

# Peatükk 2

## Sisejõud ja pinged

Käesolevas peatükis rakendatakse varrastes ja talades tekkiivate pingete analüüsimiseks tugevusõpetuses (ja tehnilises mehaanikas) kasutatavaid hüpoteese, printsiipe ja meetodeid. Teisisõnu, käesolevas peatükis on vaatluse all nn. elementaarteooriale vastavad lahendid.

### *2.1. Välisjõud*

### *2 - 2*

## 2.1 Välisjõud

Deformeeruvat keha võib vaadelda koosnevana punktmassidest ja seega on tegu punktmasside (mehaanikalise) süsteemiga<sup>1</sup>. Sise- ja välisjõudusid käsitleti ka *jäiga keha mehaanika* kursuses (tavaliselt dünaamika kursuses enne dünaamika tildteoreeme). Kõigepealt tuli määratleda vaadeldav keha (või punktmasside süsteem) ning seejärel defineeriti sise- ja välisjõud järgmiselt: *sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist ja *välisjõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi mittekuuluvad punktmassid mõjutavad vaadeldavasse süsteemi kuuluvaid punktmasse. Analooogiliselt defineeritakse sise- ja välisjõud ka pideva keskkonna mehaanikas (k.a. elastsusteoorias):

- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või keskkonna) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.
- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja

---

<sup>1</sup>Vt. ka „Dünaamika“ kursusest.

punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

Välisjõud jagunevad pind- ja mahujõududeks.

- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punktmassile. Näiteks gravitatsioonijõud.

Pindjõud mõjub alati läbi mingi pinna ja seetõttu on tema dimensioon tavaliselt sama, mis pingel, s.t.  $N/m^2$ . Piirjuhul, kui pind millel koormus mõjub on väga väike, asendatakse pindjõud sellel pinnal mõjuva pindjõudude resultantiga, s.t. tihedusega, mida nimetatakse *punktjõuks ehk koondatud jõuks*. Koondatud jõu dimensioon on loomulikult  $N$ . Kaks võrdvastupidist koondatud jõudu, millel on erinevad mõjusirged, moodustavad *koondatud momendi*. *Mahujõudude* dimensioon on  $N/m^3$  ja *massijõududel*  $N/kg$ .

*Toereaktsioonid* kuuluvad välisjõudude hulka. Tugevusõpetuse (ja elastsusteooria) seisukohast olulisemad tugevde tüübid<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Vaata lisaks staatika kursusest.

### 2.1. Välisjõud

### 2 - 4

- 2D liikuv liigendtügi e. liigend — 1 jõud,
- 2D liikumatu liigendtügi e. liigend — 2 jõudu,
- 2D jäik kinnitus — 2 jõudu ja 1 moment,
- 3D jäik kinnitus — 3 jõudu ja 3 momenti.

### *Staatikaga määratud ja staatikaga määramata konstruktsioonid.*

- Staatikaga määratud konstruktsioonide toereaktsioonide leidmine toimub staatika tasakaaluvõrrandite, printsiipide ja aksioomide abil, s.t. täpselt samuti kui seda tehti staatika kursuses.

— Tasapinnalised ülesanded — kuni 3 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

— 3D (ruumilised ülesanded) — kuni 6 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

— Konstruktsioon loetakse jäigaks.

— Jaotatud koormused asendatajkse üksikjõududega.

- Jõudu võib käsitleda libiseva vektorina.
- Jne., vaata lisaks staatika kursusest.
- Staatikaga määramata konstruktsioonide toereaktsioonide leidmise meetodeid käsitletakse tugevusõpetuse ja ehitusmehaanika kursustes. Sel juhul tuleb arvesse võtta kuidas konstruktsioon deformeerub.

## 2.2 Sisejõud ja lõikemeetod

Vastavalt Newtoni III seadusele mõjutavad kaks punktmassi teineteist võrdvastupidiste jõududega. Välisjõudude puudumisel mõjuvad tahke keha punkt-masside vahel molekulaarse päritoluga jõud, mis tagavad talle nn. kuju- ja mahupüsivuse. Seda sorti jõud (mis oma olemuselt on samuti sisejõud) elastusteooria ja tugevusõpetuse seisukohalt tldjuhul huvi ei paku ja neid arvesse ei võeta. Teisisõnu:

- kuna algolekus (välisjõudude puudumisel) loeme me kehad pingetest ja deformatsioonidest vabadeks, siis eeldatakse, et algolekus sisejõud puuduvad;

---

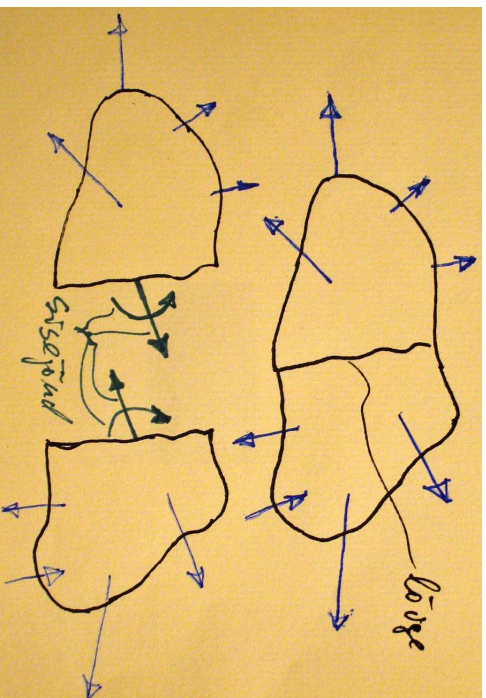
### 2.2. Sisejõud ja lõikemeetod

- meid huvitavad vaid sellised sisejõud, mis ilmnevad kehale rakendatud välisjõudude tulenusena.

Keha sisejõudude ja pingete määramise juures mängib tähtsat rolli lõikemeetod, mille idee on järgmine.

- Vaatleme tasakaalus olevat keha ja lõikame ta mõtteliselt kaheks osaks.
- Selleks, et mõlemad osad oleksid ka pärast (mõttelist) tükeldamist tasakaalus tuleb äralõigatud osa mõju asendada jõududega. Neid jõudusid nimetataksegi (vaadeldavas keha lõikes mõjuvateks) *sisejõududeks*.

