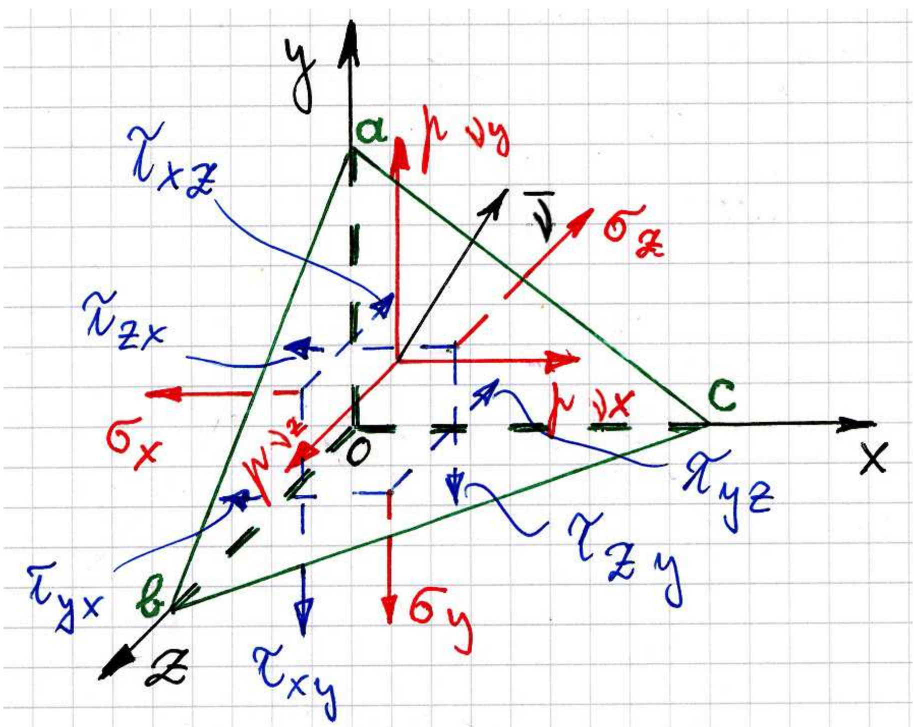
Peatükk 4

Peapinged ja peadeformatsioonid

4.1 Pinged kaldpinnal



Joonis 4.1: Pinged kaldpinnal. Kaldpinnal normaaliga ν mõjuv pingevektor $\mathbf{p}_\nu$ on esitatud läbi tema projektsioonide $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$ ja $p_{\nu z}$.

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 4.1 kujutatud kaldpinna abc orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \qquad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \qquad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \tag{4.1}$$

Koos koordinaatpindadega moodustub lõpmta väike tetraeeder $Oabc$. Tähistame kaldpinna abc pindala dA. Tetraeedri teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinuste[1]:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \qquad A_{Obc} = dA \cdot m, \qquad A_{Oac} = dA \cdot n. \tag{4.2}$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 4.1 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud X, Y, Z, mida pole joonisel näidatud. Projekteerime tetraeedrile mõjuvad jõud x-teljele:

$$\begin{aligned} &p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} - X dV = \\ &p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n - X dV = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

[1]Nurgad tetraeedri tahkude ja vastavate normaalide vahel on võrdsed.

Jagame viimase avaldise pindalaga dA, hülgame viimase liikme kui kõrgemat järku väikese[2] ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \tag{4.4}$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ ülejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku saame

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Valemid (4.5) võimaldavad leida mistahes kaldpinnal mõjuva pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ komponente kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pingekomponendid koordinaatpindadel $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots$, st. pingetensori komponendid.

Kui pinnanormaal $\boldsymbol{\nu} = (l_1, m_1, n_1)$ on nn. reavektor ja pingetensor on tähistatud $\mathbf{S}$, siis vaame valemid (4.5) esitada kujul

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S}. \tag{4.6}$$

[2]$\lim_{dA \to 0}(dV/dA) = 0$

Kui pind *abc* ühtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (4.5) *rajatingimusi ehk ääretingimusi keha pinnal.* Teisisõnu, sellisel juhul seovad avaldised (4.5) keha pinnal mõjuvad pindjõud pingetensori komponentidega.

4.2 Peapinged

Kuna vaadeldav tetraeeder on lõpmata väike, siis tegelikult võimaldavad valemid (4.5) määrata pingeid keha mis tahes punkti läbival mis tahes kaldpinnal kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pinged (pingekomponendid $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$) seda punkti läbivatel koordinaattasanditel.

Pinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$ mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ ja nihkepingeks $\boldsymbol{\tau}_\nu$. Kui on teada pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ komponendid ja normaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinused, siis saame leida pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ projektsiooni normaalil $\boldsymbol{\nu}$:

$$\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu \cdot \boldsymbol{\nu} = p_{\nu x} l + p_{\nu y} m + p_{\nu z} n. \tag{4.7}$$

On selge, et vaadeldav projektsioon on samal ajal ka normaalpinge $\boldsymbol{\sigma}$ projektsioon pinnanormaalil $\boldsymbol{\nu}$ ja seetõttu kasutamegi siin tähistust σ_ν. Kasutades valemeid (4.5) saab σ_ν omakorda avaldada koordinaattasandeil mõjuvate pingete kaudu.

Nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu$ kujutab endast pingevektori $\mathbf{p}_\nu$ projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \tag{4.8}$$

On selge, et nii $\mathbf{p}_\nu$, kui $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ ja $\boldsymbol{\tau}_\nu$ sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu = 0$ ja normaalpinge $\boldsymbol{\sigma}_\nu = \mathbf{p}_\nu$. Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormaale *peasuundadeks.*

4.2.1 Peapingete ja peasuundede leidmise protseduur.

- Tähistame otsitava peapinge σ ja talle vastava pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinused l, m, n.
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n = 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

koos lisatingimusega ⋆

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{4.10}$$

- Meid huvitab selle VS-i mittetriviaalne lahend (l, m, n pole korraga nullid). See tingimus on täidetud kui karakteristlik determinant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{4.11}$$

- Viimasest saadakse omakorda karakteristlik võrrand

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0, \tag{4.12}$$

kus suurused

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \qquad I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{cases} \tag{4.13}$$

on *pinge invariandid* ehk *pingetensori invariandid*.

- Uuritaval juhul (st. sümmeetrilise pingetensori korral) on kuupvõrrandil (4.12) kolm reaalarvulist lahendit, mis järjestatakse kahanevas järjekorras $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget kordamööda võrrandisüsteemi (4.9)[3] , (4.10). Tulemusena saame igale peapingele σ_i vastava peasuuna suunakoosinused l_i, m_i, n_i, $i = 1, 2, 3$.
- Peasuundade praktilise leidmise juurde tuleme tagasi näites 4.2.

Sõltuvalt kuupvõrrandi lahendite väärtustest, saab eristada kolme juhtu:

1. Kui kõik kolm peapinget on erinevad, siis saadakse võrrandisüsteemi (4.9), (4.10) lahendamisel kolm ristuvat ühikvektorit.
2. Kui kõik kolm peapinget on võrdsed, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind. Praktilistel kaalutustel valitakse tavalistelt ristuvate pindade kolmik, mis omakorda määrab omavahel ristuvate peasuundade kolmiku.

[3] Kuna võrrandisüsteemis (4.9) osutuvad vaid 2 võrrandit kolmast lineaarselt sõltumatuteks, siis erineb saadud võrrandisüsteemi lahendamine tavapärasest. Nimelt saame ühe suunakoosinuse vabalt ette anda.

3. Kui kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev, siis saame määrata sellele kolmandale peapingele vastava peasuuna, mis omakorda määrab peapinna. Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suunade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

Kasutades peapingeid saame pinge invariandid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \tag{4.14}$$

- Kuna invariandid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustaved pinget vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

Pinguste liigid. Sõltuvalt sellest, mitu peapinget on nullist erinevad, eristatakse kolme pinguse liiki:

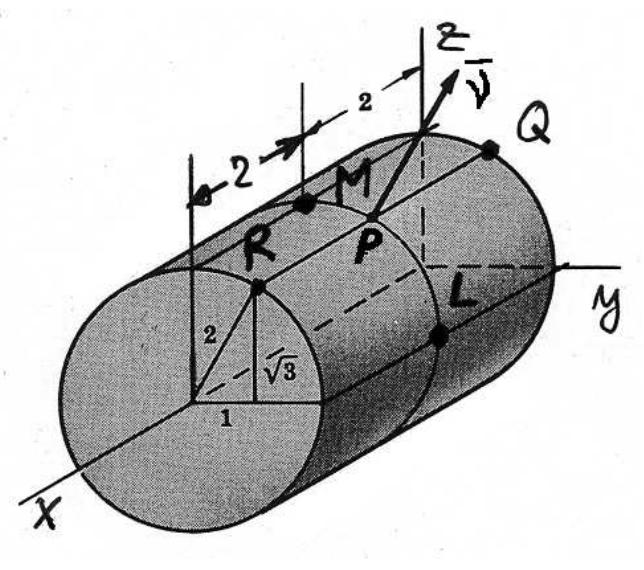
- *ruumpingus* – kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* – üks peapinge on null, kaks nullist erinevad;

- *joonpingus* – kaks peapinget on nullid, üks nullist erinev.

