

Peatükk 3

Deformatsioon ja olekvõrrandid

3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 2

3.1 Siire ja deformatsioon

3.1.1 Cauchy seosed

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti A . Algolekus on tema koordinaadid x, y, z . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse A' koordinaatidega x', y', z' . Vektorit $\overline{AA'}$ nimetatakse punkti A *siirdeks ehk siirdevektoriks*¹.

Eristame kahte liiki siirdeid:

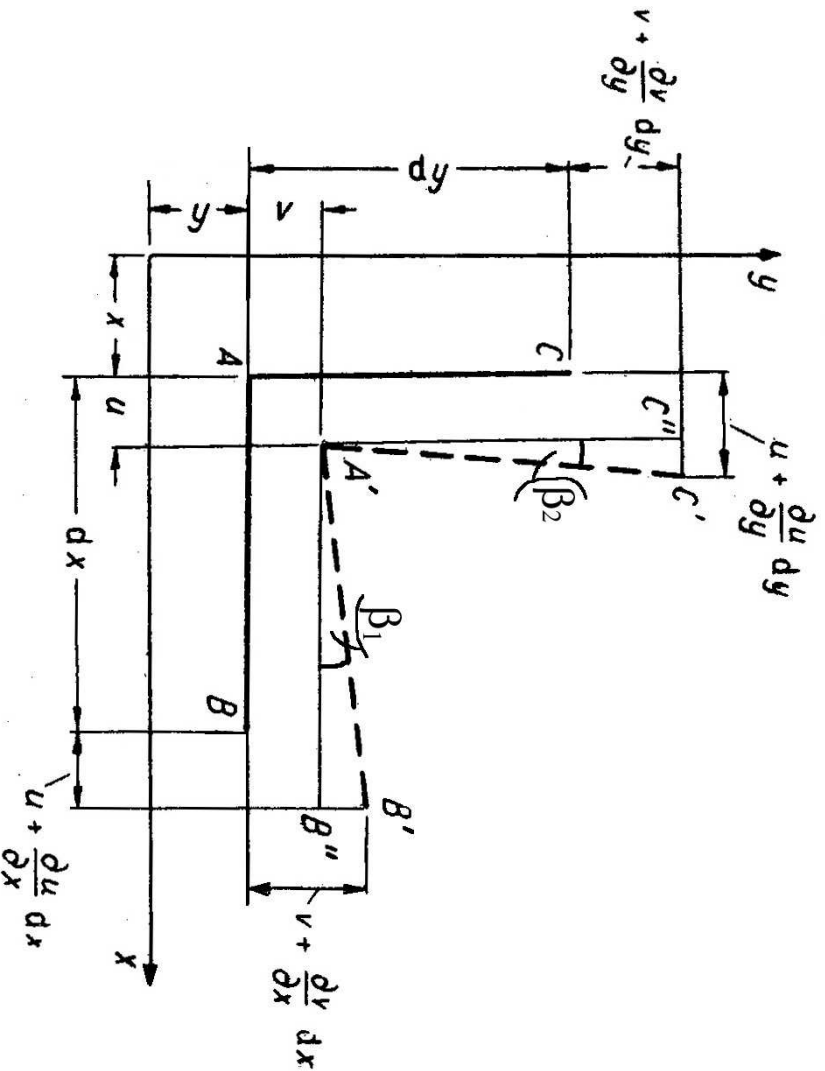
- keha kui terviku siirdeid (toimuvad ilma deformatsioonideta) — selliste siiretega tegeleb jäiga keha mehaanika²;
- siirdeid, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse just selliseid siirdeid.

Siirdevectori koordinaattelgede x, y, z sihilisi komponente tähistatakse u, v, w , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

¹Siirde sünonüüm (mehaanikas) on paigutus. Füüsikud kasutavad samas tähenduses terminit nihke, mis on aga mehaanika seisukohast eksitav.

²Niimed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.



Joonis 3.1: Normaal- ja nihkedeformatsioon.

3.1. Siire ja deformatsioon

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (3.2)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist x, y tasandil (joon.

3.1). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$ ja $AC = dy \parallel y$;
- Punktide koordinaadid: $A : (x, y)$; $B : (x + dx, y)$; $C : (x, y + dy)$.

Peale deformatsiooni: $A \rightarrow A'$; $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$. Vastavad siirded:

- Punkt A : u ja v ;
- Punkt B : $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$;
- Punkt C : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$;

Kuna lineaarses elastsusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade AB ja AC pöördenurgad, st., $\cos \beta \sim 1$, $\sin \beta \sim \beta$ ja $\tan \beta \sim \beta$.

