

Peatükk 2

Sisejõud ja pinged

2.1. Välisjõud

2 - 2

2.1 Välisjõud

Deformeeruvat keha võib vaadelda koosnevana punktmassidest ja seega on tegu punktmasside (mehaanikalise) süsteemiga¹. Sise- ja välisjõudused käsitleti ka *jäiga keha mehaanika* kursuses (tavaliselt dünaamika kursuses enne dünaamika tildteoreeme). Kõigepealt tuli määratleda vaadeldav keha (või punktmasside süsteem) ning seejärel defineeriti sise- ja välisjõud järgmiselt: *sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist ja *välisjõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi mittekuuluvad punktmassid mõjutavad vaadeldavasse süsteemi kuuluvaid punktmasse. Analooogiliselt defineeritakse sise- ja välisjõud ka pideva keskkonna mehaanikas (k.a. elastsusteoorias):

- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või kesk-konna) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.
- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

¹Vt. ka „Dünaamika” kursusest.

Välisjõud jagunevad pind- ja ruumjõududeks.

- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punktmassile. Näiteks gravitatsioonijõud.

Pindjõud mõjub alati läbi mingi pinna ja seetõttu on tema dimensioon tavaliselt sama, mis pingel, s.t. N/m^2 . Piirjuhul, kui pind millel koormus mõjub on väga väike, asendatakse pindjõud sellel pinnal mõjuva pindjõudude resultandiga, s.t. tihedusega, mida nimetatakse *punktiõuks ehk koondatud jõuks*. Koondatud jõu dimensioon on loomulikult N . Kaks võrdvastupidist koondatud jõudu, millel on erinevad mõjusirged, moodustavad *koondatud momendi*. *Mahujõudude* dimensioon on N/m^3 ja *massijõududel* N/kg .

Toereaktsioonid kuuluvad välisjõudude hulka. Tugevusõpetuse (ja elastsusteooria) seisukohast olulisemad tugede tüübid²:

- 2D liikuv liigendtugi e. liigend — 1 jõud,

²Vaata lisaks staatika kursusest.

2.1. Välisjõud

- 2D liikumatu liigendtugi e. liigend — 2 jõudu,
- 2D jäik kinnitus — 2 jõudu ja 1 moment,
- 3D jäik kinnitus — 3 jõudu ja 3 momenti.

Staatikaga määratud ja staatikaga määramata konstruktsioonid.

- Staatikaga määratud konstruktsioonide toereaktsioonide leidmine toimub staatika tasakaaluvõrrandite, printsiipide ja aksioonide abil, s.t. täpselt samuti kui seda tehti staatika kursuses.
 - Tasapinnalised tilesanded — kuni 3 tundmatut ja sama palju võrrandeid.
 - 3D (ruumilised tilesanded) — kuni 6 tundmatut ja sama palju võrrandeid.
 - Konstruktsioon loetakse jäigaks.
 - Jaotatud koormused asendatajaks üksikjõududega.
 - Jõudu võib käsitleda libiseva vektorina.
 - Jne., vaata lisaks staatika kursusest.

- Staatikaga määramata konstruktsioonide toereaktsioonide leidmise meetodeid käsitletakse tugevusõpetuse ja ehitusmehaanika kursustes. Sel juhul tuleb arvesse võtta kuidas konstruktsioon deformeerub.

2.2 Sisejõud ja lõikemeetod

Vastavalt Newtoni III seadusele mõjutavad kaks punktmassi teineteist võrdvastupidiste jõududega. Välisjõudude puudumisel mõjuvad tahke keha punktmasside vahel molekulaarse päritoluga jõud, mis tagavad talle nn. kuju- ja mahupüsivuse. Seda sorti jõud (mis oma olemuselt on samuti sisejõud) elastsusteooria ja tugevusõpetuse seisukohalt tildjuhul huvi ei paku ja neid arvesse ei võeta. Teisisõnu:

- kuna algolekus (välisjõudude puudumisel) loeme me kehad pingetest ja deformatsioonidest vabadeks, siis eeldatakse, et algolekus sisejõud puuduvad;
- meid huvitavad vaid sellised sisejõud, mis ilmnevad kehale rakendatud välisjõudude tulemusena.

Keha sisejõudude ja pingete määramise juures mängib tähtsat rolli lõikemeetod, mille idee on järgmine.

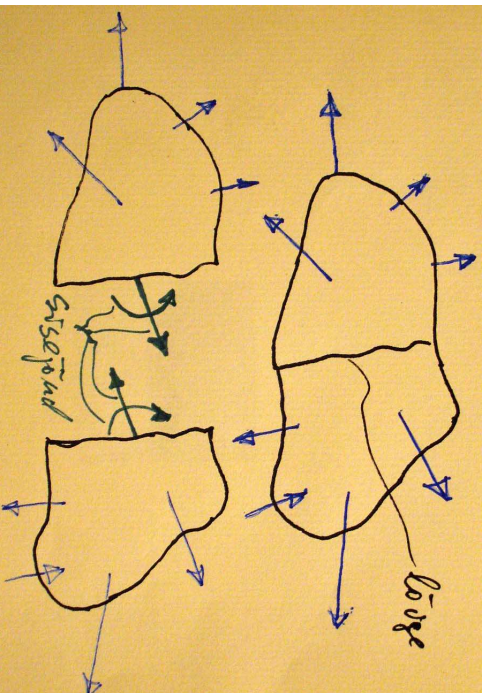
2.2. Sisejõud ja lõikemeetod

2 - 6

- Vaatleme tasakaalus olevat keha ja lõikame ta mõtteliselt kaheks osaks.
- Selleks, et mõlemad osad oleksid ka pärast (mõttelist) tikkeldamist tasakaalus tuleb äralõigatud osa mõju asendada jõududega. Neid jõudusid nimetataksegi (vaadeldavas keha lõikes mõjuvateks) *sisejõududeks*.

Kuna enne (mõttelist) lõiget olid vaadeldava keha osad omavahel järgalt ühendatud, siis me toimime sisejõudude määramise juures analoogiliselt jäigale kinnitusele vastavate toereaktsioonide leidmisele staatika kursuses. Viimased peavad välistama nii lõikepinna punktide siirded kui pöörded. Staatika kursusest on teada, et tasapinnalise jõusüsteemi korral on sellisteks reaktsioonideks kaks jõudu ja üks moment ning 3D jõusüsteemi korral kolm jõudu ja kolm momenti.

Rangemalt öeldes on jäiga kinnituse reaktsioonideks siiski üks jõud ja üks moment – reaktsioonjõudude peavektor ja peamoment. Toereaktsioonide leidmise korral määratakse tavaliselt nende kahe vektori projektsioonid koordinaattelgedel. Viimaste abil saab omakorda määrata toereaktsioonide koordinaattelgede sihilised komponendid. Tasapinnalisel juhul on neist kuuest komponendist kolm samaselt nullid. Täpselt sama loogika kehtib sisejõudude määramise korral.



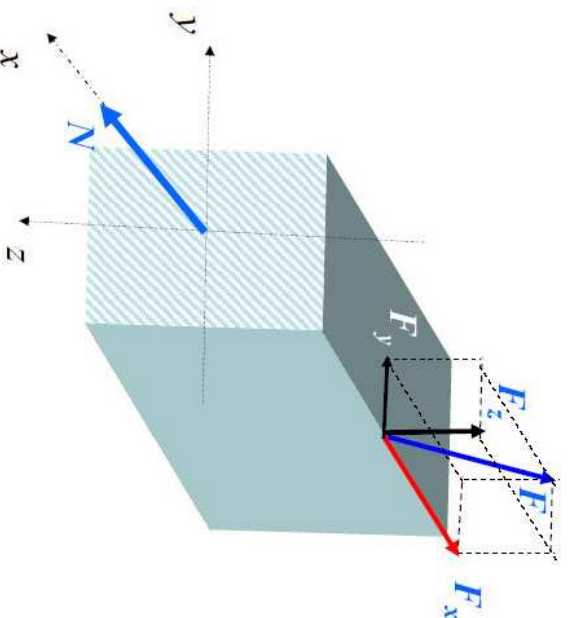
Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

Sisejõudude määramiseks tuleb vaadelda keha kumbagi poolt eraldi ning koostada staatikast tuntud meetodeid kasutades tasakaaluvõrrandid, kust määratakse otsitavad sisejõud. Ettevaatlik tuleb siin olla juhtudel, kui lõige on tehtud jaotatud koormuse mõjumise piirkonnas. Sellisel juhul ei saa kogu jaotatud koormust asendada tiheduse jõuga nagu staatikas tehti. (Näide 2-1. Tala sisejõud. Lahendatakse loengus!)

2.3. Sisejõudude liigid

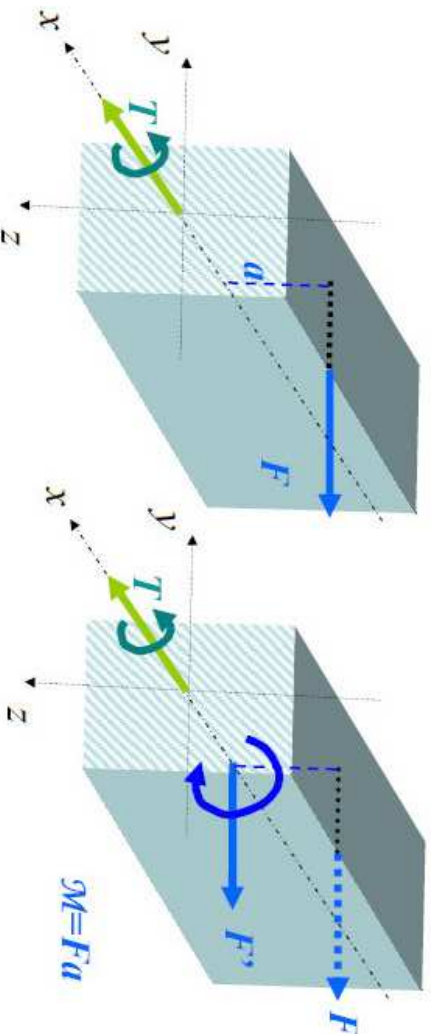
2.3 Sisejõudude liigid

Varraste ja talade (ka plaatide) korral eristatakse sisejõududena *pikijõudu*, *väändmomenti*, *põhkjõudu* ja *paindemomenti*. *Pikijõud* mõjub piki varda telge. Ta saab tekkida, kui välisjõududel on varda telje sihilisi komponente (joon. 2.2).



Joonis 2.2: Pikijõud

Väändemoment saab vardas tekkida siis, kui välisjõududel on komponente, mis annavad momente varda telje suhtes või talle on rakendatud pöördemoment, st. välismoment varda telje suhtes (joon. 2.3). Väändemoment pöörab varda ristlõikeid ümber varda telje.

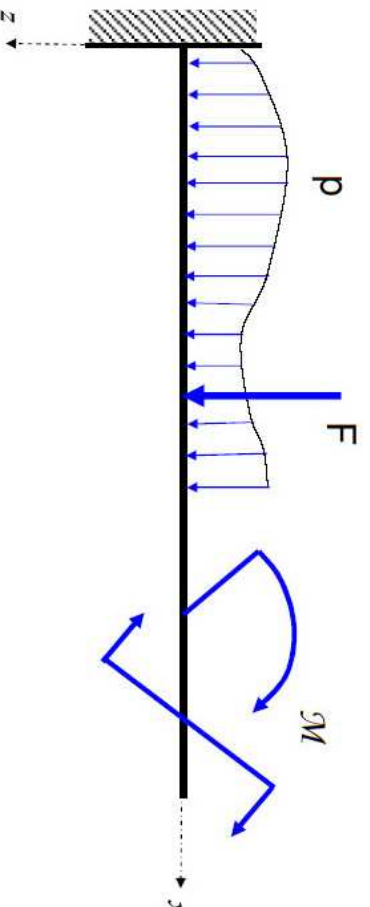


Taandades välisjõu F varda x -teljele saame välisjõu F' ja pöördemomendi \mathcal{M} .

Joonis 2.3: Väändemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

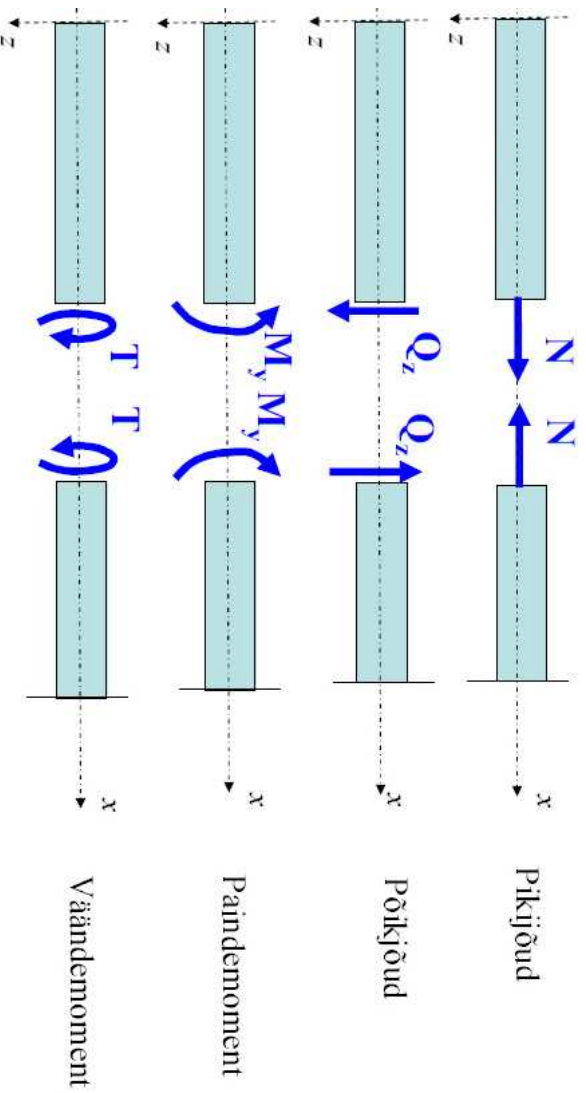
Põikjõud mõjub risti varda teljega ja ”üritab varrast läbi lõigata”. **Paindemomendi** toimel varras kõverdub. Need kaks sisejõudu saavad vardas tekkida siis kui talle mõjuvad välisjõud omavad varda teljega ristuvaid komponente. Lisaks võib **paindemoment** tekkida juhul kui vardale mõjub painet tekitav moment. Selliseid väliskoorumusi on kujutatud joonisel 2.4. Põikjõu sümboolina kasutatakse ka terminit **lõikejõud**.



Joonis 2.4: Põikjõud ja paindemoment

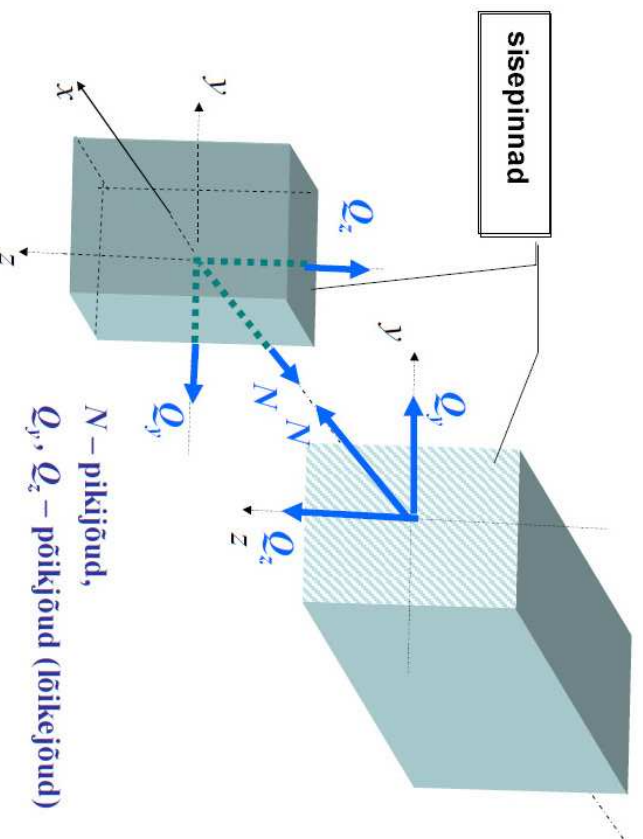
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

Joonisel 2.5 on kujutatud käsitletud sisejõudusid tasapinnalisel (2D) juhul ja joonistel 2.6 ning 2.7 3D juhul. Neil joonistel on kasutatud sisejõudude tavapäraseid tähistusi: pikijõud – N , väändmoment – T , põikjõud – Q ja paindemoment – M .