Näide 4.1. Pingus keha punktides on antud pingetensoriga (Descartes'i ristkoordinaatides)

$$S = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$

Leida pinge(vektor), mis mõjub silindri külgpinnal $y^2 + z^2 = 4$ punktides P, Q, R, L ja M ning silindri otspindade punktides Q ja R. Lahutage pingevektor normaal- ja nihkepingeks.



Joonis 4.2: Silinder raadiusega $r = 2$.

Lahendus. Lahendamisel tuleb kasutada valemeid (4.5), (4.7) ja (4.8).

$\bar{S}=\begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$ Silinder $x^2+z^2=4$ ehk $\Phi = x^2+z^2-4=0$

silindri normaal: $\bar{\nu}^* = \operatorname{grad}\Phi = \ldots = (0, 2y, 2z)$

ühiknormaal $\bar{\nu} = \bar{\nu}^*/|\bar{\nu}^*|$; $|\bar{\nu}^*| = 2\sqrt{y^2+z^2}$

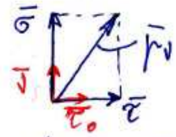
Pinge pinnal normaaliga $\bar{\nu}$: $\bar{p}_\nu = \bar{\nu}\cdot\bar{S}$ /võrdle valem (2.5)/

*) Punkt $P=(2,1,\sqrt{3}) \to \bar{\nu}^* = (0,2,2\sqrt{3}) \to |\bar{\nu}^*| = 4 \Rightarrow \bar{\nu} = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$

$\bar{S}=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{p}_\nu = (2{,}5;\ 3;\ \sqrt{3})$; $|\bar{p}_\nu| = 4{,}272$

$\sigma_\nu = \bar{p}_\nu\cdot\bar{\nu} = 3$ s.o. $\bar{p}_\nu$ projektsioon normaali $\bar{\nu}$ sihil

Normaalpinge $\bar{\sigma} = \sigma_\nu\bar{\nu}$, vastav moodul $\sigma = |\bar{\sigma}| = |\sigma_\nu|$



Vt. joonisel $\bar{\sigma} = 3\cdot(0;1/2;\sqrt{3}/2)$ ja $\sigma = 3$

Nihkepinge $\bar{\tau} = \bar{p}_\nu - \bar{\sigma} = (2{,}5;\ 3;\ \sqrt{3}) - 3\cdot(0;\ 1/2;\ \sqrt{3}/2) = \ldots = (2{,}5;\ 1{,}5;\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$

vastav moodul $|\bar{\tau}| = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma^2} = \sqrt{\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2} = 3{,}04$

*) punkt $Q=(0,1,\sqrt{3})$ $\bar{S}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ NB! Külgpinna punkt

Kõik uued on sama, mis punktis P

*) punkt $R=(4,1,\sqrt{3})$ /külgpinna punkt/

$\bar{S}=\begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ Kõik uued on sama, mis p.-des P ja Q

*) punkt $L=(2,2,0) \to \bar{\nu}=(0,1,0)$ $\bar{S}=\begin{bmatrix} 12 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{p}_\nu = \bar{\nu}\cdot\bar{S} = (20;\ 0;\ 0) \Rightarrow p_\nu = 20$ $\bar{\tau}=\bar{p}_\nu$ & $\sigma=0$ Vt. joonist!

*) punkt $M=(2;0;2) \to \bar{\nu}=(0;0;1)$ $\bar{S}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{p}_\nu = \bar{\nu}\cdot\bar{S} = (0;\ 4;\ 0)$ $p_\nu = 4$

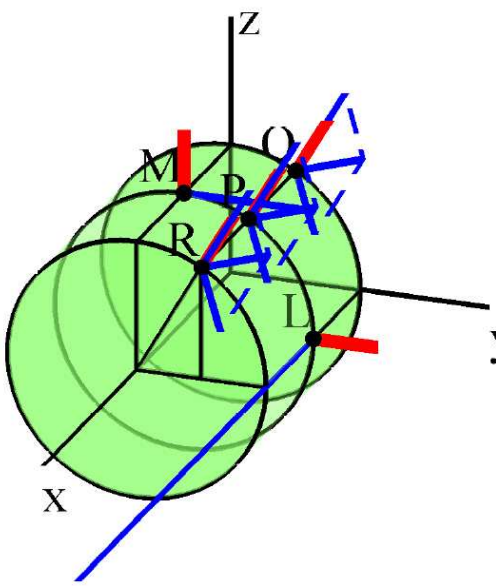
$\bar{\tau}=\bar{p}_\nu$ $\sigma = 0$ vt. joonist!