Seetõttu lõikude AB ja AC suhtelised pikenenemised ehk koordinaatide x ja y sihilised *normaaldeformatsioonid*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

ja pöörded

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) dx} \stackrel{= \varepsilon_x \ll 1}{=} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \dots = \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Nihke ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui alge täisnurga muutus, st. nihke xy tasandil

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab leida normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenemised) ja nihkedeformatsioonid (ehk nihked) teistel koordinaattasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsioonikomponentide $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ja siirdekomponeentide u, v, w vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

Märgireeglid:

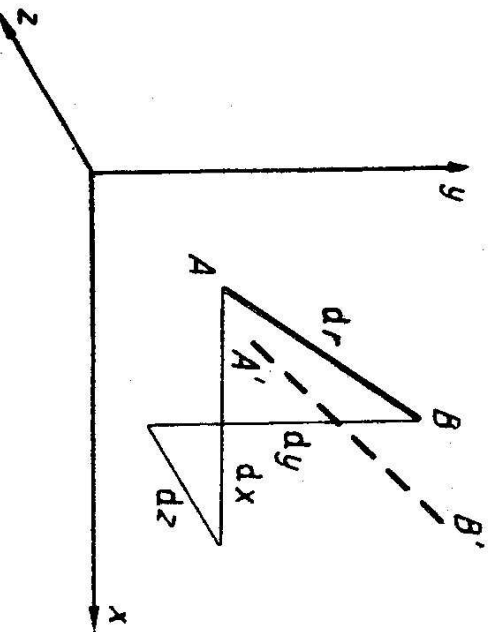
- pikenemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgedele positiivsete suundade vahelisele täisnuruga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

Järeldus: Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

3.1.2 Orienteeritud lõigu pikenemine

Vaatleme kahte lõpmata lähedast punkti A ja B , kusjuures vektor $\overline{AB} = d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Siinjoores on vektori $d\mathbf{r}$ suunakoosinused

$$l = \frac{dx}{dr}, \quad m = \frac{dy}{dr}, \quad n = \frac{dz}{dr}.$$



Joonis 3.2: Lõigu AB deformatsioon

Vastava joonelemendi AB normaaldeformatsioon (ehk suhteline pikenedamine)

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (3.7)$$

Siin

$$\begin{cases} AB = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dr, \\ A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} = \dots \end{cases} \quad (3.8)$$

Kombineerides kahte viimast avaldist ning hinnates liikmete suurusjärke saame +

$$\varepsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Teisendades osatuletised r järgi osatuletisteks koordinaatide x, y, z järgi, saame³ †

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm \gamma_{xy} + mm \gamma_{yz} + lm \gamma_{xz}. \quad (3.10)$$

³Detailset tuletuskäiku vt. R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 lk. 279–282.

3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 10

Rakendus tensomeetrias⁴. Olgu vaja määrata xy tasandi meelevaldses punktis normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenedamised) ε_x ja ε_y ning nihke γ_{xy} . Kuna antud juhul on $n = 0$, siis saame valemile (3.10) kujul

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}. \quad (3.11)$$

Kaks lahendust:

1. Vaadeldava punkti ümbrusse asetatakse kolm suvaliselt orienteeritud *tensomeetri*⁵ (joon. 3.3). Tensomeetrite lugemid esitavad valemil (3.11) vasakut poolt kolme erineva orientatsiooniga lõigu jaoks. Kuna tensomeetrite orientatsioon on teada (s.o. määratud sihikoosinnustega l, m, n) saadakse kolmest lugemist kolm võrrandit otsitavate suuruste $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ja γ_{xy} määramiseks.

2. Kui orienteerida kaks tensomeetrit telgede x ja y sihis, siis saame deformatsioonid ε_x ja ε_y otse tensomeetrite lugemitest, γ_{xy} aga avaldame võrrandist (3.11)

