähistatakse

$$\mathbf{a}^\omega = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad a^\omega = \omega v = \omega^2 h \quad (1.90)$$

ning nimetatakse **aksipetaalkiirenduseks** (joonis 1.33). Üldjuhul pole \mathbf{a}^α ja \mathbf{a}^ω omavahel risti.



Joonis 1.33: Sfääriliselt liikuva keha punkti A kiirenduse komponendid — aksipetaalkiirendus \mathbf{a}^ω ja pöörlemiskiirendus \mathbf{a}^α

Nurkkiirendus $\boldsymbol{\alpha}$ iseloomustab antud juhul nii nurkkiirusvektori mooduli kui suuna muutust (jäiga keha pöörlemise puhul üldjuhul vaid mooduli muutust). Nurkkiirendusvektor $\boldsymbol{\alpha}$ on suunatud mööda nurkkiirusvektori $\boldsymbol{\omega}$ hodograafi¹⁰ puutujat. Kui konstantse mooduliga vektor $\boldsymbol{\omega}$ pöörleb nurkkiirusega Ω , siis (analoogselt pöörleva keha punkti kiirusega)

$$\boldsymbol{\alpha} = \Omega \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.91)$$

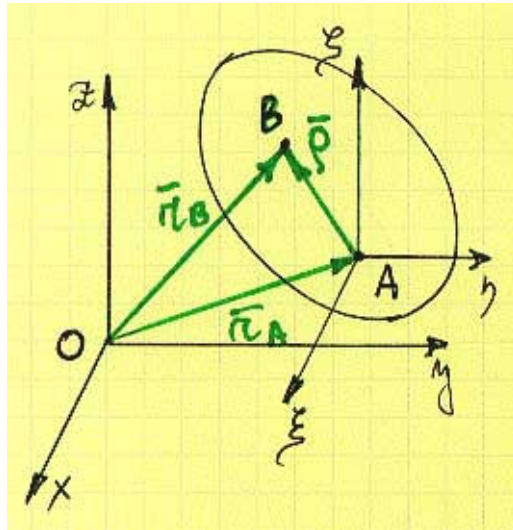
¹⁰Hodograaf — joon mille moodustab fikseeritud alguspunktiga muutuva vektori lõpp-punkt.

1.8.6 Kokkuvõte

- Sfääriline liikumine. Kinnispunkt. Hetkeline pöörlemistelg.
- Euleri nurgad. Sõlmjoon. Pretsessiooninurk, nutatsiooninurk, omapöördenurk, vastavad teljed ja kiirused.
- Lõikuvate telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine.
- Euleri kinemaatilised võrrandid.
- Sfääriliselt liikuva keha punktide kiirused ja kiirendused. Pöörlemiskiirendus. Aksipetaalkiirendus.

1.9 Vaba jäiga keha liikumine

Vaatleme sidemetest vaba jäiga keha, mis liigub temale mõjuvate välisjõudude toimel. Valime suvalise, kuid selle kehaga jäigalt seotud punkti A pooluseks (joonis 1.34). Nüüd



Joonis 1.34: Punkti B kohavektorid liikuvast ja liikumatus taustsüsteemis (vastavalt ρ ja \mathbf{r}_B ning liikuva taustsüsteemi alguspunkti A kohavektor \mathbf{r}_A

on vaadeldava keha asend määratud pooluse A kolme koordinaadi ja kolme Euleri nurgaga:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t), \\ y_A = f_2(t), \\ z_A = f_3(t), \\ \psi_A = f_4(t), \\ \theta_A = f_5(t), \\ \varphi_A = f_6(t). \end{cases} \quad (1.92)$$

Viimaseid seoseid nimetatakse **vaba jäiga keha liikumise võrrandeks**.

Teoreem: Vaba jäiga keha liikumine on lahutatav rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja pöördeks ümber poolust läbiva pöörlemistelje¹¹.

Eelnev teoreem käsitleb lõpliku ajavahemiku Δt jooksul toimunud vaba jäiga keha asendimuutust. Kui vaatleme lõpmata väikest ajavahemikku dt , siis saame eelnevale teoreemile järgneva kuju: vaba jäiga keha elementaarsiire koosneb rööpsest elementaarsiirdest koos vabalt valitud poolusega ja elementaarpöördest ümber seda poolust läbiva hetkelise pöörlemistelje. Viimane on tuntud ka Euleri teoreemina.

Vaba jäiga keha kiirused ja kiirendused. Vaatleme keha suvalist punkti B kohavektoriga $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \rho$ (joonis 1.34). Selle punkti kiirus

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = \dots = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}. \quad (1.93)$$

¹¹Töestust vaata Ü. Lepik & L. Roots, Teoreetiline mehaanika lk. 348.

Siin

$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (1.94)$$

on punkti B kiirus punkti A suhtes keha sfäärilisel liikumisel ümber kinnispunkti A (teljestiku $\xi\eta\zeta$ suhtes).

Punkti B kiirendus

$$\mathbf{a}_B = \dot{\mathbf{v}}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^\alpha + \mathbf{a}_{BA}^\omega. \quad (1.95)$$

Siin

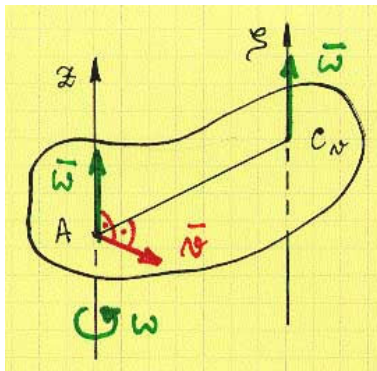
$$\mathbf{a}_{BA}^\alpha = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho} \text{ ja } \mathbf{a}_{BA}^\omega = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA} \quad (1.96)$$

on vastavalt pöörlemis- ja aksipetaalkiirenduseks keha sfäärilisel liikumisel ümber kinnispunkti A (teljestiku $\xi\eta\zeta$ suhtes).

1.10 Rööpliikumise ja pöörlemise liitmine

Pöorelgu vaadeldav keha ümber z telje nurkkiirusega ω ja liikugu telg z omakorda kiirusega \mathbf{v} . Vaatleme kolme erijuhtu:

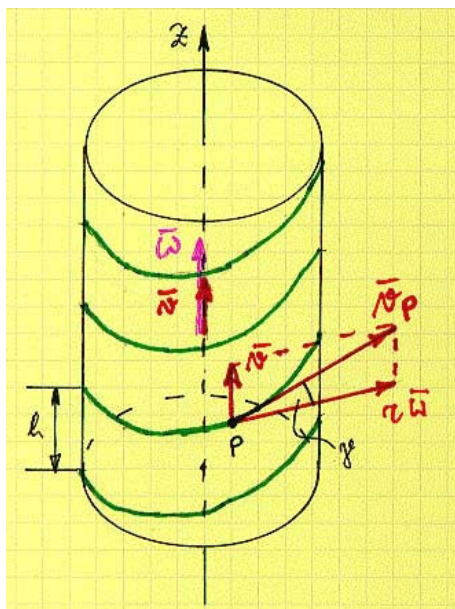
1. $\mathbf{v} \perp \omega$.



Joonis 1.35: Rööpliikumise ja pöörlemise liitmine — juht $\mathbf{v} \perp \omega$.

Antud juhul on summaarseks liikumiseks *tasapinnaline liikumine*. Hetkelise kiiruste tsentri asend on määratud avaldisega $AC_v = v/\omega$ ning võib öelda, et keha pöörleb antud hetkel nurkkiirusega ω ümber hetkelise pöörlemistelje ζ . Telgede z ja ζ vaheline kaugus on AC_v .

2. $\mathbf{v} \parallel \omega$.



Joonis 1.36: Rööpliikumise ja pöörlemise liitmine — juht $\mathbf{v} \parallel \omega$

Sellist liikumist nimetatakse **kinemaatiliseks kruviks** ehk **kruviliikumiseks**. Kui \mathbf{v} ja ω on samasuunalised on tegu parema käe kruviga, kui aga vastassuunalised, siis vasaku käe kruviga.

Kui $v = \text{const.}$ ja $\omega = \text{const.}$, siis on punkti trajektooriiks **kruvijoone**. Teepikkust h , mille läbib kruvi teljel olev punkt ühe täispöörde jooksul nimetatakse **kruvisammuks** —

$$h = \frac{2\pi v}{\omega}, \quad (1.97)$$

sest ühe täispöörde sooritamiseks kulunud aeg $t^* = 2\pi/\omega$.

Suvalise punkti P kiiruse moodul

$$v_P = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}, \quad (1.98)$$

kus r on vaadeldava punkti kaugus pöörlemisteljest. Kruvijoone kaldenurk

$$\gamma = \arctan \frac{v}{\omega r}. \quad (1.99)$$

3. \mathbf{v} ja $\boldsymbol{\omega}$ moodustavad suvalise nurga.

Keha summaarne liikumine on *vaba jääga keha liikumine*, mida võib taandada ka hetkeliseks kruviliikumiseks ümber hetkelise kruvitelje.

1.11 Esimese peatüki kokkuvõte

Esimene peatükk käsitleb punkti ja jääga keha kinemaatikat. Teisisõnu, siin uurisime punkti ja jääga keha liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi tundmata huvi liikumise põhjuste vastu.

Tähtsad mõisted ja valemid:

- punkti kohavektor \mathbf{r} , kiirus(vektor) \mathbf{v} ja kiirendus(vektor) \mathbf{a} ;
- jääga keha pöördevektor $\boldsymbol{\varphi}$, nurkkiirus(vektor) $\boldsymbol{\omega}$, nurkkiirendus(vektor) $\boldsymbol{\alpha}$;
- $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ja $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$;
- $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ ja $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$;
- rööpliikumine, pöörlemine, tasapinnaline liikumine, liitliikumine, sfääriline liikumine, vaba jääga keha liikumine.

Peatükk 2

Punktmasside ja jäikade kehade dünaamika ehk klassikaline dünaamika

2.1 Punktmassi dünaamika põhiseadused

2.1.1 Põhimõisted

Inerts¹ on kehade võime püsida paigalseisus või ühtlases ja sirgjoonelises liikumises kuni mingi jõud seda olekut ei muuda. Keha inerts mõõduks on tema *mass*.

Punktmassiks nimetatakse materiaalist keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

2.1.2 Newtoni seadused (dünaamika aksioomid)

I (Inertsiseadus): Punktmass on paigal või jätkab ühtlast ja sirgjoonelist liikumist kui talle mõjuvate jõudude resultant on null.

See seadus annab meile kriteeriumi, et otsustada kas kehale on rakendatud jõudusid või ei ole.

Järeldus (teine sõnastus): Punktmassi kiirendus erineb nullist vaid siis kui talle on rakendatud mingi jõud.

Taustsüsteeme, kus kehtib inertsiseadus nimetatakse *inertsiaalseteks taustsüsteemideks*. Iga inertsiaalne taustsüsteem liigub teise inertsiaalse taustsüsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjoonelisel või on paigal.

II (Dünaamika põhiseadus): Punktmassi kiirendus on talle mõjuva jõuga samasuuna-
line ja võrdeline (võrdeteguriks on keha mass) —

$$ma = \mathbf{F}. \tag{2.1}$$

See seadus võimaldab juba vastata küsimusele, kuidas kehale rakendatud jõud mõjutab tema liikumist. Erijuhul sisaldab teine seadus esimese.

¹kr. *inertia* - tegevusetus, loidus

III (Mõju ja vastumõju seadus): Kaks punktmassi mõjuvad teineteisele piki neid ühendavat sirget võrdvastupidise jõuga.

Märkused:

1. Newtoni seadused pole matemaatiliselt tõestatavad vaid nad põhinevad katsetel. See annabki aluse nimetada neid ka aksioomideks. Neile seadustele on ülesehitatud kogu klassikaline mehaanika (vastandina relativistlik mehaanika).
2. Praktikas loetakse paigalseisvaks taustsüsteemiks tavaliselt Maaga seotud taustsüsteemi. Kui sellest ei piisa, seotakse liikumatu taustsüsteem Päikesega.
3. Liikumise kirjeldamiseks peab olema kokkulepe kuidas mõõdetakse aega. Newton: "Seadused kehtivad absoluutses ajas, millel pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ja mis kulgeb ühtlaselt." Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel ikkagi mingist konkreetsest nähtusest (Maa pöörlemine, isotoobi ^{133}Cs kiirguse periood).
4. Praktikas määratakse keha mass kaalumise teel —

$$m = \frac{P}{g}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Jõudude mõju sõltumatuse printsiip

Newtoni II seadus käsitleb juhtu, kus punktmassile mõjub vaid üks jõud. Üldisemal juhul tuleb koos Newtoni II seadusega rakendada jõudude mõju sõltumatuse printsiipi.

Jõudude mõju sõltumatuse printsiip: Jõu mõju punktmassi liikumisele ei sõltu sellest, kas punktile on rakendatud peale tema veel teisi jõude või ei ole.

Rakendame äsjasõnastatud printsiipi. Mõjugu punktmassile n jõudu $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, mis eraldi mõjudes annaksid vaadeldavale punktmassile vastavalt kiirendused $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Newtoni II seaduse põhjal $m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 \dots m\mathbf{a}_n = \mathbf{F}_n$. Vastavalt jõudude mõju sõltumatuse printsiibile

$$m \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (2.3)$$

Tähistades

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \text{ ja } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.4)$$

saame viimasele valemile anda kuju

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \text{ või } m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (2.5)$$

Järeldus (teine sõnastus): Kui punktmassile on rakendatud n jõudu $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, siis võib vaadeldavad jõud asendada nende resultandiga \mathbf{F} . Kiirendus, mille keha omandab resultandi \mathbf{F} mõjul on võrdne üksikute jõudude \mathbf{F}_i poolt põhjustatud kiirenduste geometrilise summaga \mathbf{a} .

2.2 Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet

Lähtudes dünaamika põhiseadusest (Newtoni II seadusest) ja jõudude mõju sõltumatuse printsiibist

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.6)$$

saab lahendada kahte punktmassi dünaamika põhiülesannet:

1. On antud punktmassi liikumisseadus. Leida millised punktmassile rakendatud jõud põhjustavad sellise liikumise!
2. On teada punktmassile mõjuvad jõud. Leida selle punktmassi liikumisseadus!

2.2.1 Punktmassi liikumise diferentsiaalvõrrandid

Newtoni II seadus on esitatud vektorkujul. Kui vastav vektorvõrrand projekteerida koordinaattelgedele saadakse skalaarsed võrrandid, mis seovad kiirenduste ja jõudude projektioone. Descartes'i ristkoordinaatide puhul nimetatakse tulemust *punktmassi liikumise diferentsiaalvõrranditeks ristkoordinaatides*, sageli ka *dünaamika põhivõrranditeks*.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_i F_{ix}, \\ m\ddot{y} = \sum_i F_{iy}, \\ m\ddot{z} = \sum_i F_{iz}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Kui on teada punkti trajektoor, on mõistlik kasutada loomulikke koordinaate. Nüüd nimetatakse tulemust *punktmassi liikumise loomulikeks diferentsiaalvõrranditeks*.

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \sum_i F_{it}, \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum_i F_{in}, \\ 0 = \sum_i F_{ib}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Järeldus: Punktmassile rakendatud jõudude resultant paikneb alati trajektoori kool-dumistasapinnas.

2.2.2 Esimene põhiülesanne

Esimene põhiülesanne on lahendatav väga lihtsalt ja nõuab matemaatiliselt vaid diferentseerimist. Olgu antud punktmassi liikumisseadus

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.9)$$

Tähistades $F_x = \sum F_{ix}$, $F_y = \sum F_{iy}$ ja $F_z = \sum F_{iz}$ ja diferentseerides kaks korda aja järgi saamegi otsitavad jõu projektsioonid koordinaattelgedel.

$$F_x = m \frac{d^2 f_1}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2 f_2}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2 f_3}{dt^2} \quad (2.10)$$

2.2.3 Teine põhiülesanne ja punktmassi liikumise diferentsiaalvõrrandite integreerimine

Üldiselt tuleb siin lahendada kolmest teist järku diferentsiaalvõrrandist koosnev süsteem ning seega vajame liikumisseaduse leidmiseks ka liikumise algandmeid, st., punkti asukohta ja kiirust mingil ajahetkel $t = t_0$ —

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{ja} \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \equiv v_{0x}, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 \equiv v_{0y}, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \equiv v_{0z}. \quad (2.11)$$

Üldjuhul võivad jõudude projektsioonid sõltuda punkti koordinaadist punkti kiirusest ja ajast ning saadud diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases} \quad (2.12)$$

lahendamine võib osutuda küllaltki keerukaks. Vaatleme järgnevalt kolme tüüpilist erijuhtu (piirdudes vaid projektsioonidega x teljel). Liikumise algandmed: alghetkel $t = t_0$ on punkti koordinaat $x = x_0$ ja tema kiirus $\dot{x} = \dot{x}_0$.

1) Jõudude projektsioonid sõltuvad vaid ajast, st.

$$m\ddot{x} = f(t). \quad (2.13)$$

Viimase avaldise puhul on tegu eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga, mida saab kohe integreerida —

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = f(t) \quad \Rightarrow \quad m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_{t_0}^t f(t) dt \quad \Rightarrow \quad m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt,$$

kust saab avaldada

$$\dot{x} = \varphi(t). \quad (2.14)$$

Teisisõnu, oleme saanud kiiruse muutumise seaduse (kiiruse sõltuvana ajast). Integreerides viimast

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \varphi(t) dt$$

saame liikumisseaduse —

$$x = \psi(t). \quad (2.15)$$

Erijuht: $f(t) = \text{const.}$

2) Jõudude projektsioonid sõltuvad vaid punkti koordinaadist, st.

$$m\ddot{x} = f(x). \quad (2.16)$$

Viimase võrrandi puhul pole tegu eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga. Kui teha aga asendus

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}, \quad (2.17)$$

siis teiseneb (2.16) eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks, mida saab integreerida:

$$m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \dot{x} d\dot{x} = \int_{x_0}^x f(x) dx \quad \Rightarrow \quad m \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\dot{x}_0^2}{2} \right) = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Tulemusena saame kiiruse muutumise seaduse kujul

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad (2.18)$$

st. kiiruse sõltuvana koordinaadist. Integreerides veel üks kord saame liikumiseaduse kujul (2.15):

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{\varphi(x)} = \int_{t_0}^t dt \quad \Rightarrow \quad x = \psi(t).$$

Erijuht: $f(x) = \text{const}$.

3) Jõudude projektsioonid sõltuvad vaid vastavast punkti kiiruse projektsioonist, st.

$$m\ddot{x} = f(\dot{x}). \quad (2.19)$$

Nüüd on võimalik kaks lähenemisviisi — kas kasutada asendust (2.17) või ei. Mõlemal juhul on võimalik integreerida diferentsiaalvõrrandit (2.19) *Kui kasutada asendust* (2.17), siis saame kiiruse sõltuvana koordinaadist kujul (2.18):

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = f(\dot{x}) \quad \Rightarrow \quad m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x} d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \int_{x_0}^x dx \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \varphi(x).$$

Integreerides viimast saame liikumiseaduse kujul (2.14):

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{\varphi(x)} = \int_{t_0}^t dt \quad \Rightarrow \quad x = \psi(t).$$

Kui aga integreerida ilma asendust tegemata, saame kiiruse sõltuvana ajast kujul (2.14):

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}) \quad \Rightarrow \quad m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \int_{t_0}^t dt \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \varphi(t).$$

Teistkordselt integreerides on tulemuseks jällegi liikumiseaduse kujul (2.14):

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \varphi(t) dt \quad \Rightarrow \quad x = \psi(t).$$

Diferentsiaalvõrrandite lahendamisele peab loomulikult eelnema nende koostamine, mis peab toimuma joonise põhjal. Selleks tuleb punktmass (keha) kujutada koordinaatteljes tükis ja kanda joonisele kõik talle mõjuvad jõud. Jõud märgitakse joonisele täpselt samuti kui staatikas — 1) kantakse joonisele kõik aktiivsed jõud ning 2) vaadeldeldes keha absoluutselt vabana, asendatakse sidemed vastavate reaktsioonidega. Kui ülensande tekstis pole sätestatud teisiti, siis selleks, et lahendamist lihtsustada kujutatakse punktmass (keha) tavaliselt seal, kus tema koordinaadid oleksid positiivsed ja eeldatakse tema kiirusele suund, mille puhul $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$ ja $\dot{z} > 0$.

2.2.4 Kokkuvõte

- Dünaamika esimene ja teine põhiülesanne.
- Punktmassi liikumise diferentsiaalvõrrandite koostamise põhimõtted.
- Punktmassi liikumise diferentsiaalvõrrandite integreerimisvõtted.