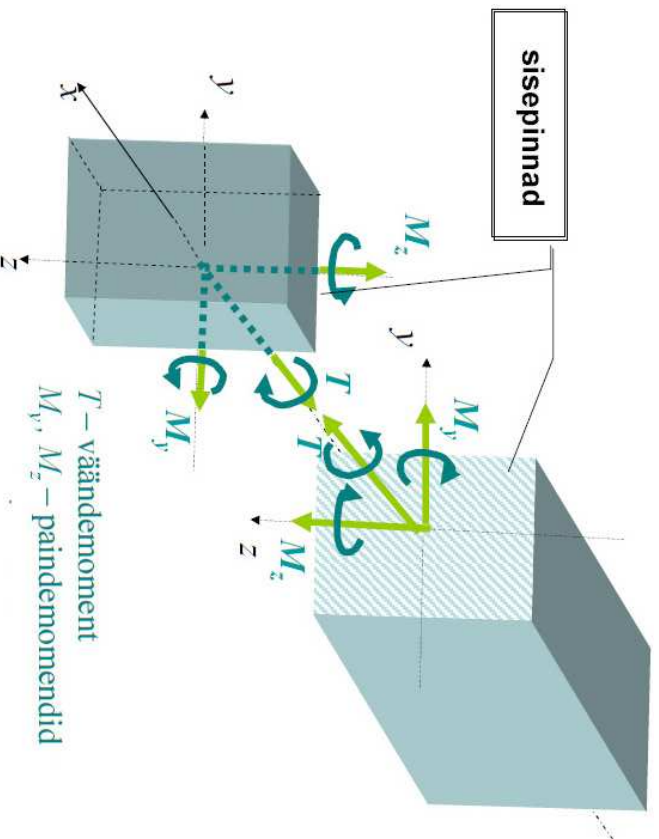
Joonis 2.5: Sisejõudude liigid – 2D juhul.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)



Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — pikki- ja põikjõud 3D juhul.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)



Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemomendid 3D juhul. NB! M_z on siin negatiivne, teised positiivsed.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

2.4. Sisejõudude märgireeglid

2 - 14

2.4 Sisejõudude märgireeglid

Sisejõudude positiivsetele ja negatiivsetele suundadele on kehtestatud suhteliselt ranged märgireeglid³. Enne nende juurde asumist tuleb aga täpsustada koordinaattelgede asend ja tuua sisse mõned mõisted.

Tugevusõpetuses, ehitusmehaanikas ja mõnes muus mehaanika osas, kus käsitletakse varraste, plaatide ja koorikute mehaanikalist käitumist, on tihti kombeks suunata vertikaalne koordinaattelg alla. Kuna pöörde positiivne suund on seotud telgede asendiga, siis loetakse nüüd positiivseks tavapärasega võrreldes vastupidist pööret (vt. 1. peatükk lk. 8). Selline telgede asend oli eelmises alajaotuses juba kasutusel.

Mõttelisel lõikel tekkivat pinda nimetatakse *sisepinnaks* (vt. joon. 2.7 ja 2.6). Tävaliselt tehakse lõiked risti telgedega. Sel juhul saab defineerida positiivsed ning negatiivsed sisepinnad. Sisepinda nimetatakse *positiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattelje positiivses suunas ja *negatiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattelje negatiivses suunas. Joonistel 2.6 ja 2.7 kujutatud juhtudel on lõikamise käigus tekkinud tagumisel vardaosal

³Tõsi küll, erinevte autorite õpikutes ja teatmeteostes võib kohata väga erinevaid märgireegleid.

positiivne sisepind ja eesmisel vardaosal negatiivne sisepind. Joonisel 2.5 kujutatud 2D juhul on positiivne sisepind tekinud varda vasakpoolsel osal ja negatiivne parempoolsel osal.

Tala painde uurimisel osutuvad tähtsateks nn. *positiivsed ja negatiivsed kiud*. Varda mõtelisi kiudusid nimetatakse positiivseteks kui z -koordinaat on selles tala osas positiivne. Ja vastupidi, varda mõtelisi kiudusid nimetatakse negatiivseteks kui z -koordinaat on selles tala osas negatiivne. Selline määratlus kehtib juhul kui tala paindub $x - z$ tasapinnas (joon. 2.4). Kui paine toimub aga $x - y$ tasapinnas, siis on positiivsed ja negatiivsed kiud määratud y -telje abil.

Graafiliselt on *sisejõudude positiivsed suunad* 2D juhu jaoks kujutatud joonisel 2.8 ning 3D juhu jaoks joonistel 2.6 ja 2.7 (välja arvatud M_z , mis on joonisel 2.7 negatiivne). Sõnastatult on sisejõudude märgireeglid järgmised.

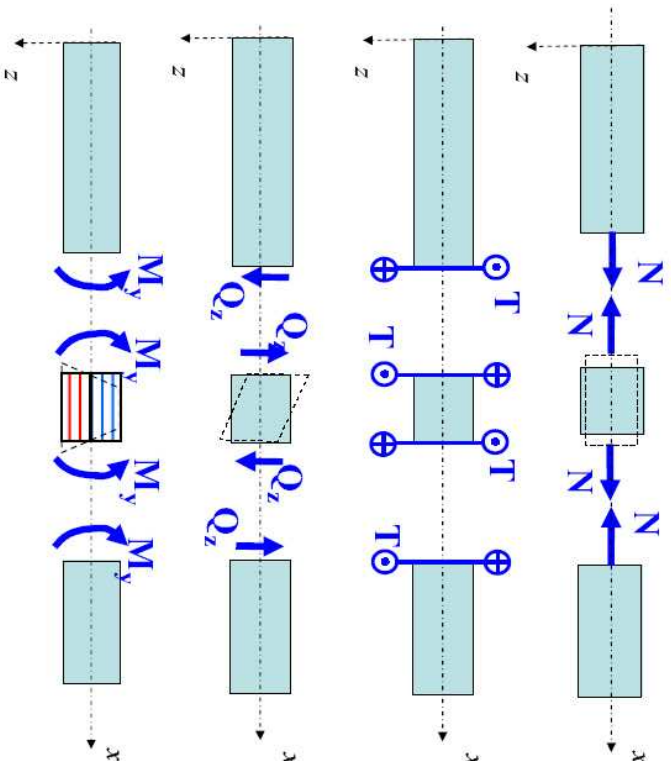
- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
 - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.

2.4. Sisejõudude märgireeglid

- *Väändemomendi positiivne suund* on määratud kruvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjuv väändemoment on positiivne kui väändemomendi suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
 - *Positiivne pöikjõud* Q_z mõjub positiivsel sisepinnal z -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal z -telje negatiivses suunas.
 - Analoogiline märgireegel kehtib ka pöikjõu Q_y jaoks.
 - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne pöikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
 - *Positiivne paindemoment* tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
 - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

Märkus: Piki- ja pöikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändemomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



2

Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

2.4. Sisejõudude märgireeglid

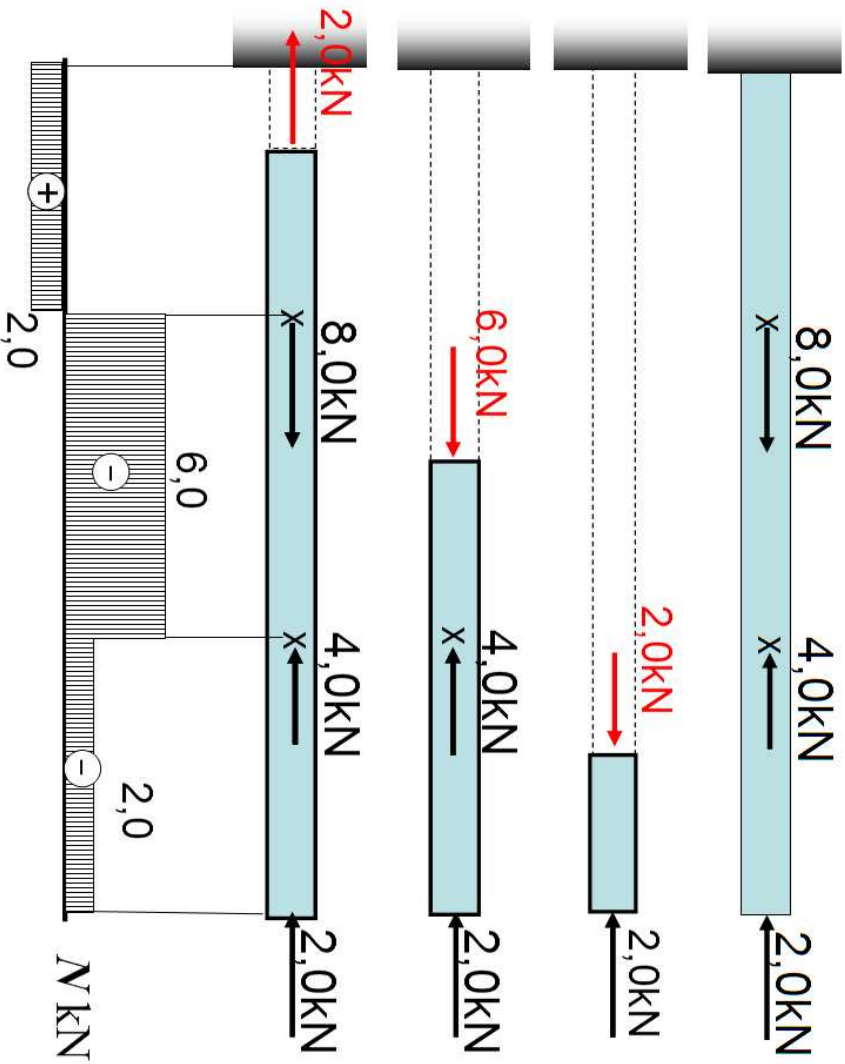
2 - 18

Sisejõudusid on tavaliselt kasulik teada igas ristlõikes ning seetõttu on osutunud otstarbekaks esitada neid graafiliselt. Vastavaid graafikuid nimetatakse eesti keeles *epüürideks*⁴. Enam vähem analoogiliselt, st. epüüride abil, esitati staatika kursuses lauskoormusi ehk jaotatud koormusi. Epüüri kõrvale kirjutatakse tema nimi ja ühikud. Näiteks N -epüür kN, või lühidalt N kN.

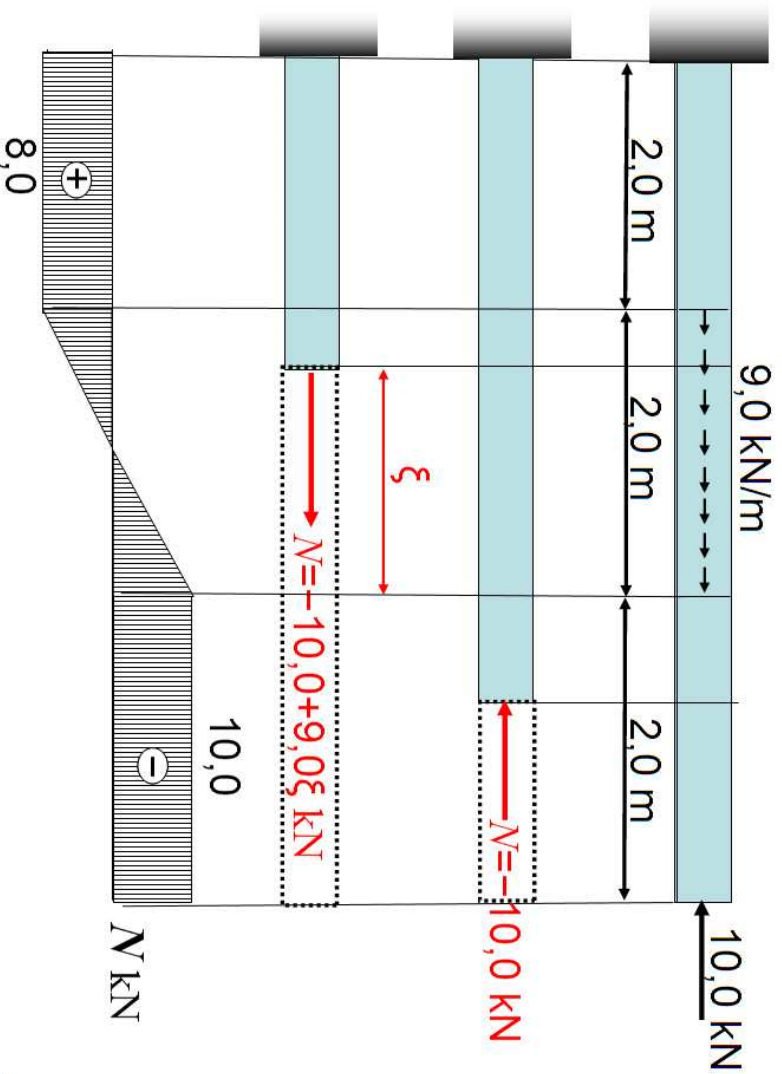
Epüüride koostamist selgitame järgnevate näidete abil, pärinevad emeriitprofessor Jaan Metsaveere õppematerjalidest.

⁴Inglise keeles on epüüri vaste *diagram*, näiteks põikjõu epüür on inglise keeles *shear-force diagram*

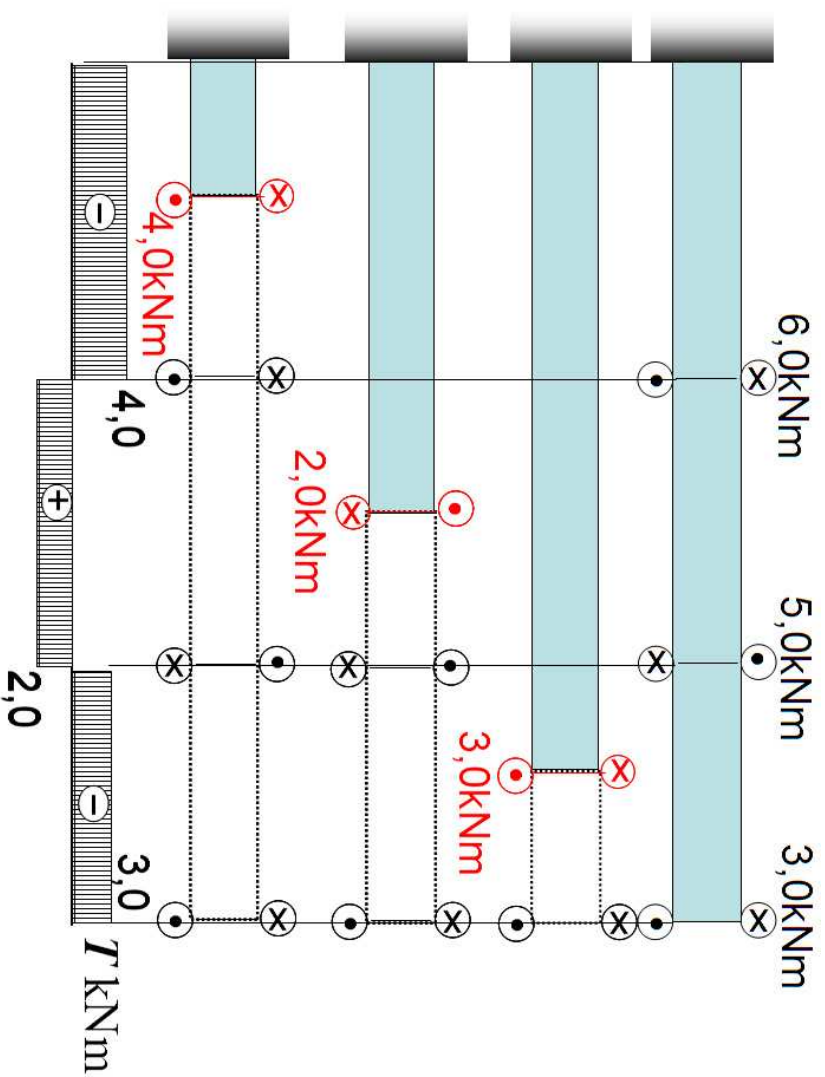
Näide 2-2. Koostada pikijõu epüütr.



Näide 2-3. Koostada pikijõu epüütr.