Kuna enne (mõttelist) lõiget olid vaadeldava keha osad omavahel järgalt tihendatud, siis me toimime sisejõudude määramise juures analoogiliselt järgale kinnitusele vastavate toereaktsioonide leidmisele staatika kursuses. Viimased peavad välistama nii lõikepinna punktide siirded kui pöörded. Staatika kursusest on teada, et tasapinnalise jõusüsteemi korral on sellisteks reaktsioonideks kaks jõudu ja üks moment ning 3D jõusüsteemi korral kolm jõudu ja kolm momenti.



Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

Rangemalt öeldes on jäiga kinnituse reaktsioonideks siiski üks jõud ja üks moment – reaktsioonjõudude peavektor ja peamoment. Toereaktsioonide leidmise korral määratakse tavaliselt nende kahe vektori projektsioonid koordinaattelgedel. Viimaste abil saab omakorda määrata toereaktsioonide koordinaattelgedel sihilised komponendid. Tasapinnalisel juhul on neist kuuest komponendist kolm samaselt nullid. Täpselt sama loogika kehtib sisejõudude määramise korral.

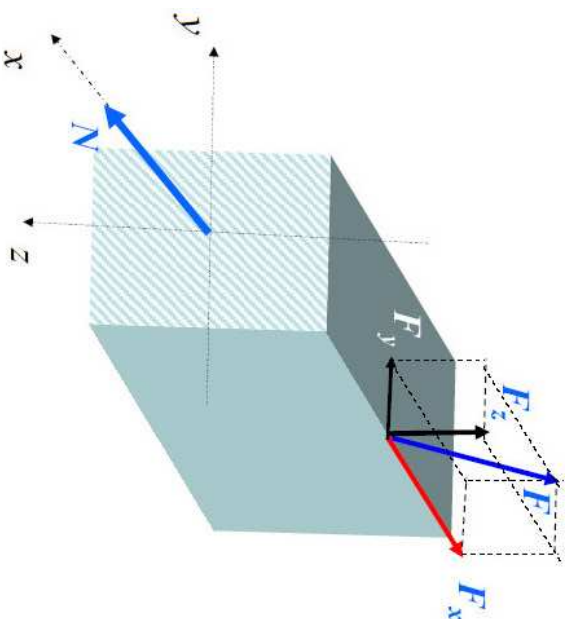
### 2.3. Sisejõudude liigid

Sisejõudude määramiseks tuleb vaadelda keha kumbagi poolt eraldi ning koostada staatikast tuntuud meetodeid kasutades tasakaaluvõrrandid, kust määratakse otsitavad sisejõud. Ettevaatlik tuleb siin olla juhtudel, kui lõige on tehtud jaotatud koormuse mõjumise piirkonnas. Sellisel juhul ei saa kogu jaotatud koormust asendada ühe jõuga nagu staatikas tehti. (**Näide 2-1. Tala sisejõud. Lahendatakse loengus!**)

## 2.3 Sisejõudude liigid

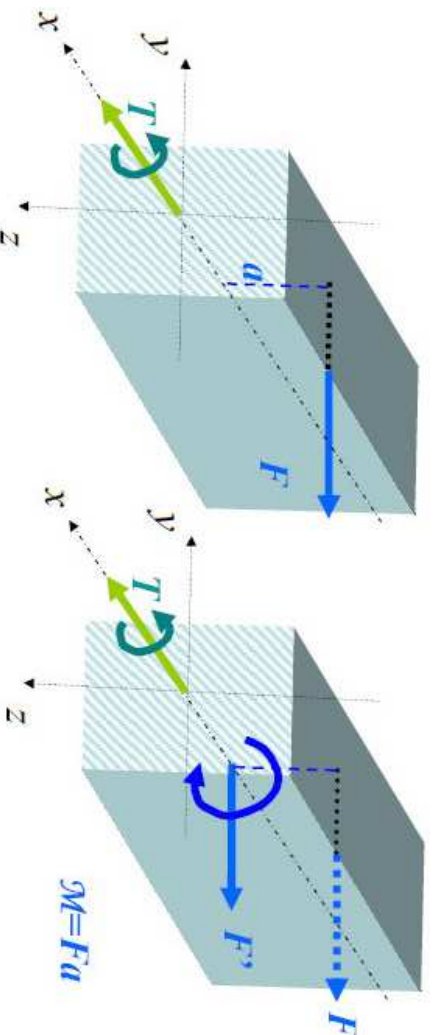
Varraste ja talade (ka plaatide) korral eristatakse sisejõududena *pikijõudu*, *väändmomenti*, *põkijõudu* ja *paindementi*. *Pikijõud* mõjub piki varda telge. Ta saab tekkida, kui välisjõududel on varda telje sihilisi komponente (joon. 2.2).

*Väändmoment* saab vardas tekkida siis, kui välisjõududel on komponente, mis annavad momente varda telje suhtes või talle on rakendatud pöördement, st. välismoment varda telje suhtes (joon. 2.3). Väändmoment pöörab varda ristlõikeid timber varda telje.



Joonis 2.2: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

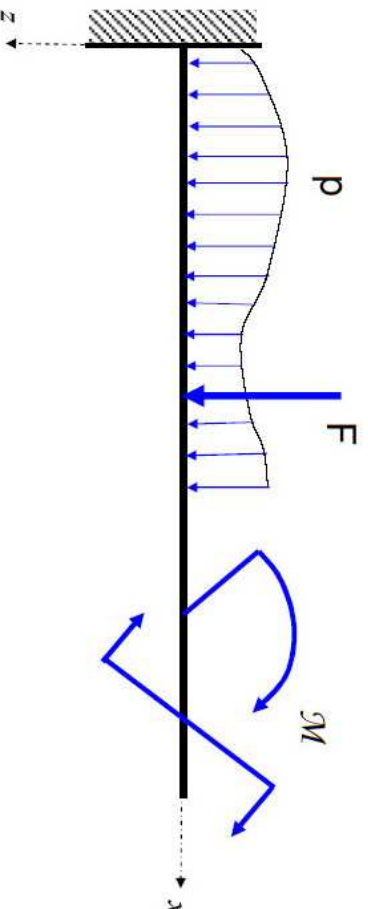


Taandades välisjõu  $F$  varda  $x$ -teljele saame välisjõu  $F'$  ja pöördemomendi  $\mathcal{M}$ .