2.3 Punktmassi relatiivse liikumise põhivõrrand

Vaatleme punktmassi massiga m , mis liigub taustsüsteemis $O_1\xi\eta\zeta$. Taustsüsteem $O_1\xi\eta\zeta$ liigub omakorda paigalseisva taustsüsteemi $Oxyz$ suhtes. Seega on punkti liikumine liikuva taustsüsteemi $O_1\xi\eta\zeta$ suhtes relatiivne liikumine, liikuva taustsüsteemi $O_1\xi\eta\zeta$ liikumine paigalseisva taustsüsteemi $Oxyz$ suhtes kaasaliikumine ja punkti liikumine paigalseisva taustsüsteemi $Oxyz$ suhtes absoluutne liikumine. Eesmärgiks on tuletada *punktmassi relatiivse liikumise põhivõrrand*, mille abil saab leida *punktmassi relatiivse liikumise seaduse*. Lähtume Newtoni teisest seadusest

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2.20)$$

Kui taustsüsteem $O_1\xi\eta\zeta$ on inertsiaalne taustsüsteem, st. tema kiirendus liikumisel taustsüsteemi $Oxyz$ suhtes on null, siis on punkti kiirendus nii taustsüsteemis $O_1\xi\eta\zeta$ kui taustsüsteemis $Oxyz$ sama, st., punkti absoluutne ja relatiivne kiirendus langevad kokku ($\mathbf{a} = \mathbf{a}_r$). Kui taustsüsteem $O_1\xi\eta\zeta$ pole aga inertsiaalne taustsüsteem, siis tuleb punkti absoluutne kiirendus leida valemiga

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C. \quad (2.21)$$

Tähistades $\Phi_e = -m\mathbf{a}_e$ ja $\Phi_C = -m\mathbf{a}_C$, saame punktmassi relatiivse liikumise põhivõrrandi

$$m\mathbf{a}_r = \sum_i \mathbf{F}_i + \Phi_e + \Phi_C. \quad (2.22)$$

Vektoriaalseid suurusi Φ_e ja Φ_C nimetatakse vastavalt *kaasaliikumise* ja *Coriolise inertsjõududeks* ning nad on vastavate kiirendustega vastassuunalised.

Kui nii kaasaliikumise kui Coriolise kiirendused on nullid, siis ka vastavad inertsjõud on nullid ja tegu on inertsiaalse taustsüsteemiga. Sel juhul säilitab Newtoni teine seadus sama kuju mõlemas taustsüsteemis. Kuna Newtoni teine seadus on põhilähtekohaks mehaanika probleemide lahendamisel, siis järelikult kulgevad kõik mehaanikalised nähtused inertsiaalsetes taustsüsteemides samal viisil. Seda tulemust nimetatakse klassikalise mehaanika relatiivsprintsipiiks. Järelikult pole inertsiaalses taustsüsteemis oleval vaatlejal mitte mingit võimalust selle taustsüsteemi liikumise kindlaksmääramiseks.

Kui relatiivne liikumine puudub, siis öeldakse, et punktmass on *relatiivses paigalseisus*. Relatiivse paigalseisu tingimuseks on

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \Phi_e = 0. \quad (2.23)$$

2.4 Punktmasside mehaanikaline süsteem

Punktmasside mehaaniliseks süsteemiks nimetatakse sellist üksteist mõjutavate punktmasside kogumit, kus iga punktmassi liikumine sõltub teiste punktmasside liikumisest ja asukohast. Näiteks, päikesesüsteem on aga linnuparv pole käsitletav punktmasside mehaanilise süsteemina. Ka vedelikke, gaase ja tahkeid kehi vaadeldakse punktmasside mehaanilise süsteemina. Lühiduse mõttes jäetakse terminis punktmasside mehaanikaline süsteem sõna mehaanikaline tihti ära ja piirduakse vaid terminiga punktmasside süsteem.

Välisjõud on jõud, millega sellesse süsteemi mittekuuluvad kehad mõjutavad vaadeldava süsteemi punkte.

Sisejõud on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist.

Teoreem 1: Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude summa on null.

Tõestus: Vaatleme kahte suvalist punktmassi, mis kuuluvad antud punktmasside süsteemi. Tähistame nad i ja k . Vastavalt Newtoni III seadusele mõjutavad need punktmassid teineteist võrdvastupidiste jõududega $\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$, järelikult

$$\mathbf{F}_{ki} + \mathbf{F}_{ik} = 0. \quad (2.24)$$

Kuna (2.24) kehtib suvalise kahe punkti korral, siis

$$\sum_{i,k} \mathbf{F}_{ik} = 0. \quad \text{q.e.d.} \quad (2.25)$$

Teoreem 2: Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude momentide summa mistahes punkti suhtes on null.

Tõestus: Vaatleme jällegi kahte suvalist punktmassi i ja k , mis kuuluvad antud punktmasside süsteemi. Jõudude \mathbf{F}_{ki} ja \mathbf{F}_{ik} momendid punkti O suhtes on $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{ki}) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}$ ja $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{ik}) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik}$. Nende summa

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{ki}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{ik}) = \mathbf{r}_i \times \underbrace{\mathbf{F}_{ki}}_{-\mathbf{F}_{ik}} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik} = \underbrace{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}_{\mathbf{r}_{ik}} \times \mathbf{F}_{ik} = 0, \quad (2.26)$$

sest vektorid \mathbf{r}_{ik} ja \mathbf{F}_{ik} on kollineaarsed. Kuna avaldis (2.26) kehtib suvalise kahe punkti puhul, siis

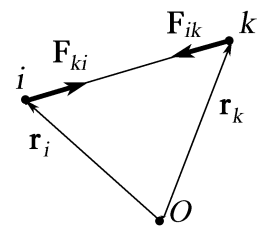
$$\sum_{i,k} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{ik}) = 0. \quad \text{q.e.d.} \quad (2.27)$$

Punktmasside süsteemi mass

$$m = \sum_i m_i \quad (2.28)$$

Punktmasside süsteemi massikese

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}. \quad (2.29)$$



2.5 Masskeskme liikumise teoreem

Teoreem: Punktmasside süsteemi masskese liigub nagu punktmass, mille mass võrdub süsteemi kogumassiga ja millele on rakendatud kõik sellele süsteemile mõjuvad välisjõud:

$$m\mathbf{a}_C = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2.30)$$

Tõestus: Vaatleme n punktmassist koosnevat punktmasside süsteemi. Selle süsteemi liikumine on määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{\Phi}_1, \\ \dots \\ m_n\mathbf{a}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{\Phi}_n, \end{cases} \quad (2.31)$$

kus \mathbf{F}_i ja $\mathbf{\Phi}_i$ on vastavalt i -ndale punktmassile mõjuv välisjõud ja sisejõud. Kuna $\sum_i \mathbf{\Phi}_i = 0$, siis

$$\sum_i m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2.32)$$

Masskeskme definitsiooni põhjal $\sum_i m_i\mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_C$. Diferentseerides viimast avaldist kaks korda aja järgi, saame $\sum_i m_i\mathbf{a}_i = m\mathbf{a}_C$, mille asendamisel valemisse (2.32) saame masskeskme liikumise teoreemi (2.30). Seega on süsteemi masskeskme liikumine määratud vaid välisjõududega. Vektorvõrrandi (2.30) projekteerimisel Descartes'i ristkoordinaatidele x, y, z saame kolm skalaarset võrrandit

$$m\ddot{x}_C = \sum_i F_{ix}, \quad m\ddot{y}_C = \sum_i F_{iy}, \quad m\ddot{z}_C = \sum_i F_{iz}. \quad (2.33)$$

Kui vaadeldava süsteemi välisjõudude summa on null, siis on ka tema masskeskme kiirendus null. Järelikult, sel juhul on masskese kas paigal või jätkab ühtlast ja sirgjoonelist liikumist. Kui avaldistes (2.33) näiteks vaid $\sum_i F_{ix} = 0$, siis kehtib eelöeldu vaid x telje sihilise liikumise kohta, st., antud juhul $\ddot{x}_C = 0$ ja $\dot{x}_C = \text{const}$. Kui süsteem seisis alghetkel paigal, siis $\dot{x}_C = 0$. Seega antud juhul süsteemi masskeskme asukoht x telje sihis ei muutu. Tähistame i -nda punktmassi asukoha hetkedel t ja t' vastavalt x_i ja x'_i . Masskeskme definitsiooni põhjal

$$\sum_i m_i x_i = \sum_i m_i x'_i \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i (x'_i - x_i) = 0, \quad (2.34)$$

ehk

$$\sum_i m_i \Delta x_i = 0, \quad (2.35)$$

kus $\Delta x_i = x'_i - x_i$ on i -nda punktmassi asukoha muut x telje sihis ajavahemiku $\Delta t = t' - t$ jooksul. Sama kehtib loomulikult ka y ja z telje kohta.

2.6 Liikumishulga teoreem

Punktmassi liikumishulgaks² nimetatakse vektoriaalset suurust, mis võrdub punkti massi ja kiiruse korrutisega ($m\mathbf{v}$).

Punktmasside süsteemi liikumishulgaks nimetatakse süsteemi kõigi punktide liikumishulkade geomeetrilist summat —

$$\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (2.36)$$

Lähtudes masskeskme definitsioonist saab näidata, et punktmasside süsteemi liikumishulk võrdub süsteemi massi ja masskeskme kiiruse korrutisega —

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_C. \quad (2.37)$$

Jõu \mathbf{F} elementaarimpulsiks nimetatakse korrutist $\mathbf{F}dt$, kus dt on elementaarajavahemik.

Jõu impulsiks lõplikus ajavahemikus $[t_0, t_1]$ nimetatakse integraali

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt. \quad (2.38)$$

Liikumishulga teoreemi diferentsiaalkuju: Punktmasside süsteemi liikumishulga tuletis aja järgi võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude geomeetrilise summaga —

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2.39)$$

Tõestus järeldub otse masskeskme liikumise teoreemist (2.30), sest $\dot{\mathbf{K}} = m\dot{\mathbf{v}}_C = m\mathbf{a}_C$. Vektorvalemi (2.39) projektsioonid Descartes'i ristkoordinaatidel on

$$\dot{K}_x = \sum_i F_{ix}, \quad \dot{K}_y = \sum_i F_{iy}, \quad \dot{K}_z = \sum_i F_{iz}. \quad (2.40)$$

Liikumishulga teoreemi integraalkuju: Punktmasside süsteemi liikumishulga muutus teatud ajavahemikus Δt võrdub samas ajavahemikus süsteemile mõjuvate välisjõudude impulsside geomeetrilise summaga —

$$\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0 = \sum_i \mathbf{J}_i, \quad (2.41)$$

kus \mathbf{K}_0 on süsteemi algne liikumishulk, \mathbf{K}_1 tema liikumishulk vaadeldava ajavahemiku Δt lõpuks ja \mathbf{J}_i on i -ndale punktmassile ajavahemikus Δt mõjuvate välisjõudude impulss.

Liikumishulga teoreemi integraalkuju saadakse liikumishulga teoreemi diferentsiaalkuju (2.39) integreerimise teel. Avaldise (2.41) projektsioonid x, y, z telgedel:

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_i J_{ix}, \quad K_{1y} - K_{0y} = \sum_i J_{iy}, \quad K_{1z} - K_{0z} = \sum_i J_{iz}. \quad (2.42)$$

²Liikumishulk ja impulss on ühe ja sama füüsikalise suuruse erinevad nimetused.

Järeldus (liikumishulga jäävuse seadus): Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu liikumishulgaga.

Tõepoolest, kui süsteemile ei mõju välisjõude, siis $\dot{\mathbf{K}} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} = \text{const.} \Rightarrow \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_0$.

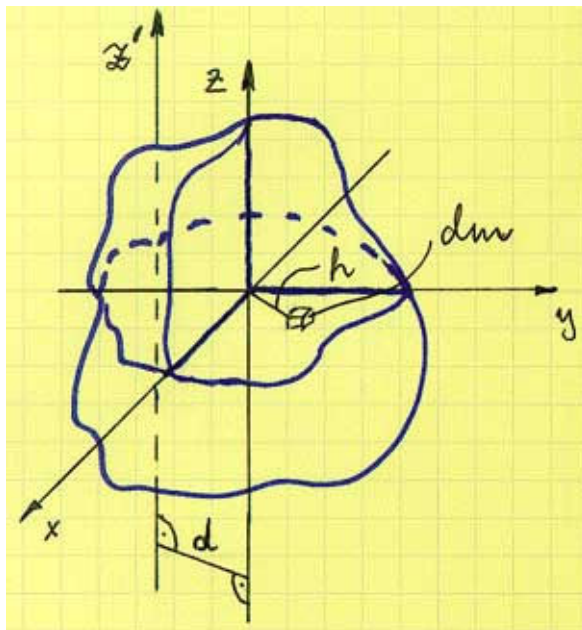
Liikumishulga teoreemi võib vaadelda otsese tuletusena masskeskme liikumise teoreemist. Need kaks teoreemi on vaid ühe ja sama seaduspärasuse kaks eri väljendust — kui me oleme ühe ära kasutanud, ei anna teine enam midagi uut.

2.7 Keha massiinertsimomendid

Keha massiinertsimomendid koordinaattelgede x, y, z suhtes on defineeritud analoogselt pinna inertsimomentidega. Nüüd aga vaatleme elementaarpinna dA asemel elementaar-massi dm ning integreerime üle massi m . Näiteks massiinertsimoment z telje suhtes

$$I_z = \int_m \underbrace{h^2}_{dI_z} dm = \int_m (x^2 + y^2) dm, \quad (2.43)$$

kus h on elementaar-massi dm kaugus z teljest ja dI_z elementaarinertsimoment z telje suhtes (vastava elementaar-massi inertsimoment z telje suhtes). Analoogne on ka põhjus, miks massiinertsimomendid sisse tuuakse — inertsimomentide kasutamise läbi lihtsustub teatavat tüüpi ülesannete lahendamine. Käesolevas kursuses on nendeks teatavat tüüpi ülesanneteks pöörlemisega seotud ülesanded.

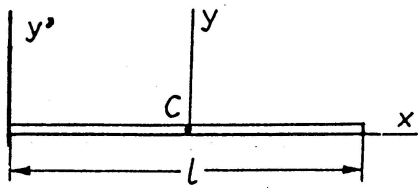


Joonis 2.1:

Hygens-Steineri teoreem: Keha inertsimoment mingi telje z' suhtes võrdub summaga, milles esimene liidetav on inertsimoment antud teljega paralleelse ja masskeset läbiva telje z suhtes ning teine liidetav võrdub keha massi ja telgedevahelise kauguse ruudu korrutisega —

$$I_{z'} = I_z + md^2. \quad (2.44)$$

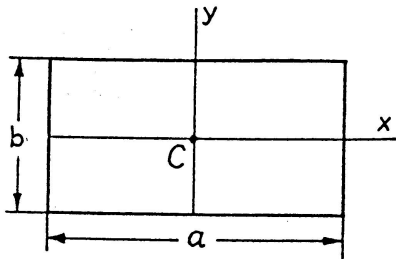
Allpool on toodud mõningate lihtkujundite massiinertsimomendid³ mida on vajalik teada ülesannete lahendamisel.



Ühtlane peenike varras

$$I_y = \frac{1}{12} ml^2,$$

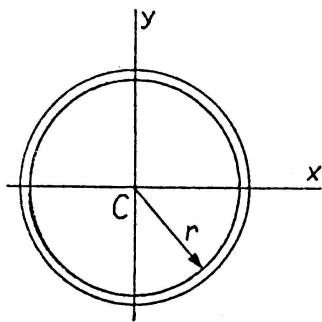
$$I_{y'} = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$



Ühtlane ristkülikuline plaat

$$I_x = \frac{1}{12} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{12} ma^2,$$

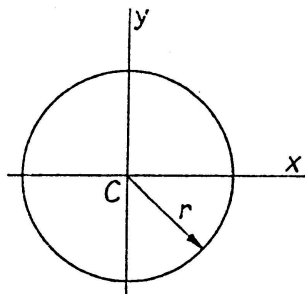
$$I_C = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$



Ühtlane peenike rõngas

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mr^2,$$

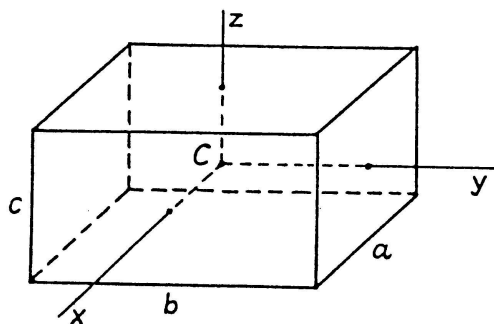
$$I_C = mr^2.$$



Ühtlane õhuke ketas

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mr^2,$$

$$I_C = \frac{1}{2} mr^2.$$



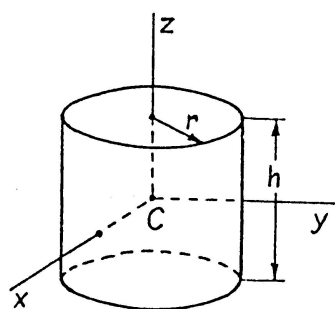
Ühtlane risttahukas

$$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2),$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2),$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

³Joonised ja valemid pärinevad õppemethodilisest väljaandest «Teoreetilise mehaanika põhivara», koostanud E. Topnik, Tallinn, 1988. Inertsimomentide arvutamisaiteid vt. Ü. Lepiku ja L. Rootsi õpikust (lk. 200–202 ja 276–287) ja E. Topniku brožüüridest (leheküljed sõltuvad ilmumisaastast).



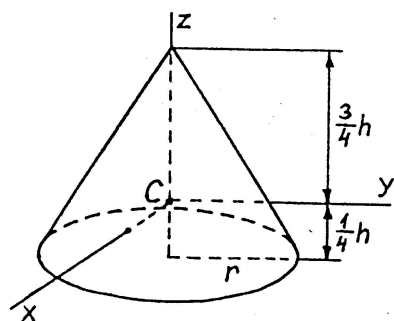
Ühtlane silinder

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} mh^2,$$

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2.$$

Ühtlane silindriline pind

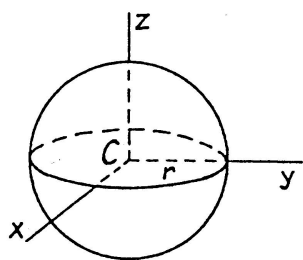
$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{12} mh^2, \quad I_z = mr^2.$$



Ühtlane koonus

$$I_x = I_y = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{3}{80} mh^2,$$

$$I_z = \frac{3}{10} mr^2.$$



Ühtlane kera

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2.$$

Ühtlane sfääriline pind

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} mr^2.$$

Keha inertsiraadius (z telje suhtes)

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}. \quad (2.45)$$

Seega, teades keha inertsiraadiust i_z ja massi m saame leida tema inertsimomendi valemist

$$I_z = mi_z^2 \quad (2.46)$$

s.t. vaadeldava keha mass oleks kui jaotunud ühtlasesse peenikesse rõngasse raadiusega i_z .

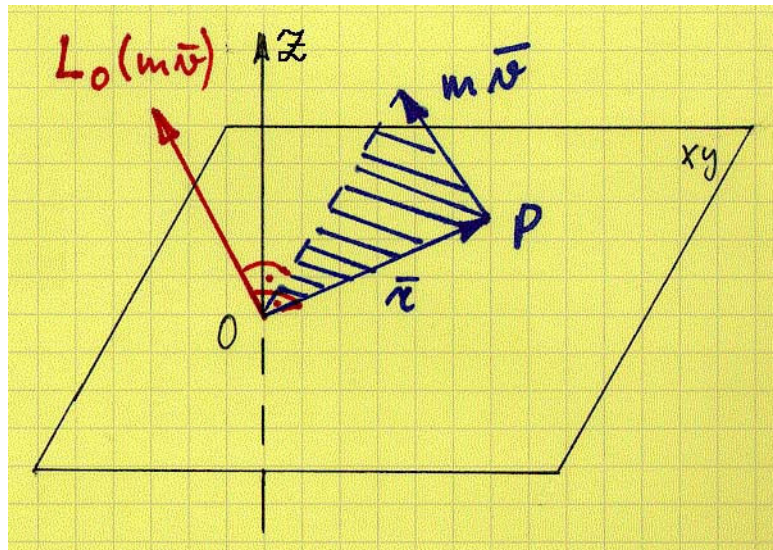
2.8 Kineetilise momendi teoreem

2.8.1 Kineetiline moment

Punktmassi liikumishulga momendiks punkti O suhtes nimetatakse vektorkorrutist

$$\mathbf{L}_O(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad (2.47)$$

kus r on punktmassi kohavektor ja $m\mathbf{v}$ tema liikumishulk.