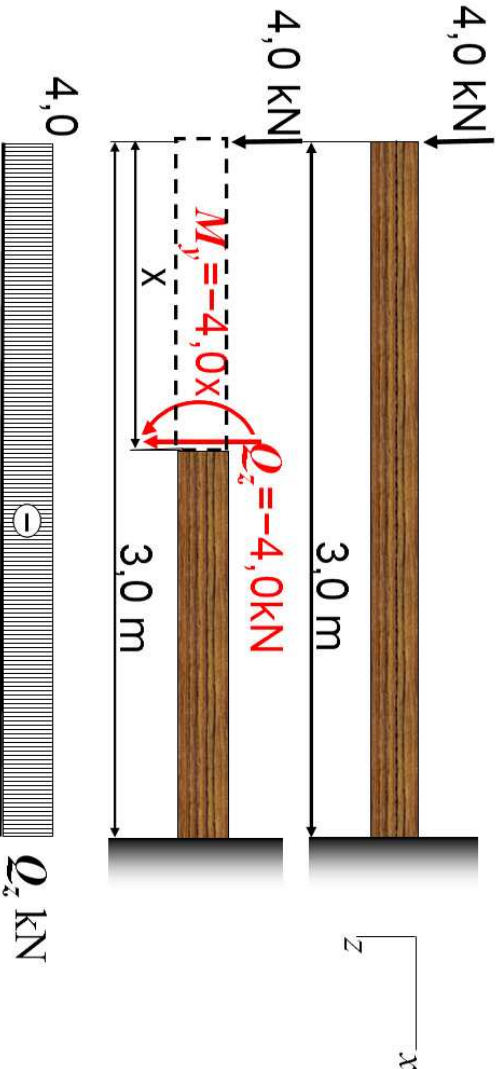
Näide 2-4. Koostada väändemomendi eputiir.



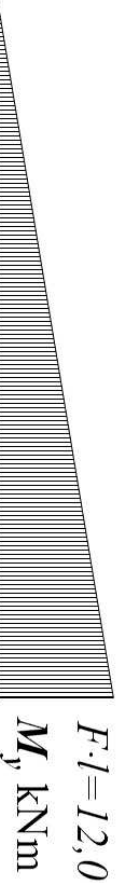
2.4. Sisejõudude märgireeglid

2 - 22

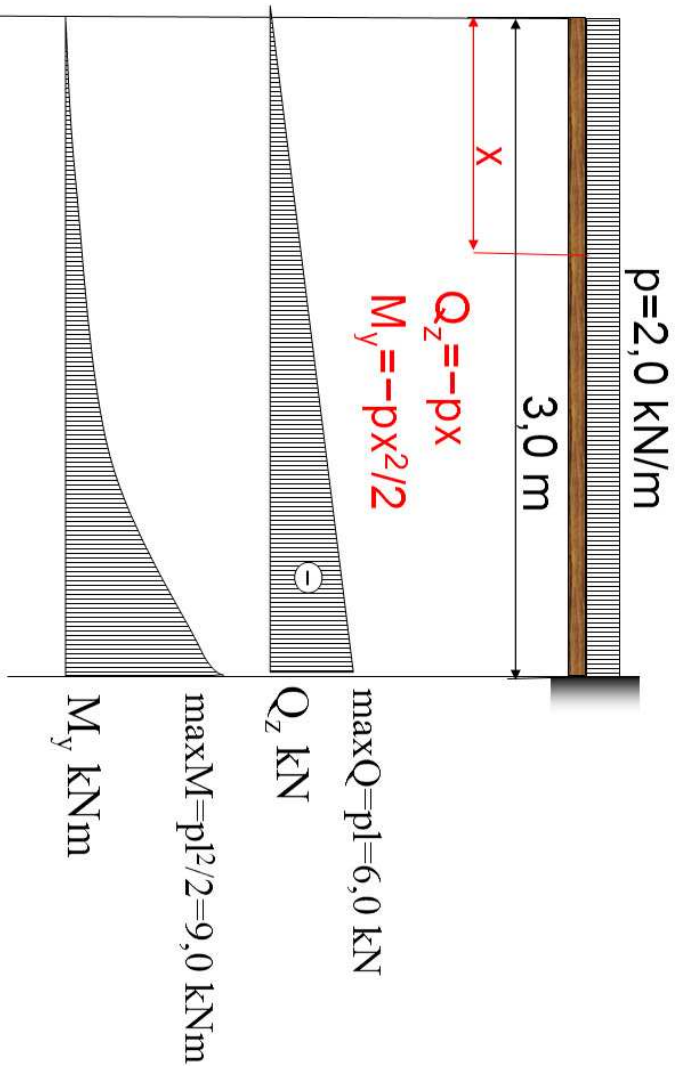
Näide 2-5. Koostada põikjõu ja paindemomendi eputiir.



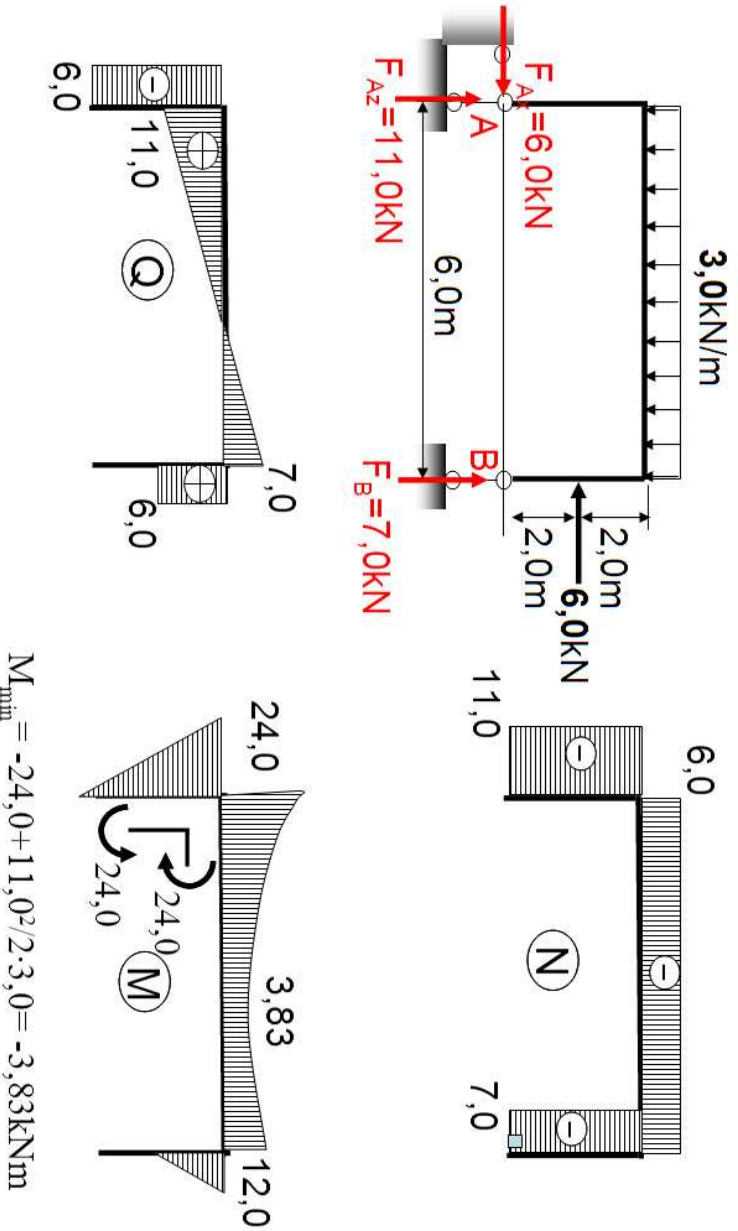
Paindemoment kantakse tõmmatud poolele ilma märgita



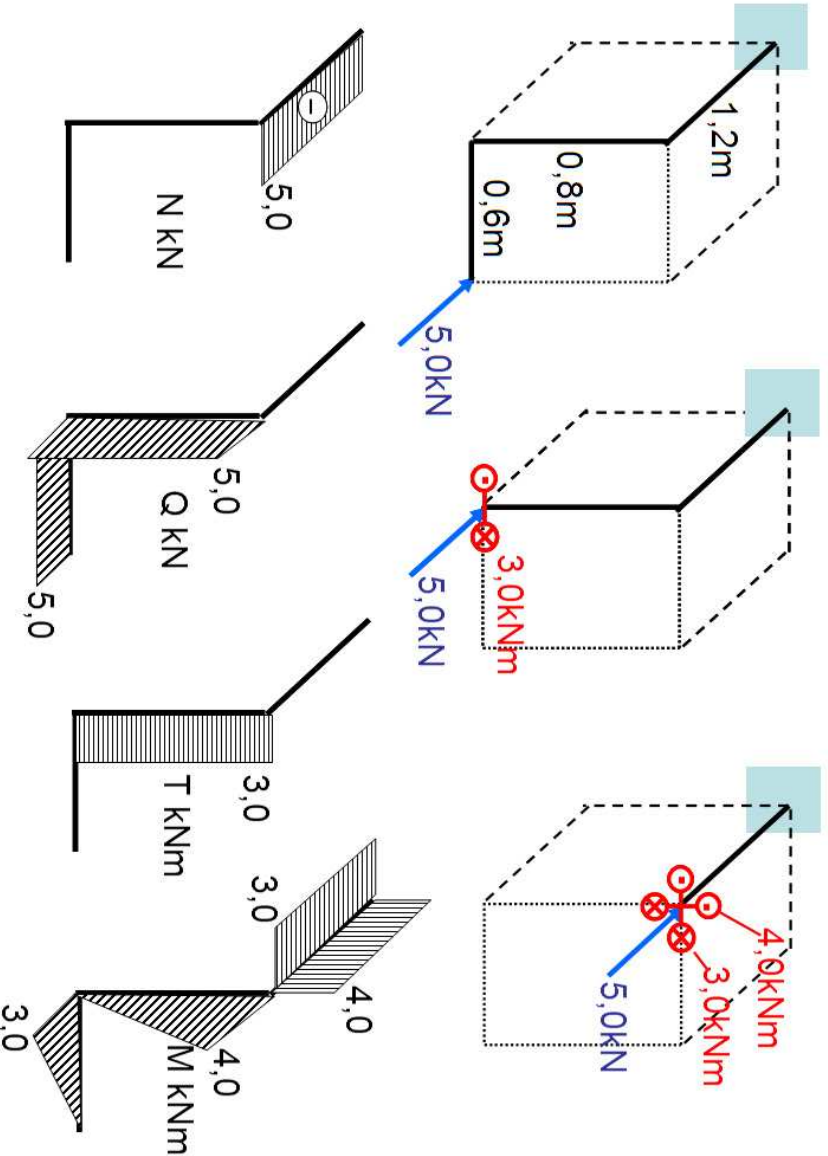
Näide 2-6. Koostada põikjõu ja paindemomendi eptüür.



Näide 2-7. Koostada tasandraami sisejõudude eptüürid.



Näide 2-8. Koostada muritud varda sisejõudude epiüürid.

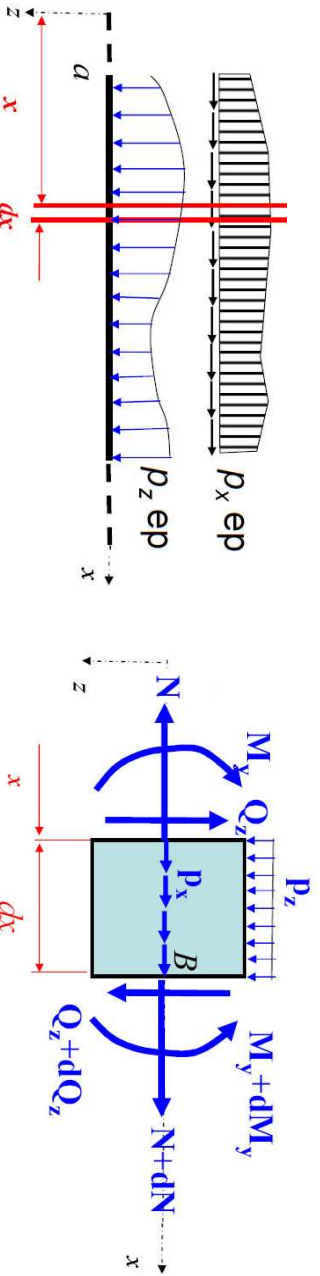


2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

2 - 26

2.5 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Vaatleme varda osa, kus piki telge mõjub lauskoormus intensiivsusega p_x ja ristteljega lauskoormus intensiivsusega p_z . Koordinaadil x on vardast ristlõigete abil eraldatud lõpmata lühike element pikkusega dx (joon. 2.9). Koostame selle elemendi jaoks tasakaaluvõrrandid, projekteerides kõik talle mõjuvad jõud x - ja z -teljele ning leides momentid punkti B suhtes.



Joonis 2.9: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsus (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* leengutkonseptist.)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= N + dN - N + p_x \cdot dx = 0, \\ \sum_i F_{iz} &= Q + dQ - Q_z + p_z \cdot dx = 0, \\ \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) &= -Q_z \cdot dx + dM_y + p_z \cdot dx \cdot (0, 5dx) = 0, \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga dx läbijagamist, ning viimasest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalset:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga dx ning integreerime lõigul $[a, x]$:

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

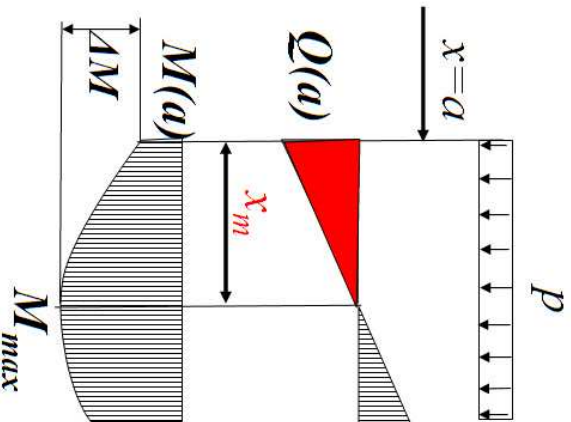
2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Järeldused. Äsjatuletatud seosed ning vaadeldud näited võimaldavad teha olulisi järeldusi sisejõudude epiüiride kuju (käitumise) kohta.

1. Piirkondades, kus lauskoormus puudub, on piki- ja põikjõud konstantsed, paindemoment on aga sellises piirkonnas lineaarfunktsioon kordinaadist x .
2. Koondatud välisjõu rakenduspunktis toimub vastava sisejõu epiüiris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva välisjõu suurusega.
3. Koondatud välismomendi rakenduspunktis toimub painde- või väändemomendi epiüiris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva momendi suurusega.
4. Paindemomendi epiüiri tõus on võrdne põikjõuga. Kohas, kus põikjõud on null, on paindemomendil ekstremaalne väärtus.
5. Kohas, kus põikjõu epiüiris on hüpe, on paindemomendi epiüiris murdekoht (epiüiri tõus muutub hüppeliselt). Erijuhul, kui hüppe käigus muutub ka põikjõu märk, on paindemomendil selles kohas ekstreemum.
6. Piirkonnas, kus väline lauskoormus on konstantne, on põik- ja pikijõud lineaarsed funktsioonid kordinaadist x . Paindemoment on sellisel juhul aga ruutfunktsioon.

7. Epuüride joonistamisel on otstarbekas meeles pidada, et määratud integraal esitab integreeritava funktsiooni graafiku ja x -telje vahele jääva kujundi pindala (lõigul $[a, x]$).

Näide 2-9. Paindemomendi ekstreemumi määramine.



$$\Delta M = 1/2 Q(a) x_m,$$

kuna

$$x_m = Q(a)/p,$$

siis

$$\Delta M = Q^2(a)/2p$$

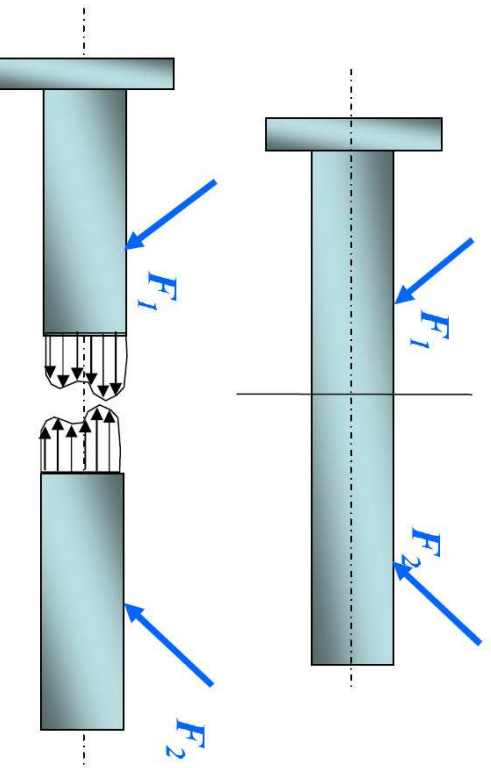
$$M_{max} = M(a) + Q^2(a)/2p$$

2.6. Pinge mõiste

2 - 30

2.6 Pinge mõiste

On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemeetodi korral on sisejõud tegelikult jaotunud üle kogu lõikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud kuus sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi projekttsioone koordinaattelgedel.