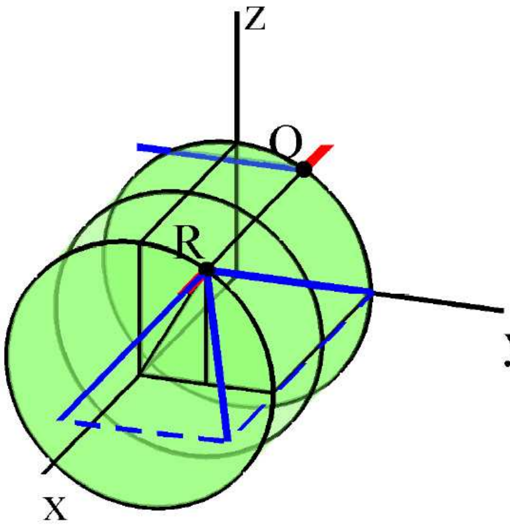
*) Punkt $Q=(0,1,\sqrt{3})$ otspinnal $\Rightarrow \bar{\nu}=(-1;0;0)$

$\bar{S}$ on juba leitud $\bar{p}_\nu = (0;-5;0) \Rightarrow \bar{\tau}=\bar{p}_\nu$ & $\sigma=0$

*) Punkt $R=(4,1,\sqrt{3})$ otspinnal. $\bar{S}$ on leitud, $\bar{\nu}=(1,0,0)$

$\bar{p}_\nu = (12, 5, 0) \Rightarrow \bar{\sigma}=(12,0,0)$ $\bar{\tau}=(0,5,0)$





Joonis 4.3: Pingevektorid silindri pinnal. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud silindri külgpinnal ja parempoolsel joonisel silindri otspinnal mõjuvad pinged. Punased jooned näitavad pinnanormaale ja sinised pingeid.

Näide 4.2. Leida peapinged ja peasuunad pingetensorile

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Lahendus. Antud ülesannet on võimalik lahendada kahel põhimõtteliselt erineval viisil — „käsitsi" ja „arvutiga".

A. „Käsitsi".

1. Tuleb koostada võrrandisüsteem (4.9).

$$\begin{cases} (-1-\sigma)l - 16m - 2n = 0 \\ -16l + (5-\sigma)m - 14n = 0 \\ -2l - 14m + (14-\sigma)n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

2. Vastava karakteristliku determinandi abil tuleb moodustada karakteristlik võrrand ja leida selle lahendid.

Karakteristlik determinant Karakteristlik kuupvõrrand

$$\begin{vmatrix} -1-\sigma & -16 & -2 \\ -16 & 5-\sigma & -14 \\ -2 & -14 & 14-\sigma \end{vmatrix} = 0 \ldots \Rightarrow \sigma^3 - 18\sigma^2 - 405\sigma + 4374 = 0 \quad (**)$$

$(**) \rightarrow$ kolm lahendit $\sigma = [-18; 27; 9] \rightarrow$

Viimased ongi peapinged, mis tuleb järjestada kahanevas järjekorras ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

kolm peapinget $\sigma_1 = 27$, $\sigma_2 = 9$, $\sigma_3 = -18$; $\underline{\underline{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}}$!

3. Peapinged σ_i ($i = 1, 2, 3$) tuleb asendada ükshaaval võrrandisüsteemi (4.9).
   (a) Iga peapinge σ_i jaoks saate kolm võrrandit, millest peab välja valima suvalised kaks. Neisse tuleb asendada näiteks $n_i = 1$ ja leida vastavad l_i ja m_i. Tulemusena saate vektori $\mathbf{N}_i^* = (l_i^*, m_i^*, n_i^*)$, mis määrab peapingele σ_i vastava peasuuna.

- $\sigma_1 = 27 \longrightarrow (4.9) \longrightarrow$

$$\begin{cases} -28l_1 - 16m_1 - 2n_1 = 0 \\ -16l_1 - 22m_1 - 14n_1 = 0 \\ -2l_1 - 14m_1 - 13n_1 = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

  – Neist on vaid kaks lineaarselt sõltumatud:
    0,5 * 1. võrrand + 3. võrrand = 2. võrrand.