Joonis 2.3: Vändemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

*Põikjõud* mõjub risti varda teljega ja ”üritab varrast läbi lõigata”. *Paindemomendi* toimel varras kõverdub. Need kaks sisejõudu saavad vardas tekkida siis kui talle mõjuvad välisjõud omavad varda teljega ristuvaid komponente. Lisaks võib *paindemoment* tekkida juhul kui vardale mõjub painet tekitav moment. Selliseid väliskoorumusi on kujutatud joonisel 2.4. Põikjõu sünonüümina kasutatakse ka terminit *lõikejõud*.

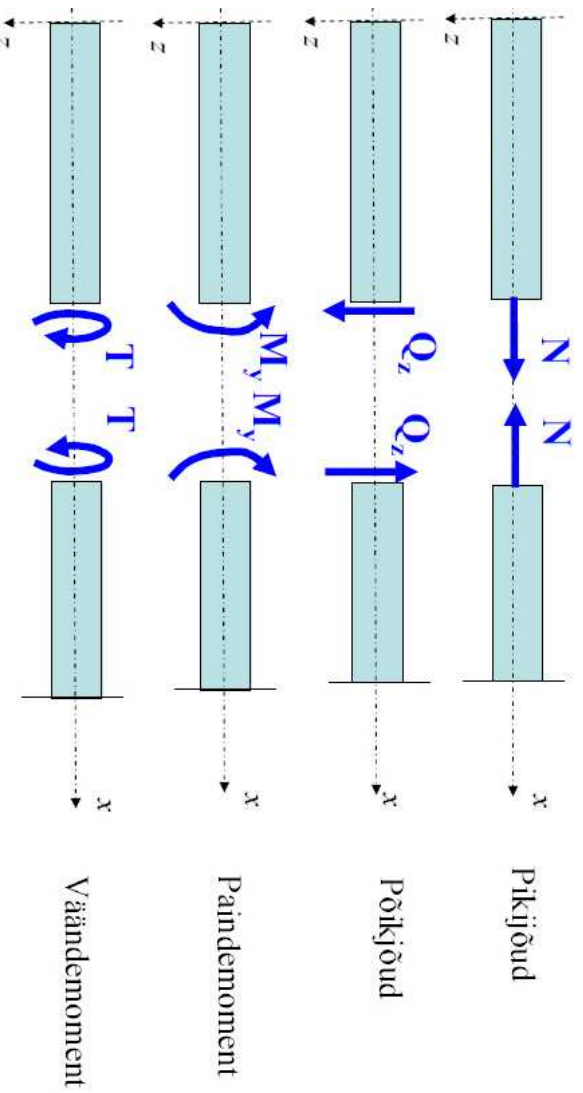


Joonis 2.4: Põikjõud ja paindemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

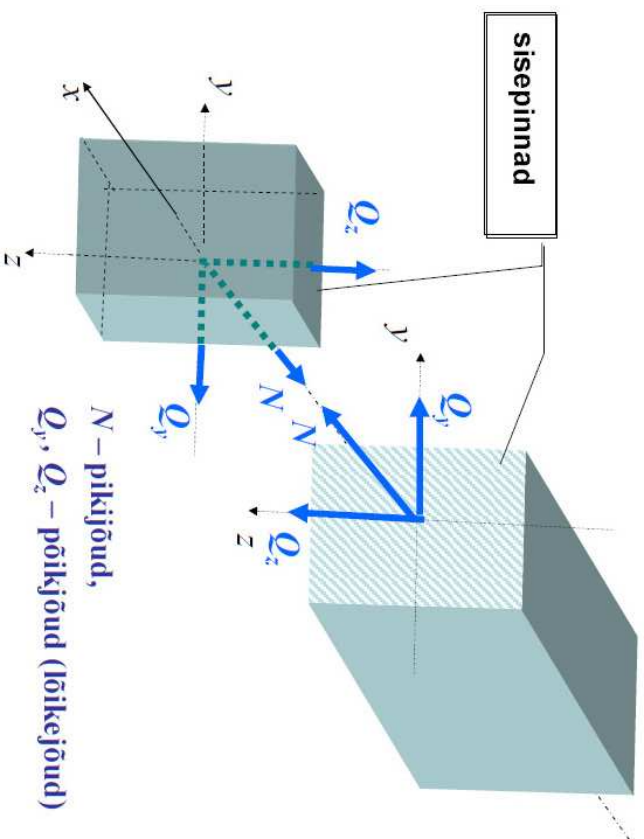
### 2.3. Sisejõudude liigid

Joonisel 2.5 on kujutatud käsitletud sisejõudusid tasapinnalises (2D) juhul ja joonistel 2.6 ning 2.7 3D juhul. Neil joonistel on kasutatud sisejõudude tavapäraseid tähistusi: pikijõud –  $N$ , väändemoment –  $T$ , põikjõud –  $Q$  ja paindemoment –  $T$ .

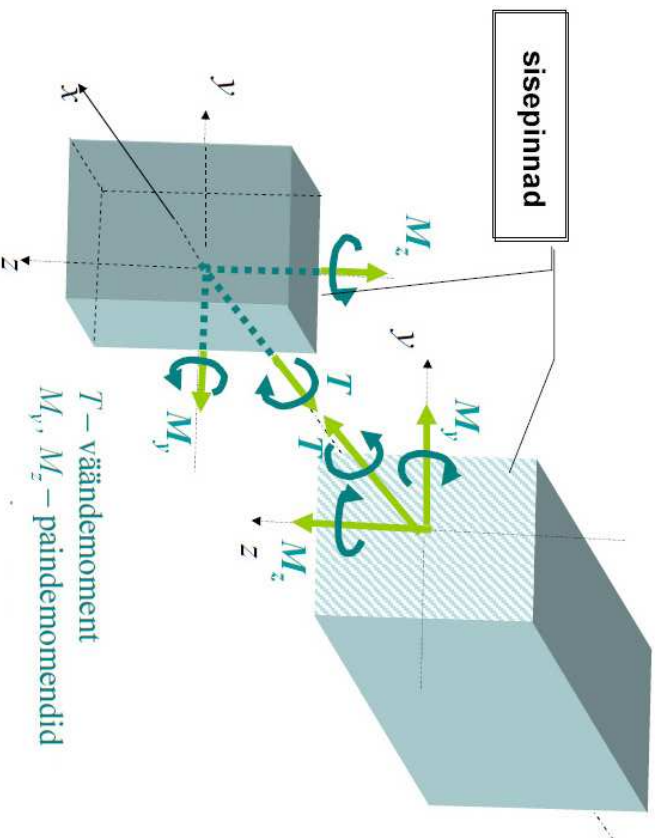


Joonis 2.5: Sisejõudude liigid – 2D juht.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)



Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — pikki- ja põikjõud 3D juhul.  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)



Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemendid 3D juhul.  
NB!  $M_z$  on siin negatiivne, teised positiivsed.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

## 2.4 Sisejõudude märgireeglid

Sisejõudude positiivsetele ja negatiivsetele suundadele on kehtestatud suhteliselt ranged märgireeglid<sup>3</sup>. Enne nende juurde asumist tuleb aga täpsustada koordinaattelgede asend ja tuua sisse mõned mõisted.

Tugevusõpetuses, ehitusmehaanikas ja mõnes muus mehaanika osas, kus käsitletakse varraste, plaatide ja koorikute mehaanikalist käitumist, on tihti kombeks suunata vertikaalne koordinaat telg alla. Kuna pöörde positiivne suund on seotud telgede asendiga, siis loetakse nüüd positiivseks tavapärasega võrreldes vastupidist pööret (vt. 1. peatükk lk. 8). Selline telgede asend oli eelmises alajaotuses juba kasutuses.

Mõttelisel lõikel tekkivat pinda nimetatakse *sisepinnaks* (vt. joon. 2.6 ja 2.7). Tavaliselt tehakse lõiked risti telgedega. Sel juhul saab defineerida positiivsed ning negatiivsed sisepinnad. Sisepinda nimetatakse *positiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattele positiivses suunas ja *negatiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattele negatiivses suunas. Joonistel 2.6 ja 2.7 kujutatud juhtudel on lõikamise käigus tekkinud tagumisel

---

<sup>3</sup>Tõsi küll, erinevte autorite õpikutes ja teatmeteostes võib kohata väga erinevaid märgireegleid.

vardaosal positiivne sisepind ja eesmisel vardaosal negatiivne sisepind. Joonisel 2.5 kujutatud 2D juhul on positiivne sisepind tekkinud varda vasakpoolsel osal ja negatiivne parempoolsel osal.

Tala painde uurimisel osutuvad tähtsateks nn. *positiivsed ja negatiivsed kiud*. Varda mõttelisi kiudusid nimetatakse positiivseteks kui  $z$ -koordinaat on selles tala osas positiivne. Ja vastupidi, varda mõttelisi kiudusid nimetatakse negatiivseteks kui  $z$ -koordinaat on selles tala osas negatiivne. Selline määratlus kehtib juhul kui tala paindub  $x - z$  tasapinnas (joon. 2.4). Kui paine toimub aga  $x - y$  tasapinnas, siis on positiivsed ja negatiivsed kiud määratud  $y$ -telje abil.

Graafiliselt on *sisejõudude positiivsed suunad* 2D juhu jaoks kujutatud joonisel 2.8 ning 3D juhu jaoks joonistel 2.6 ja 2.7 (välja arvatud  $M_z$ , mis on joonisel 2.7 negatiivne). Sõnastatult on sisejõudude märgireeglid järgmised.

- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
  - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.

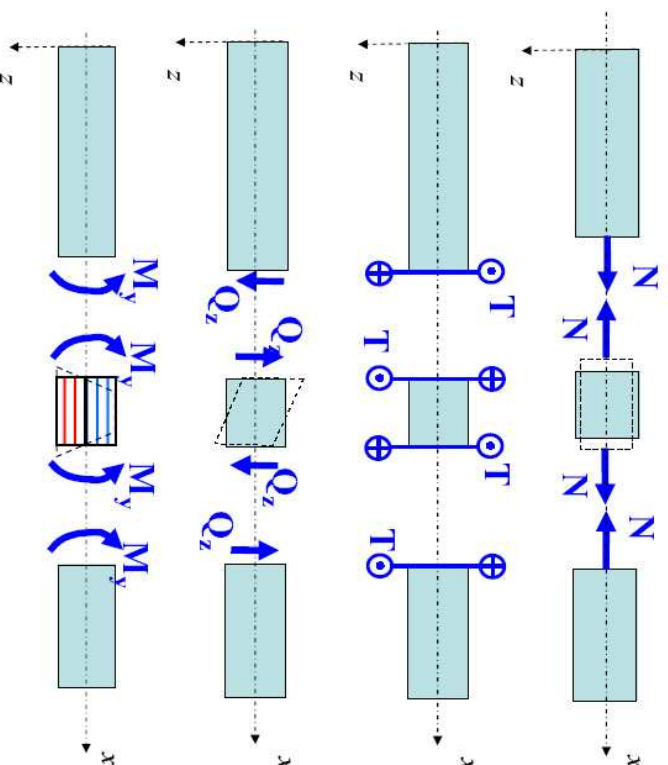


- **Väändmomenti** *positiivne suund* on määratud kruvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjuv väändmoment on positiivne kui väändmomenti suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
- **Positiivne põikjõud**  $Q_z$  mõjub positiivsel sisepinnal  $z$ -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal  $z$ -telje negatiivses suunas.
  - Analoogiline märgireegel kehtib ka põikjõu  $Q_y$  jaoks.
  - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne põikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
- **Positiivne paindemoment** tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
  - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

**Märkus:** Piki- ja põikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändmomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