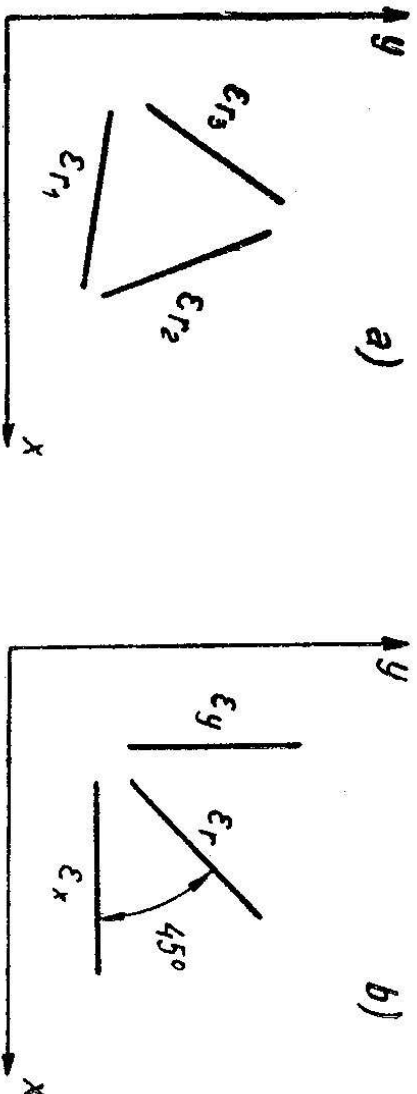
$$\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_r - l^2 \varepsilon_x - m^2 \varepsilon_y}{lm}. \quad (3.12)$$

⁴Tensomeetria on kehaes (tarindites) koormamisel tekkinud deformatsioonide (ja pingete) katseline määramine.

⁵Tensomeeter on seade deformatsioonide määramiseks. Tänapäeval on enamkasutatav elektriline tensomeeter.

Üldjuhul on kolmas tensomeeter koordinaattelgedes suhtes 45° nurga all. See-
ga $l = m = \sqrt{2}/2$ ja

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_r - \varepsilon_x - \varepsilon_y. \quad (3.13)$$



Joonis 3.3: Tensomeetria näide.

3.2. Deformatsioonitensor

3 - 12

3.2 Deformatsioonitensor

Normaal- ja nihkedeformatsioonidest (ehk nihetest) saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensorarvutuste reeglitele. Analoogiliselt pingetensoriga saab leida ka deformatsioonitensori invariantidid:

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}, & I_3^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul muutub keha ruumala ehk maht deformatsiooni käigus⁶. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli $dV = dx dy dz$. Serva AB pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on dx ja peale deformatsiooni $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$. Analoogiliselt $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$ ja $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$. Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et normaaldeformatsioonid ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hiljatakse teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud elementaaristikuliku mahuks $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$. *Ruumdeformatsioon* ehk *suhteline mahumuutus*⁷ avaldub seega kujul

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.16)$$

Seega on ruumdeformatsioon võrdne deformatsioonitensori esimese invariantiga. Teisest küljest, arvestades deformatsioonide ε_x , ε_y ja ε_z definitsoone (3.4) on ruumdeformatsioon siirde divergents:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

⁶Multimetel ainetele on see mahumuutus hiljatatavalt väike, vältreks vesi või kummi.

⁷1. k. *dilatation*, *volumetric change*

3.4. Pidevustingimused

3 - 14

3.4 Pidevustingimused

Cauchy võrrandid (3.4) seovad kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ ja γ_{xz} kolme siirdekomponendiga u, v, w järgmisel viisil:

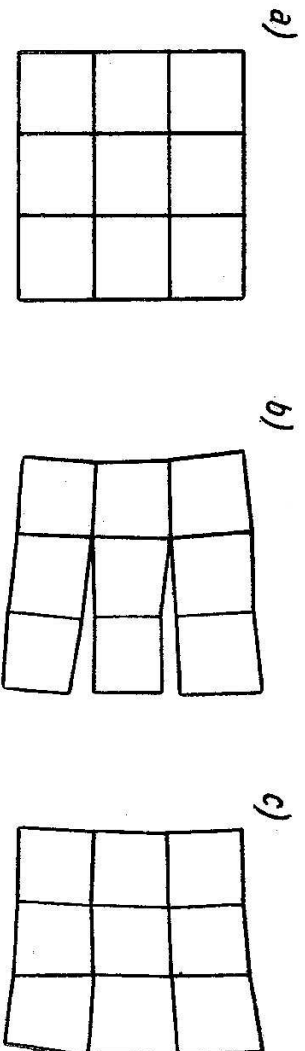
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases}$$

- Kui on antud kolm siirdekomponenti u, v, w , siis võrrandite (3.4) abil on võimalik iheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, siis pole võrrandite (3.4) abil võimalik kolme siirdekomponenti u, v, w iheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsioonikomponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi nimetatakse eestikeelses kirjanduses tavaliselt *pidevustingimusteks*⁸.

⁸Ingl. k. *compatibility conditions*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid pidevusvõrrandid või sobivustingimused.