- $n_1 = 1 \longrightarrow (4.15)$ ja hülgame 3. võrrandi

$$\begin{cases} -14l_1 - 8m_1 = 1, \\ -8l_1 - 11m_1 = 7, \end{cases} \tag{4.16}$$

  kust saame $l_1 = 0,5$ ja $m_1 = -1$, st. $\mathbf{N}_1^* = (0,5; -1; 1)$

   (b) Järgmise sammuna tuleb saadud vektor $\mathbf{N}_i^*$ normeerida, s.t. leida vastav ühikvektor $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i^* / |\mathbf{N}_i^*|$.

- $|\mathbf{N}_1^*| = 1,5$ ja seega

$$\mathbf{N}_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}; -1; 1\right) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right). \tag{4.17}$$

Kokku saame

$\sigma_1 = 27 \to (**) \to \bar{N}_1 = (1/3, -2/3, 2/3)$

$\sigma_2 \to (*) \to \bar{N}_2 = (-2/3, 1/3, 2/3)$

$\sigma_3 \to (**) \to \bar{N}_3 = (2/3, 2/3, 1/3)$

4. Peale peasuundade leidmist tuleb kontrollida, kas nad moodustavad parema käe kolmiku, s.t. kas $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

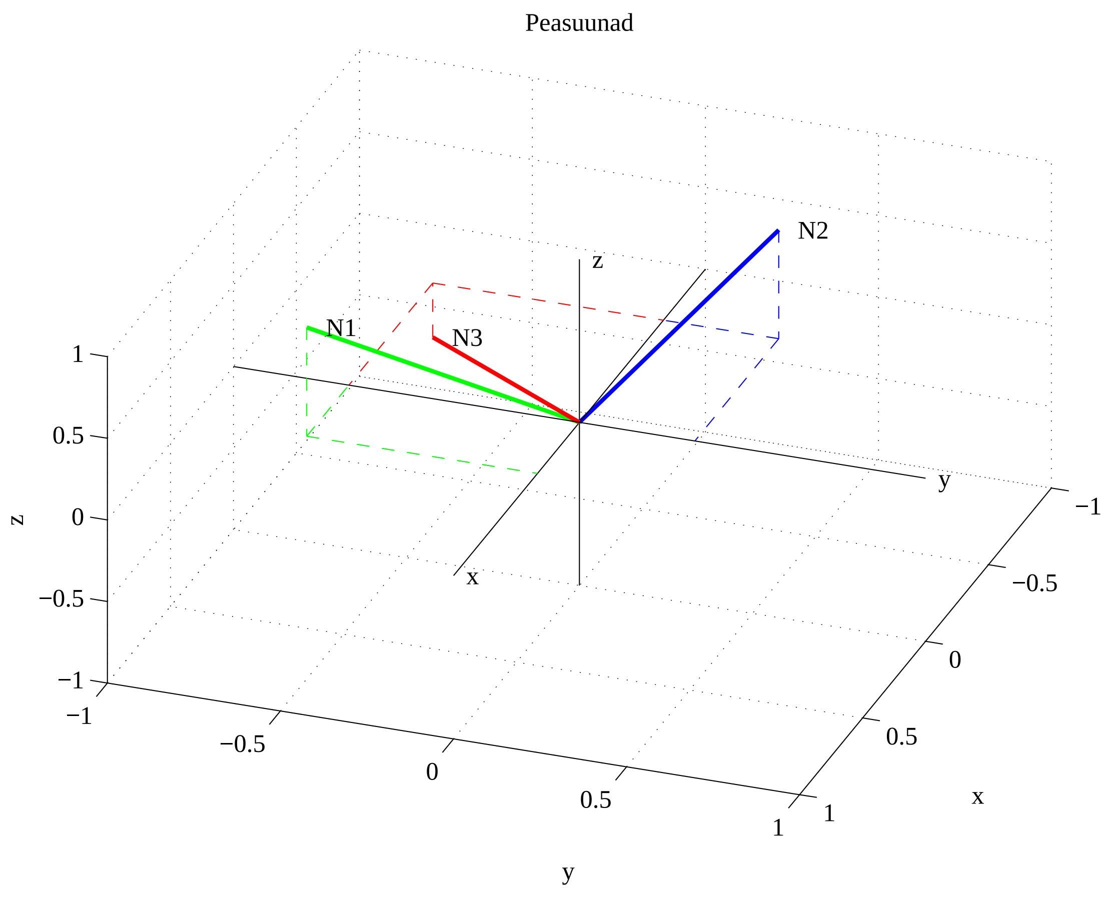
   - Kui $\mathbf{N}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ja $\mathbf{N}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, siis