Joonis 2.2:

Seega on punktmassi liikumishulga momendi ja jõu momendi definitsioonid analoogsed. Järelikult on analoogne ka kogu teooria, mis räägib momendist telje suhtes ja momendi projektsioonist teljele.

Punktmasside süsteemi kineetiline moment⁴ mingi punkti O suhtes on võrdne süsteemi kõigi punktide liikumishulkade momentide geomeetrilise summaga —

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{L}_O(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i \quad (2.48)$$

(Loomulikult peavad kõik momendid olema leitud ühe ja sama punkti O suhtes.)

Königi teljed on koordinaatteljed, mis liiguvad rööpselt koos süsteemi masskeskmega.

Königi 1. teoreem: Punktmasside süsteemi kineetiline moment punkti O suhtes leitakse valemiga

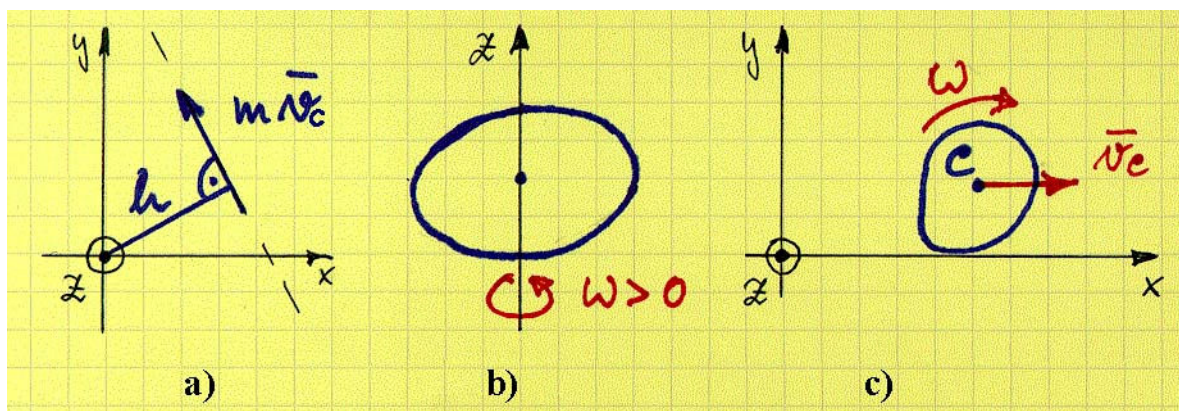
$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{L}_C^r, \quad (2.49)$$

⁴Nii punktmassi liikumishulga momendi kui punktmasside süsteemi kineetilise momendi puhul kasutatakse ka termineid impulsi moment või pöördeimpulss.

kus esimene liidetav kujutab endast masskeskme liikumishulga momenti punkti O suhtes (eeldades, et kogu süsteemi mass on koondatud masskeskmesse). Teine liidetav on aga süsteemi kineetiline moment masskeskme suhtes ning tema leidmise puhul vaadeldakse vaid süsteemi relatiivset liikumist Königi telgede suhtes.

Ülesannete lahendamise puhul on tavaliselt vaja leida (jäiga) keha kineetilist momenti mingi telje (näiteks z) suhtes. Täpsemalt öeldes, leitakse sel juhul kineetilise momendi projektsioon mingil teljel. Projektsiooni märk määratakse loomulikult kruvireegli põhjal (parema käe kruvi). Vaatleme kolme erijuhtu.

1. Rööpliikumine (joonis 2.3 a): $L_z = mv_c h$, kus v_c on keha masskeskme kiirus ja h liikumishulga momendi õlg (vektori \mathbf{v} mõjusirge kaugus z teljest).
2. Pöörlemine ümber keha masskeset läbiva telje z (joonis 2.3 b): $L_z = I_z \omega_z$.
3. Tasapinnaline liikumine (joonis 2.3 c): $L_z = L_z(m\mathbf{v}_C) + I_C \omega_z$. Selle valemi puhul on rakendatud Königi 1. teoreemi. Seega $L_z(m\mathbf{v}_C)$ on masskeskme liikumishulga moment z telje suhtes ning I_C on inertsimoment masskeset C läbiva ja z teljega paralleelse Königi telje suhtes. I_C leidmisel vaadeldakse vaid keha relatiivset pöörlemist ümber selle (masskeset C läbiva ja z teljega paralleelse) Königi telje.



Joonis 2.3:

2.8.2 Kineetilise momendi teoreem

Teoreem:⁵ Punktmasside süsteemi kineetilise momendi tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale süsteemile rakendatud välisjõudude peamomendiga —

$$\dot{L}_O = \sum_i M_O(\mathbf{F}_i). \quad (2.50)$$

(Mõlemad momendid peavad olema leitud ühe ja sama punkti suhtes.)

Tõestus on analoogne liikumishulga teoreemi tõestusele, nüüd on vaid jõudude ja liikumishulkade asemel vastavad momendid.

⁵Vaadeldav teoreem esitatakse diferentsiaalkujul. Võimalik on aga esitada teda ka integraalkujul.

Järeldus (kineetilise momendi jäävuse seadus): Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu kineetilise momendiga.

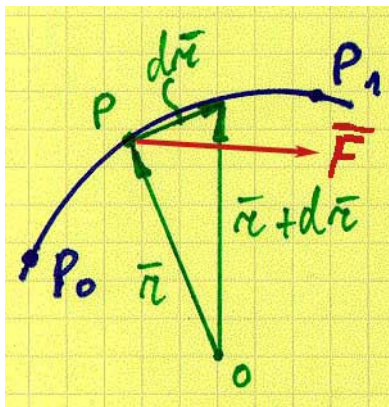
Tõepoolest, kui välisjõudude peamoment on null, siis $\dot{\mathbf{L}}_O = 0$ ja $\mathbf{L} = \text{const}$. Seega, kui $\mathbf{L} = \text{const}$ puhul muutub keha inertsimoment, siis peab vastavalt muutuma ka tema nurkkiirus.

2.9 Jõu töö ja võimsus

Jõu elementaartööks nimetatakse jõu ja tema rakenduspunkti elementaarsiirde skalaarkorrutist:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.51)$$

Jõu töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel punktist P_0 punkti P_1 esitatakse



Joonis 2.4:

joonintegraalina

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (2.52)$$

Jõupaari elementaartöö (pöördel ümber z telje)

$$dW = M_z d\varphi_z \quad (2.53)$$

ja jõupaari töö lõplikul pöördel asendist φ_0 asendisse φ_1

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi_z. \quad (2.54)$$

Jõu võimsuseks nimetatakse ajaühikus tehtavat tööd, st., töö muutmise kiirust —

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \text{ehk} \quad P = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (2.55)$$

Jõupaari võimsus

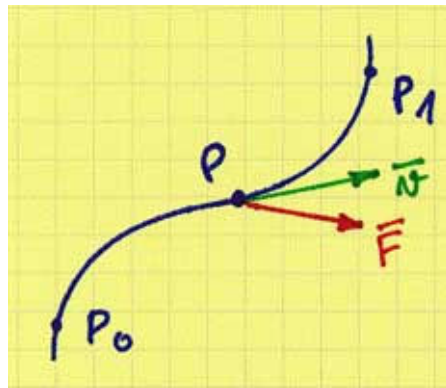
$$P = M_z \omega_z. \quad (2.56)$$

2.10 Kineetilise energia teoreem

Märkus: Vaadeldavat teoreemi nimetatakse ka kineetilise energia muutumise teoreemiks või lihtsalt energiateoreemiks.

2.10.1 Kineetiline energia ja kineetilise energia teoreem punktmassi jaoks

Vaatleme ühte punktmassi massiga m , millele mõjub jõud \mathbf{F} ja mis liigub asendist P_0 asendisse P_1 , suvalisele hetkele vastab asend P . Lähtume jõu elementaartöö avaldisest



Joonis 2.5:

(2.51) ja Newtoni II seadusest (2.1):

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \stackrel{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2}{=} md \left(\frac{v^2}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right).$$

Sulgudes olevat suurust

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (2.57)$$

nimetatakse **punktmassi kineetiliseks energiaks**. Seega jõu elementaartöö $dW = dT$. Viimasest võrdusest tuletataksegi kineetilise energia teoreem.

Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalukuju punktmassi jaoks: Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale punktmassile mõjuva jõu võimsusega —

$$\dot{T} = P. \quad (2.58)$$

Kineetilise energia teoreemi integraalkuju punktmassi jaoks: Integreerides avaldist $dW = dT$ P_0 -st P_1 -ni, saame

$$T_1 - T_0 = W, \quad (2.59)$$

st., kineetilise energia muutus punktmassi üleminekul asendist P_0 asendisse P_1 võrdub talle rakendatud jõu poolt tehtava tööga sellel liikumisel.

Seega tööd nagu saadakse selle arvelt, et kineetiline energia muutub, annab osa endast ära.

2.10.2 Kineetilise energia teoreem punktmasside süsteemi jaoks

Vaatleme punktmasside süsteemi m_1, \dots, m_n . Vastavad kohavektorid on $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. Olgu k -ndale punktmassile rakendatud sisejõud \mathbf{F}_k^i ja välisjõud \mathbf{F}_k^e ning tema kineetiline energia

$$T_k = \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (2.60)$$

Kogu süsteemi kineetiline energia

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (2.61)$$

Leides nii sise kui ka välisjõudude elementaartööd ning arvestades eelmise punkti tulemusi, saame leida kineetilise energia teoreemi diferentsiaal ja integraalkujud punktmasside süsteemi jaoks.

Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalkuju punktmasside süsteemi jaoks: Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub kõigile süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude võimsuste summaga —

$$\dot{T} = \sum_{k=1}^n P_k^i + \sum_{k=1}^n P_k^e. \quad (2.62)$$

Kineetilise energia teoreemi integraalkuju punktmasside süsteemi jaoks: Kineetilise energia muutus punktmasside süsteemi liikumisel ühest asendist teise võrdub süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude tööde summaga sellel liikumisel —

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n W_k^i + \sum_{k=1}^n W_k^e. \quad (2.63)$$

Nagu näha, tuleb kineetilise energia teoreemi puhul sisejõud arvesse võtta (masskeskme, liikumishulga ja kineetilise momendi teoreemi puhul ei tulnud). Ülesannete lahendamise puhul vaatleme siiski peaaesjalikult juhte, kus sisejõud tööd ei tee, st. muutumatute süsteemide juhtu.

Süsteemi nimetatakse muutumatuks kui süsteemi liikumisel tema sisejõudude rakenduspunktide vahelised kaugused ei muutu. Saab näidata, et muutumatu süsteemi puhul on süsteemi sisejõudude töö null.

2.10.3 Süsteemi kineetilise energia leidmine

Königi 2. teoreem: Punktmasside süsteemi kineetiline energia võrdub masskeskme kineetilise energia (eeldades, et süsteemi mass on koondatud masskeskmesse) ja Königi telgede suhtes toimuva relatiivse liikumise kineetilise energia summaga —

$$T = T_C + T_r. \quad (2.64)$$

Vaatleme kolme erinevat tüüpi liikumist (võrdle kineetilise momendi leidmise valemitega lk. 52).

1. Rööpliikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2} \quad (2.65)$$

2. Pöörlemine ümber z telje

$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2} \quad (2.66)$$

3. Tasapinnaline liikumine

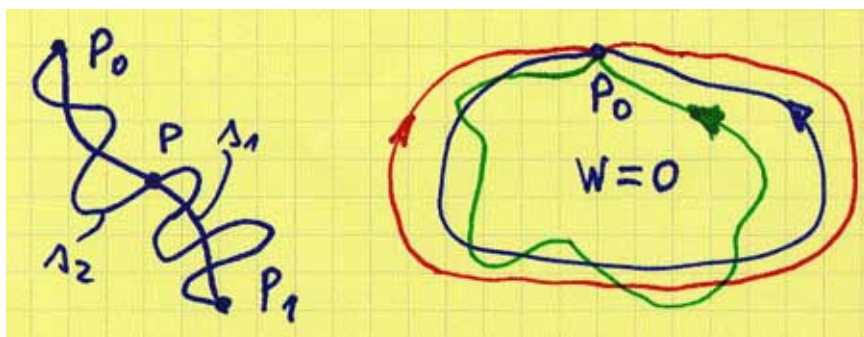
$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_z^2}{2} \quad (2.67)$$

Viimase avaldise puhul leitakse inertsimoment I_C masskeset läbiva ja z teljega paralleelse telje suhtes.

2.11 Potentsiaalne energia. Mehaanikalise energia jäävuse seadus.

2.11.1 Potentsiaalne energia

Kui jõu töö tema rakenduspunkti liikumisel asendist P_0 asendisse P_1 ei sõltu trajektoori kujust, siis nimetatakse sellist jõudu **konservatiivseks jõuks** (potentsiaalseks jõuks). Näiteks gravitatsioonijõud ja elastsusjõud. Kinnise trajektoori puhul on konservatiivse jõu töö null. Mittekonservatiivseid jõude nimetatakse **dissipatiivseteks jõududeks**. Näiteks



Joonis 2.6:

hõõrdejõud.

Vaatleme konservatiivset jõudu \mathbf{F} , mille töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel punktist P_0 punkti P_1 on

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Konservatiivse jõu puhul ei sõltu tema töö integreerimisteest. Matemaatilisest analüüsist on teada, et joonintegraal ei sõltu integreerimisteest siis ja ainult siis kui integraalilune avaldis on mingi funktsiooni täisdiferentsiaal. Seega võime sisse tuua funktsiooni $V(x, y, z)$ kujul

$$-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (2.68)$$

Tingimust (2.68) täitvat funktsiooni V nimetatakse *potentsiaalseks energiaks*. Miinus märk on siin sisse toodud kokkuleppe tõttu. Potentsiaalse energia definitsiooni (2.68) põhjal avalduvad konservatiivse jõu projektsioonid kujul

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.69)$$

Konservatiivse jõu töö on aga leitav valemiga

$$W = -\int_{P_0}^{P_1} dV = -V \Big|_{P_0}^{P_1} = V_0 - V_1. \quad (2.70)$$

kus V_0 on süsteemi algasendile ja V_1 süsteemi lõppasendile vastav potentsiaalne energia. Seega, konservatiivse jõu töö võrdub süsteemi alg- ja lõppasendile vastavate potentsiaalsete energiatega (potentsiaalide) vahel. Potentsiaalne energia iseloomustab keha võimet teha tööd ja ta sõltub keha asendist (jõuväljas). Kui keha potentsiaalne energia suureneb, siis avaldise (2.70) põhjal $W < 0$ ja vastupidi, kui keha potentsiaalne energia väheneb, siis $W > 0$. Teisisõnu, keha potentsiaalse energia suurendamiseks on vaja teha tööd, kuid keha potentsiaalse energia vähenemise arvelt võib «saada» tööd. Kui valemis (2.68) poleks sisse toodud miinus märki, saaks avaldis (2.70) kuju $W = V_1 - V_0$.

2.11.2 Mehaanikalise energia jäävuse seadus

Olgu kõik muutumatule mehaanikalisele süsteemile mõjuvad jõud konservatiivsed. Sellisel juhul nende jõudude töö süsteemi liikumisel algasendist lõppasendisse avaldub potentsiaalide vahena $V_0 - V_1$ ja kineetilise energia teoreemist saame, et

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1 \quad \text{ehk} \quad T + V = \text{const}. \quad (2.71)$$

Kineetilise ja potentsiaalse energia summat nimetatakse **mehaanikaliseks energiaks** ja tähistatakse E .

Mehaanikalise energia jäävuse seadus: Punktmasside süsteemi liikumisel konservatiivsete jõudude mõjul jääb tema mehaanikaline energia (kineetilise ja potentsiaalse energia summa) konstantseks —

$$E = T + V = \text{const}. \quad (2.72)$$

Punktmasside süsteeme, kus kehtib mehaanikalise energia jäävuse seadus nimetatakse **konservatiivseteks süsteemideks**.

2.12 Dünaamika üldteoremid — kokkuvõte

Paragrahvides 2.4–2.11 käsitleti dünaamika üldteoreeme (masskeskme liikumise teoreem, liikumishulga teoreem, kineetilise momendi teoreem ja kineetilise energia teoreem) ning nendega piirnevat.

Masskeskme liikumise teoreemi (§2.5) ja liikumishulga teoreemi (§2.6) on mugav kasutada rööpliikumise uurimisel ning kineetilise momendi teoreemi (§2.8) pöörlemise uurimisel. Kineetilise energia teoreem (§2.10) on lihtsalt rakendatav suvalist tüüpi liikumiste uurimiseks.

Tähtsad mõisted ja teoreemid:

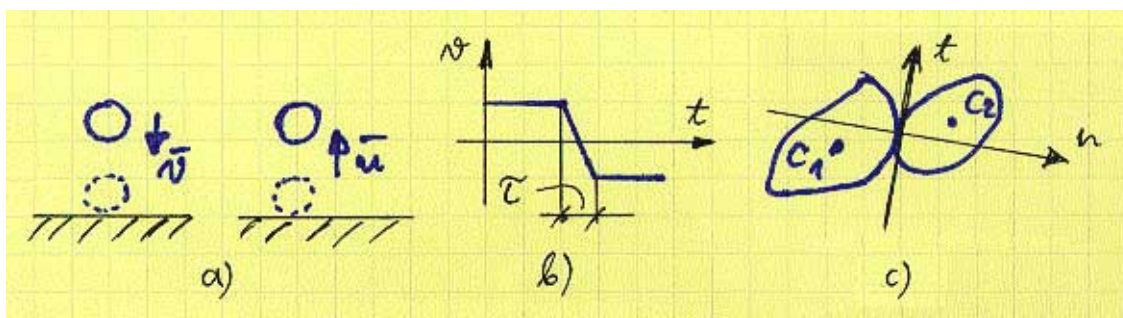
- Punktmasside mehaanikaline süsteem, välisjõud, sisejõud, teoreemid sisejõudude summast ja sisejõudude momentide summast.
- Masskeskme liikumise teoreem.
- Liikumishulk, jõu impulss, liikumishulga teoreem, liikumishulga jäävuse seadus.
- Keha massiinertsimomendid, Hygens-Steineri teoreem.
- Punktmassi liikumishulga moment, punktmasside süsteemi kineetiline moment, Königi teljed, Königi 1. teoreem, kineetilise momendi teoreem.
- Jõu töö ja võimsus, jõupaari töö ja võimsus, kineetiline energia, kineetilise energia teoreem, Königi 2. teoreem.
- Konservatiivsed jõud, dissipatiivsed jõud, potentsiaalne energia, mehaanikaline energia, mehaanikalise energia jäävuse seadus.

2.13 Põrge

2.13.1 Põrketeooria põhimõisted ja hüpoteesid (lihtustused ja aksioomid)

Seni oleme tegelenud liikumistega, kus lõpmata väikestele ajavahemikele vastavad kiiruste muutud on kas lõpmata väikesed või võrdsed nulliga. Sellise lähenemisega ei saa aga kirjeldada näiteks palli põrget vastu seina või põrandat.

Põrkeks⁶ nimetatakse nähtust, mille puhul keha punktide kiirused muutuvad väga lühikese ajavahemiku jooksul lõpliku suuruse võrra. Põrke mõiste on väga lai. Näiteks piljardikuuli löömine kiiga, piljardikuulide põrkumine, raua sepistamine, vaiade rammine, šrapnelli lõhkemine jne. jne. Siia kuuluvad ka juhud kui liikuvale kehale pannakse lõpmata lühikese ajavahemiku dt jooksul (st. praktiliselt hetkeliselt) peale täiendavad sidemed, või vastupidi, vabastatakse ta mõnest olemasolevast sidemest. Näiteks rööpselt liikuva keha üks punkt kinnitatakse või matemaatilise pendli niit lõigatakse läbi.



Joonis 2.7:

Põrkel ilmnevaid jõude nimetatakse **põrkejõududeks**. Näiteks palli põrgatamisel ilmnev survejõud (olemuselt elastsusjõud), mis muudab palli kiiruse praktiliselt hetkeliselt lõpliku suuruse võrra.

Vaadeldavasse mehaanilisse süsteemi kuuluvate kehade (punktmasside) omavahelisi põrkeid nimetatakse **sisepõrgeteks**.

Vaadeldavasse mehaanilisse süsteemi mittekuuluva keha (punktmassi) põrget vaadeldavasse süsteemi kuuluva kehaga (punktmassiga) nimetatakse **välispõrkeks**.

Põrkejooneks nimetatakse kehade kokkupuutepunktis määratud ühist normaali, st. sirget, mis läbib põrkuvate kehade kokkupuutepunkti ja on risti nende ühise puutujatasandiga.