#### 2.4. Sisejõudude märgireeglid

#### Vara sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



2

Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

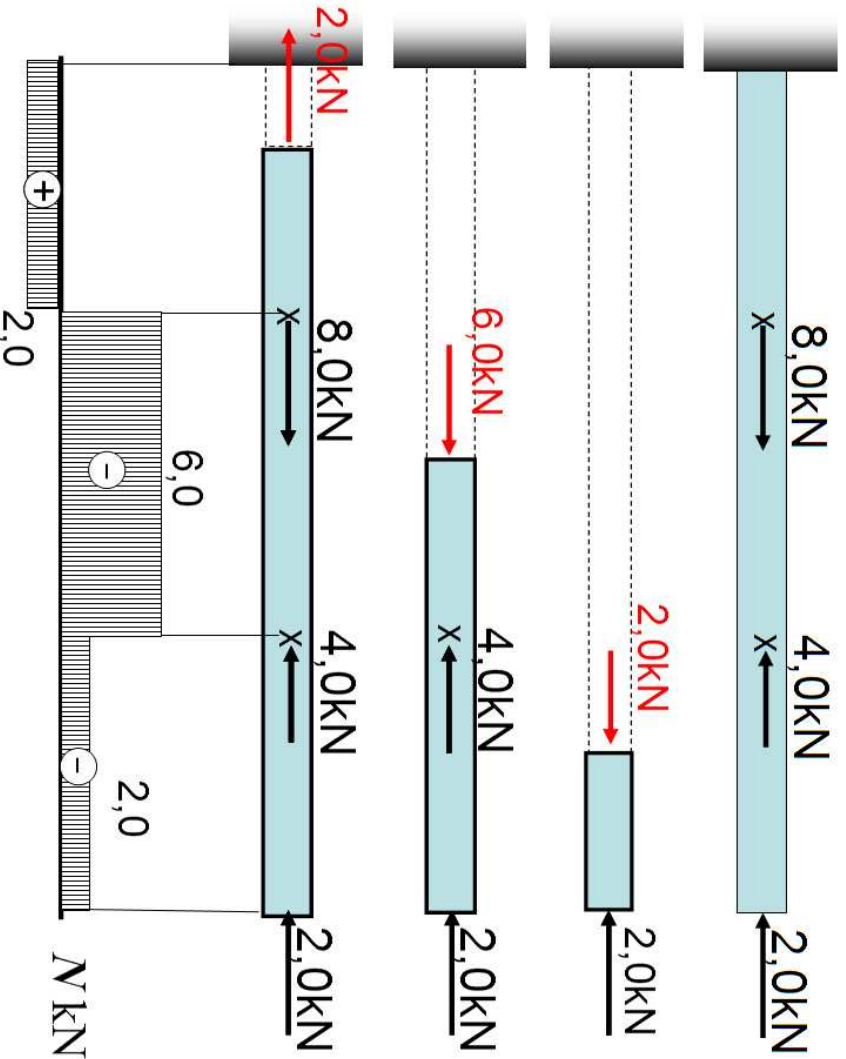
Sisejõudused on tavaliselt kasulik teada igas varda ristlõikes ning seetõttu on osutunud otstarbekaks esitada neid graafiliselt. Vastavaid graafikuid nimetatakse eesti keeles *epüürideks*<sup>4</sup>. Enam vähem analoogiliselt, st. epüüride abil, esitati staatika kursuses lauskoormusi ehk jaotatud koormusi. Epüüri kõrvale kirjutatakse tema nimi ja ühikud. Näiteks  $N$ -epüür kN, või lühidalt  $N$  kN.

Epüüride koostamist selgitame järgnevate näidete abil, pärinevad emeriitprofessor Jaan Metsaveere õppematerjalidest.

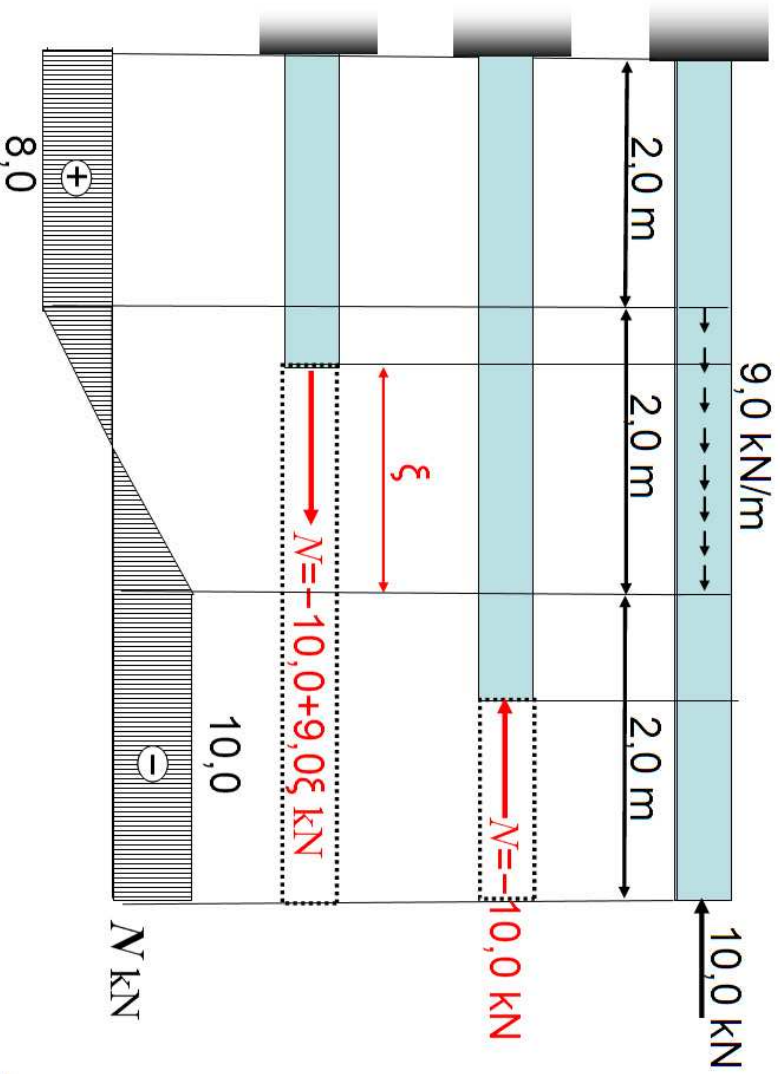
<sup>4</sup>Inglise keeles on epüüri vaste *diagram*, näiteks põikjõu epüür on inglise keeles *shear-force diagram*

#### 2.4. Sisejõudude märgireeglid

Näide 2-2. Koostada pikijõu epüür.