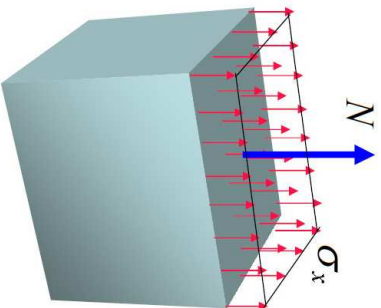
Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* leengutkonseptist.)

Lõikepinnal mõjuva lauskoormuse intensiivsust nimetamegi *pingeks*. Tema mõõtühik $1\text{ Pa} = 1\text{ N}/1\text{ m}^2$ langeb kokku rõhu ühikuga.

Kõige lihtsam on pinget arvutada juhul kui vardas mõjub vaid pikijõud. Siin eeldatakse, et pikijõud N on jaotunud ühtlaselt üle kogu lõikepinna A (joon. 2.11) ja seega pinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.3)$$

Oma olemuselt on vaadeldav pinge *normaalpinge*, sest ta mõjub risti vaadel-



Joonis 2.11: Pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

2.6. Pinge mõiste

2 - 32

dava pinnaga. Käesolevas kursuses tähistatakse normaalpingeid kreeka tähega σ ja vajadusel lisatakse indeks, mis osutab pinnanormaali sihile. Eestikeelsetes tugevusõpetuse ja tehnilise mehaanika õpikutes nimetatakse pikijõust põhjustatud normaalpingeid ka *pikkepingeteks*.

Alajaotustes 2.2–2.6 kasutatud lähenemisiis, kus sisejõud jaotakse vastavalt sellele, kuidas nad on orienteeritud koordinaattelgde suhtes⁵ ja pinged saavad oma nime selle järgi, millise sisejõuga on neil põhjuslik seos, on iseloomulik just tugevusõpetusele (tehnilisele mehaanikale). Sama lähenemisiisi on aga otstarbekas rakendada ka elastsusteooria ülesannete korral kui uuritavateks objektideks on vardad (talad), plaadid ja koorikud.

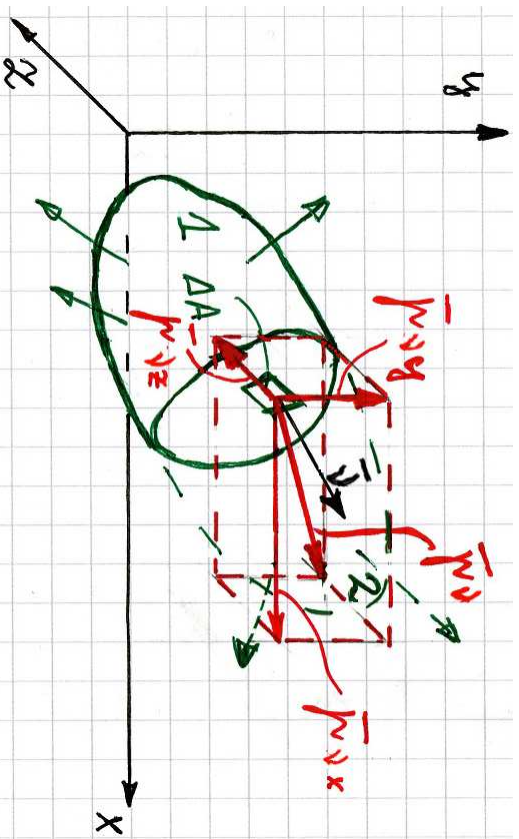
Järgmises alajaotuses selgitame pinge mõistet pisut tldisemalt ning ülejäärgmises tuleme tagasi tugevusõpetuses kasutatava lähenemisiisi juurde ja hakkame uurima pingeid varda ristlõike punktis.

⁵Koordinaatteljed orienteeritakse omakorda uuritava keha geometriast lähtudes.

2.7 Pingvektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjub pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.12).



Joonis 2.12: Pingvektor \mathbf{p}_ν ja tema koordinaattelgede xyz sihilised komponendid.

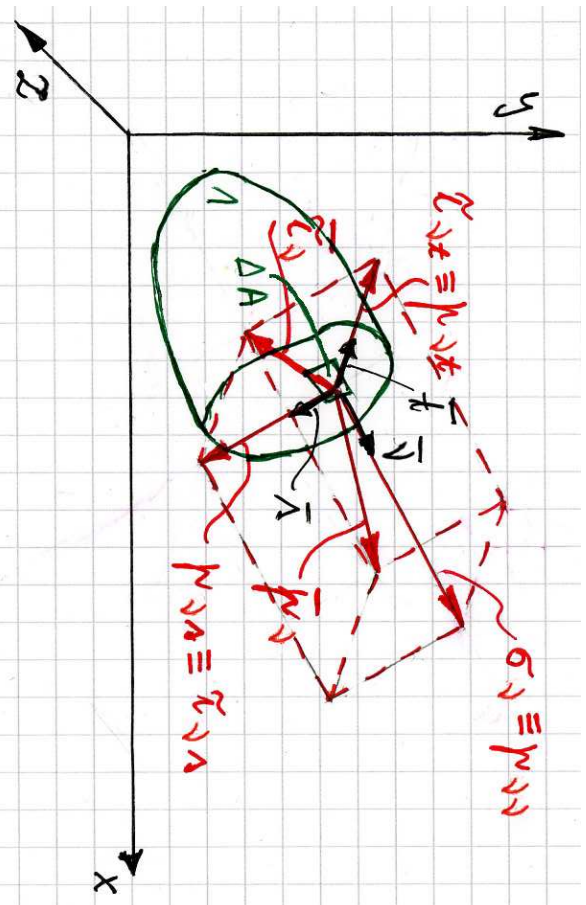
2.7. Pingvektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

2 - 34

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga ν . Mõjugu väikesel pinnal ΔA sisejõud $\Delta \mathbf{S}$. Suhet $\Delta \mathbf{S} / \Delta A$ võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal ΔA . ✓
- Kui minna piirile $\Delta A \rightarrow 0$, saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga* ν

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (2.4)$$

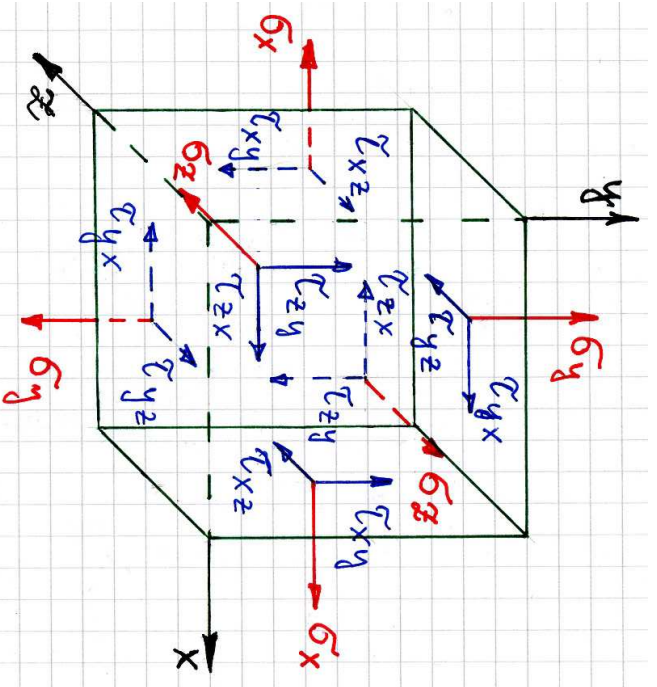
- Üldjuhul vektorite ν ja \mathbf{p}_ν suunad ei tihti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingvektori asemel tema projektsioonide koordinaattelgedel $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$, mis omakorda määravad ära pingvektori \mathbf{p}_ν koordinaattelgede xyz sihilised komponendid (vt. joon. 2.12). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pingekomponendi mõjumise sihti.

Joonis 2.13: Pingvektori \mathbf{P} lahutamise normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga ν mõjuva pingvektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*: $\mathbf{P}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$. Nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu$ lahutatakse tavaliselt veelkord kaheks komponendiks: $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ (vt. joon. 2.13, kus $\mathbf{P}_{\nu n} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$, $\mathbf{P}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$ ja $\mathbf{P}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$).

2.7. Pingvektor, tema projektioonid ja märgiregolid

Kui lõike pind on paralleelne koordinaattasanditega, siis kasutatakse indeksi ν asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks x .



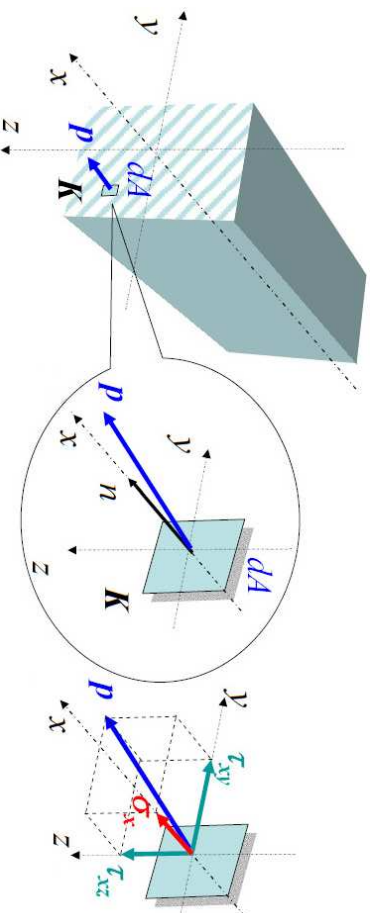
Märgiregolid: joonis 2.14.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

2.8 Pinged varda ristlõike punktis.

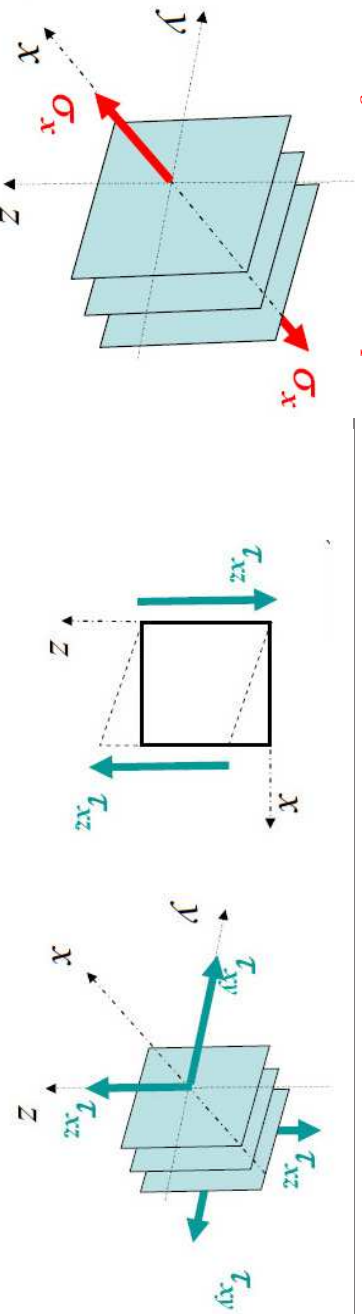
Varda korral on Descartes'i ristkoordinaadid valitud tavaliselt nii, et x -telg on varda teljeks. Seetõttu on x -telg ristlõike normaaliks ja teised 2 koordinaattelge on suunatud mööda lõikepinda. Vaatleme varda ristlõike punkti K , mida lähib pind normaali $\mathbf{n} \parallel x$. Seal mõjub pingektor \mathbf{p} mille normaal komponendiks on σ_x ning tangentsiaal komponentideks τ_{xy} ja τ_{xz} .



Joonis 2.15: Pinge varda punktis
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

⁶Siin oleme lühiduse pärast loobunud indeksist \mathbf{n} pingektori juures.

2.8. Pinged varda ristloike punktis.



Joonis 2.16: Normaalpinge σ_x ning nihkepinged τ_{xy} ja τ_{xz} .
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

- Normaalpinged σ_x iseloomustavad varda telje sihis mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad muudavad varda ristloigete vahelist kaugust.
- Normaalpinge σ_x märgireegel on analoogiline pikijõu märgireeglga.
- Nihkepinged iseloomustavad varda teljega risti mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad nihutavad (või pööravad) erinevaid varda lõikeid (materjali-kihte) üksteise suhtes.
- Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge τ_{xy} ja τ_{xz} märgireegel on analoogiline põikjõu märgireeglga.

2.9 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Pinge mõiste selgitamisega tegime algust alajaotuses 2.6, käesolevas alajaotuses tuletame seosed varda ristlõikes mõjuvate sisejõudude ja pingete vahel. Siinjuures peame silmas, et ristlõikes mõjuvad sisejõud ei kujuta endast mitte midagi muud kui samas ristlõikes mõjuvate pingete peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedele. Pikemalt seletades:

1. ristlõikes mõjuvad pinged moodustavad jõuvälja, mille saab vastavalt staatika põhiteoreemile taandada ristlõike pinnakeskmesse,
 - selle tulemusena on pinged asendatud tihhe jõu ja tihhe momendiga;
2. projekteerides saadud jõu ja momendi koordinaattelgedele saame peavektori ja peamomendi lahutada kolmeks koordinaattelgede sihiliseks komponendiks,
 - saadud kuus komponenti kannavad meile juba tuntud nimetusi – pikijõud (N), põikjõud (Q_y ja Q_z), väändemoment (T) ning paindemoment (M_y ja M_z).

2.9. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

2 - 40

On selge, et rääkides seostest pingete ja varda sisejõudude vahel on võimalikud nn. kaks erinevat tõesande püstitust:

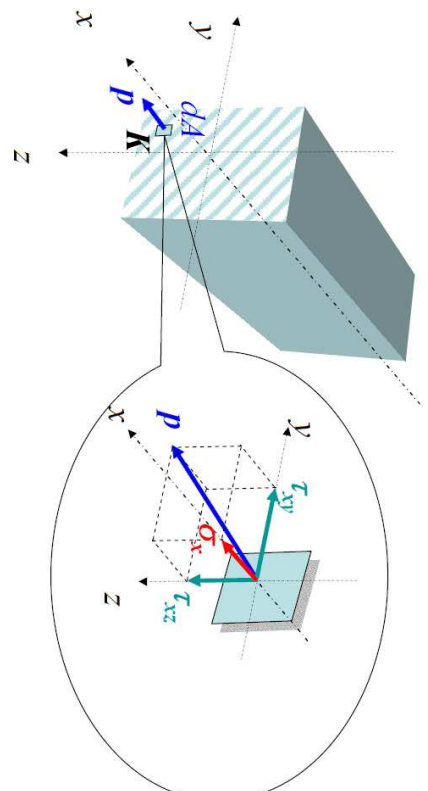
1. Teades pingeid, leida sisejõud.
2. Teades sisejõudusid, leida pinged.

Esimene neist on tunduvalt lihtsam, kuid teine suurema praktilise tähtsusega (vähemalt tugevusõpetuse seisukohalt).

2.9.1 Sisejõudude avaldamine pingete kaudu

Pikijõud. Vaatleme ristlõike elementaarpinda dA , kus mõjub keskmine pinge \mathbf{p} , millele vastav normaalpinge on σ_x (joon. 2.17). Vaadeldaval elementaarpinnal pingest σ_x põhjustatud summaarne jõud $\sigma_x dA$ mõjub samuti pinnanormaali \mathbf{n} sihis. Ristlõikes mõjuvate normaalpingete peavektori saame integreerides:

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.5)$$

Joonis 2.17: Pinged varda ristlõike elementaarpinnal dA .(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

Põikjõud. Ristlõikes mõjuvate põikjõudude Q_y ja Q_z arvutamine käib analoogiliselt pikijõuga. Nüüd vaadeldakse ristlõike elementaarpinnal dA mõjuvaid nihkepungeid τ_{xy} ja τ_{xz} (pingevektori \mathbf{p} projektsioon y - ja z -telgedel, vt. joon. 2.17) ja saadakse põikjõudude leidmiseks valemid

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.6)$$

2.9. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Paindemomendid M_y ja M_z on seotud normaalpingega σ_x . Kui paine toimub $x-z$ tasandis, siis iseloomustab painet paindemoment M_y ning kui $x-y$ tasandis, siis M_z . Eksperimentide põhjal on leitud, et momendid M_y ja M_z tuleb arvutada ristlõike keskelgede⁷ suhtes. Vastavalt paindemomendi määrgireeglile põhjustab elementaarpinnal dA mõjuv summaarne jõud $\sigma_x dA$ elementaarpaindemomendid $z\sigma_x dA$ ja $y\sigma_x dA$ vastavalt y - ja x -telje suhtes (vt. joon. 2.17). Vastavad peamomendid saadakse integreerimise teel:

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \quad \text{ja} \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA. \quad (2.7)$$

Väändemoment. Ristlõikes mõjuva väändemomendi arvutamise juures tuleb silmas pidada, et vastavalt sisejõudude ja pingete määrgireeglitele põhjustab elementaarpinnal dA mõjuv positiivne nihkepunge τ_{xz} positiivse väändemomendi ja positiivne nihkepunge τ_{xy} negatiivse väändemomendi (vt. joon. 2.17). Integreerides üle kogu ristlõike, saame

$$T = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA. \quad (2.8)$$

⁷Ristlõike keskelgedel läbivad ristlõike pinnakeset.