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama *pidevustingimusi* ehk *pidevusvõrrandeid*.

3.4. Pidevustingimused

3 - 16

Pidevusvõrrandite tuletamine. Differentseerime võrrandit (3.4)₁ kaks korda koordinaadi y järgi ja võrrandit (3.4)₂ kaks korda koordinaadi x järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.17)$$

Kombineerides võrrandeid (3.4)₁₋₃ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.4)₄₋₆ osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame (3.4)₄₋₅ ja lahutame saadud summast (3.4)₆. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (3.18)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.

Kokku oleme saanud kuus pidevusvõrrandit, mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

3.4. Pidevustingimused

Saadud kuuel pidevusvõrrandil ehk pidevustingimusel on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenenimised) kolmes ristuvas silhis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldis-
tega (3.19)₁₋₃.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristuvastasapinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud avaldistega (3.19)₄₋₆

3.5 Üldistatud Hooke'i seadus

3.5.1 Deformatsioonide avaldamine pingete kaudu

Klassikalises (ehk lineaarses) elastsusteoorias (k.a. elementaartheoria) kehtib *üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige üldisemal juhul saab vastavad seosed esitada kujul

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju) ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti (Youngi moodul E ja Poissoni koefitsent ν), mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil.

- Tõmme-surve (x -telje sihis).
 - Elastsuskonstant ehk Youngi moodul E : $\varepsilon_x = \sigma_x/E$
 - Poissoni koefitsent (Poissoni tegur) ν : $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$
- Nihe (xy tasandis).
 - Nihkeelastsusmoodul G : $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.21)$$

Kuna nihkeelastsusmoodul G on avaldatav E ja ν kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Pinge $\sigma_x > 0$ põhjustab pikenemist x -telje sihis ja lihenemist y - ja z -telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel $\sigma_y > 0$ ja $\sigma_z > 0$. Seega on summaarne suhteline pikenemine x -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.22)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaatasandi jaoks sõltumatult, s.t., τ_{xy} põhjustab vaid nihet γ_{xy} , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.23)$$

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

3.5.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (3.23)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1-2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma} \quad (3.24)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1-2\nu)I_1^\sigma}{E}. \quad (3.25)$$

Suurust $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* ja ta on ühtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse ruumpaisumismooduli K ja keskmise pinge σ_0 ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (3.26)$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.27)$$

3.5.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (3.23)₁ paremale poolele ja lahutame avaldise (3.23)₁ paremast poolst suuruse $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (3.28)$$

Avaldades (3.25)-st invarianti $I_1^\sigma = E\theta/(1 - 2\nu)$, saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1 + \nu} \quad (3.29)$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*⁹

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (3.30)$$

saame valemist (3.29)₂ $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$.

⁹ Alternatiivne lineaarse teooria elastsuskonstantide paar.

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

3 - 24

Leides analoogilised avaldised σ_y ja σ_z jaoks ning avaldades seostest (3.23) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Kasutades viimaseid valemeid leiame seose pingetensori ja deformatsioonitensori esimese invarianti vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^\sigma} = 3\lambda\theta + 2\mu(\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_\theta), \quad \text{kust} \quad I_1^\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.32)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (3.33)$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (3.34)$$

3.5.4 Anisotroopsed kehad

Paljudes õpikutes¹⁰ esitatakse valemitega (3.20) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \quad (3.35)$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \quad (3.36)$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

¹⁰Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Elastuskoeffitsientidest moodustatud matriksit $[C_{ij}]$ nimetatakse *jäikusmatriksiks*¹¹. Matriksit $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$ võib eesti keeles seega nimetada *pöördjäikusmatriksiks*¹² või *paimdäkkusmatriksiks* või *vetruvusmatriksiks*.

¹¹I. k. *stiffness matrix*

¹²I. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka *vetruvus*.

Elmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoeffitsenti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotroopseid materjale, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasuunada), mille sihis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotroopse materjali elastsed omadused ei muutu telgede pöörämisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotroopse materjali iseloomustamiseks on vaja üheksat elastsuskonstanti. Valemid (3.38) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