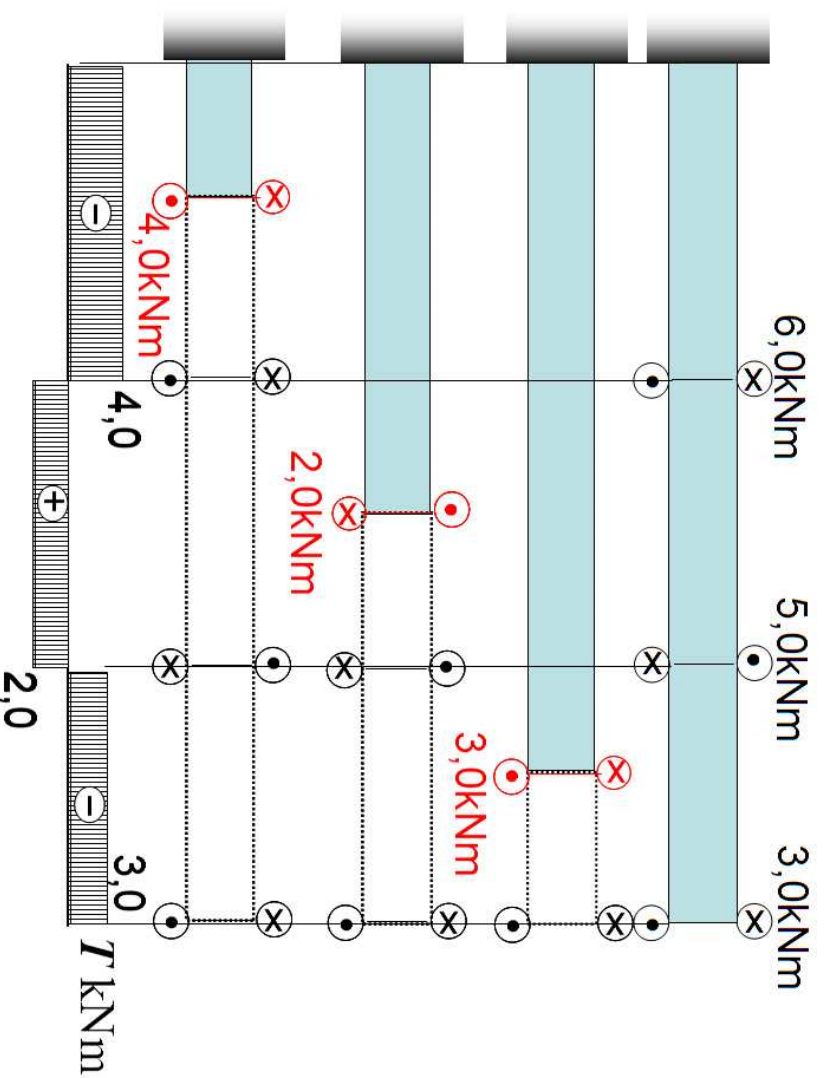


Näide 2-3. Koostada pikijõu eptiir.

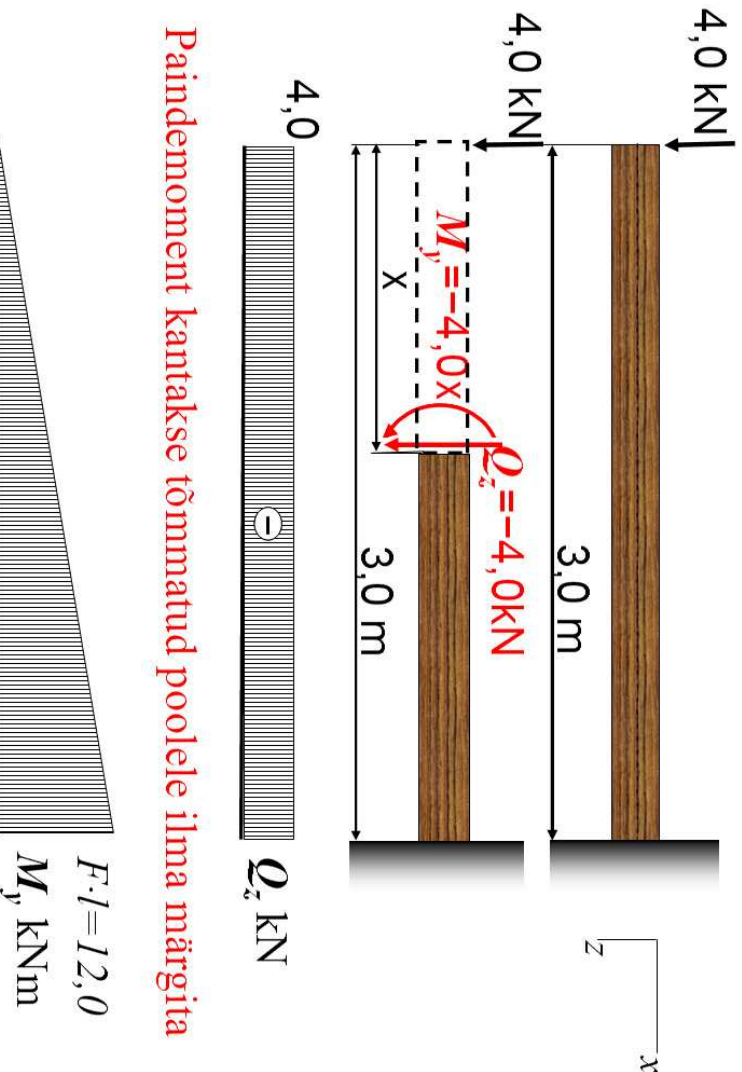


2.4. Sisejõudude määrivõrgid

Näide 2-4. Koostada vändemomendi eptiir.