2.9.2 Pingete avaldamine sisejõudude kaudu

Elmises alajaotuses (st. 2.9.1) tuletatud valemite korral pole tähtis, kas kasutusel on tugevusõpetuse (ehk nn. elementaartheoria) eeldused ja hüpoteesid või lineaarse elastsusteooria omad. Käesolevas alajaotuses osutub aga ülitähtsaks täpsustada, et praegust rakendamise tugevusõpetusele ehk nn. elementaartheooriale vastavaid lihtsustusi. Universaalsena⁸ kuulub nende hulka *ristlõigete tasandilisuse hüpotees*, ehk *Bernoulli hüpotees*: ristlõiked, mis enne deformatsiooni olid tasapinnalised, jäävad ka peale deformatsiooni tasapinnalisteks.

Pikkepinged. Pingeid, mis on põhjustatud pikijõust, nimetatakse *pikkepingeteks*. Siin eeldatakse, et

- vardale mõjub vaid piki tema telge mõjuv väliskoorumus,
 - seega mõjub varda ristlõigetel vaid üks sisejõud — pikijõud,
- pikijõust põhjustatud normaalpinge on jaotunud ühtlaselt üle kogu ristlõike (vrd. Bernoulli hüpotees ja vt. joon. 2.18).

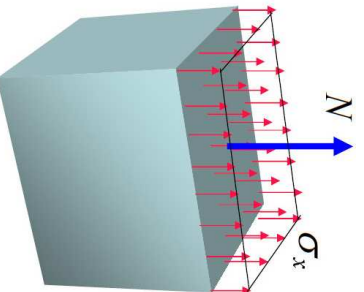
⁸See hüpotees kehtib elementaartheoria raames tõmbel-survel, paindel, lõikel ja väändel.

2.9. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

2 - 44

Seega saame seose

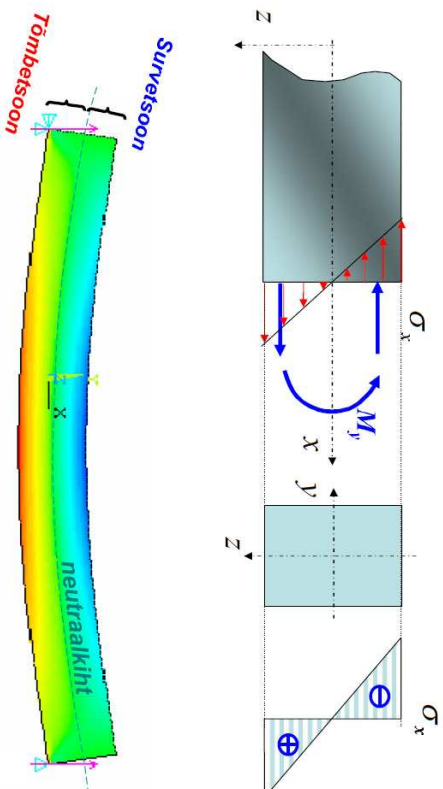
$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.9)$$



Joonis 2.18: Pikijõud ja pikkepinged
(Joonis on pärit prof. A. Klansoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)

Paindepinge. Paindemomendist põhjustatud pingeid nimetatakse *paindepingeteks*. Oma olemuselt on paindepinged normaalpinged. Mõjugu talale selline väliskoorumus, mille toimel tekib vaid üks sisejõud – paindemoment M_y (joon. 2.19). Eksperimentaalsete ja teoreetiliste tulemuste põhjal ning kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga eeldatakse elementaartheorias, et tekkinud paindepinge sõltub koordinaadist z lineaarselt, st,

$$\sigma_x = k_z, \quad (2.10)$$



Joonis 2.19: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

kus k on konstant, mille määramiseks kasutame seoseid (2.7):

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA = \int_A k z^2 dA = k I_y, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_y}{I_y}. \quad (2.11)$$

Avaldiste (2.10) ja (2.11) põhjal

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.12)$$

2.9. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

2 - 46

Tugevusarvutuste seisukohalt omavad tähtsust just maksimaalsed paindepinged, mis tekivad neis ristlõike punktides, kus koordinaat z omab ekstreemalseid väärtusi (z_{\max} ja z_{\min}). Kui ristlõige on sümmeetriline y -telje suhtes, siis on $z_{\max} = -z_{\min}$ ja arvutuste lihtsustamiseks võib tuua sisse *ristlõike tugevusmõmendi*

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (2.13)$$

Viimase abil saame maksimaalse paindepinge arvutamiseks valem

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}. \quad (2.14)$$

Kui talale mõjuva väliskoormuse toimel tekib vaid paindemoment M_z , siis saame eelnevatega analoogilised valemid

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} z, \quad (2.15)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad \max \sigma_x = \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.16)$$

Märkused:

- Tugevusmomentide W_y ja W_z arvutamise juures tuleb silmas pidada, et kui ristlõikeks on liitkujund, st. ta on jaotatav n lihtsaks osakujundiks, siis tuleb kõigepealt leida liitkujundi inertsimomendid $I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)}$ ja/või $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)}$. Seejärel arvutatakse tugevusmomentid W_y ja W_z valemite (2.13) ja (2.16)₁ põhjal⁹.
- Kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga on paindepingete arvutamise juures eeldatud, et paindemomentid M_z põhjustatud paindepinged on z järgi konstantsed ja M_y põhjustatud paindepinged on y järgi konstantsed, vt. valemid (2.12) ja (2.15). Viimaste valemitega esitatud lineaarsed seosed on samuti kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga.
- Varda paindel jääb surrutud ja tõmmatud kihtide vahele kiht, milles nn. kiindude pikkus ei muutu ja kus paindepinge on null (vt. joon. 2.19). Vastavat varda kihti nimetatakse *neutraalkihiks*. Neutraalkihi ja ristlõike lõikejoont nimetatakse *nulljooneks*.

⁹NB! $W_y \neq W_y^{(1)} + W_y^{(2)} + \dots + W_y^{(n)}$ ja $W_z \neq W_z^{(1)} + W_z^{(2)} + \dots + W_z^{(n)}$

*2.9. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel**2 - 48*

- On selge, et $x - z$ tasapinnas toimuva painde korral on $z = 0$ korral paindepinge $\sigma_x = 0$.
- Elementaariteooria korral eeldatakse, et nulljooned on määratud kesk-peatelagega.

Näide 2-10. Pikkepinged vardas. Lahendatakse loengus.

Näide 2-11. Paindepinged talas. Lahendatakse loengus.

Väände- ja lõikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändemomentidist ja lõikepinge põikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomentidist põhjustatud normaalpingete leidmine, siis pühendame neile omaette jaotise.

2.10 Nihkepinged varda ristlõikes¹⁰

2.10.1 Üldised seaduspärasused

Nihkepingete paarsuse seadus.

Elementaar-teoorias kasutatakse m. nihkepingete paarsuse seadust, mis tuletatakse järjensel¹¹. Eeldame, et vardas on homogeenne pingeseisund ehk homogeenne pingus¹². Sellisel juhul peavad elementaaristtahuka vastastahkudel mõjuma võrdvastupidised pinged. See tingimus kehtib nii normaal- kui nihkepingete kohta ning ta on tuletatud tasakaalutingimustest $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$ ja $\sum F_{iz} = 0$ (vt. joon. 2.20 a) ja b)). Teatavasti on aga tasakaaluks vajalik veel kolme võrrandi kehtimine, st. $\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0$, $\sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0$ ja $\sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$. Nende põhjal saadaksegi nihkepingete paarsuse seadus (vt. joon. 2.20 c)):

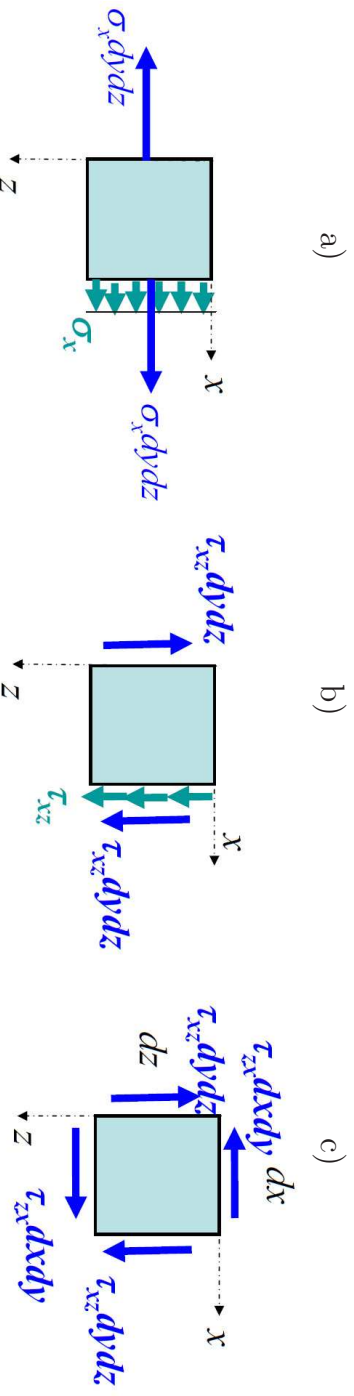
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.17)$$

¹⁰Joonised on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.

¹¹Hiljem esitame sama seaduspärasuse jaoks rangema tuletuskäigu.

¹²Pinguse ehk pingeseisundi all mõistetakse keha punkti lähivatel kõlvõimalikel pindadel mõjuvate pingete hulka. Pinguse mõiste juurde tuleme hiljem tagasi.

Homogeenne pinguse korral on keha kõigis punktides ühesugune pingus.

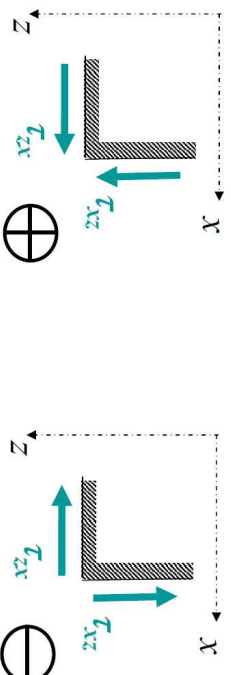


Joonis 2.20: Elementaaristtahuka tahkudel mõjuvad pinged.

Näiteks,

$$\sum M_y(\mathbf{F}_i) = -(\tau_{xz} dy dz) dx + (\tau_{zx} dx dy) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.18)$$

Avaldiste (2.17) põhjal on selge ka see, et kui mingis keha punktis on nihkepinge $\tau_{xy} > 0$, siis ka $\tau_{yx} > 0$ ja vastupidi (vt. joonis 2.21). Analoogilised seosed kehtivad ka ülejäänud kahe nihkepingete paari jaoks.



Joonis 2.21: Nihkepingete paarsus.

Nihkepinged ristlõike serval

- Ristlõike serval mõjub nihkepinge puutuja sihis.
- Kuna ristlõike nurgapunktis on lõpmata palju puutuujaid, siis seal on nihkepinge null.

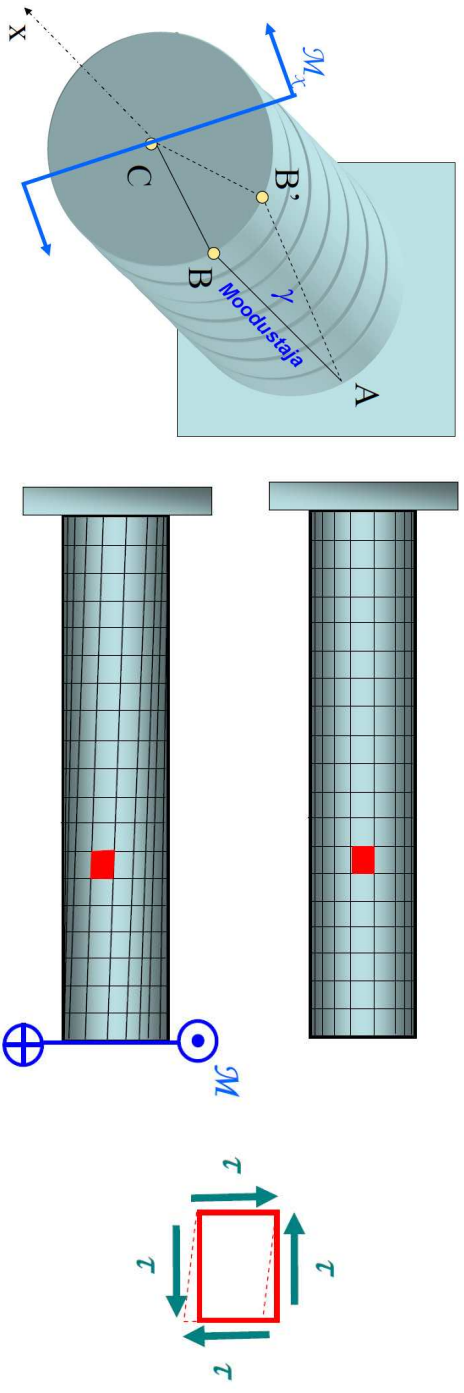
2.10. Nihkepinged varda ristlõikes

2.10.2 Väändepinged ümarvarda ristlõikes

Olgu ümarvarda otstesse rakendatud momendid T ja T' (joonis 2.22). Selle tulemusena tekkitab vardas deformatsioon, mida nimetatakse *väändeks*. Väändel tekkivate pingete ja teformatsioonide uurimisel on elementaarteoorias kasutusel järgmised eeldused:

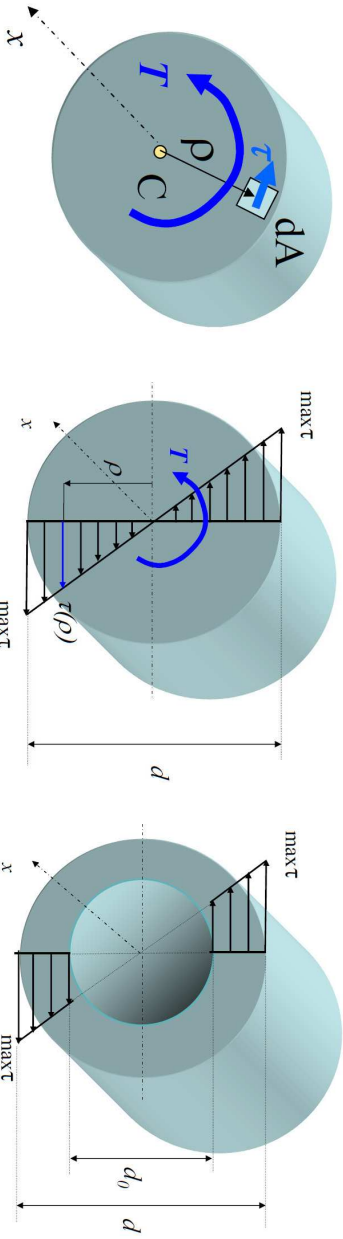
- Kehitib Bernoulli hüpotees.
- Varda telg jääb sirgjooneliseks.
- Ristlõike raadiused jäävad sirgjooneliseks.





Joonis 2.23: Väändedeformatsioon.

Tehitud eelduste põhjal pöörduvad ristlõiked väändel ümber varda telje. Selle tulemusena pöörduvad varda moodustajad nurga γ võrra. Seega on väändedeformatsioon oma olemuselt nihkedeformatsioon ja algsed ristkülikulised pinnalemmendid muutuvad rööpkülikulisteks. Nurka γ nimetatakse *väändenurgaks*, ta on üks oluline väänet iseloomustav suurus ja tema juurde tuleme hiljem tagasi.



Joonis 2.24: Väändepinged ümarvardas ja paksuseinalises torrus.