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \right\}. \tag{4.18}$$

Parema käe kolmiku kontroll: $\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$

Seega tuleb peasuundadeks valida

$$\mathbf{N}_1 = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{N}_2 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{N}_3 = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right). \tag{4.19}$$



Joonis 4.4: Peasuunad

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix} \qquad (2.17) \to \begin{cases} (-1-\sigma)l - 16m - 2n = 0 \\ -16l + (5-\sigma)m - 14n = 0 \\ -2l - 14m + (14-\sigma)n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Karakteristlik determinant $\qquad$ Karakteristlik kuupvõrrand

$$\begin{vmatrix} -1-\sigma & -16 & -2 \\ -16 & 5-\sigma & -14 \\ -2 & -14 & 14-\sigma \end{vmatrix} = 0 \ldots \Rightarrow \sigma^3 - 18\sigma^2 - 405\sigma + 4374 = 0 \quad (**)$$

$(**) \to$ kolm lahendit $\sigma = [-18; 27; 9] \to$

$\to$ kolm peapinget $\sigma_1 = 27$, $\sigma_2 = 9$, $\sigma_3 = -18$; $\underline{\underline{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}}$!

$\sigma_i \leftrightarrow$ peasuund $\bar{N}_i$: $\quad \sigma_1 = 27 \to (*) \to \bar{N}_1 = (1/3, -2/3, 2/3)$

$\sigma_2 \to (*) \to \bar{N}_2 = (-2/3, 1/3, 2/3) \qquad \sigma_3 \to (*) \to \bar{N}_3 = (2/3, 2/3, 1/3)$

Parema käe kolmiku kontroll: $\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$

B. „Arvutiga”

1. Sisestada pingetensori maatriks.
2. Leida peaväärtused ja peasuunad.
   - Harilikult on selleks käsk `eig` (*eigenvalues*).
3. Järjestada peaväärtused ja peasuunad ümber nii, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
   - Kuna peaväärtustega koos tuleb ümberjärjestada ka peavektorid, siis tuleb tihti muuta arvutist saadud peavektori $\mathbf{N}_3$ orientatsioon selliseks, et $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

Järgnevalt vaatleme, kuidas käib peaväärtuste ja peasuundade leidmine Matlabi abil.

```
>> % Pingetensor S
S=[-1 -16 -2; -16 5 -14; -2 -14 14]
S =
      -1          -16           -2
     -16            5          -14
      -2          -14           14
```

Pea- ehk omaväärtusi saab leida nii ilma kui koos peasuundadega

```
>> % omaväärtused
eig(S)
ans =
     -18
       9
      27
>> % omaväärtused ja omavektorid

[V,D]=eig(S)
V =
      -2/3          -2/3           1/3
      -2/3           1/3          -2/3
      -1/3           2/3           2/3
D =
     -18             0             0
       0             9             0
       0             0            27
```

Maatriksis **V** on peavektorid esitatud veergudes.

Peaväärtused peavad olema järjestatud kahanevalt:

```
>> % omaväärtuste ja omavektorite ümberjärjestamine, antud juhul 3<->1

D(1,1)=27;  D(3,3)=-18;
NN=V(:,1);  V(:,1)=V(:,3);  V(:,3)=NN;
D,V
D =
      27             0             0
       0             9             0
       0             0           -18
V =
       1/3          -2/3          -2/3
      -2/3           1/3          -2/3
       2/3           2/3          -1/3
```

Peasuunad peavad moodustama parema käe kolmiku:

```
>> % Kontroll: N3=N1xN2
cross(V(:,1),V(:,2))
ans =
      -2/3
      -2/3
      -1/3
```

Antud juhul oli see tingimus automaatselt täidetud.

4.3 Peadeformatsioonid

Peasuundi ja peaväärtusi saab leida mistahes teist järku tensoritele. Kuna deformatsioonitensor ja pingetensor on sümmeetrilised tensorid, siis on peadeformatsioonide leidmise protseduur analoogiline peapingete omaga. Antud juhul saame seega deformatsioonitensorile

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

anda kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

misjärel deformatsioonitensori invariandid

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad I_2^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3, \quad I_3^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \tag{4.22}$$