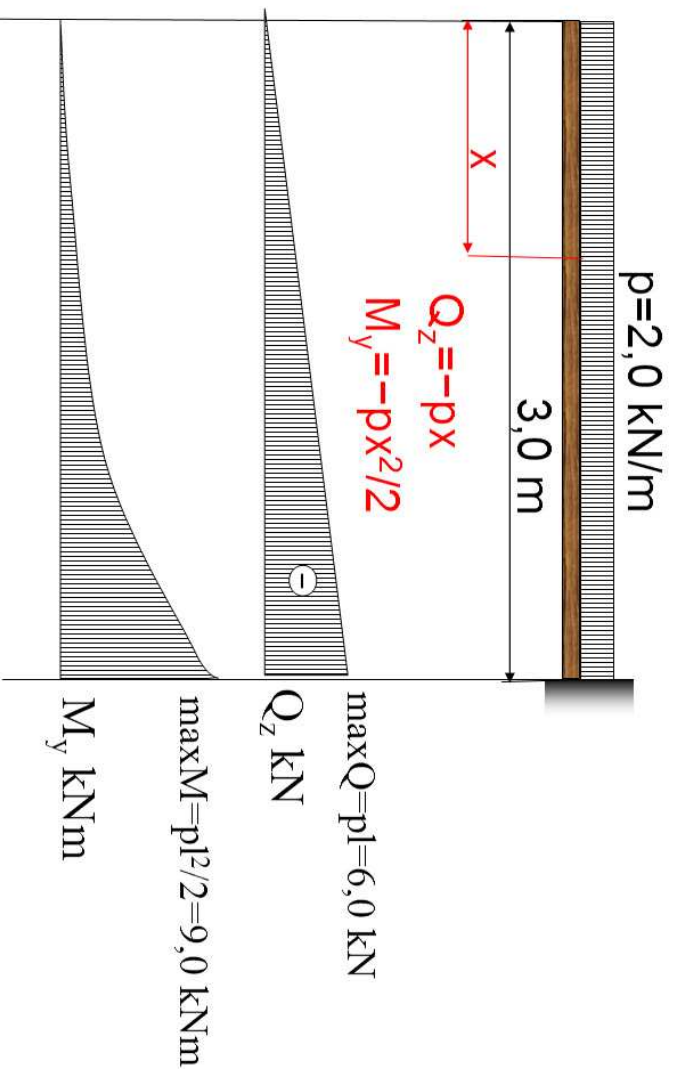


Näide 2-5. Koostada põikjõu ja paindemomendi eptüür.

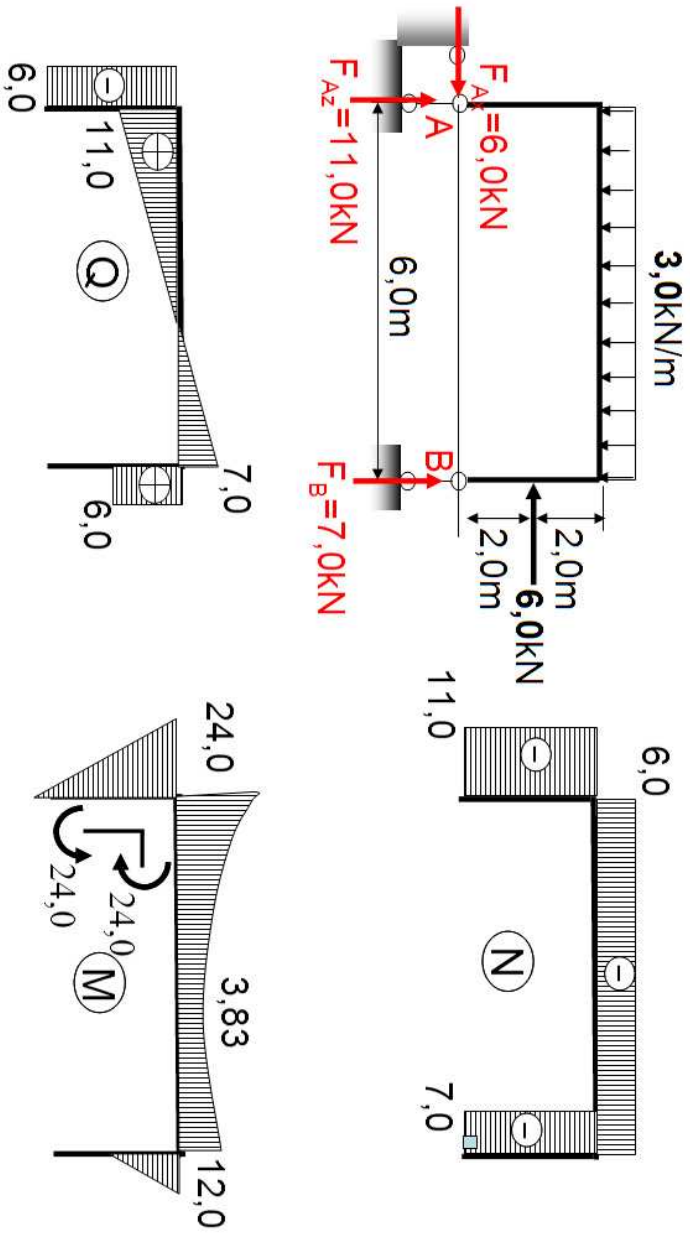


Paindemoment kantakse tõmmatud poolele ilma märgita

Näide 2-6. Koostada põikjõu ja paindemomendi eptüür.