Tehitud eeldustest ja Hooke'i seadusest (pingete ja deformatsioonide vahel on lineaarne sõltuvus) lähtudes peab väändepinge olema lineaarfunktsioon varda raadiuselt ρ , s.t. $\tau = k\rho$ (joon. 2.24). Konstandi k määrame väändemomendi ja väändepinge vahelisest seosest kasutades polaarinertsimomenti I_ρ :

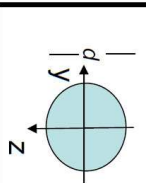
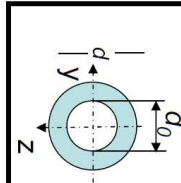
$$T = \int_A \rho \tau dA = k \int_A \rho^2 dA = k I_\rho \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T}{I_\rho}. \quad (2.19)$$

Nüüd saame väändepinge jaoks valemi

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_\rho} 2. \quad (2.20)$$

Valemid (2.20) kehtivad ka rõngasristlõike korral (vt. joon. 2.24).

Väändepingete arvutamise valem on paljuski analoogiline paindepingete arvutamise valemiga: maksimaalsed pinged on ristlõike servas. Seega on ka siin võimalik sisse tuua ristlõike tugevusmoment – antud juhul nimetatakse seda polaar-tugevusmomentiks – mille abil saab määrata maksimaalseid väändepingeid:

Ristlõige	I_p	W_p
	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$ $c = \frac{d_0}{d}$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4)$

Joonis 2.25: Polaarimertsimendid ja polaar-tugevusmoment

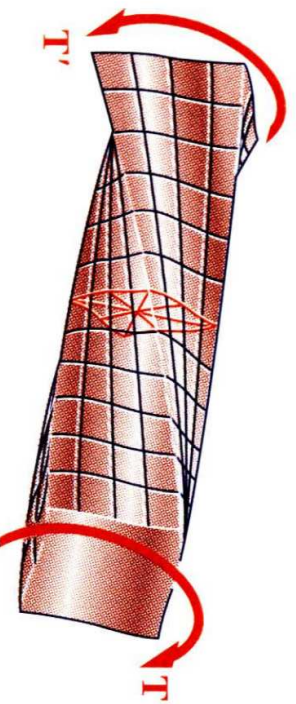
$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{2I_p}{d} \Rightarrow T_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (2.21)$$

Näide 2-12. Väändepinged ümar- ja rõngasristlõikes. Lahendatakse loengus.

2.10. Niikepinged varda ristlõikes

2.10.3 Väändepinged mitteümaristlõigetes

Ümar- ja rõngasristlõigete korral on väändepingete arvutamise suhteliselt lihtne, kuid muude ristlõigete, st. mitteümaristlõigete, korral on see tunduvalt komplikseeritum. Bernoulli hüpotees tavaliste ristlõigete korral tavaliselt enam ei kehti (joon. 2.26). Selliseid väändevälendeid käsitletakse lineaarses elastsusteoorias. Elementaar-teooria (tugevusõpetuse) kursustes refereritakse vaid lineaarse elastsusteooria raames saadud tulemusi, piirdudes tavaliselt maksimaalsete väändepingete valemitega kujul



allikas: www.clarkson.edu/class/cs22201/3_torsion.ppt

Joonis 2.26: Ristkülikvarda vääne.

lineaarses elastsusteoorias. Elementaar-teooria (tugevusõpetuse) kursustes refereritakse vaid lineaarse elastsusteooria raames saadud tulemusi, piirdudes tavaliselt maksimaalsete väändepingete valemitega kujul

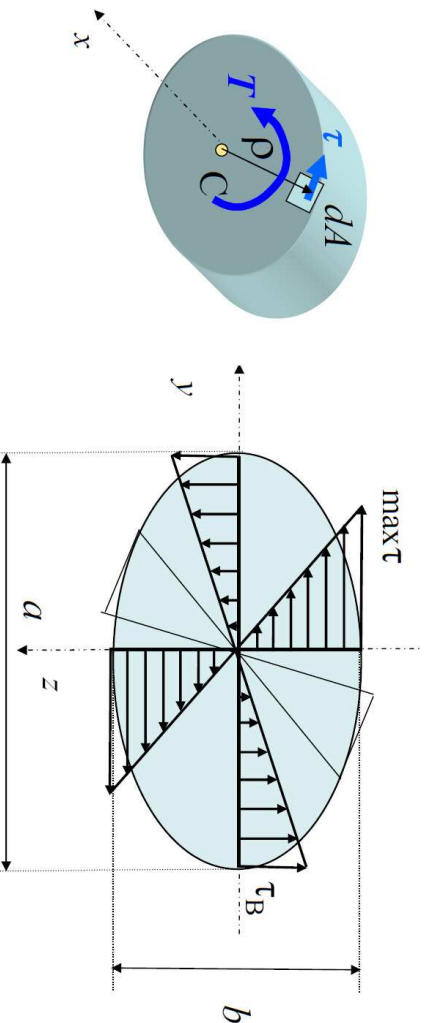
$$T_{\max} = \frac{T}{W_t}, \quad (2.22)$$

kus W_t on ristlõike tugevusmoment.

Elliptiline varras

Elliptilise ristlõikega vardas arvutatakse pingeid pooltelgede otstes järgmiste valemitega (joon. 2.27):

$$W_t = \frac{\pi ab^2}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi ab^2}, \quad \tau_B = \frac{16T}{\pi a^2 b}. \quad (2.23)$$



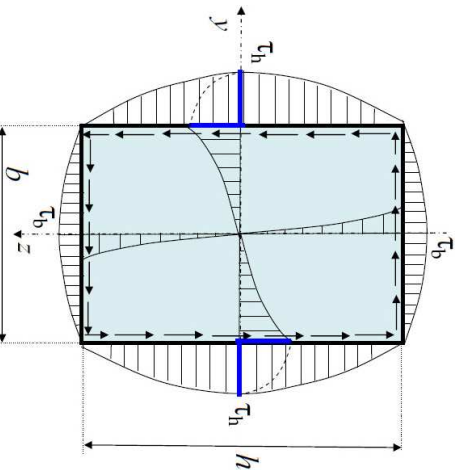
Joonis 2.27: Elliptilise ristlõikega varda vääne.

2.10. Niikepinged varda ristlõikes

Ristkülikuline varras

Ristkülikulise ristlõikega vardas on väändepinged piki servi jaotunud paraboliselt ja omavad maksimaalseid väärtusi servade keskpunktides. Ristlõike nurkades on väändepinged nullid (joon. 2.28). Iseloomulikud pinged leitakse valemitega

$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h hb^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.24)$$

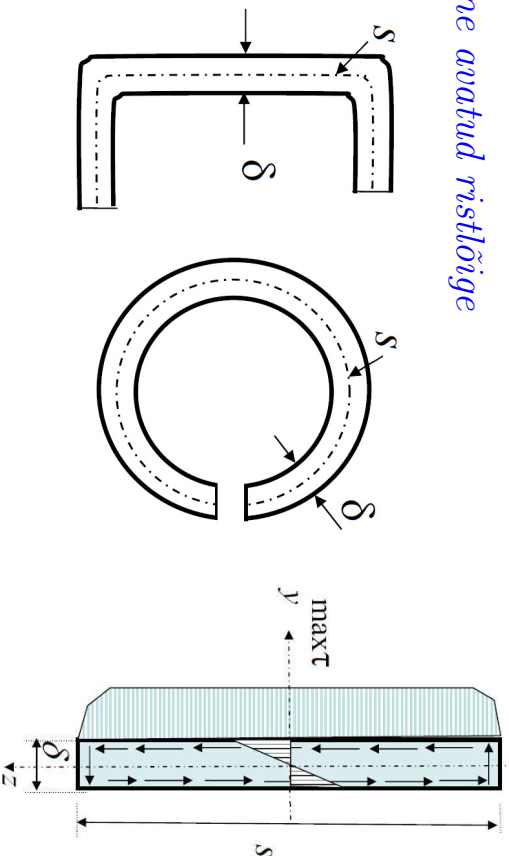


Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vardas.

h/b	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
k_h	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
k_b	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

Näide 2-13. Väändepinged ristkülikulises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

Õhukeseseinaline avatud ristlõige



Joonis 2.29: Väändepinged õhukeseseinalises avatud ristlõikes.

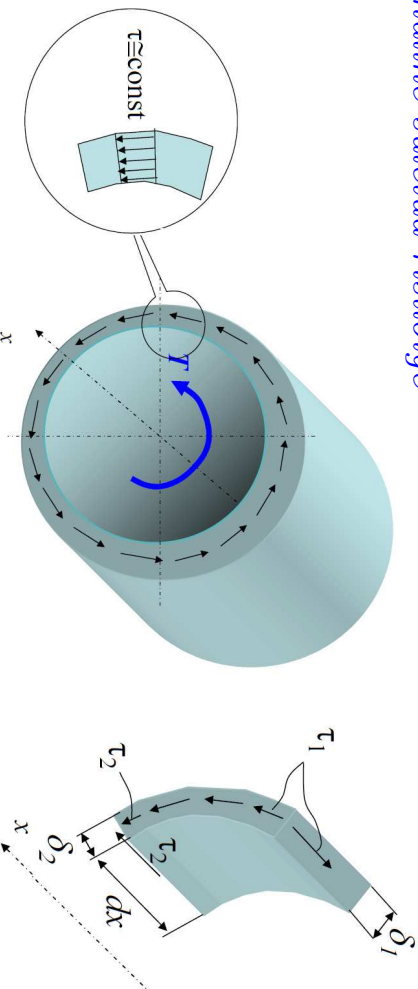
Väga mitmed konstruktsioonielemendid on valmistatud metall-lehtedest, mille ristlõike paksus δ on väike võrreldes kõrgusega s (joon. 2.29). Vastavalt tabelile joonisel 2.28 on sellise ristlõike korral $k_h = 0.333 = 1/3$ ja ristlõike tugevusmoment ja maksimaalne väändepinge

$$W_t = \frac{s\delta^2}{3}, \quad \tau_{\max} = \frac{3T}{s\delta^2}. \quad (2.25)$$

Valemid (2.25) kehtivad ka metall-lehest tehtud avatud ristlõikega varraste jaoks.

2.10. Niikepinged varda ristlõikes

Õhukeseseinaline suletud ristlõige



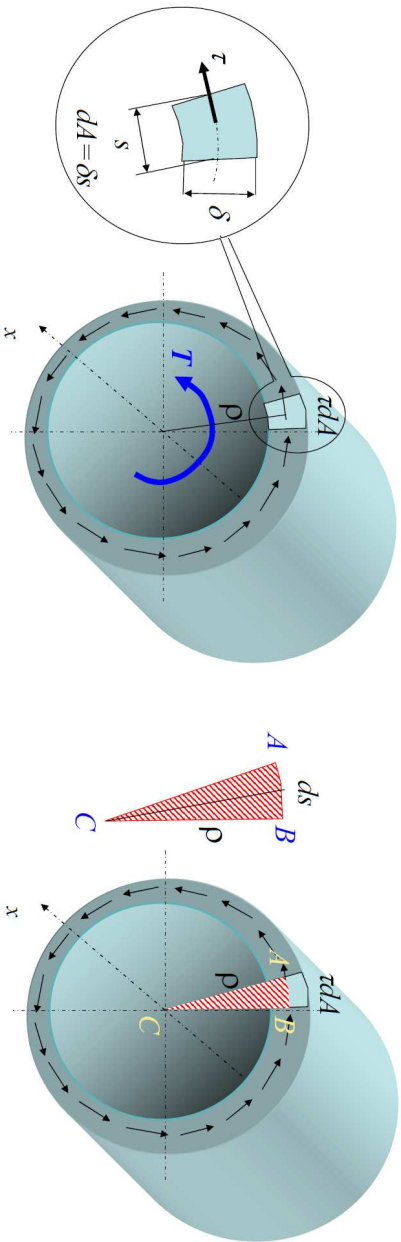
Joonis 2.30: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

Vaatleme muutuva seinapaksusega suletud ristlõiget (joon. 2.30). Kuna seinapaksus on väike, siis loeme pinge seina paksuse järgi konstantseks. Samas on lihtne näidata, et paksemas osas on pinge väiksem ja õhemas osas suurem. Projekteerime joonise 2.30 vasakpoolisel osal kujutatud jõud x -teljele:

$$\sum F_{ix} = -\tau_1 \delta_1 dx + \tau_2 \delta_2 dx = 0. \quad (2.26)$$

kust saamegi, et

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 \quad \text{ehk} \quad \tau \delta = \text{const}. \quad (2.27)$$



Joonis 2.31: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

Järgnevalt tuleb leida maksimaalne väändepinge arvutamiseks. Alustame nagu tavaliselt väändemomendi ja väändepingete vahelisest seosest¹³ (joon. 2.31):

$$T = \int_A \rho \tau dA = \oint \rho \tau \delta ds. \quad (2.28)$$

Kuna $\tau \delta = \text{const}$ ja $\rho ds = 2d\omega$ on kolmnurga ABC kahekordne pindala, siis

$$T = \tau \delta \oint \rho ds = 2\tau \delta \oint d\omega = 2\tau \delta \omega, \quad (2.29)$$

¹³Vasakpoolisel joonisel on ds asemel s

2.10. Niikepinged varda ristlõikes

kus ω on ristlõike keskjoonega piiratud kujuundi (antud juhul ringi) pindala (vt. joon. 2.32).

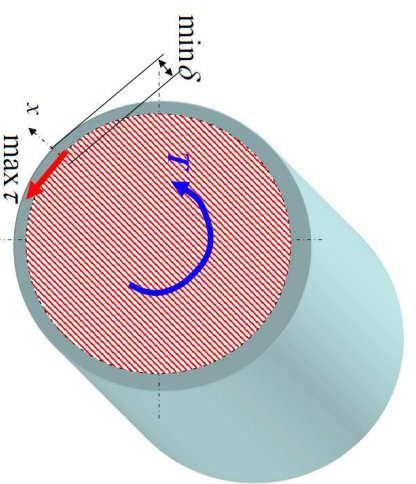
Kuna $\tau \delta = \text{const}$, siis vastab maksimaalsele väändepingele minimaalne seinapaksus ning tuues sisse õhukeseseinalises suletud ristlõike tugevusemomendi väändel

$$W_t = 2\omega \delta_{min} \quad (2.30)$$

saame maksimaalse väändepinge leidmiseks valemid

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{2\omega \delta_{min}}. \quad (2.31)$$

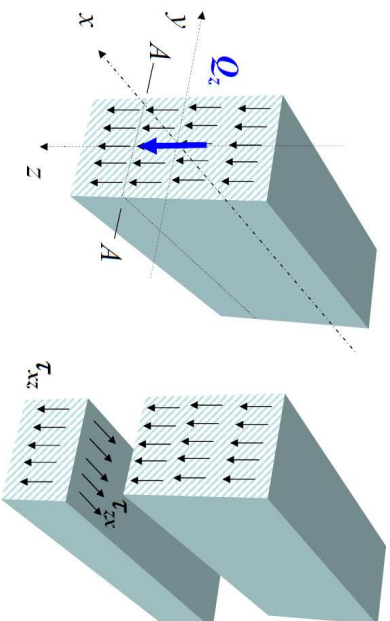
Joonis 2.32: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.



Näide 2-14. Väändepinged avatud ja suletud õhukeseseinalises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

2.10.4 Lõikepinge

Vaatleme tala, kus mõjub põikjõud Q_z (joon. 2.33). Teatavasti on põikjõud Q_z lõikepingete τ_{xz} peavektoriiks. Põikjõud Q_z esineb alati koos paindemomendiga M_y ja seega mõjuvad vadeldavalt ristlõikel ka normaalpinged σ_x , mida sel joonisel ei ole kujutatud. Lisaks eeldame, et tala on koormatud nii tema pealmine ja alumine pind on nihkepingest vabad.



Joonis 2.33: Põikjõud ja lõikepinged (1)

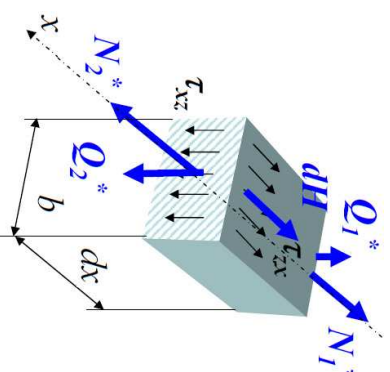
Põikjõust põhjustatud pingete ristlõikes jaotumise seaduspärasuste selgitamiseks teeme talas täiendava lõike ja vaatleme parempoolsel joonisel 2.33 kujutatud alumise osa tasakaalu. Nihkepingete paarsuse seaduse põhjal mõjuvad vadeldava vardaosa pealmisel pinnal nihkepinged τ_{zx} .