Kui põrkuvad kehad liikusid enne põrget mööda põrkejoont, siis nimetatakse põrget **otsepõrkeks**, vastasel juhul aga **kaldpõrkeks**.

Kui põrkejoon läbib kehade massikeskmeid, siis nimetatakse põrget **tsentraalseks põrkeks**.

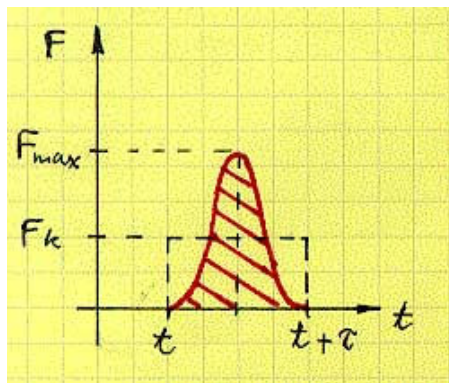
Kuna põrkejõud on tavaliselt väga suured (võrreldes teiste kehadele mõjuvate jõududega, näiteks keha kaaluga) ja **põrkekestus** τ on väga väike, siis on põrkejõu ja aja vahelise sõltuvuse täpne määramine küllaltki keerukas. Tavaliselt kasutatakse põrketeoorias

⁶Inglise keeles *impact*, *collision*. Eesti keeles kasutatakse teatud juhtudel ka terminit löök.

ligikaudset pörkejõu ja aja vahelist sõltuvust (graafikut) ja arvestatakse pörkejõudude summaarset mõju, st. pörkeimpulssi (täpsemalt öeldes pörkejõudude impulssi):

$$S = \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}(t) dt. \quad (2.73)$$

See integraal, st. impulss S on lõplik suurus ka siis kui $\tau \rightarrow 0$ ja $F \rightarrow \infty$.



Joonis 2.8:

Matemaatilisest analüüsist teame, et lõigul $[t, t + \tau]$ integreeruva funktsiooni $F(t)$ jaoks saab leida nn. keskmise väärtuse

$$F_k = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} F(t) dt. \quad (2.74)$$

Avaldistest (2.73) ja (2.74) saame, et

$$S = F_k \tau \quad \text{ehk} \quad F_k = \frac{S}{\tau}. \quad (2.75)$$

Seega, teades pörkeimpulssi ja pörkekestust, saame määrata keskmise pörkejõu F_k . Kuna pörkejõu maksimaalne väärtus $F_{\max} \geq 2F_k$, siis saab pörkel ilmnevaid maksimaalseid jõudusid hinnata teades pörkeimpulssi ja pörkekestust —

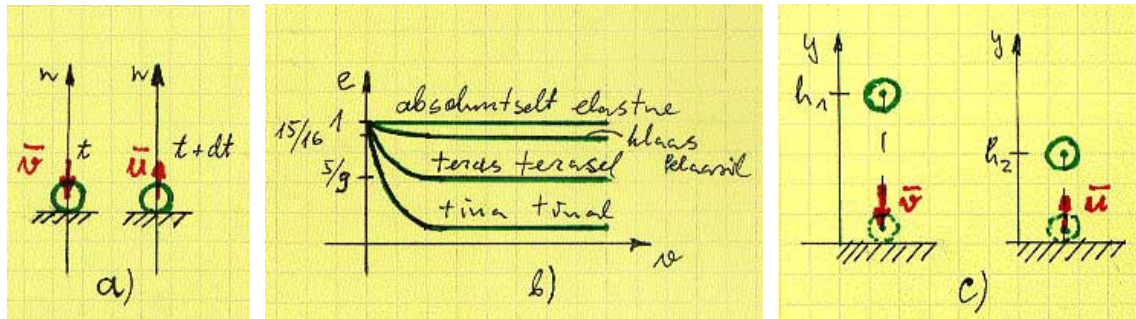
$$F_{\max} \geq \frac{2S}{\tau}. \quad (2.76)$$

Pörketeooria kaks põhihüpoteesi. Kuna pörkekestus τ on väga väike, siis

- (i) on väga väikesed ka pörkivate kehade masskesete siirded ajavahemiku τ jooksul ja neid ei pruugi arvestada ning kehad loetakse pörke vältel liikumatuks;
- (ii) on väga väikesed ka teiste jõudude (st. mittepörkejõudude) impulsid ajavahemiku τ jooksul ning need loetakse pörketeoorias võrdseks nulliga.

2.13.2 Elastne ja mitteelastne põrge. Põrketegur

Vaatleme vertikaalselt langeva kuulikesel põrget liikumatult horisontaalselt pinnalt. Enne põrget on kuulikesel kiirus v ja kineetiline energia $T_0 = 0,5mv^2$. Jagame põrke kaheks faasiks.



Joonis 2.9:

1. faas algab hetkel kui kuulike puudutab pinda ja lõpeb kui tema kiirus saab võrdseks nulliga. Selle faasi käigus toimub kuulikesel ja pinna teatav deformeerumine (nii elastne kui plastne). Faasi lõpuks on osa kineetilisest energiast T_0 muutunud elastse deformatsiooni potentsiaalseks energiaks, osa aga kulunud plastseteks deformatsioonideks ja soojuseks.

2. faas algab vahetult peale 1. faasi lõppu ning kestab kuni kuulikesel ja pinna vaheline kontakt kaob. Selle faasi käigus muutub elastse deformatsiooni potentsiaalne energia taas kineetiliseks energiaks ja faasi lõpuks põrkab kuulike tagasi kiirusega u . Vastav kineetiline energia $T_1 = 0,5mu^2$.

Kui $T_0 = T_1$, st. $u = v$, siis nimetatakse põrget **absoluutselt elastseks**. See on loomulikult abstraktsioon (alati muutub osa kineetilisest energiast plastseteks deformatsioonideks ja soojuseks). Seega tegelikult alati $T_0 > T_1$ ja järelikult $u < v$. Kui $T_1 > 0$, st. ka $u > 0$, siis nimetatakse põrget **elastseks** (mõnikord ka pooleldi elastseks). Kui $T_1 = 0$, st. ka $u = 0$, siis on tegu **mitteelastse ehk plastse põrkega**.

Suhet

$$e = \frac{u}{v} \quad (2.77)$$

nimetatakse põrketeguriks⁷ (v ja u tähistavad siin kiiruse mooduleid enne ja pärast põrget). On selge, et $0 \leq e \leq 1$. Põrketeguri väärtused sõltuvad nii kehade materjalist, geometriast kui algkiirusest. Kui $v \rightarrow 0$, siis $e \rightarrow 1$.

Põrketeguri katseliseks määramiseks tuleb keha lasta kukkuda kõrguselt h_1 ja mõõta kõrgus h_2 , milleni ta peale põrget tõuseb. Kineetilise energia teoreemist saame leida kiirused $v = \sqrt{2gh_1}$ ja $u = \sqrt{2gh_2}$. Seega põrketegur $e = \sqrt{h_2/h_1}$.

⁷Inglise keeles *coefficient of restitution*, eesti keeles ka taastumistegur

2.13.3 Liikumishulga teoreem ja kineetilise momendi teoreem pörkel

Vaatleme punktmasside süsteemi $m_i (i = 1, \dots, n)$. Analoogselt eelnevate paragrahvidega saab näidata, et sisepörkejõud ei mõjuta süsteemi masskeskme liikumist ega kineetilise momendi muutust. Süsteemi punktidele mõjuvad välisjõud jaotame kaheks — (välis)pörkejõud \mathbf{F}_i ja pidevalt mõjuvad välisjõud \mathbf{F}_i^* . Lähtume liikumishulga teoreemi diferentsiaalvormi $\dot{\mathbf{K}} = \sum_i \mathbf{F}_i^* + \sum_i \mathbf{F}_i$, ning integreerime viimast üle pörkekestuse τ —

$$\underbrace{\mathbf{K}|_{t+\tau}}_{\mathbf{K}_1} - \underbrace{\mathbf{K}|_t}_{\mathbf{K}_0} = \underbrace{\sum_i \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_i^* dt}_{\approx 0, \text{ sest } \tau \rightarrow 0} + \underbrace{\sum_i \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_i dt}_{\mathbf{S}_i}.$$

Siin $\mathbf{K}_0 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C$ ja $\mathbf{K}_1 = \sum_i m_i \mathbf{u}_i = m \mathbf{u}_C$ on süsteemi liikumishulgad enne ja peale pörget ning \mathbf{S}_i on välispörkejõudude impulss.

Kokku olemegi saanud **liikumishulga teoreemi pörkel**: süsteemi liikumishulga muutus pörkel võrdub kõigi süsteemile mõjuvate välispörke impulsside geomeetrilise summaga —

$$\sum_i m_i \mathbf{u}_i - \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{S}_i \quad \text{ehk} \quad m(\mathbf{u}_C - \mathbf{v}_C) = \sum_i \mathbf{S}_i. \quad (2.78)$$

Samalaadselt saab tuletada kineetilise momendi teoreemi pörkel. Kuna pörketeoorias on kasulik opereerida jõudude asemel pörkeimpulssidega, siis esitame ka selle teoreemi integraalkujul (algselt oli ta esitatud vaid diferentsiaalvormis).

Kineetilise momendi teoreem pörkel: süsteemi kineetilise momendi muutus pörkel võrdub kõigi süsteemile mõjuvate välispörke impulsside momentide geomeetrilise summaga —

$$\mathbf{L}_O|_{t+\tau} - \mathbf{L}_O|_t = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i. \quad (2.79)$$

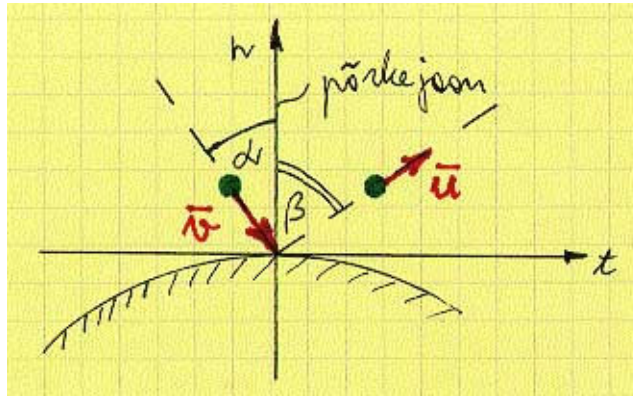
Vektor \mathbf{L}_O esitab siin süsteemi kineetilist momenti punkti O suhtes ja avaldise parem pool kujutab endast punkti O suhtes leitud välispörke impulsside momentide geomeetrilist summat.

2.13.4 Kaldpõrge liikumatult pinnalt

Vaatleme kuulikese kaldpõrget liikumatult pinnalt. Kuulikese kiirus enne pörget on \mathbf{v} ja see moodustab pörkejoonega (pörkekohas tõmmatud pinnanormaaliga n) nurga α . Loe me kuulikese massi m , kiiruse \mathbf{v} ja pörketeguri e tuntud suurusteks. Seame eesmärgiks määrata 1) kiirus \mathbf{u} millega kuulike liigub peale pörget; 2) nurk β mille moodustab vektor \mathbf{u} pörkejoonega ja 3) pörkeimpulss.

Lähtume pörketeooria põhihüpoteesidest — seega ei arvesta me hõõrdejõu mõju ja eeldame, et nii pörkejõud \mathbf{F} kui pörkeimpulss (pörkejõudude impulss) \mathbf{S} on suunatud piki pörkejoont. Seega saab kuulikese liikumishulgal \mathbf{K} muutuda vaid normaalkomponent \mathbf{K}_n . Järelikult jääb kiiruse projektsioon puutuja sihis konstantseks:

$$v_t = u_t \quad \text{ehk} \quad v \sin \alpha = u \sin \beta \quad \text{ehk} \quad \frac{u}{v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (2.80)$$



Joonis 2.10:

Muutuda saab vaid kiiruse projektsioon normaali (põrkejoonel). Seda muutust väljendab põrketegur, mis antud juhul avaldub kujul

$$e = \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha}. \quad (2.81)$$

Avaldiste (2.80) ja (2.81) põhjal saame

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{1}{e} \tan \alpha, \\ u = \sqrt{(u \sin \beta)^2 + (u \cos \beta)^2} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + e^2 \cos^2 \alpha}, \\ S = S_n = mu_n - mv_n = \dots = m(1 + e)v \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.82)$$

Viimastes avaldistes tähistavad S , v ja u vastavalt põrkeimpulsi, põrke eelse kiiruse ning põrke järgse kiiruse mooduleid.

2.13.5 Kahe keha tsentraalne põrge

Tsentraalne otsepõrge

Vaatleme olukorda, kus kaks keha liiguvad vahetult enne põrget kiirustega \mathbf{v}_1 ja \mathbf{v}_2 ning vahetult peale põrget kiirustega \mathbf{u}_1 ja \mathbf{u}_2 , põrkejoon läbib põrkuvate kehade masskeskmeid ja kehad (täpsemalt öeldes kehade masskeskmed) liiguvad enne põrget mööda põrkejoont. Ühitame x telje põrkejoonega. Elastse põrke toimumise eelduseks on, et $v_{1x} > v_{2x}$ ja $u_{2x} > u_{1x}$.

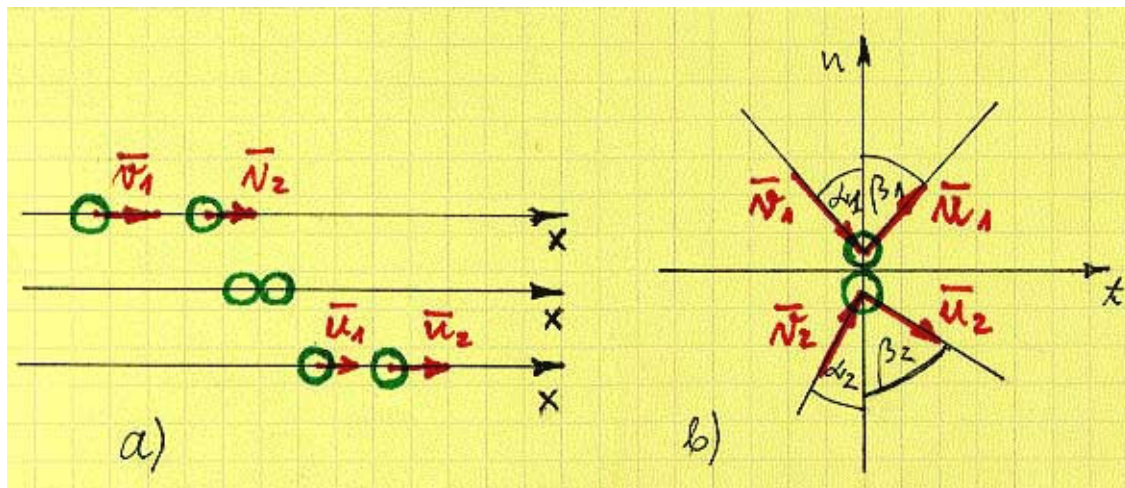
Kahe keha tsentraalse otsepõrke puhul väljendab põrketegur relatiivsete kiiruste suhet, st.,

$$e = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}. \quad (2.83)$$

Vaatleme neid kahte keha ühe süsteemina. Seega on tegu sisepõrkega ja süsteemi liikumishulk ei saa muutuda, st., $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_0$, ehk

$$K_{1x} = K_{0x} \quad \text{ja} \quad K_{1y} = K_{0y} = 0. \quad (2.84)$$

Teades kehade masse, kiirusi enne põrget ja põrketegurit, saab valemite (2.83) ja (2.84) põhjal leida kehade kiirused peale põrget.



Joonis 2.11:

Tsentraalne kaldpõrge

Liikugu kehad vahetult enne põrget kiirustega \mathbf{v}_1 ja \mathbf{v}_2 , mis moodustavad põrkejoonega nurgad α_1 ja α_2 ning vahetult peale põrget kiirustega \mathbf{u}_1 ja \mathbf{u}_2 , mis moodustavad põrkejoonega nurgad β_1 ja β_2 . Põrkel võtame arvesse vaid põrkejõudusid. Kuna viimased on põrkejoone (n -telje) sihilised, siis kehade kiirustel saavad muutuda vaid põrkejoone sihilised komponendid. Puutujasihilised komponendid jäävad muutumatuks:

$$\begin{cases} u_{1t} = v_{1t} \\ u_{2t} = v_{2t} \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} u_1 \sin \beta_1 = v_1 \sin \alpha_1 \\ u_2 \sin \beta_2 = v_2 \sin \alpha_2. \end{cases} \quad (2.85)$$

Seega on ka liikumishulga projektsioon puutujal $K_t = \text{const.}$.

Vaadeldes neid kahte keha ühtse süsteemina, on tegu sisepõrkega. Järelikult peab süsteemi liikumishulk \mathbf{K} jääma muutumatuks. Kuna liikumishulga puutuja sihiline komponent ei muutunud, siis ei saa muutuda ka tema põrkejoone sihiline komponent K_n ja põrkejoone sihis peab kehtima võrdus

$$K_{1n} = K_{0n} \quad \text{ehk} \quad m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n}. \quad (2.86)$$

Põrketegur on antud juhul defineeritud läbi põrkejoone sihiliste relatiivsete kiiruste module:

$$e = \left| \frac{u_n^{rel}}{v_n^{rel}} \right| = \frac{|u_{1n} - u_{2n}|}{|v_{1n} - v_{2n}|}. \quad (2.87)$$

Avaldiste (2.85)–(2.87) põhjal saab määrata kehade kiirused vahetult peale põrget, \mathbf{u}_1 ja \mathbf{u}_2 .

2.13.6 Kineetilise energia kadu tsentraalsel otsepõrkel

Vaatleme jällegi kahe keha tsentraalset otsepõrget. Kehade massid olgu m_1 ja m_2 . Liikugu kehad vahetult enne põrget kiirustega \mathbf{v}_1 ja \mathbf{v}_2 ning vahetult peale põrget kiirustega \mathbf{u}_1 ja \mathbf{u}_2 . Kineetilise energia kadu avaldub kujul

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{1}{2} [m_1 (v_1^2 - u_1^2) + m_2 (v_2^2 - u_2^2)]. \quad (2.88)$$

Vaatleme järgnevalt ühte tähtsat erijuhtu, mille puhul keha massiga m_2 oli enne põrget paigal (näiteks vaiade rammimine, naelutamine, sepistamine jms.). Arvestades põrketeguri definitsiooni, liikumishulga jäävust põrkel ning et $v_2 = 0$ ja $T_0 = m_1 v_1^2 / 2$ saame valemist (2.88)

$$\Delta T = (1 - e^2) \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} T_0. \quad (2.89)$$

Viimase avaldise põhjal on selge, et kui m_1 kasvab, siis ΔT kahaneb ja vastupidi, kui m_1 kahaneb, siis ΔT kasvab. Vaiade rammimisel, näiteks, on vaja ΔT minimeerida, metalli sepistamisel aga maksimeerida.

2.13.7 Kokkuvõte

- Põrge, sisepõrge, välispõrge, põrkejõud.
- Põrkejoon, otsepõrge, kaldpõrge, tsentraalne põrge.
- Põrkekestus, põrkeimpulss.
- Põrketooria kaks põhihüpoteesi.
- Põrketegur, elastne põrge, mitteelastne põrge.
- Liikumishulga teoreem põrkel.
- Kinetilise momendi teoreem põrkel.

2.14 Teise peatüki kokkuvõte

Teine peatükk käsitleb punktmasside ja punktmasside süsteemide (kaasa arvatud jääkade kehade) liikumist neile mõjuvate jõudude toimet. Kui uuritakse ühe punktmassi liikumist siis saame otseselt rakendada Newtoni seadusi. Kui aga uuritakse punktmasside süsteemi liikumist, siis peavad Newtoni seadused kehtima iga punktmassi jaoks. Sel juhul on mugav kasutada dünaamika üldteoreeme, mis sisuliselt kujutavad endast Newtoni seaduste üldistust punktmassilt punktmasside süsteemile. Teisõnu, kui punktmasside süsteemi liikumise uurimisel rakendatakse dünaamika üldteoreeme on tagatud nõue, et Newtoni seadused kehtivad iga uuritavasse süsteemi kuuluva punktmassi jaoks.

Tähtsad mõisted, seadused ja teoreemid.

- Newtoni seadused.
- Dünaamika põhiülesanded.
- Punktmasside mehaanikaline süsteem, sisejõud, välisjõud.
- Liikumishulk, kineetiline moment, jõu ja jõupaari töö, jõu ja jõupaari võimsus, kineetiline energia, potentsiaalne energia, massiinertsimomendid.
- Dünaamika üldteoreemid: masskeskme liikumise teoreem, liikumishulga teoreem, kineetilise momendi teoreem, kineetilise energia teoreem, mehaanikalise energia jäävuse seadus.
- Põrge: pörketeooria põhimõisted ja hüpoteesid, elastne ja mitteelastne põrge, pörketegur, liikumishulga ja kineetilise momendi teoreemide rakendamine pörkel.