3.5. Üldistatud Hooke'i seadus

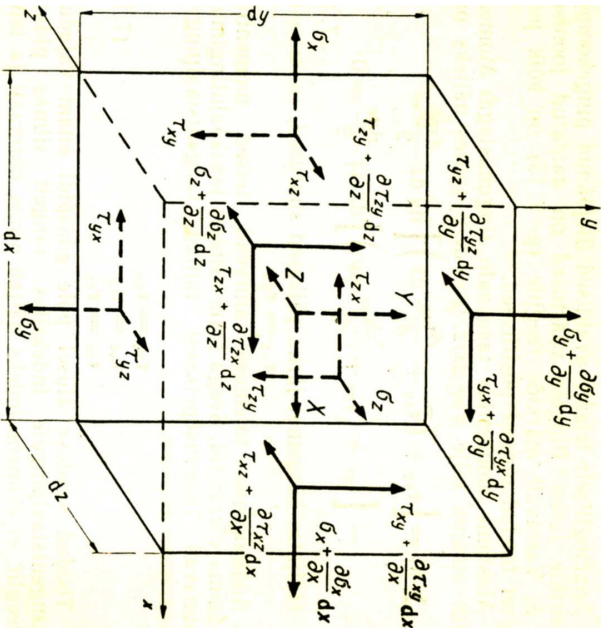
kus

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Konstandid $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$ ja G_{23} on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkeelastusmoodulid peatelgedega 1, 2, 3 määratud sihtides¹³.

¹³Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 §1.4.6

3.6 Deformatsiooni potentsiaalne energia



Joonis 3.5: Elementaarriisttahukas

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega. Eeldame, et normaalpingete toimel suureneb tahkude vaheline kaugus $d\varepsilon_x dx$ võrra.
 - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\sigma_x dydz d\varepsilon_x dx$.

3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

3 - 30

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega ja tahke, mis on risti y teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk x ja y telje vahel väikese suuruse $d\gamma_{xy}$ võrra.
 - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\tau_{xy} dydz d\gamma_{xy} dx$.
- Analoogiliselt saab leida pingetele σ_y , σ_z , τ_{yz} ja τ_{xz} vastavad tööd.

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (3.41)$$

Jagades viimase elementaarruumalaga $dV = dx dy dz$, saame elementaartöö tiheduse $dA = dA^*/dV$. Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis on tehtud töö tõttu suurendatud elementaarriistahuka potentsiaalset energiat $dW^* = dA^*$ võrra.

†

Edaspidi vaatleme seega suurust dW , st. potentsiaalse energia juurdekasvu tihikruumala kohta:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}. \quad (3.42)$$

Asendame saadud avaldise pinged σ_x, \dots üldistatud Hooke'i seadusest (3.31) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x) d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y) d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z) d\varepsilon_z + \\ &+ \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{zx} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu (\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &+ \mu (\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.44)$$

Kuna Lamé koefitsiendid (3.30) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

3 - 32

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.31) saame *Clapeyroni valemi*

‡

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.45)$$

Viimasest saab omakorda avaldada W läbi pingete ja elastsuskonstantide E ja ν kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.23)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 2(1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.46)$$

Kuna W on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.42) olema funktsiooni W täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \quad (3.47)$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valemite*na.

Eeltoodu kontrolliks leiame avaldistest (3.44) osatuletised

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x = \sigma_x, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu \gamma_{xy} = \tau_{xy}, \dots \end{cases} \quad (3.48)$$

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia \mathcal{W} tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kogu keha ruumala V , st.

$$\mathcal{W} = \int_V W dV = \iiint_V W dx dy dz. \quad (3.49)$$

Rakendes Clapeyroni valemil avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.50)$$

3.7. Olekuvõrranditest

3 - 34

3.7 Olekuvõrranditest

- Välisjõudude toimel kehad (keskkonnad) deformeeruvad. On selge, et ihe ja sama välisjõu toimel võivad erinevad materjalid deformeeruda väga erinevalt — järelikult on vaja võrrandeid, mis määraksid kuidas üks või teine materjal koormamisel käitub.
- *Võrrandeid, mis seovad omavahel deformatsioonid ja pinged, nimetatakse olekuvõrranditeks.*
- Lineaarses e. klassikalises elastsusteoorias on olekuvõrrandid esitatud *üldistatud Hooke'i seadusena*, mida käsitleti alajaotuses 3.5 ja mis esitab lineaarse seose pinge- ja deformatsioonitensori vahel.
- Kui on vaja arvestada ka temperatuuri mõju kehade deformatsioonidele, siis tuuakse sisse termoelastsus tegurid ning lisatakse alajaotuses 3.5 vaadeldud võrranditesse vastavad lisaliikmed. Sel juhul öeldakse tihti, et tegu on *termoelastsusteooriaga*.
- *Last but not least:* Käesolevas alajaotuses kirjutatu, peaks tegelikult olema kirjas alajaotuse 3.5 alguses.