2.10. Nihkepinged varda ristlõikes

Eraldame nüüd tala alumisest osast väikese risttahuka pikku-sega dx , lausega b ja "muutuva" kõrgusega $h/2 - z$. Risttahuha ots-tahkudel mõjuvad pikijõud $N_1^* \neq N_2^*$ ja põikjõud $Q_1^* \neq Q_2^*$; Pealmisel tahul mõjub pingete τ_{zx} peavektor dH . Eeldades, et $N_2^* > N_1^*$ saame tasakaalutingimusest $\sum F_{ix} = 0$ avaldada

$$dH = N_2^* - N_1^* \tag{2.32}$$

Joonis 2.34: Põikjõud ja lõikepinged (2)

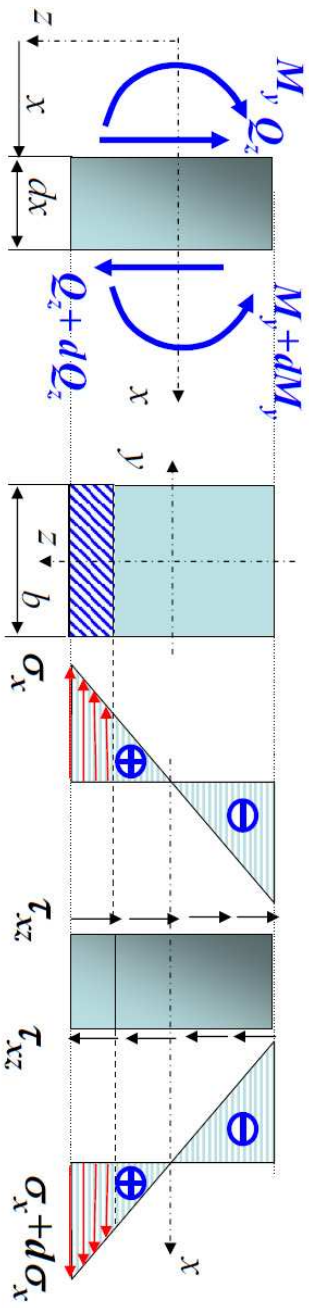


Edaspidises rakendame Žuravski¹⁴ hüpoteesi, mille kohaselt on lõikepinged talas jaotunud ühtlaselt y -koordinaadi järgi. Seega saame valemi

$$\tau_{zx} = \frac{dH}{b dx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx} \tag{2.33}$$

Nüüd on õige aeg sisse tuua ka põikjõuga Q_z koos käiv paindemoment M_y (joon. 2.35).

¹⁴Ingliseelses kirjanduses Jourawski.



Joonis 2.35: Põikjõud ja lõikepinged (3)

Tähistame vaadeldava risttahuka (joon. 2.34) pindala A^* . Joonisel 2.35 on see pind viirutatud. Nüüd saame esitada risttahuka otspindadel mõjuvad pikijõud paindemomendi kaudu:

$$\begin{aligned}
 N_1^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y}{I_y} S_y^*, \\
 N_2^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} S_y^*,
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

kus S_y^* on viirutatud pinna staatliline moment y -telje suhtes.

2.10. Niikepinged varda ristlõikes

Arvestades lõikepingete paarsuse seadust ja valemeid (2.33) ning (2.34) saame

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y^*}{I_y b}.
 \tag{2.35}$$

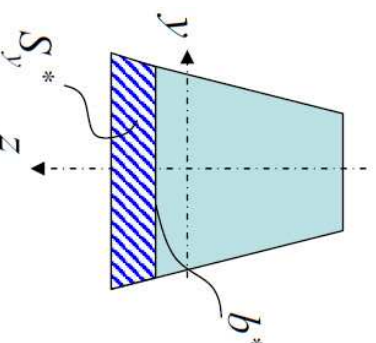
Rakendades diferentsiaalseteid olemekokkuvõttes saanud valenni, mis on rakendatav meelevaldse kujuga ristlõike jaoks:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}.
 \tag{2.36}$$

Siin Q_z on vaadeldavas ristlõikes mõjuv põikjõud, b^* on viirutatud pinna "ülemine joommõõde" (joon. 2.36), S_y^* viirutatud pinna staatliline moment

Joonis 2.36: Põikjõud ja lõikepinged (4)

y -telje suhtes ja I_y ristlõike peainertsimoment. Järgnevalt vaatleme lõikepingete leidmist mõnes mõnes spetsiifilise kujuga ristlõikes.



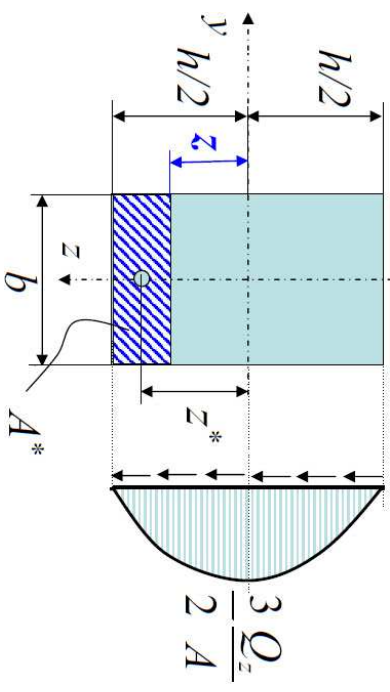
Ristkülik

Kasutame valemit (2.36) ja leiame seal kasutatavad geomeetrised suurused ristküliku korral:

$$I_y = \frac{bh^3}{12},$$

$$S_y^* = z^* A^* = \dots = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*} = \dots = \frac{6Q_z}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$



Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

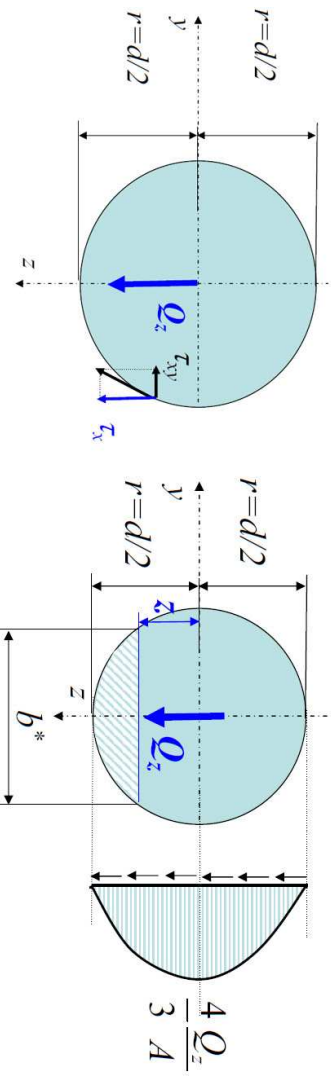
Arvestades, et ristküliku pindala $A = bh$, saame lõpuks valemid

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A}. \quad (2.37)$$

Seega on tegu ruutparabooliga ja $\tau_{xz} = 0$ kui $z = \pm 0, 5h$ ning mille maksimum on kohal $z = 0$.

2.10. Nihkepinged varda ristlõikes

Ring



Joonis 2.38: Lõikepinged ümarristlõikes

Kuna ristlõike serval on nihkepinged puutuja sihilised, siis lahutame selle kaheks komponendiks ja tuletame valemid lõikepinge τ_{xz} leidmiseks. Kasutame jällegi valemite (2.36) ja leiame vajalikud geomeetrised suurused ringi korral:

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad b^* = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad S_y^* = \frac{3}{2} (r^2 - z^2)^{3/2}.$$

Kokku saame jällegi ruutparabooli, mille maksimum on kohal $z = 0$ ja mis on null kui $z = \pm r$:

$$\tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A}. \quad (2.38)$$

Märkus: Alajaotusele 2.10.4 tuleb järg, kus käsitletakse lõikepingeid veel mitmes erikujulises ristlõikes.

2.11 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja kuus nihkepinget $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{zx}$ moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada 3×3 (tasandilisesannete korral 2×2) tabelina nagu matrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingvektori suvalisel seda punkti läbival pinnal¹⁵.

¹⁵Selle juurde tuleme tagasi pisut hiljem, kui hakkame käsitlema pingeid kaldpindadel, peapingeid jms.

2.11.1 Skalaar, vektor, tensor

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tensoreid.

Skalaar pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus.

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

Vektorit iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund.

- 3D juhul esitatav arvukolmikuna — 3×1 või 1×3 matriksina.
 - Arvud arvukolmikus sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
 - Vektori moodul ja suund on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Vektori iga komponent (projektsioon) on samuti seotud tihhe suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihthe indekseid.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.

Teist järku tensor on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

- 3D juhul on teist järku tensor esitatav 3×3 matriksina, st. 9 arvu abil.
 - Arvud matriksis sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
 - Tensor ise on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- Teist järku tensori komponentide tähistamisel kasutatakse kahte indeksit, sest iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda.
 - Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.

2.11. Pingetensor

2 - 72

- Teisest küljest (“matemaatiliselt”) on teist järku tensor \mathbf{T} defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori \mathbf{u} vektoriks \mathbf{v} , i.e.

$$\mathbf{T} : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

kus punkt \cdot tähistab tensori \mathbf{T} sisekorrutist¹⁶ vektoriga \mathbf{u} .

Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada 3×3 maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga 3×3 maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.
 - Pärast koordinaat teisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.

* Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.

¹⁶Punktikorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product*, *dot product*, *scalar product*.

- * Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
- * Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi xy ja $x'y'$, mille vaheline nurk on θ .

Märkused:

- Vektoreid võib nimetada esimest järku tenseeriks ja skalaare nullindat järku tenseeriks.
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga).
 - Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

2.11. Pingetensor

2 - 74

2.11.2 Pingetensori invariantid

Suuruseid

$$\begin{cases}
 I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\
 I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\
 I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix},
 \end{cases}
 \quad (2.40)$$

nimetatakse *pingetensori invariantideks* ehk lühidalt *pinge invariantideks*. Invariantis tähendab siin seda, et need kolm suurust ei sõltu koordinaatide valikust (vaatamata sellele, et pingetensori komponendid omavad erinevates koordinaatsüsteemides tildjuhul erinevaid väärtusi). On märkimisväärne, et see invariantis ei piirdu vaid erinevalt orienteeritud Descartes'i ristkoordinaatidega vaid kehtib suvaliste koordinaatsüsteemide, k.a. silindrilised, sfäärilised, ellptilised, hüperboolsed jne. vahel.

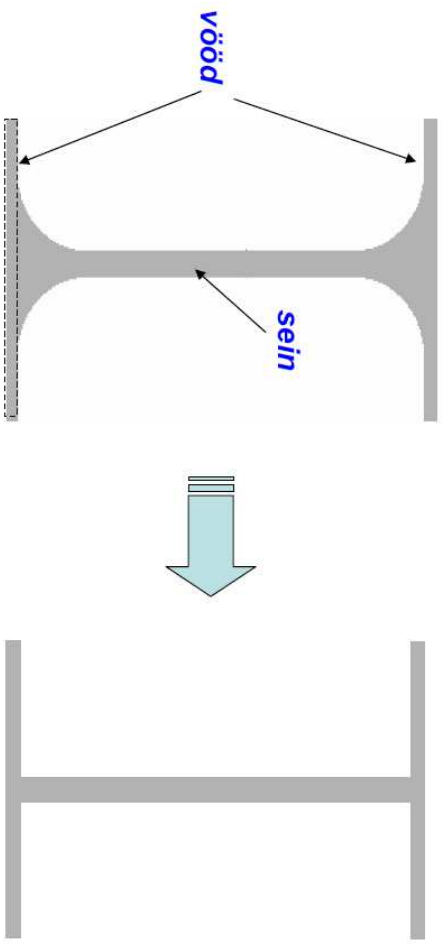
Märkus: Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

2.10 Nihkepinged varda ristlõikes (järg)¹⁷

2.10.4 Lõikepinge (järg)

I-tala.

Vaatleme valtsmetallist profiili, mille ristlõige on I tähe kujuline. Tavaliselt nimetatakse sellist tala I-talaks (joon. 2.39). Eesmärgiks on leida nihkepingete jaotus sellises ristlõikes. Lihtsuse mõttes vaatleme sellist profiili koosnevana ristkülikutest.



Joonis 2.39: I-tala.

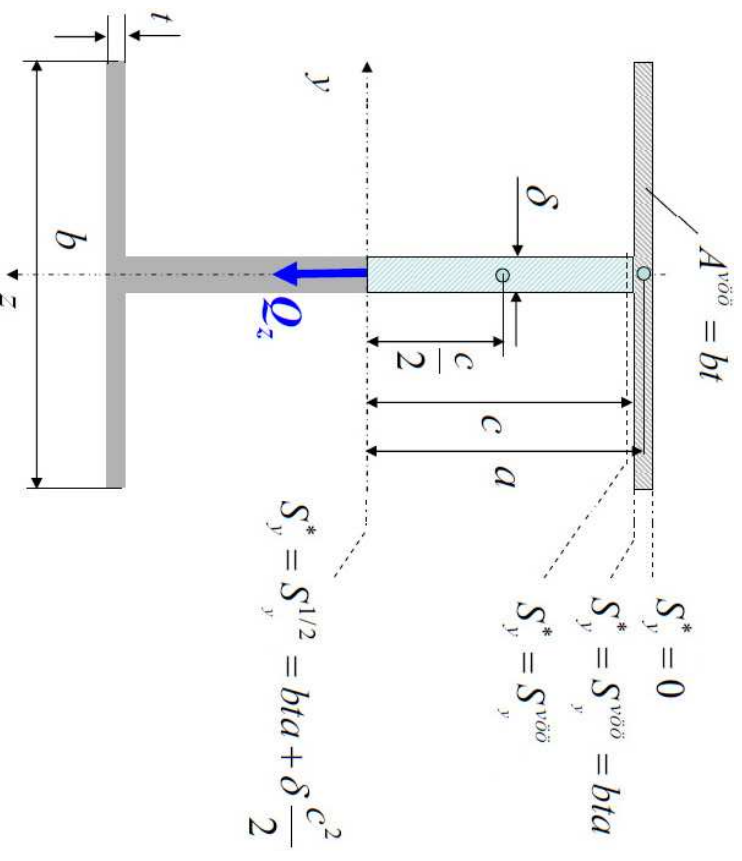
¹⁷Joonised on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.

2.10. Nihkepinged varda ristlõikes (järg)

Lõikepinge arvutamiseks kasutame endiselt valenit (2.36):

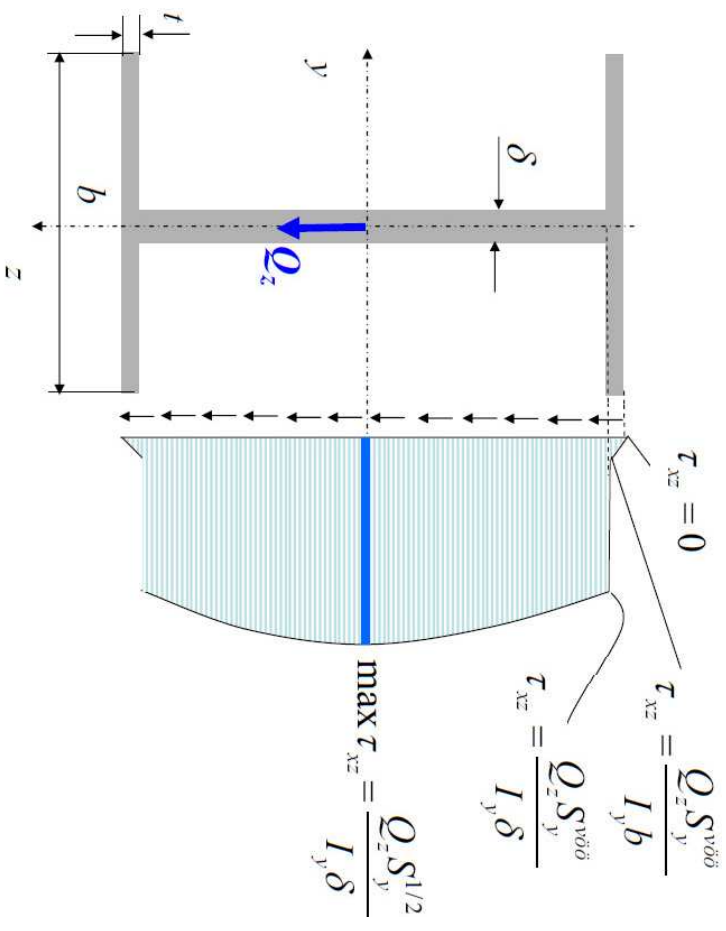
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}.$$

Seega on nihkepingete eüüride koostamiseks teada tervet rida staatilisi momente, mis on esitatud joonisel 2.40



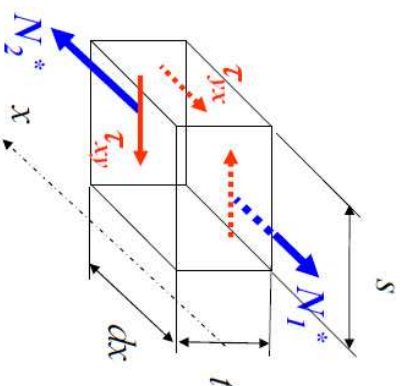
Joonis 2.40: I-tala iseloomulikud staatilised momendid.