Peatükk 3

Analüütiline mehaanika

3.1 Sissejuhatus analüütilisse mehaanikasse

Peale Newtonit (1643-1727) kujunes mehaanikas välja kaks arengusuunda — geomeetiline ja analüütiline. Geomeetrilise suuna rajajaks oli Newtoni kaasaegne Pierre Varignon (1654-1722) ja peamiseks esindajaks Louis Poinot (1777-1859). Neil oli suur osa staatika lõplikul, väljakujunemisel.

Analüütilise suuna väljakujunemiseks lõi eelduse Newtoni ja Leibnizi poolt kasutusele võetud infinitesimaalarvutus¹. Selle suuna varasemad esindajad olid Leonhard Euler (1707-1783) ja Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Analüütilise suuna väljakujundaja ja suurim esindaja oli Joseph Louis Lagrange² (1736-1813) ning üks viljakaimatest edasiarendajatest William Rowan Hamilton (1805-1865). Tänapäeval kasutatakse dünaamika probleemide lahendamiseks peamiselt analüütilisi meetodeid, mis rajanevad Lagrange'i ja Hamiltoni poolt loodud teoorial.

3.2 Sidemed ehk seosed

Mehaanikalise süsteemi asendit ja liikumist piiravaid tingimusi nimetatakse **sidemeteks**. Matemaatiliselt avalduvad sidemed võrrandite ja võrratustena.

- Võrrandi puhul on tegu **kahepoolse ehk mittevabastatava sidemega** (side ei sõltu jõu suunast). Näiteks, matemaatiline pendel jäiga varda otsas (joonis 3.1):

$$x^2 + y^2 = l^2$$

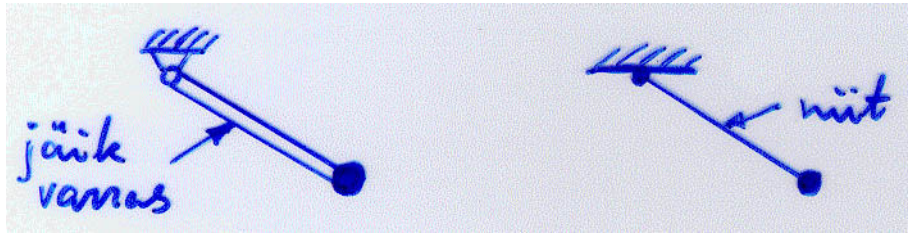
- Võrratuse puhul aga **ühepoolse ehk vabastatava sidemega** (side sõltub jõu suunast). Näiteks, matemaatiline pendel niidi otsas (joonis 3.1):

$$x^2 + y^2 \leq l^2$$

Peale eelmainitud jaotuse võib sidemeid klassifitseerida veel mitmete tunnuste järgi:

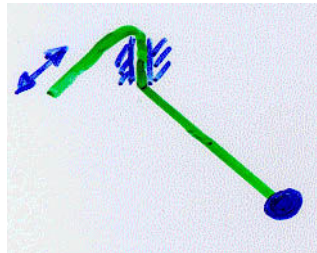
¹Infinitesimaalarvutus (lad. infinitas 'lõpmatus') — diferentsiaal- ja integraalarvutus

²Oma peateose "Analüütiline mehaanika" (1788) eessõnas märkis Lagrange uhkusega, et tema teoses pole ühtegi joonist ega geomeetrist konstruktsiooni ning mehaanika on muudetud matemaatilise analüüsi üheks uueks haruks.



Joonis 3.1: Kahepoolne ehk mittevabastatav ja ühepoolne ehk vabastatav side.

1. **Statsionaarsed ja mittestatsionaarsed sidemed.** Mittestatsionaarsele sidemele (joonis 3.2) vastav võrrand (võrratus) sisaldab aega ilmutatud kujul ($\Psi(x, y, z, t) = 0$), statsionaarsele sidemele (joonis 3.1) vastav aga ei sisalda ($\Psi(x, y, z) = 0$).
2. **Kinemaatilised (diferentsiaalsed) ja geomeetrilised sidemed.** Kinemaatilisele sidemele vastav võrrand (võrratus) sisaldab kiirusi ($\Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0$), geomeetrilisele sidemele vastav aga ei sisalda ($\Psi(x, y, z, t) = 0$).
3. **Holonoomsed (ehk integreeruvad) ja mitteholonoomsed (ehk mitteintegreeruvad) sidemed.** Holonoomsele sidemele vastavat võrrandit või võrratust on integreerimise teel võimalik viia kujule, kus ei esine kiirusi. Teisisõnu, holonoomsed sidemed on geomeetrilised sidemed (neis ei esine kiirusi) ja integreeruvad kinemaatilised sidemed.



Joonis 3.2: Mittestatsionaarne side.

Toodud sidemete jaotused pole üksteist välistavad (näiteks: ühepoolne geomeetiline mittestatsionaarne side).

Käesoleva kursuse raames vaatleme edaspidi vaid holonoomseid sidemeid.³

³Mitteholonoomsete sidemete näidet vt. Ü. Lepiku ja L. Rootsi õpikust (lk. 369–370), kus vaadeldakse kera veeremist mööda liikumatut tasapinda ning esitatakse kera ja tasapinna kokkupuutepunkti koordinaadid läbi Euleri kinemaatiliste võrrandite.

3.3 Virtuaalsiirete printsiip

3.3.1 Virtuaalsiirde mõiste

Punktmassi virtuaalsiirdeks⁴ nimetatakse tema niisugust lõpmata väikest siiret, mis on kooskõlas antud hetkel eksisteerivate sidemetega. Antud hetk viitab siin ajaolule, et side võib aja jooksul muutuda - meie loeme sidemed antud hetkel "tardunuks". Kui punktmassi kohavektor on $\mathbf{r} = (x, y, z)$, siis tema virtuaalsiiret tähistatakse tavaliselt $\delta\mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$.

Punktmasside süsteemi virtuaalsiirde all mõistame kõigi tema punktide virtuaalsiirete kompleksi.

Näited: (i) Punktmass (keha) mingil pinnal.

(ii) Matemaatiline pendel.

(iii) Hooratas.

Vaatleme punktmasside süsteemi m_1, \dots, m_n . Vastavad kohavektorid on $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. Selgitame välja millises vahekorras on punktmasside virtuaalsiirded $\delta\mathbf{r}_i$ tegelike siiretega $d\mathbf{r}_i$.

Olgu sellele süsteemile rakendatud k holonoomset sidet

$$\Psi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.1)$$

Seega on $3n$ virtuaalsiirde projektsiooni vahel k sõltuvust ja suvaliselt on võimalik ette anda vaid $3n - k$ virtuaalsiirde projektsiooni, ülejäänud k on määratud seostega (3.1).

Arvu

$$l = 3n - k \quad (3.2)$$

nimetatakse **süsteemi vabadusastmeks**⁵.

Kuna virtuaalsiirded peavad olema kooskõlas antud hetkel eksisteerivate sidemetega, siis peavad ka vektorid $\mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i$ rahuldama sidemevõrrandeid (3.1), kus aeg t on säilitanud oma endise väärtuse, st.,

$$\Psi_j(\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n + \delta\mathbf{r}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.3)$$

Arendame viimase vasaku poole Taylori ritta, säilitades vaid $\delta\mathbf{r}_i$ suhtes 1. järku väikesed liikmed.

$$\underbrace{\Psi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t)}_{\stackrel{(3.1)}{=} 0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{r}_i} \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.4)$$

Saame

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{r}_i} \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.5)$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.6)$$

⁴Kasutatakse ka nimetust virtuaalne nihutis.
Virtuaalne — 1) tegutsemisvõimeline; 2) võimalik kuid tegelikkuses mittetoimuv.

⁵Kasutatakse ka terminit vabadusastmete arv

Ka tegelikele siiretele vastavad vektorid $\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i$ peavad rahuldama sidemevõrrandeid (3.1), mille Tayloriga arendus annab seekord

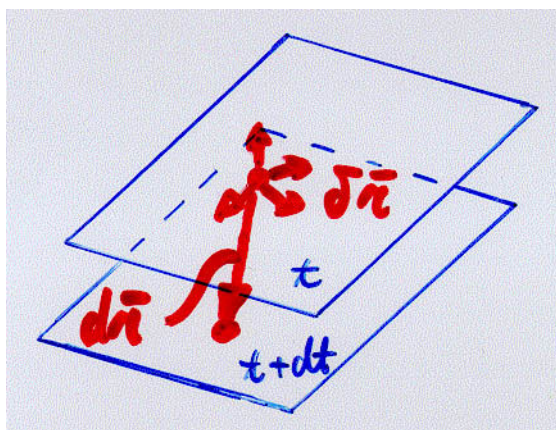
$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.7)$$

kus dt on ajavahemik mille jooksul tegelik siire toimub. Selle vältel võib ka side ise muuta.

Kui sidemed on statsionaarsed, siis $\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} dt = 0$ järelikult langevad avaldised (3.5) ja (3.7) kujult kokku. Seega teeme järelduse: *statsionaarsete sidemete puhul on tegelik siire üks virtuaalseist, mittestatsionaarsete sidemete puhul aga ei pruugi tegelik siire olla ükski virtuaalseist.*

Näited:

1. Liikuvale tasapinnale asuva keha puhul on sidemed mittestatsionaarsed — keha liigub koos sidet moodustava tasapinnaga (joonis 3.3). Lisaks võib ta ka liikuda vaadeldaval tasapinnal. Vastavalt virtuaalsiirde definitsioonile loetakse side hetkel t tardunuks. Järelikult kõik asuvad virtuaalsiirded vaadeldaval tasapinnal. Kuna keha tegelik liikumine on seotud sidet moodustava tasapinnaga, siis ei pruugi tegelik siire olla ükski virtuaalseist (tegelik siire on üks virtuaalseist vaid juhul kui tasand liigub risti oma normaalliga).
2. Kui keha asub liikumatul tasapinnal, siis on tegu statsionaarse sidemega ning nii virtuaalsed kui tegelikud siirded jätavad keha sellele liikumatule tasapinnale — vastavad vektorid asuvad vaadeldaval tasapinnal.



Joonis 3.3: Tegelik siire ja virtuaalsed siirded mittestatsionaarsete sidemete puhul.

3.3.2 Virtuaalsiirete printsiip

Jõu virtuaaltööks nimetatakse skalaarkorrutist

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = F \delta r \cos \lambda. \quad (3.8)$$

Jõupaari virtuaaltöö

$$\delta W = \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = M_z \delta \varphi_z. \quad (3.9)$$

Ideaalseteks sidemeteks nimetatakse sidemeid, mille reaktsioonjõudude summaarne töö punktmasside süsteemi mistahes virtuaalsiirdel on null —

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.10)$$

Ideaalseteks sidemeteks on 1) toetus siledale (hõõrdevabale) pinnale, 2) jäik varras, 3) hõõrdevaba liigend ja 4) veeremine libisemata.

Järgnevalt vaatleme statsionaarsete sidemetega süsteeme.

Virtuaalsiirete printsiip: punktmasside süsteem on antud asendis tasakaalus siis ja ainult siis kui süsteemile rakendatud kõigi jõudude virtuaaltööde summa süsteemi mistahes virtuaalsiirdel on null —

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.11)$$

Viimases avaldises tähistab \mathbf{F}_i i -ndale punktmassile rakendatud aktiivset jõudu ja \mathbf{R}_i reaktsioonjõudu.

Tõestus:

1) *Tarvilikkus.* Eeldame, et süsteem on tasakaalus ja väidame, et sel juhul kehtib võrdus (3.11), st., süsteemile rakendatud kõigi jõudude virtuaaltööde summa süsteemi mistahes virtuaalsiirdel on null.

Kuna süsteem on tasakaalus, siis iga punkti puhul on talle rakendatud aktiivse jõu ja reaktsioonjõu summa $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$. Seega iga punkti puhul $(\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ja võrdus (3.11) kehtib.

————— *q.e.d.* —————

2) *Piisavuse* tõestamiseks eeldame vastuväiteliselt, et tingimus (3.11) on täidetud, kuid süsteem pole tasakaalus.

Olgu näiteks $\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \neq 0$. Järelikult hakkab see punkt liikuma ja tema tegelik siire $d\mathbf{r}_k$ toimub jõu $\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k$ suunas. Kuna süsteemile on rakendatud statsionaarsed sidemed, siis võime valida $\delta \mathbf{r}_k = d\mathbf{r}_k$. Kui kõik ülejäänud virtuaalsiirded $\delta \mathbf{r}_j = 0$, $j \neq k$, siis

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0, \quad (3.12)$$

sest tegu on kahe samasuunalise vektori skalaarkorrutisega. See tulemus on vastuolus väitega, et võrdus (3.11) kehtib. Seega oli oletus, et süsteem pole tasakaalus väär.

————— *q.e.d.* —————

Kui kõik sidemed on ideaalsed, siis $\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ja avaldis (3.11) saab kuju

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.13)$$

Tavaliselt esitataksegi virtuaalsiirete printsiip kujul (3.13) ning arvestatakse mitteideaalsed sidemete reaktsioonid aktiivsete jõudude \mathbf{F}_i hulka. Koordinaatkujul saame võrrandist (3.13)

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0 \quad (3.14)$$

Viimane võrrand on tuntud ka kui *staatika üldvõrrand*.

Virtuaalsiirete printsiibi rakendamine sidemereaktsioonide leidmiseks. Staaatika kursuses kasutati toereaktsioonide leidmiseks tasakaalu tingimusi $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0$ ja $\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0$. Üldjuhul pole aga nii võimalik leida üksikuid reaktsioonjõude, vaid tuleb lahendada n võrrandist koosnev n tundmatuga võrrandisüsteem. Virtuaalsiirete printsiip, vastupidi, võimaldab üldjuhul leida reaktsioonjõude üksikshaaval. Selleks tuleb süsteem vabastada vaadeldavast sidemest, lugeda vastav reaktsioonjõud aktiivsete jõudude hulka ning rakendades virtuaalsiirete printsiipi määrata selle reaktsioonjõu väärtus.

3.3.3 Kokkuvõte

- Punktmassi virtuaalsiire, punktmasside süsteemi virtuaalsiire.
- Süsteemi vabadusaste.
- Tegelike ja virtuaalsete siirete vaheline seos.
- Jõu virtuaaltöö, jõupaari virtuaaltöö.
- Ideaalne side.
- Virtuaalsiirete printsiip.
- Virtuaalsiirete printsiibi rakendamine sidemereaktsioonide leidmiseks.

3.4 D'Alembert'i printsiip

3.4.1 D'Alembert'i printsiip ühe punktmassi jaoks

Vaatleme punktmassi massiga m , millele on rakendatud jõud \mathbf{F} . Newtoni II seaduse järgi on selle punktmassi kiirendus \mathbf{a} määratud võrrandiga

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = 0. \quad (3.15)$$

Sulgudes olevat vektoriaalset suurust $-m\mathbf{a}$ võib käsitleda jõuna (tal on jõu dimensioon). Kui punktmassile oleks lisaks jõule \mathbf{F} rakendatud veel selline jõud, siis oleks talle rakendatud jõudude resultant null ja järelikult olek see punktmass tasakaalus.

Suurust

$$\Phi = -m\mathbf{a} \quad (3.16)$$

nimetatakse mehaanikas **inertsjõuks**. Seega, inertsjõu moodul on võrdne massi ja kiirenduse korrutisega ning suund vastupidine kiirenduse suunale. Arvestades inertsjõu definitsiooni (3.16) saame anda avaldisele (3.15) kuju

$$\mathbf{F} + \Phi = 0. \quad (3.17)$$

Viimane avaldis väljendabki **d'Alembert'i⁶ printsiipi ühe punktmassi jaoks**: punkt-massile tegelikult rakendatud jõud on alati tasakaalus inertsjõuga.

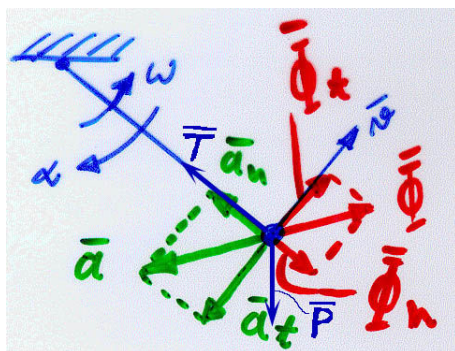
D'Alembert'i printsiip on formaalne mehaanika printsiip, st., ta ei ava uuritava nähtuse uusi külgi. Sisuliselt kujutab võrrand (3.17) ikkagi Newtoni II seadust. Antud juhul on aga dünaamika ülesanne formaalselt asendatud staatika ülesandega. Seetõttu nimetatakse antud meetodit ka **kinetostaatikaks** (formaalselt uurime nüüd liikumise asemel tasakaalutingimusi). Olulist efekti annab vaadeldava printsiibi rakendamine punktmasside süsteemi puhul (ühe punktmassi liikumise uurimisel d'Alembert'i printsiibi rakendamine praktilist kasu ei anna).

D'Alembert'i printsiibi rakendamise puhul tuleb silmas pidada, et avaldises (3.17) esinev inertsjõud Φ on fiktiivne jõud, mida tegelikult rakendatud pole. Tegelikult rakendatud jõudude⁷ hulka kuuluvad aktiivsed jõud ja reaktsioonjõud.

Näide: Vaatleme matmaatilist pendlit, mis koosneb raskest kehast ja kergest niidist (joonis 3.4). Kehale rakendatud aktiivseks jõuks on tema kaal \mathbf{P} ja ainsaks reaktsioonjõuks niidi tõmme \mathbf{T} . Vastavalt definitsioonile on inertsjõud $\Phi = -m\mathbf{a}$. Kuna vaadeldava keha kiirendus $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$, siis saab ka inertsjõu lahutada normaali ja puutuja sihilisteks komponentideks, st. $\Phi = \Phi_n + \Phi_t$. Normaalisihilist inertsjõudu Φ_n nimetatakse tihti tsentrifugaaljõuks.

⁶Jean Baptiste le Rond d'Alembert (16.11.1717 - 29.10.1783), prantsuse valgustusfilosoof ja matemaatik. Andis koos D.Diderot'ga välja esimest prantsuse entsüklopeediat. Printsiip oma algkujul sisaldus esmakordselt J.d'Alembert'i teoses "Traité de Dynamique", 1743.

⁷Punktmassile või kehale tegelikult rakendatud jõud jaotatakse aktiivseteks jõududeks ja reaktsioonjõududeks (passiivsed jõud). Reaktsioonjõud on jõud, millega sidet (tuge) moodustav keha mõjub vaadeldavale punktmassile või kehale. Kõiki teisi tegelikult rakendatud jõudusid nimetatakse aktiivseteks jõududeks.



Joonis 3.4: Matemaatilisele pendlile mõjuvad aktiivsed-, passiivsed- ja inertsjõud.

3.4.2 D'Alembert'i printsiip punktmasside süsteemi jaoks

Vaatleme n punktmassist koosnevat süsteemi. D'Alembert'i printsiibi põhjal on igale süsteemi punktile tegelikult rakendatud jõud tasakaalus selle punkti inertsjõuga, st.,

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i + \Phi_i = 0, & i = 1, \dots, n \\ \Phi_i = -m_i \mathbf{a}_i. \end{cases} \quad (3.18)$$

Viimases avaldises tähistab Φ_i i -nda punktmassi inertsjõudu, m_i tema massi, a_i kiirendust ning \mathbf{F}_i talle tegelikult rakendatud jõudu. Selle põhjal sõnastame **d'Alembert'i printsiibi punktmasside süsteemi jaoks**: punktmasside süsteemile tegelikult rakendatud jõud ja inertsjõud moodustavad tasakaalus oleva jõusüsteemi.

Staatika kursusest on teada, et jõusüsteem on tasakaalus siis ja ainult siis kui tema peavektor ja peamoment (suvalise punkti O suhtes) on võrdsed nulliga. Antud juhul moodustavad jõusüsteemi tegelikult rakendatud jõud \mathbf{F}_i koos inertsjõududega Φ_i . Seega peavad tasakaalu puhul olema täidetud tingimused

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \Phi_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) + \mathbf{M}_O(\Phi_i)] = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Projekteerides vektorvõrrandid (3.19) koordinaattelgedele x, y, z on võimalik saada kuus skalaarset tasakaaluvõrrandit (mida saab kasutada konkreetsete ülesannete lahendamiseks).