Joonisel 2.41 on kujutatud lõikepinge τ_{xz} epiüür I-tala jaoks. Nihkepinge valemite esinevad staatilised momendid tuleb arvutada joonisel 2.40 esitatud valemite abil. Üleminek seinalt vööle on tegelikkuses sujuv (vt. joon 2.39) ja seetõttu ei esine tegelikkuses ka selist järsku hüpet nagu on joonisel 2.41. On selge, et võrreldes seinaga on lõikepingete τ_{xz} väärtused vöös väikesed.



Joonis 2.41: Lõikepinge τ_{xz} epiüür I-tala korral.

2.10. Nihkepinged varda ristlõikes (järg)



Joonis 2.42: Lõikepinge τ_{xy} põhjusel.

Tala vöös esinevad lisaks lõikepingetele τ_{xz} veel lõikepinged τ_{xy} . Üks nende olemasolu põhjendus¹⁸ on esitatud joonisel 2.42. Eldades, et $N_2^* > N_1^*$, tasakaalustab pikijõu juurdekasvu dN nihkepingest τ_{yx} põhjustatud jõud $\tau_{yx} t dx$. Nihkepingete paarsusseaduse põhjal peab nihkepingega τ_{yx} koos eksisteerima nihkepinge τ_{xy} , mille arvutamiseks kasutame valemiga (2.36) analoogilist valemit

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}. \quad (2.41)$$

¹⁸Eksisteerib veel teisigi põhjendusi. Näiteks, et vöös mõjuv pinge τ_{yx} tasakaalustab seinas mõjuvat pinget τ_{xz} .

Joonise 2.43 põhjal saame viimasest valemist

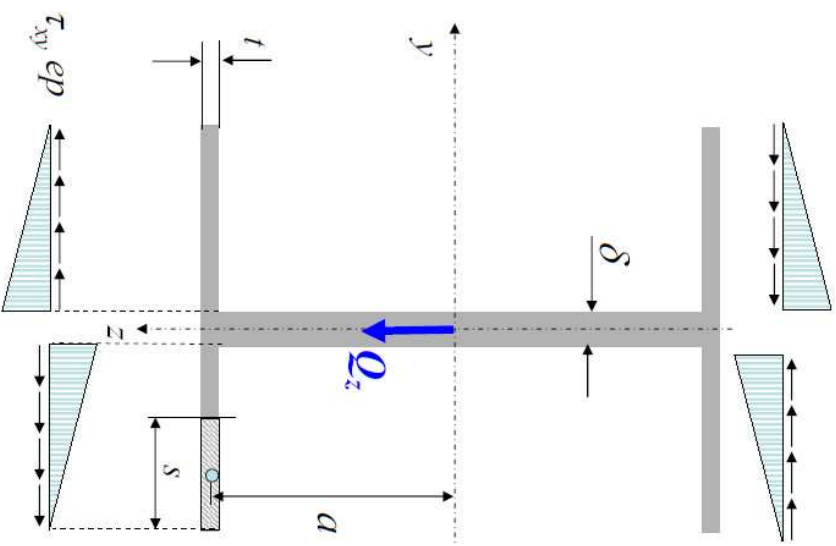
$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t} = \frac{Q_z s a t}{I_y t} = \frac{Q_z s a}{I_y}. \quad (2.42)$$

S_y^* tähistab siin viirutatud pinnastaatilist momenti y -telje suhtes. Arvestades, et tala vöö laius on b ja seinapaksus δ , saame nihkepingete τ_{xy} ekstreemalsed väärtused

$$\max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a (b - \delta)}{2 I_y}. \quad (2.43)$$

On selge, et vöö „sobivate“ mõõtmetekorral võivad nihkepinged τ_{xy} omada märkimisväärsed väärtusi.

Tala vöös mõjuvate nihkepingete summeerimisel saame peavektorid Q_2, Q_2', Q_3, Q_3' (vt. joon. 2.44).



Joonis 2.43: Lõikepinge τ_{xy} epiüür I-tala vöös.

2.10. Nihkepinged varda ristlõikes (järg)

Valemi (2.42) põhjal

$$Q_2 = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^l \frac{Q_z s a}{I_y} t ds \quad (2.44)$$

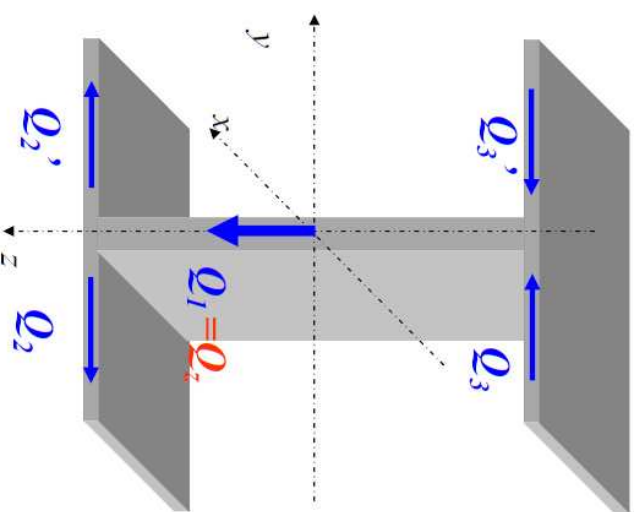
Arvestades, et $a = h/2 - t/2 \approx h/2$ ja $l = b/2 - \delta/2 \approx b/2$ saame

$$Q_2 = \frac{Q_z a t}{I_y} \int_0^l s ds = \frac{Q_z a t l^2}{2 I_y} \approx \frac{Q_z h t b^2}{16 I_y}. \quad (2.45)$$

On selge, et jooniste 2.43 ja

2.44 põhjal vektorid $Q_2 = -Q_2'$,

$Q_3 = -Q_3'$ ja $Q_z = Q_1$ (Q_1 on sisse toodud vöö ja seinavahelise analoogia mõttes).



Joonis 2.44: Põikjõud I-talas.

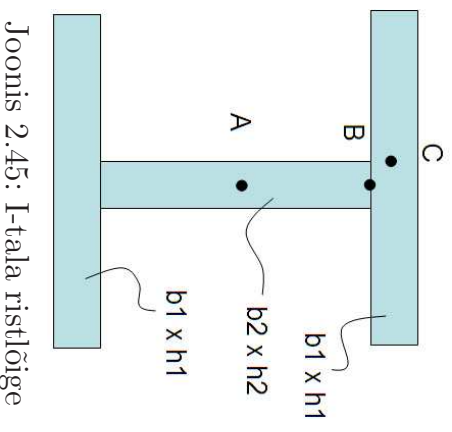
Näide 2-15. Painde- ja lõikepinged I-talas (nn. keevististlõige).

Tala rstlõikes mõjub paindemoment $M = 20 \text{ kNm}$ ja põlkiõud $Q = 100 \text{ kN}$. Koostada paindepinge σ_x ja lõikepingete τ_{xz} ning τ_{xy} epiürid. Ristlõike mõõtmed: $b1 = 8 \text{ cm}$, $h1 = 2 \text{ cm}$, $b2 = 2 \text{ cm}$, $h2 = 10 \text{ cm}$. Kuidas mõjutab mõõtmete suurendamine ja/või vähendamine pingeid?

Lahendus.

Paindepinged arvutatakse valemite (2.13) ja (2.14) põhjal:

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y} \cdot W_y = \frac{I_y}{z_{\max}},$$



Joonis 2.45: I-tala ristlõige

Nihkepingete arvutamiseks kasutame valemeid (2.36) ja (2.43):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}, \quad \max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a(b - \delta)}{2I_y}.$$

$$I_y, \quad W_y, \quad S_y^A, \quad S_y^B$$

Viimaste jaoks on vaja leida mitmed inertsi- ja staatilised momendid

2.10. Niikepinged varda ristlõikes (järg)

Epiüiride joonistamiseks vajalikud arvud on järgnevas tabelis. Epiüiрид joonistatakse ja täiendavaid seletusi antakse loengus.

M	Q	h1	b1	h2	b2	Iy	Wy	Sat	Sbt	sx	taxz	tbxz1	tbxz2	txy
kNm	kN	cm	cm	cm	cm	cm4	cm3	cm3	cm3	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa
20	100	2	6	10	2	1038,7	148,4	97	72	134,79	46,69	34,66	11,55	11,55
20	100	1	6	10	2	530,7	88,4	58	33	226,13	54,65	31,09	10,36	20,73
20	100	3	6	10	2	1714,7	214,3	142	117	93,31	41,41	34,12	11,37	7,58
20	100	2	6	10	1	955,3	136,5	84,5	72	146,55	88,45	75,37	12,56	15,70
20	100	2	6	10	3	1122,0	160,3	110	72	124,78	32,53	21,39	10,70	8,02
20	100	2	5	10	2	893,3	127,6	85	60	156,72	47,57	33,58	13,43	10,07
20	100	2	8	10	2	1329,3	189,9	121	96	105,32	45,51	36,11	9,03	13,54
20	100	2	6	9	2	855,5	131,6	86,3	66	151,96	50,41	38,57	12,86	12,86
20	100	2	6	11	2	1243,8	165,8	108	78	120,59	43,51	31,35	10,45	10,45

2.12 Ristlõigete geometriiliste karakteristikute tabelid

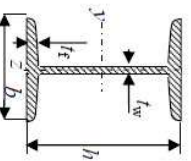
Tugevusõpetuses esitatakse sellised tabelid tavaliselt valtsmetallide kohta ja kuna tihti on tegu terasega siis kutsutakse neid tabeleid sel juhul terasprofiilide tabeliteks. Kuna erinevatel tootjatel ja erinevatel riikidel on erinevad standardsed ristlõiked, siis eksisteerib ka palju erinevaid terasprofiilide tabeleid. Loomulikult pole konstruktsioonielendid ainult valtsterasest ja leidub väga erinevate kujudega ristlõikeid ning neile vastavaid tabeleid.

Siin vaatleme ühte komplekti, mis on ka käesoleva peatüki lisas ja mida võib vaja minna ülesannete lahendamise juures. Tabelid pärinevad kolleegidelt mehaanika instituudist ja profiilid vastavad autorile teadaoleva info kohaselt Euroopa standardile.

Järgnevalt on esitatud tabelite algused kahte liiki I-profiilile, nn. karprauale ning võrd- ja erikülgssele nurkrauale. Pikemad tabelid on esitatud Lisas 2-A.

2.12. Ristlõigete geometriiliste karakteristikute tabelid

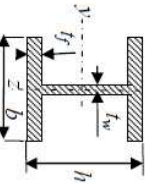
IPN



A - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral, $W_{pl,y}$, $W_{pl,z}$ - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoozummeetodi korral, I_{y^*} , I_z - inertsiiraadused vastavalt y ja z-telje suhtes, I_x - väändemoments, A_{yz} - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtes.

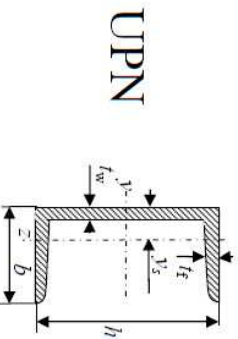
Profiili nr.	h	b	t _w	t _f	A	I _y	W _y	W _{pl,y}	I _y	A _{yz}	I _z	W _z	W _{pl,z}	I _z	I _x
mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ⁴
IPN 80	80	42	3,9	5,9	7,58	77,8	19,5	22,8	3,20	3,41	6,29	3,00	5,0	0,91	0,87
IPN 100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	39,8	4,01	4,85	12,2	4,88	8,1	1,07	1,60

IPE



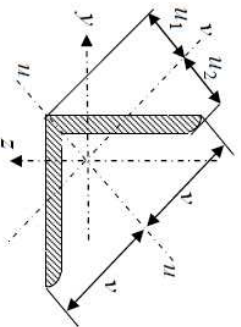
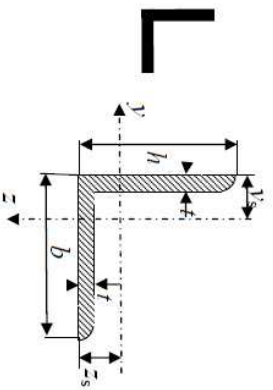
A - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral, $W_{pl,y}$, $W_{pl,z}$ - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoozummeetodi korral, I_{y^*} , I_z - inertsiiraadused vastavalt y ja z-telje suhtes, I_x - väändemoments, A_{yz} - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtes.

Profiili nr.	h	b	t _w	t _f	A	I _y	W _y	W _{pl,y}	I _y	A _{yz}	I _z	W _z	W _{pl,z}	I _z	I _x
mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ⁴
IPE 80	80	46	3,8	5,2	7,64	80,1	20,0	23,2	3,24	3,58	8,49	3,69	5,82	1,05	0,70
IPE 100	100	55	4,1	5,7	10,3	171	34,2	39,4	4,07	5,08	15,9	5,79	9,15	1,24	1,20



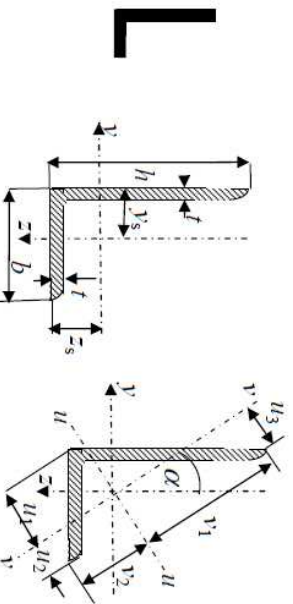
A - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpinge teotdi korral, $W_{pl,y}$, $W_{pl,z}$ - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes pinikoormusteotdi korral, i_y , i_z - inertsiraadiused vastavalt y ja z-telje suhtes, I_x - väändinertsimoment, A_{yz} , A_{zy} - taandatud ristlõikepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks z ja y-telje suhtes.

Profiili nr	h mm	b mm	t_w mm	t_s mm	A cm ²	I_y cm ⁴	W_y cm ³	$W_{pl,y}$ cm ³	i_y cm	A_{yz} cm ²	I_z cm ⁴	W_z cm ³	$W_{pl,z}$ cm ³	i_z cm	A_{zy} cm ²	I_x cm ⁴	j_s cm
UPN 80	80	45	6,0	8,0	4,00	106	26,5	31,8	3,10	5,10	19,4	6,36	12,1	1,33	7,14	2,16	1,45
UPN 100	100	50	6,0	8,5	4,50	206	41,2	49,0	3,91	6,46	29,3	8,49	16,2	1,47	8,43	2,81	1,55



A - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid y, z-telje suhtes, I_x , I_v - inertsimomendid u, v-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid y, z-telje suhtes, i_w , i_v - inertsiraadiused u, v-telje suhtes, I_{yz} - tsentrifugaalmoment y, z-telje suhtes.

Profiili nr	h = b mm	t mm	A cm ²	$z_s = y_s$ cm	v' cm	u_1 cm	u_2 cm	$I_y = I_z$ cm ⁴	$W_y = W_z$ cm ³	$i_y = i_z$ cm	I_u cm ⁴	i_u cm	I_v cm ⁴	i_v cm	I_{yz} cm ⁴
L 90 x 90 x 7	90	7	12,2	2,45	6,36	3,47	3,16	92,5	14,1	2,75	147	3,47	38,0	1,76	-54,5
L 90 x 90 x 8	90	8	13,9	2,50	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	166	3,46	42,9	1,76	-61,5



B - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid y, z-telje suhtes, I_u , I_v - inertsimomendid u, v-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid y, z-telje suhtes, i_y , i_z - inertsiraadiused y ja z-telje suhtes, i_u , i_v - inertsiraadiused u, v-telje suhtes, I_{yz} - tsentrifugaalmoment y, z-telje suhtes.

Profiili nr	h mm	b mm	t mm	A cm ²	z_s cm	y_s cm	y_1 cm	y_2 cm	u_1 cm	u_2 cm	u_3 cm	α °
L 120 x 80 x 8	120	80	8	15,5	3,83	1,87	8,23	5,97	3,25	4,19	2,09	23,6
L 120 x 80 x 10	120	80	10	19,1	3,92	1,95	8,19	6,01	3,35	4,17	2,15	23,5

Profiili nr	I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_z cm ⁴	W_z cm ³	i_z cm	I_u cm ⁴	i_u cm	I_v cm ⁴	i_v cm	I_{yz} cm ⁴
L 120 x 80 x 8	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,4	1,73	-78,5
L 120 x 80 x 10	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,6	1,72	-95,3