Järgnevalt näitame, et võrrandid (3.19)₁ ja (3.19)₂ on sisuliselt samaväärsed vastavalt liikumishulga teoreemiga ja kineetilise momendi teoreemiga.

Tõestused: 1. Liikumishulga teoreemi põhjal $\dot{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$, kus $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$ on süsteemi liikumishulk. Kuna

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n -m_i \mathbf{a}_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n -\dot{\mathbf{K}}_i = -\dot{\mathbf{K}}, \quad (3.20)$$

siis väljendab avaldis (3.19)₁ liikumishulga teoreemi.

2. Kineetilise momendi teoreemi põhjal $\dot{\mathbf{L}}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$, kus $\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{v}_i)$ on süsteemi kineetiline moment punkti O suhtes. Kuna

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\Phi_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \Phi_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (-m_i \mathbf{a}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times -m_i \mathbf{v}_i) = -\dot{\mathbf{L}}_O, \quad (3.21)$$

siis ongi (3.19)₂ samaväärne kineetilise momendi teoreemiga. Viimase avaldise tuletamise juures on arvestatud, et

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times -m_i \mathbf{v}_i) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \times -m_i \mathbf{v}_i}_{=0} + \mathbf{r}_i \times -m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{r}_i \times -m_i \mathbf{a}_i. \quad (3.22)$$

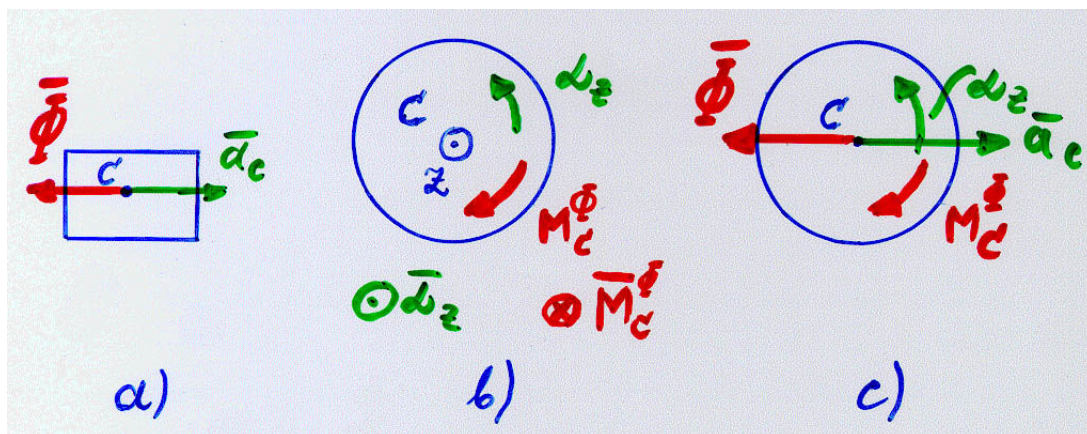
————— q.e.d. —————

D'Alembert'i printsiibi rakendamise puhul on otstarbekas taandada süsteemi inertsjõud inertsjõudude peavektoriks ja inertsjõudude peamomendiks

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = -m \mathbf{a}_C, \\ \mathbf{M}_O^\Phi = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\Phi_i). \end{cases} \quad (3.23)$$

Valemi (3.23)₁ puhul on arvestatud, et $\Phi = -\dot{\mathbf{K}} = -m \mathbf{a}_C$. Teatavasti jõusüsteemi peavektor ei sõltu taandamistsentri valikust, peamoment aga sõltub.

Vaatleme inertsjõudude taandamist erinevate liikumistüüpide puhul (taandamistsentriks on valitud süsteemi massikeske).



Joonis 3.5: Inertsjõudude taandamine.

1. Rööpliikumine (joonis 3.5 a)—

$$\begin{cases} \Phi = -m \mathbf{a}_C, \\ \mathbf{M}_C^\Phi = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

2. Pöörlemine ümber kesktelje z (joonis 3.5 b)—

$$\begin{cases} \Phi = 0, \\ \mathbf{M}_C^\Phi = -I_z^C \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Siinjuures inertsjõudude peamomendi moodul $M_C^\Phi = |\mathbf{M}_C^\Phi| = I_z^C \alpha$, kus α on nurkkiirenduse moodul.

3. Tasapinnaline liikumine (joonis 3.5 c) —

$$\begin{cases} \Phi = -m\mathbf{a}_C, \\ \mathbf{M}_C^\Phi = -I_z^C \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Viimastes valemities on inertsjõudude peamomentide avaldiste leidmise puhul arvestatud, et $\mathbf{M}_O^\Phi = -\dot{\mathbf{L}}_O$ ja $\mathbf{L}_O = I_O \boldsymbol{\omega}$. Kuna me uurime jäiku kehi, siis $I_O = \text{const.}$ ja $\dot{\mathbf{L}}_O = I_O \dot{\boldsymbol{\omega}} = I_O \boldsymbol{\alpha}$.

3.4.3 Kokkuvõte

- Inertsjõud.
- D'Alembert'i printsiip ühe punktmassi jaoks.
- D'Alembert'i printsiip punktmasside süsteemi jaoks.
- D'Alembert'i printsiibi seos liikumishulga teoreemiga ja kineetilise momendi teoreemiga.
- Inertsjõudude peavaktori ja inertsjõudude peamomendi leidmine erinevate liikumistüüpide puhul.

3.5 Dünaamika üldvõrrand

Selles paragrahvis seotakse omavahel d'Alembert'i printsiip ja virtuaalsiirete printsiip. Vaatleme n punktmassist koosnevat süsteemi. D'Alembert'i printsiibi põhjal on igale punktmassile mõjuvad aktiivsed ja passiivsed jõud tasakaalustatud inertsjõududega, st.,

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_i = 0, & i = 1, \dots, n, \\ \mathbf{\Phi}_i = -m_i \mathbf{a}_i. \end{cases}$$

Teisisõnu, aktiivsed jõud \mathbf{F}_i , reaktsioonjõud \mathbf{R}_i ja inertsjõud $\mathbf{\Phi}_i$ moodustavad tasakaalus oleva jõusüsteemi. Virtuaalsiirete printsiibi põhjal on punktmasside süsteem antud asendis tasakaalus siis ja ainult siis kui kõigi tema punktidele rakendatud jõudude virtuaaltööde summa süsteemi mistahes virtuaalsiirdel on null. Antud juhul seega

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Kui sidemed on ideaalsed, siis saame anda viimasele võrrandile kuju

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.27)$$

Võrrandit (3.27) nimetataksegi **dünaamika üldvõrrandiks**. Kuna võrrand (3.27) ühendab endas d'Alembert'i printsiibi ja virtuaalsiirete printsiibi, siis on tulemuseks dünaamika kõige üldisem võrrand, mis võimaldab lisaks kõikvõimalikele dünaamika ülesannetele lahendada ka kõikvõimalikke staatika ülesandeid.

Kui aktiivsed jõud \mathbf{F}_i , kiirendus \mathbf{a}_i ja virtuaalsiire $\delta \mathbf{r}_i$ on avaldatud Descartes'i ristkoordinaatides, saame anda dünaamika üldvõrrandile (3.27) kuju

$$\sum_{i=1}^n [(F_{x_i} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{y_i} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{z_i} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0. \quad (3.28)$$

Näiteid dünaamika üldvõrrandi rakendamise kohta võib leida Ü. Lepiku ja L. Roots'i teoreetilise mehaanika õpikust, lk. 389-396.

3.6 Üldistatud koordinaadid ja üldistatud jõud

3.6.1 Üldistatud koordinaadi mõiste

Vaatleme n punktmassist koosnevat mehaanikalist süsteemi. Olgu süsteemile rakendatud k holonoomset sidet

$$\Psi_j(\mathbf{r}_i, t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.29)$$

Üldiselt on n punkti asukoha määramiseks kolmemõõtmelises ruumis vaja teada $3n$ parameetrit. Kuna meil on süsteemile rakendatud k sidet, siis on sõltumatute parameetrite arv

$$l = 3n - k. \quad (3.30)$$

Ülejäänud k parameetrit on avaldatavad teiste kaudu. Järelikult on süsteemi asend kirjeldatav l sõltumatu parameetri abil. Seda arvu l nimetatakse süsteemi vabadusastmeks⁸. Teisisõnu — **süsteemi vabadusaste** on süsteemi asendi kirjeldamiseks vajalike sõltumatute parameetrite arv.

Kui piirduda mingi konkreetse koordinaatsüsteemiga, näiteks Descartes'i ristkoordinaatidega (DRK) või silindriliste koordinaatidega (SK), siis võib osutuda vägagi tülikaks k sõltuva koordinaadi avaldamine l sõltumatu koordinaadi kaudu. Seetõttu on otstarbekas sisse tuua üldistatud koordinaadid

$$q_1, \dots, q_l \quad (3.31)$$

kus l on süsteemi vabadusaste.

Üldistatud koordinaatideks⁹ nimetatakse üksteisest sõltumatuid parameetreid, mis määravad üheselt süsteemi asendi. Üldistatud koordinaatide arv võrdub süsteemi vabadusastmega. Füüsikaliselt võib neil olla mistahes sisu (pikkus, nurk, pindala, trigonomeetiline funktsioon jne. jne.).

Suvalise punkti kohavektori saab nüüd avaldada üldistatud koordinaatide kaudu kujul

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_l, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.32)$$

Teisest küljest on kohavektorid endiselt avaldatavad mingis konkreetsetes koordinaadistikus (näiteks DRK või SK).

Üldistatud koordinaatide kasutamise põhieelis seisneb selles, et nendega koos pole vaja kasutada sidemevõrrandeid (3.29).

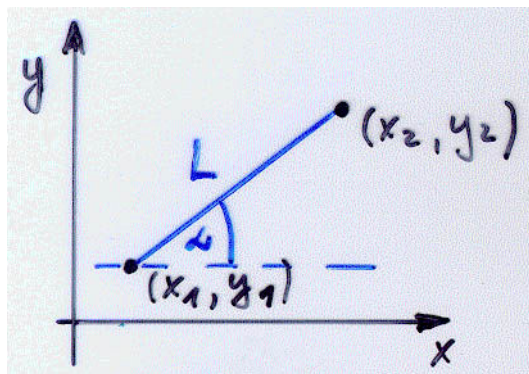
Näide: Vaatleme kahte punkti x, y tasapinnal (joonis 3.6). Nende asukoha kirjeldamiseks vaadeldaval tasandil on vaja nelja koordinaati x_1, y_1, x_2 ja y_2 . Olgu punktide vahekaugus L fikseeritud. Seega on meil lisaks neljale koordinaadile sidemevõrrand

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = L^2.$$

Kuna süsteemi vabadusaste $l = 4 - 1 = 3$, siis on süsteemi asened üheselt määratud kolme üldistatud koordinaadi (sõltumatu parameetri) abil. Näiteks $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$ ja $q_3 = \alpha$.

⁸Kasutatakse ka terminit vabadusastmete arv

⁹Mõnes õpikus nimetatakse neid ka Lagrange'i koordinaatideks ja mõnes üldistatud Lagrange'i koordinaatideks.



Joonis 3.6: Üldistatud koordinaatide näide.

3.6.2 Üldistatud jõud

Mõjugu vaadeldava süsteemi punktidele jõud \mathbf{F}_i , $i = 1, \dots, n$ (aktiivsed jõud koos mitte-ideaalsete sidemereaktsioonidega). Anname süsteemile virtuaalsiirde $\delta \mathbf{r}_i$ ja leiame vastava virtuaaltöö

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i. \quad (3.33)$$

Avaldame selle üldistatud koordinaatides. Selleks tuleb avaldada virtuaalsiirded ülistatud koordinaatide kaudu. Avaldise (3.32) põhjal

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.34)$$

Asendame saadud virtuaalsiirete avaldised (3.34) virtuaaltöö avaldisse (3.33), teisendame, muudame summeerimisjärjekorda ja saame

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (3.35)$$

Tähistame

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.36)$$

Seega

$$\delta W = \sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j. \quad (3.37)$$

Üldistatud koordinaadile q_j vastavaks üldistatud jõuks Q_j nimetatakse variatsiooni δq_j kordajat süsteemi virtuaaltöö avaldises (3.35). Teisisõnu, üldistatud koordinaatidele q_j vastavateks üldistatud jõududeks nimetatakse avaldisega (3.36) esitatud suurusi Q_j .

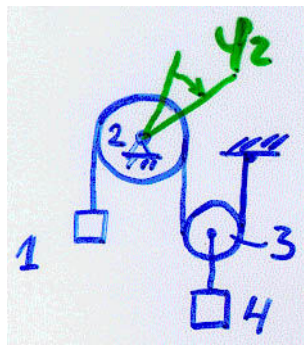
Üldistatud jõu dimensioon on määratud üldistatud koordinaadi dimensiooniga, st. üldistatud jõu dimensioon tuleb valida nii, et $[\dim Q_j] \cdot [\dim q_j] = \dim W$. Näiteks kui $\dim q_j = m$, siis $\dim Q_j = N$, kuid $\dim q_j = \text{rad}$ puhul $\dim Q_j = \text{Nm}$.

Näide (üldistatud jõu leidmine). Vaatleme neljast kehast koosnevat ühe vabadusastmega süsteemi (joonis 3.7). Kehade kaalud on P_1, \dots, P_4 ja raadiused r_2 ja r_3 . Üldistatud koordinaadiks valime teise keha pöördenurga¹⁰, st., $q = \varphi_2$. Andes süsteemile virtuaalsiirde $\delta q = \delta \varphi_2$ üldistatud koordinaadi φ_2 kasvamise suunas, saame virtuaaltöö avaldise kujul

$$\delta W = -P_1 \delta \varphi_2 r_2 + \frac{\delta \varphi_2 r_2}{2} (P_3 + P_4) = \underbrace{(P_3 + P_4 - 2P_1) \frac{r_2}{2}}_{=Q_{\varphi_2}} \delta \varphi_2.$$

Vastavalt definitsioonile on üldistatud koordinaadile φ_2 vastav üldistatud jõud

$$Q_{\varphi_2} = (P_3 + P_4 - 2P_1) \frac{r}{2}.$$



Joonis 3.7: Üldistatud jõudude leidmine

3.6.3 Lagrange'i tasakaalutingimused

Virtuaalsiirete printsiibi põhjal on punktmasside süsteem antud asendis tasakaalus siis ja ainult siis kui kõigi tema punktidele rakendatud jõudude virtuaaltööde summa süsteemi mistahes virtuaalsiirdel on null. Üldistatud koordinaatide puhul tähendab see, et

$$\sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j = 0. \quad (3.38)$$

Kuna üldistatud koordinaadid on üksteisest sõltumatud, siis saab nende muute vabalt ette anda. Valime $\delta q_1 \neq 0$ ja $\delta q_2 = \dots, \delta q_l = 0$. Et kehtiks võrdus (3.38) peab $Q_1 = 0$. Kui korrata vaadeldavat protseduuri ülejäänud üldistatud koordinaatide jaoks, siis saame, et (3.38) kehtib suvalise virtuaalsiirde puhul kui

$$Q_1 = \dots = Q_l = 0. \quad (3.39)$$

See tulemus on tuntud kui **Lagrange'i tasakaalutingimus**: süsteem on antud asendis tasakaalus parajasti siis kui kõik antud asendile vastavad üldistatud jõud võrduvad nulliga.

¹⁰See pole ainuvõimalik valik.

3.6.4 Üldistatud jõudude ja potentsiaalse energia vaheline seos

Alajaotuses 2.11.1 defineeriti potentsiaalne energia kujul $-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, kus \mathbf{F} on konservatiivne jõud. Seega, kui on teada potentsiaalse energia avaldis, siis jõu projektsioonid

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.40)$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus kõik süsteemi punktidele rakendatud jõud on konservatiivsed, st., süsteemi potentsiaalne energia $V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$. Seega avalduvad jõud nüüd läbi potentsiaalse energia kujul (3.40) ehk vektorkujul

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (3.41)$$

Leiame osatuletise

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \stackrel{(3.41)}{=} - \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (3.42)$$

Avaldise (3.42) paremal poolel olev summa tähistab üldistatud jõudu Q_j , järelilikult

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.43)$$

Seega **üldistatud jõudude ja potentsiaalse energia vaheline seos** on analoogne jõudude ja potentsiaalse energia vahelise seosega DRK-s.

3.6.5 Kineetilise energia avaldamine üldistatud koordinaatide kaudu

Süsteemi kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (3.44)$$

Statsionaarsete sidemete puhul on punktide kohavektorid avaldatavad üldistatud koordinaatide kaudu seostega $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_l)$, kus ei esine aega ilmutatud kujul. Seega punktide kiirused

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.45)$$

Suurusi \dot{q}_j nimetatakse **üldistatud kiirusteks**. Teisisõnu, üldistatud kiiruseks nimetatakse üldistatud koordinaadi esimest tuletist aja järgi. Arvestades avaldist (3.45) saame nüüd kineetilise energia esitada kujul

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (3.46)$$

Tuues sisse tähistuse

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \quad (3.47)$$

saame

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (3.48)$$

Seega, *statsionaarsete sidemete puhul on süsteemi kineetiline energia homogeenne ruutfunktsioon*¹¹ üldistatud kiiruste suhtes.

Mittestatsionaarsete sidemete puhul avalduvad punktide kohavektorid üldistatud koordinaatide kaudu seostega $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_l, t)$, kus võrreldes mittestatsionaarse juhuga esineb ka aeg t ilmutatud kujul. Nüüd punktide kiirused

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.49)$$

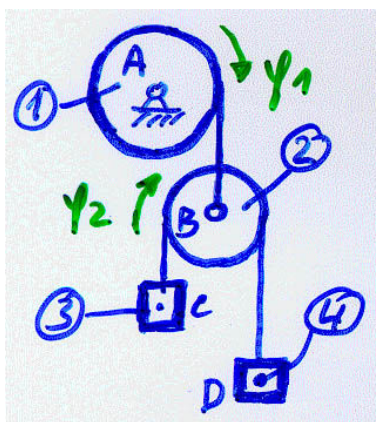
ja kineetiline energia

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \right] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{=T_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2}_{T_2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Seega võib viimase avaldise esitada kujul

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (3.51)$$

kus T_0 ei sisalda üldistatud kiirusi, T_1 on (esimese astme) homogeenne funktsioon ja T_2 homogeenne ruutfunktsioon üldistatud kiiruste \dot{q}_j suhtes.



Joonis 3.8: Süsteemi kineetilise energia avaldamine üldistatud koordinaatide abil.

¹¹ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ — homogeenne funktsioon, $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ — n astme homogeenne funktsioon

Näide (kineetilise energia avaldamine üldistatud koordinaatide abil). Vaatleme statsionaarsete sidemetega süsteemi, mis koosneb neljast kehast (joonis 3.8). Kehade massid on m_1, \dots, m_4 ja raadiused r_1 ja r_2 . Süsteemi vabadusaste $l = 2$. Üldistatud koordinaatideks valime esimese ja teise keha pöördenurgad. Seega $q_1 = \varphi_1$ ja $q_2 = \varphi_2$ ning üldistatud kiirusteks $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1 = \omega_1$ ja $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2 = \omega_2$ on esimese ja teise keha nurkkiirused. Süsteemi kineetiline energia

$$T = \frac{I_A \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{I_B \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{m_4 v_D^2}{2}.$$

Nüüd tuleb kehade nurkkiirused ja punktide kiirused avaldada läbi üldistatud kiiruste $\dot{\varphi}_1$ ja $\dot{\varphi}_2$ —

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1, \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2, \quad v_B = \dot{\varphi}_1 r_1, \quad v_C = \dot{\varphi}_1 r_1 - \dot{\varphi}_2 r_2, \quad v_D = \dot{\varphi}_1 r_1 + \dot{\varphi}_2 r_2.$$

Nüüd ongi võimalik anda kineetilise energia avaldisele kuju (3.48):

$$\begin{aligned} T &= \frac{I_A \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{\varphi}_1 r_1)^2}{2} + \frac{I_B \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{m_3 (\dot{\varphi}_1 r_1 - \dot{\varphi}_2 r_2)^2}{2} + \frac{m_4 (\dot{\varphi}_1 r_1 + \dot{\varphi}_2 r_2)^2}{2} = \\ &= \dots = A_{11} \dot{\varphi}_1^2 + A_{22} \dot{\varphi}_2^2 + 2A_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2. \end{aligned}$$

3.6.6 Kokkuvõte

- Mehaanikalise süsteemi vabadusaste
- Üldistatud koordinaadi mõiste
- Üldistatud jõu mõiste
- Lagrange tasakaalu tingimused
- Üldistatud jõudude ja potentsiaalse energia vaheline seos
- Kineetilise energia avaldamine üldistatud koordinaatide kaudu — statsionaarsete ja mittestatsionaarsete sidemete juht

3.7 Lagrange'i teist liiki võrrandid

Vaatleme n punktmassist koosnevat mehaanikalist süsteemi millele on rakendatud k holonoomset sidet $\Psi_j(\mathbf{r}_i, t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$. Süsteemi vabadusaste $l = 3n - k$. Süsteemi asendi kirjeldamiseks kasutame üldistatud koordinaate ning avaldame nende kaudu süsteemi punktide kohavektorid $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_l, t)$ ja kiirused

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.52)$$

Suurusi \dot{q}_j nimetatakse teatavasti üldistatud kiirusteks. Avaldame nüüd süsteemi kineetilise energia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (3.53)$$

Diferentseerime viimast avaldist üldistatud koordinaatide q_j ja üldistatud kiiruste \dot{q}_j järgi:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l \quad (3.54)$$

ja

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, l \quad (3.55)$$

Avaldises (3.55) esinevad osatuletised määratakse võrdusest (3.52), seega

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.56)$$

(otsitavad osatuletised $\partial \dot{\mathbf{r}}_i / \partial \dot{q}_j$ võrduvad üldistatud kiiruste kordajatega avaldises (3.52)) ja avaldis (3.55) saab kuju

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l \quad (3.57)$$

Diferentseerime viimast aja järgi.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}_{=\mathbf{F}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{\text{Muudame diferentseerimise järjekorda}} = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{(3.36) Q_j} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}}_{(3.54) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Kokku saame seega järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.59)$$

Neid diferentsiaalvõrrandeid nimetatakse **Lagrange'i teist liiki võrrandeiks** ja nende arv võrdub süsteemi vabadusastmega ¹².

Lagrange'i teist liiki võrrandite koostamiseks tuleb valida üldistatud koordinaadid ja määrata läbi nende üldistatud jõud ning süsteemi kineetiline energia. Kui süsteemile rakendatud sidemed pole ideaalsed, siis tuleb üldistatud jõudude määramisel arvesse võtta ka mitteideaalsed sidemereaktsioonid, st., mitteideaalsed sidemereaktsioonid tuleb lugeda aktiivsete jõudude hulka.

Saadud diferentsiaalvõrrandite tüüp sõltub konkreetsest ülesandest. Kõige lihtsamal juhul on tulemuseks lineaarne võrrandisüsteem üldistatud kiirenduste \ddot{q}_j suhtes. Keerukamatel juhtudel aga on tegu diferentsiaalvõrrandite süsteemiga, mis sisaldab nii üldistatud koordinaate q_j , kiirusi \dot{q}_j kui kiirendusi \ddot{q}_j . Sellise süsteemi analüütiline lahendamine võib osutuda üpris keerukaks, kuid ka hoopistükkis võimatuks. Sel juhul tuleb kasutada numbrilisi meetodeid. Igal juhul on aga lahendamiseks vaja teada liikumise algandmeid — punktmasside algkoordinaate ja algkiirusi.

¹²Peale Lagrange'i teist liiki võrrandite on tuntud ka Lagrange'i esimest liiki võrrandid. Nende arv on aga $3n + k$, st., $2k$ võrra suurem kui Lagrange'i teist liiki võrrandite arv. Lagrange'i esimest liiki võrrandite tuletamiseks kasutatakse dünaamika üldvõrrandit, millega liidetakse Lagrange'i määramata kordajate meetod. Siit saadakse $3n$ võrrandit. Kuna siin ei kasutata üldistatud koordinaate, siis tuleb koos saadud $3n$ võrrandiga kasutada ka sidemevõrrandeid, mida on k tükki. Nii saadaksegi võrrandite koguarvuks $3n + k$.

Kuna Lagrange'i esimest liiki võrrandeid tavaliselt ei kasutata, siis nimetatakse Lagrange'i teist liiki võrrandeid tihti lihtsalt Lagrange'i võrranditeks.

3.8 Mehaanikalise suuruse variatsioon

3.8.1 Isokroonne variatsioon

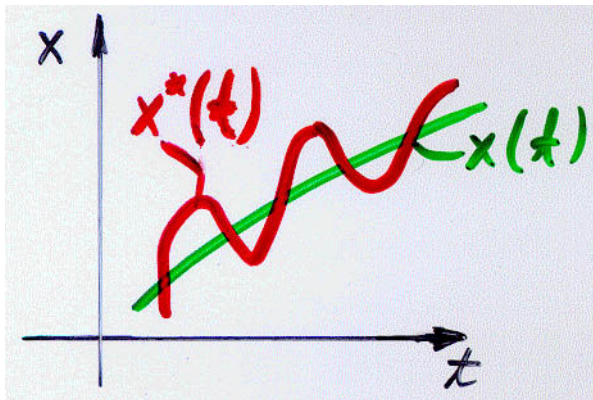
Vaatleme punktmassi, mille liikumisseadus on antud kujul

$$x = x(t), \quad (3.60)$$

st., punkti liikumisel saab muutuda vaid üks tema kolmest koordinaadist. Antud juhul võib ka öelda, et punkti liikumise vabadusaste on üks. Liikumisseadust (3.60) diferentseerides saame leida koordinaadi x diferentsiaali $dx = \dot{x}dt$. Viimane iseloomustab kui palju muutub punkti koordinaat x aja dt jooksul. Vaatleme nüüd olukorda, kus aeg t on fikseeritud, st., aeg ei muutu, ja muutub hoopis liikumisseadus (3.60), saades kuju

$$x^* = x(t) + \varepsilon g(t), \quad (3.61)$$

kus ε on lõpmata väike konstant ja $g(t)$ on üldiselt suvaline funktsioon ajast (joonis 3.9). Kehtib vaid nõue, et korrutis $\varepsilon g(t)$ oleks samuti lõpmata väike. Seega saab punkti



Joonis 3.9: Isokroonne variatsioon.

koordinaat hetkel t muudu

$$\delta x = x^* - x. \quad (3.62)$$

Suurust δx nimetatakse koordinaadi x variatsiooniks, täpsemalt öeldes isokroonseks variatsiooniks¹³.

Koordinaadi $x(t)$ isokroonne variatsioon δx on muut, mille koordinaat saab seetõttu, et muutub liikumisseaduse kuju.

Kui liikumisseaduse muutmine kujul (3.61) toimub kooskõlas eksisteerivate sidemetega, siis võib isokroonset variatsiooni tõlgendada punkti virtuaalsiirdena ja vastupidi (võrdle virtuaalsiirde definitsiooniga).

Kui punkti koordinaat muutub suuruse δx võrra (sest muutus liikumisseadus), siis üldjuhul muutub ka tema kiirus, st., algne kiirus \dot{x} muutub kiiruse variatsiooni $\delta \dot{x}$ võrra. Uus kiirus saadakse kui diferentseeritakse muutunud liikumisseadust (koordinaati) $x + \delta x$. Seega muutunud kiirus

$$\dot{x} + \delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(x + \delta x) = \dot{x} + \frac{d}{dt}\delta x. \quad (3.63)$$

¹³Kr. *isos* — sama, võrdne; *chronos* — aeg. Isokroonsust tuleb siin mõista kui fikseeritud ajal toimuvat.

Järelikult on kiiruse variatsioon võrdne koordinaadi isokroonse variatsiooni tuletisega aja järgi

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x. \quad (3.64)$$

Teisisõnu, isokroonne varieerimine ja diferentseerimine aja järgi on kommutatiivsed operatsioonid. Sama kehtib ka pöördoperatsiooni, integreerimise, kohta:

$$\int \delta x dt = \delta \int x dt. \quad (3.65)$$

Kui koordinaat x saab muudu δx , siis ka temast sõltuv funktsioon $f(x)$ saab muudu $\delta f(x)$, mida nimetatakse **funktsiooni f variatsiooniks**. Kuna variatsioon δx on lõpmata väike, siis saab funktsioon f variatsiooni leidmiseks kasutada tema tuletist ja avaldada

$$\delta f(x) = f'(x)\delta x. \quad (3.66)$$

Saadud eeskiri on analoogne funktsiooni diferentsiaali leidmiseks kasutatava eeskirjaga.

Näide.

- $\delta(\sin x) \stackrel{(3.66)}{=} (\cos x)\delta x \equiv \cos x \delta x$
- $\delta(x^4) \stackrel{(3.66)}{=} 4x^3 \delta x$

Isokroonse variatsiooni sisus ei muutu mitte midagi kui punkti liikumise vabadusaste on suurem kui üks (st. võivad muutuda ka teised kaks koordinaati) või on tegu punktmasside süsteemiga — nüüd on meil vaid ühe koordinaadi variatsiooni asemel vabadusastmega võrdne arv koordinaatide variatsioone. Valemid (3.64) ja (3.65) säilitavad oma kuju, kuid mitme muutuja funktsiooni $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ variatsioon leidmiseks tuleb kasutada valemit

$$\delta f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) \quad (3.67)$$

kus δx_i , δy_i ja δz_i on koordinaatide variatsioonid.

3.8.2 Täisvariatsioon

Peale isokroonse variatsiooni on mehaanikas kasutusel ka täisvariatsioon.

Funktsiooni täisvariatsioon on muut, mille funktsioon saab kui nii funktsiooni (funktsionaalse sõltuvuse) kuju kui ka tema argument muutuvad.

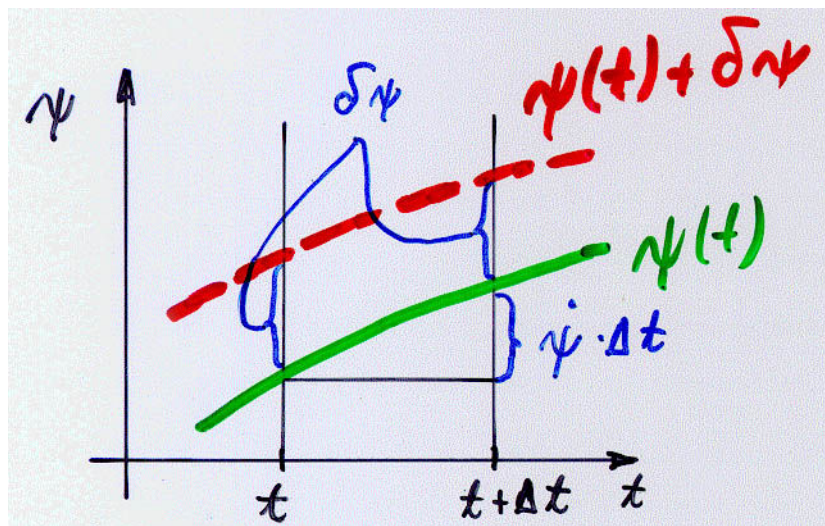
Vaatleme mingit funktsiooni

$$\psi = \psi(t). \quad (3.68)$$

Tema täisvariatsioon $\Delta\psi$ leitakse valemist

$$\Delta\psi = \delta\psi + \dot{\psi}\Delta t. \quad (3.69)$$

Esimene liidetav on siin funktsiooni ψ isokroonne variatsioon, teine aga argumenti muudule Δt vastav funktsiooni muut.



Joonis 3.10: Täisvariatsioon.

Leiame nüüd täisvariatsioon tuletise aja järgi (3.69):

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi \stackrel{(3.69)}{=} \underbrace{\delta\dot{\psi} + \ddot{\psi}\Delta t}_{\Delta\dot{\psi}} + \dot{\psi}\frac{d\Delta t}{dt} = \Delta\dot{\psi} + \dot{\psi}\frac{d\Delta t}{dt}. \quad (3.70)$$

Seega, erinevalt isokroonsest variatsioonist, pole aja järgi diferentseerimine ja täisvariatsiooni leidmine kommutatiivsed operatsioonid.

Sama kehtib ka integreerimise kohta¹⁴:

$$\Delta\left(\int\psi dt\right) = \int\Delta\psi dt + \int\psi d(\Delta t) \quad (3.71)$$

3.8.3 Kokkuvõte

- Isokroonne variatsioon.
- Täisvariatsioon.
- Isokroonse variatsiooni ja täisvariatsiooni omadused.

¹⁴Avaldise (3.69) põhjal $\Delta\left(\int\psi dt\right) = \delta\left(\int\psi dt\right) + \psi\Delta t$.

Teisest küljest, sama avaldise (3.69) põhjal

$$\int\Delta\psi dt = \int\delta\psi dt + \int\dot{\psi}\Delta t dt = \delta\left(\int\psi dt\right) + \psi\Delta t - \int\psi d(\Delta t)$$

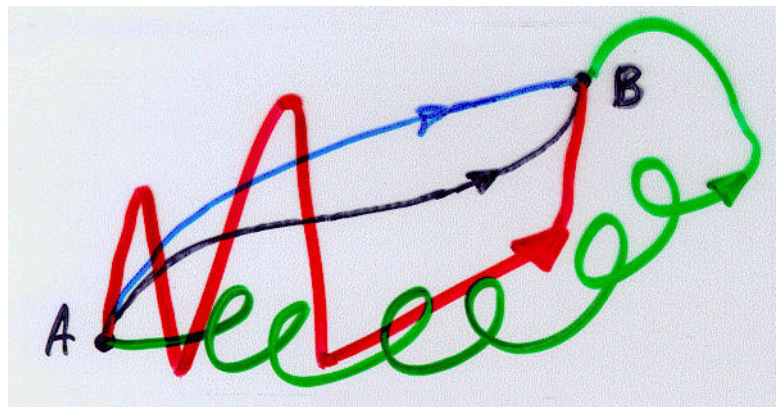
Integraal $\int\dot{\psi}\Delta t dt$ leitakse siin ositi integreerides ($u = \Delta t \Rightarrow du = d(\Delta t)$ ja $dv = \dot{\psi} dt \Rightarrow v = \psi$).

3.9 Hamiltoni printsiip

Vaatleme n punktmassist koosnevat mehaanikalist süsteemi. Olgu meil teada kõigi punktide asendid hetkedel t_0 ja t_1 . Eesmärgiks on leida kuidas süsteem liigub hetkele t_0 vastavast algasendist hetkele t_1 vastavasse lõppasendisse. Süsteemi punktide liikumine ei saa tegelikkuses toimuda suvalisi trajektoore pidi, vaid peab olema kooskõlas neile rakendatud sidemetega.

Kinemaatiliselt võimalikeks liikumisteks nimetatakse liikumisi, mida lubavad süsteemile rakendatud sidemed.

Üldiselt on ka kinemaatiliselt võimalikke liikumisi väga palju. Kinemaatilist võimalike liikumiste vahelised erinevused võivad ilmnedä nii trajektoori kujus kui liikumisseaduses (ka sama trajektoori pidi on võimalik liikuda erineva liikumisseadiuse järgi).



Joonis 3.11: Kinemaatiliselt võimalikud liikumised.

Näide. Joonisel 3.11 on kujutatud neli erinevat trajektoori, mida mööda punkt saab liikuda asendist A asendisse B . Kui vaadeldavale punktile rakendatud sidemed võimaldavad liikuda mööda neid trajektoore, siis on kõigi nende trajektoore puhul tegu kinemaatiliselt võimalike liikumistega.

Tegelikkuses saab realiseeruda aga vaid üks liikumine. Selle tegeliku liikumise määramiseks annabki kriteeriumi Hamiltoni printsiip, mille tuletamiseks lähtume dünaamika üldvõrrandist

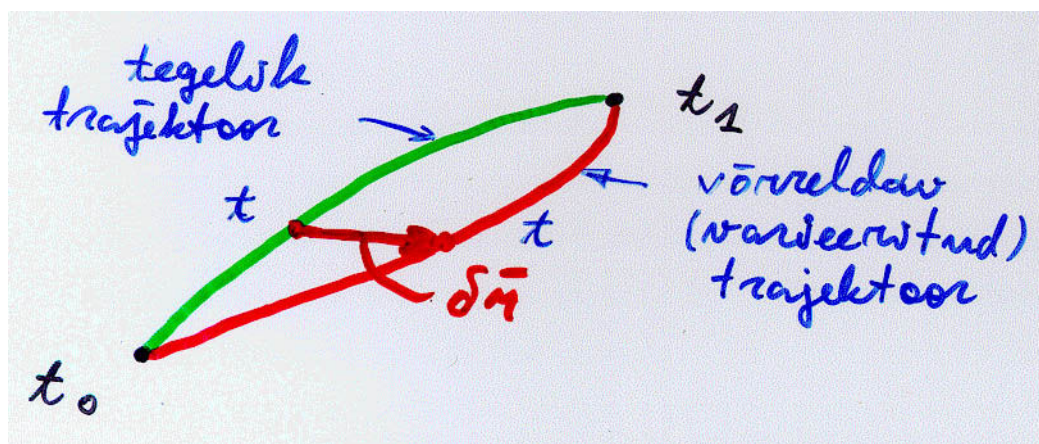
$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.72)$$

Eeldame, et 1) liikumise aeg on antud, 2) liikumise alg- ja lõppasendid on fikseeritud. Seega võrdleme vaid liikumisi, mille trajektoorid algavad ühes ja lõpevad teises fikseeritud punktis ning mis toimuvad sama ajaga.

Kuna liikumise aeg on fikseeritud, siis võime võrrandis (3.72) esinevaid suurusid $\delta \mathbf{r}_i$ tõlgendada kui kohavektorite isokrooneid variatsioone (vt. joonis 3.12).

Asume nüüd teisendama võrrandit (3.72). Selleks leiame kõigepealt tuletise

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) = \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (3.73)$$



Joonis 3.12: Hamiltoni printsiip.

Kasutades viimast, saame võrrandile (3.72) kuju

$$\sum_{i=1}^n \left[\mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i - m_i \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) + m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i \right] = 0. \quad (3.74)$$

Sulgavaldise viimane liige

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} m_i \delta (\dot{\mathbf{r}}_i^2) = \delta \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \delta T_i \quad (3.75)$$

ja seega

$$\delta T - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.76)$$

$\delta T = \sum_{i=1}^n \delta T_i$ on siin süsteemi kineetilise energia variatsioon. Korrutame viimast avaldist diferentsiaaliga dt ja integreerime lõigul $[t_0, t_1]$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt - \sum_{i=1}^n m_i \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} d(\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i)}_{=\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i|_{t_0}^{t_1}=0} + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i dt = 0. \quad (3.77)$$

Avaldise (3.77) teine liige on null, sest süsteemi alg- ja lõppasend on fikseeritud ning seega $\delta \mathbf{r}_i = 0$ nii t_0 kui t_1 puhul.

Kokku saame

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i \right) dt = 0, \\ \text{ehk üldistatud koordinaatide puhul} \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j \right) dt = 0. \end{array} \right. \quad (3.78)$$

Tingimus (3.78) on tegeliku liikumise puhul alati täidetud ja seda nimetatakse **Hamiltoni printsiibiks**. Kuna vastupidises suunas minnes saame võrrandist (3.78) dünaamika üldvõrrandi, siis on meil tegu tarviliku ja piisava tingimusega.

Seega, Hamiltoni printsiip (3.78) esitab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et eristada tegelikku liikumist kõigist kinemaatilistelt võimalikest liikumistest.

Kui meil on tegu vaid konservatiivsete jõududega, siis

$$\sum_{j=1}^l Q_j \delta q_j = - \sum_{j=1}^l \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V \quad (3.79)$$

kus V on süsteemi potentsiaalne energia. Arvestades isokroonse variatsiooni omadust $\delta \int F dt = \int \delta F dt$ saab Hamiltoni printsiip nüüd kujul

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0. \quad (3.80)$$

Tuues sisse **Lagrange'i funktsiooni ehk kineetilise potentsiaali**

$$L = T - V \quad (3.81)$$

saab Hamiltoni printsiibi esitada kujul

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0. \quad (3.82)$$

Kui aga defineerida lisaks veel **mõjufunktsioon**

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (3.83)$$

saame anda avaldisele (3.82) kujul

$$\delta S = 0. \quad (3.84)$$

Variatsioonarvutuses tähendab viimane tingimus, et S omab statsionaarset väärtust (üldjuhul minimaalset).

Märkused: (Vt. ka Ü. Lepik, L. Roots "Teoreetiline mehaanika" lk. 420-421.)

- Enamikel juhtudel võetakse mehaanikas aluseks Newtoni seadused ja ehitatakse neile üles kogu teooria (jõudes mingil ajal välja näiteks Hamiltoni printsiibini).
- Hamiltoni printsiip on aga osutunud nii üldiseks, et tema põhjal on võimalik üles ehitada kogu mehaanika. Iseasi on aga sellise lähenemisviisi otstarbekus.
- Kuigi tegu on väga tähelepanuväärse printsiibiga, väljendab ta vaid üht looduses kehtivatest seaduspäradest ega osuta üleloomulike jõudude eksisteerimisele.

Näide. Punktmass liigub raskusjõu väljas ajavahemiku $[0, t_1]$ jooksul punktist $A = (0, h)$ punkti $B = (b, 0)$. Millist trajektoori pidi punkt liigub ja milline peab olema tema algkiirus? Õhutakistust mitte arvestada.

Lahendus. Valime üldistatud koordinaatideks x ja y ning rakendame Hamiltoni printsiipi $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$.

$$L = T - V, \quad T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = mgy \Leftrightarrow P_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -mg. \quad (3.85)$$

Seega

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2gy) \quad \text{ja} \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} (2\dot{x}\delta\dot{x} + 2\dot{y}\delta\dot{y} - 2g\delta y) dt. \quad (3.86)$$

Leiame tuletised

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) = \ddot{x}\delta x + \dot{x}\delta\dot{x} \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dt}(\dot{y}\delta y) = \ddot{y}\delta y + \dot{y}\delta\dot{y}, \quad (3.87)$$

kust

$$\dot{x}\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) - \ddot{x}\delta x \quad \text{ja} \quad \dot{y}\delta\dot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{y}\delta y) - \ddot{y}\delta y. \quad (3.88)$$

Asendades saadud tulemused võrrandisse (3.86) saame

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt &= m \left[\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} d(\dot{x}\delta x)}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}\delta x dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} d(\dot{y}\delta y)}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{y}\delta y dt - \int_{t_0}^{t_1} g\delta y dt \right] = \\ &= -m \int_{t_0}^{t_1} [\ddot{x}\delta x + (\ddot{y} + g)\delta y] dt = 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Kuna võrrand (3.89) peab kehtima suvaliste $\delta x \neq 0$ ja $\delta y \neq 0$ puhul, siis peab $\ddot{x} = 0$ ja $\ddot{y} = -g$. Seega avaldub liikumisseadus kujul

$$x = \dot{x}_0 t, \quad y = h + \dot{y}_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3.90)$$

Viimane on ühtlasi ka trajektoori parameetriliseks võrrandiks. Otsitavad algkiirused avalduvad tingimustest $x|_{t_1} = b$ ja $y|_{t_1} = 0$ —

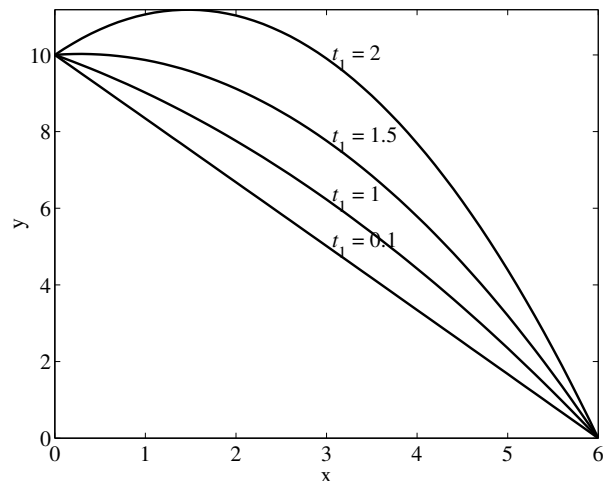
$$\dot{x}_0 = \frac{b}{t_1} \quad \text{ja} \quad \dot{y}_0 = \frac{gt_1^2 - 2h}{2t_1} \quad (3.91)$$

ja trajektoori parameetrilised võrrandid saavad kuju

$$x = \frac{b}{t_1} t, \quad y = h + \frac{gt_1^2 - 2h}{2t_1} t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3.92)$$

Trajektoori ilmutatud võrrand

$$y = h + \frac{gt_1^2 - 2h}{2b} x - \frac{gt_1^2}{2b^2} x^2. \quad (3.93)$$



3.9.1 Kokkuvõte

- Kinemaatilistelt võimalikud liikumised.
- Lagrange funktsioon ehk kineetiline potentsiaal, mõjufunktsioon.
- Hamiltoni printsiip.

3.10 Hamiltoni kanoonilised võrrandid

3.10.1 Üldistatud liikumishulk

Punktmassi liikumishulk

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v} \quad (3.94)$$

ja tema projektsioonid DRK telgedele

$$\begin{cases} K_x = m\dot{x}, \\ K_y = m\dot{y}, \\ K_z = m\dot{z}. \end{cases} \quad (3.95)$$

Punktmassi kineetiline energia

$$T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (3.96)$$

On selge, et

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{v}} = m\mathbf{v} = \mathbf{K} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = K_x, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = K_y, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = K_z. \end{cases} \quad (3.97)$$

Seega, valemite (3.97) põhjal saab öelda, et kineetilise energia tuletis kiiruse järgi on võrdne liikumishulgaga ning kineetilise energia osatuletis kiiruse projektsiooni järgi on võrdne liikumishulga vastava projektsiooniga.

Kui vaatleme punktmasside süsteemi, mille vabadusaste on l , siis selle süsteemi asend on määratud üldistatud koordinaatidega q_1, \dots, q_l ning kineetiline energia üldistatud kiirustega $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$.

Defineerime nüüd valemite (3.97) eeskujul **üldistatud liikumishulga** kui kineetilise energia tuletise üldistatud kiiruse järgi —

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \quad (3.98)$$

Kuna potentsiaalne energia ei sõltu üldistatud kiirustest, siis

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j, \quad (3.99)$$

kus $L = T - V$ on Lagrange'i funktsioon.

Seega võib *üldistatud liikumishulka* defineerida ka kui tuletist Lagrange'i funktsioonist üldistatud kiiruse järgi (sisuliselt on ikka tegu kineetilise energia osatuletisega üldistatud kiiruse järgi).

3.10.2 Kanoonilised muutujad

Lagrange'i teist liiki võrrandite puhul kirjeldati süsteemi asendit ja liikumist üldistatud koordinaatide q_j ja üldistatud kiiruste \dot{q}_j abil. Hamiltoni kanooniliste võrrandite puhul aga kasutatakse üldistatud kiiruste asemel üldistatud liikumishulki p_j . Saab näidata, et statsionaarsete sidemete puhul

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l B_{jk} p_j p_k. \quad (3.100)$$

Seega pole vahet, kas avaldada süsteemi kineetiline energia läbi üldistatud kiiruste või üldistatud liikumishulkade (igal juhul on tegu homogeense ruutfunktsiooniga). Suurusi q_j ja p_j nimetatakse analüütilises mehaanikas **kanoonilisteks muutujateks**¹⁵.

3.10.3 Hamiltoni kanoonilised võrrandid

Vaatleme süsteemi, kus kõik jõud on konservatiivsed, st.,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.101)$$

Lagrange'i teist liiki võrrandid saavad sel juhul kuju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.102)$$

Kasutades Lagrange'i funktsiooni $L = T - V$, saame viimasest

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.103)$$

Veelgi enam, kui kasutada üldistatud liikumishulga definitsiooni (3.99), teisenevad Lagrange'i teist liiki võrrandid (3.103) kujule

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, l \quad (3.104)$$

Saadud teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteem (3.103) või (3.104) on taandatav esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiks, kus on loomulikult kaks korda rohkem võrrandeid.

Toome sisse **Hamiltoni funktsiooni**

$$H = \sum_{j=1}^l p_j \dot{q}_j - L, \quad (3.105)$$

kusjuures siin eeldatakse, et üldistatud kiirused \dot{q}_j on avaldatud läbi üldistatud liikumishulkade p_j ja üldistatud koordinaatide q_j . Leiame

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} \stackrel{(3.105)}{=} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^l p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^l \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} \stackrel{(3.99)}{=} \dot{q}_k \quad (3.106)$$

¹⁵Kanooniline — normiks võetu

ja

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} \stackrel{(3.105)}{=} \sum_{j=1}^l \overbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}^0 \dot{q}_j + \sum_{j=1}^l p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^l \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}^{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \stackrel{(3.99)}{=} -\frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (3.107)$$

Viimases tuletuskäigus $\partial p_j / \partial q_k = 0$, sest definitsiooni põhjal $p_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$ ja seega ei esine üldistatud liikumishulga avaldises üldistatud koordinaadid ilmutatud kujul.

Kasutades Lagrange'i teist liiki võrrandeid kujul (3.104) saame anda avaldisele (3.107) kuju

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad (3.108)$$

Lisades siia diferentsiaalvõrrandi (3.106) saamegi **Hamiltoni kanoonilised võrrandid**

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.109)$$

Võrreldes Lagrange'i teist liiki võrranditega on neid küll kaks korda rohkem kuid tegu on esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiga ja kuna otsitavad on ka ilmutatud siis on seda süsteemi lihtsam lahendada (tõsi küll keerukam koostada).

3.10.4 Hamiltoni funktsiooni füüsikaline sisu

Definitsiooni põhjal

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{ja} \quad H = \sum_{j=1}^l p_j \dot{q}_j - L. \quad (3.110)$$

Seega

$$H = \sum_{j=1}^l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L. \quad (3.111)$$

Statsionaarsete sidemete puhul on kineetiline energia homogeenne ruutfunktsioon üldistatud kiirustest (vt. valem (3.48)). Rakendame nüüd Euleri teoreemi homogeensete funktsioonide kohta¹⁶ ning saame, et

$$\sum_{j=1}^l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T. \quad (3.112)$$

Seega

$$H = 2T - T + V = T + V. \quad (3.113)$$

Seega *statsionaarsete sidemete puhul kujutab Hamiltoni funktsioon endast vaadeldava süsteemi mehaanikalist energiat, mis on avaldatud üldistatud koordinaatide ja üldistatud liikumishulkade kaudu.*

¹⁶Kui $f(x)$ on n -astme homogeenne funktsioon, st. $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$, siis $x f'(x) = n f(x)$. Näiteks homogeenne kuupfunktsiooni $f(x) = x^3$ puhul $x f'(x) = x \cdot 3x^2 = 3f(x)$

3.10.5 Näited

Näide 1. Punktmass massiga m liigub raskusjõu väljas. Koostada tema jaoks Hamiltoni funktsioon.

Lahendus. Üldistatud koordinaatideks sobivad antud juhul Descartes'i ristkoordinaadid.

Üldjuhul Hamiltoni funktsioon $H = \sum_{j=1}^l p_j \dot{q}_j - L$ ja statsionaarsete sidemete puhul $H = T + V$.

Punktmassi kineetiline energia $T = 0,5mv^2 = 0,5m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ ja potentsiaalne energia $V = mgz$ (nullnivoo: $z = 0$).

Leiame üldistatud liikumishulgad

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (3.114)$$

ja avaldame üldistatud kiirused üldistatud liikumishulkade kaudu —

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \quad (3.115)$$

Seega

$$T = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m} \quad \text{ja} \quad H = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m} + mgz \quad (3.116)$$

Näide 2. Horisontaalne ketas saab pöörelda ümber tema keskpunkti läbiva vertikaalse telje z (inertsimoment $I_z = I$). Ketta diameetril olevas kanalis liigub kuulike, millele mõjub vedru elastsusjõud. Kuulikese mass on m ja vedru deformeerumata oleku puhul asub ta ketta tsentris. Vedru jäikus on k . Leida selle süsteemi liikumist kirjeldavad Hamiltoni kanoonilised võrrandid.

Lahendus. Valime üldistatud koordinaatideks polaarkoordinaadid r ja φ .

Kuna sidemed on statsionaarsed siis Hamiltoni funktsioon $H = T + V$.

Elastsusjõu projektsioon $F_r = -kr$ ja vastav potentsiaalne energia $V = kr^2/2$.

Süsteemi kineetiline energia $T = 0,5(I\dot{\varphi}^2 + mv^2)$, kus kuulikese kiiruse ruut $v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2$. Seega

$$T = \frac{1}{2} [m\dot{r}^2 + (I + mr^2) \dot{\varphi}^2]. \quad (3.117)$$

Leiame üldistatud liikumishulgad ja avaldame nende kaudu üldistatud kiirused:

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dots = (I + mr^2) \dot{\varphi}, \quad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (3.118)$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{(I + mr^2)}$$

Seega

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{I + mr^2} + kr^2 \right] \quad (3.119)$$

ja Hamiltoni kanoonilised võrrandid

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (3.120)$$

saavad kuju

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{mrp_\varphi^2}{(I + mr^2)^2} - kr, \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{I + mr^2}. \end{cases} \quad (3.121)$$

Võrdluse mõttes tuletame ka Lagrange'i II liiki võrrandid.

Kuna tegu on konservatiivse kahe vabadusastmega süsteemiga, siis saab Lagrange'i II liiki võrrandid avaldada Lagrange'i funktsiooni $L = T - V$ abil kujul

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.122)$$

Leiame Lagrange'i funktsiooni

$$L = \frac{1}{2} [mr\dot{r}^2 + (I + mr^2)\dot{\varphi}^2 - kr^2] \quad (3.123)$$

ja vajalikud osatuletised

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - kr, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{p}_r = m\ddot{r}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{p}_\varphi = 2mrr\dot{\varphi} + (I + mr^2)\ddot{\varphi}. \end{cases} \quad (3.124)$$

Kokku saame seega kahest teist järku diferentsiaalvõrandist koosneva süsteemi

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + kr = 0, \\ 2mrr\dot{\varphi} + (I + mr^2)\ddot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (3.125)$$

3.10.6 Kokkuvõte

- Üldistatud liikumishulk
- Kanoonilised muutujad
- Hamiltoni funktsioon ja tema füüsikaline sisu
- Hamiltoni kanoonilised võrrandid

3.11 Kolmanda peatüki kokkuvõte

Kolmas peatükk — pealkirjaga analüütiline mehaanika — on pühendatud mehaanikaülesannete üldistele lahendusmeetoditele. Eelmises peatükis käsitletud dünaamika üldteoreemid on eeskätt rakendatavad ühe vabadusastmega süsteemide liikumise uurimiseks. Käesolevas peatükis vaadeldavad Lagrange'i ja Hamiltoni võrrandid on mõeldud aga kahe või enama vabadusastmega süsteemide jaoks.

Tähtsad mõisted, seadused ja teoreemid.

- Sidemed ja nende liigid.
- Virtuaalsiire ja virtuaalsiirete printsiip.
- D'Alembert'i printsiip, inertsjõud.
- Üldistatud koordinaadid, üldistatud jõud, üldistatud liikumishulk ja üldistatud kiirus.
- Mehaanikalise suuruse variatsioon.
- Lagrange'i funktsioon, Hamiltoni funktsioon, mõjufunktsioon.
- Lagrange'i võrrandid.
- Hamiltoni printsiip.
- Hamiltoni kanoonilised võrrandid.

Sisukord

Eessõna	1
Sissejuhatus	2
1 Kinemaatika	3
1.1 Punkti liikumise määramisviisid	3
1.2 Punkti kiirus ja kiirendus	5
1.2.1 Punkti kiirus	5
1.2.2 Punkti kiirendus	5
1.2.3 Kiirus ja kiirendus Descartes'i ristkoordinaatides	6
1.2.4 Kiirus ja kiirendus loomulikes koordinaatides	7
1.2.5 Erijuhud	9
1.2.6 Kokkuvõte	9
1.3 Jäiga keha rööpliikumine	10
1.4 Jäiga keha pöörlemine	11
1.4.1 Nurkkiirus ja nurkkiirendus	11
1.4.2 Pöörleva keha punktide kiirused	12
1.4.3 Pöörleva keha punktide kiirendused	13
1.4.4 Kokkuvõte	14
1.5 Jäiga keha tasapinnaline liikumine	15
1.5.1 Tasapinnalise liikumise olemus	15
1.5.2 Tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiirused	16
1.5.3 Tasapinnaliselt liikuva keha punktide kiirendused	19
1.5.4 Kokkuvõte	21
1.6 Liitliikumine	22
1.6.1 Liitliikumise mõiste	22
1.6.2 Kiiruste liitmise teoreem	22
1.6.3 Kiirenduste liitmise teoreem	23
1.6.4 Kokkuvõte	25

1.7	Paralleelsete telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine	26
1.8	Jäiga keha sfääriline liikumine	29
1.8.1	Sfäärilise liikumise olemus	29
1.8.2	Euleri nurgad	30
1.8.3	Lõikuvate telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine	31
1.8.4	Euleri kinemaatilised võrrandid	32
1.8.5	Sfääriliselt liikuva keha punktide kiirused ja kiirendused	32
1.8.6	Kokkuvõte	34
1.9	Vaba jäiga keha liikumine	35
1.10	Rööpliikumise ja pöörlemise liitmine	37
1.11	Esimese peatüki kokkuvõte	38
2	Punktmasside ja jäikade kehade dünaamika	39
2.1	Punktmassi dünaamika põhiseadused	39
2.1.1	Põhimõisted	39
2.1.2	Newtoni seadused (dünaamika aksioomid)	39
2.1.3	Jõudude mõju sõltumatuse printsiip	40
2.2	Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet	41
2.2.1	Punktmassi liikumise diferentsiaalvõrrandid	41
2.2.2	Esimene põhiülesanne	41
2.2.3	Teine põhiülesanne ja punktmassi liikumise diferentsiaalvõrrandite integreerimine	42
2.2.4	Kokkuvõte	44
2.3	Punktmassi relatiivse liikumise põhivõrrand	44
2.4	Punktmasside mehaanikaline süsteem	45
2.5	Masskeskme liikumise teoreem	46
2.6	Liikumishulga teoreem	47
2.7	Keha massiinertsimomendid	48
2.8	Kineetilise momendi teoreem	51
2.8.1	Kineetiline moment	51
2.8.2	Kineetilise momendi teoreem	52
2.9	Jõu töö ja võimsus	53
2.10	Kineetilise energia teoreem	54
2.10.1	Kineetiline energia ja kineetilise energia teoreem punktmassi jaoks	54
2.10.2	Kineetilise energia teoreem punktmasside süsteemi jaoks	55
2.10.3	Süsteemi kineetilise energia leidmine	55

2.11	Potentsiaalne energia. Mehaanikalise energia jäävuse seadus.	56
2.11.1	Potentsiaalne energia	56
2.11.2	Mehaanikalise energia jäävuse seadus	57
2.12	Dünaamika üldteoremid — kokkuvõte	58
2.13	Põrge	59
2.13.1	Põrketeooria põhimõisted ja hüpoteesid (lihtustused ja aksioomid)	59
2.13.2	Elastne ja mitteelastne põrge. Põrketegur	61
2.13.3	Liikumishulga teoreem ja kineetilise momendi teoreem põrkel	62
2.13.4	Kaldpõrge liikumatult pinnalt	62
2.13.5	Kahe keha tsentraalne põrge	63
2.13.6	Kineetilise energia kadu tsentraalsel otsepõrkel	65
2.13.7	Kokkuvõte	65
2.14	Teise peatüki kokkuvõte	66
3	Analüütiline mehaanika	67
3.1	Sissejuhatus analüütilisse mehaanikasse	67
3.2	Sidemed ehk seosed	67
3.3	Virtuaalsiirete printsiip	69
3.3.1	Virtuaalsiirde mõiste	69
3.3.2	Virtuaalsiirete printsiip	70
3.3.3	Kokkuvõte	72
3.4	D'Alembert'i printsiip	73
3.4.1	D'Alembert'i printsiip ühe punktmassi jaoks	73
3.4.2	D'Alembert'i printsiip punktmasside süsteemi jaoks	74
3.4.3	Kokkuvõte	76
3.5	Dünaamika üldvõrrand	77
3.6	Üldistatud koordinaadid ja üldistatud jõud	78
3.6.1	Üldistatud koordinaadi mõiste	78
3.6.2	Üldistatud jõud	79
3.6.3	Lagrange'i tasakaalutingimused	80
3.6.4	Üldistatud jõudude ja potentsiaalse energia vaheline seos	81
3.6.5	Kineetilise energia avaldamine üldistatud koordinaatide kaudu	81
3.6.6	Kokkuvõte	83
3.7	Lagrange'i teist liiki võrrandid	84
3.8	Mehaanikalise suuruse variatsioon	86
3.8.1	Isokroonne variatsioon	86

3.8.2	Täisvariatsioon	87
3.8.3	Kokkuvõte	88
3.9	Hamiltoni printsiip	89
3.9.1	Kokkuvõte	92
3.10	Hamiltoni kanoonilised võrrandid	93
3.10.1	Üldistatud liikumishulk	93
3.10.2	Kanoonilised muutujad	94
3.10.3	Hamiltoni kanoonilised võrrandid	94
3.10.4	Hamiltoni funktsiooni füüsikaline sisu	95
3.10.5	Näited	96
3.10.6	Kokkuvõte	97
3.11	Kolmanda peatüki kokkuvõte	98