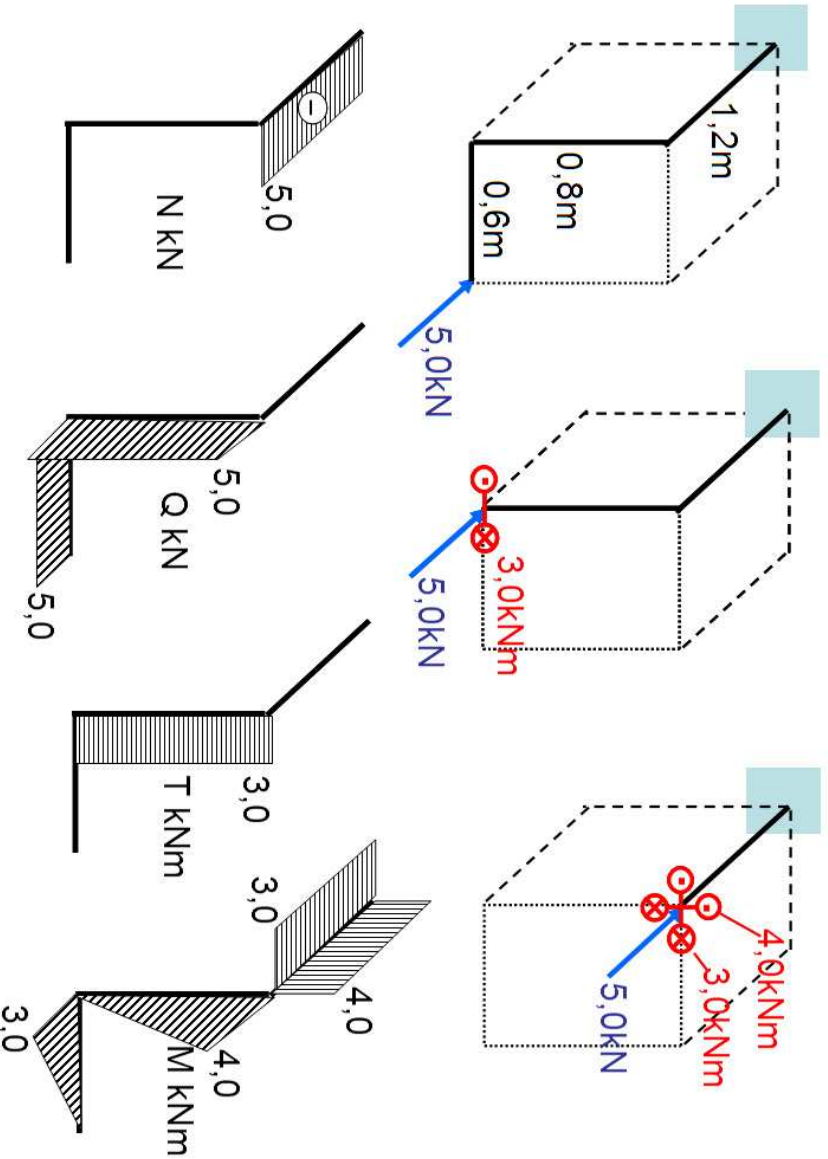
Näide 2-7. Koostada tasandraami sisejõudude epüürid.



$$M_{\min} = -24,0 + 11,0^2 / 2 \cdot 3,0 = -3,83 \text{ kNm}$$

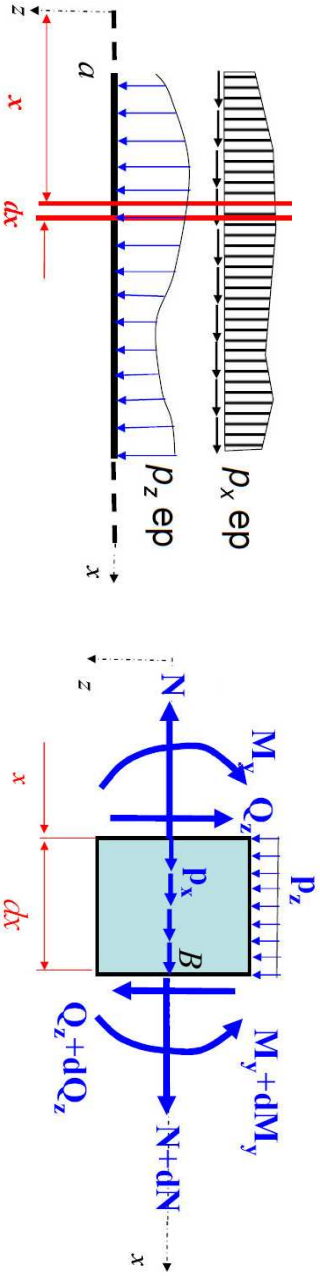
2.4. Sisejõudude määrivõrglid

Näide 2-8. Koostada murrtud varda sisejõudude epüürid.



## 2.5 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Vaatleme varda osa, kus piki telge mõjub lauskoormus intensiivsusega  $p_x$  ja risti teljega lauskoormus intensiivsusega  $p_z$ . Koordinaadil  $x$  on vardast ristlõigete abil eraldatud lõpmata lühike element pikkusega  $dx$  (joon. 2.9). Koostame selle elemendi jaoks tasakaaluvõrrandid, projekteerides kõik talle mõjuvad jõud  $x$ - ja  $z$ -teljele ning leides momentid punkti  $B$  suhtes.



Joonis 2.9: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsuse (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

### 2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= N + dN - N + p_x \cdot dx = 0, \\ \sum_i F_{iz} &= Q + dQ - Q_z + p_z \cdot dx = 0, \\ \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) &= -M_y - Q_z \cdot dx + M_y + dM_y + p_z \cdot dx \cdot (0, 5dx) = 0, \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga  $dx$  läbijagamist, ning viimasest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalset:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga  $dx$  ning integreerime lõigul  $[a, x]$ :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

*Järeldused.* Äsjatuletatud seosed ning vaadeldud näited võimaldavad teha olulisi järeldusi sisejõudude epiüiride kuju (käitumise) kohta.

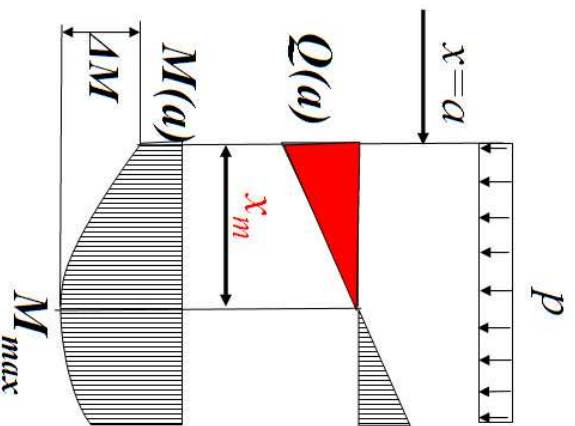
1. Piirkondades, kus lauskoormus puudub, on pikki- ja põikjõud konstantsed, paindemoment on aga sellises piirkonnas lineaarfunktsioon koordinaadist  $x$ .
2. Koondatud välisjõu rakenduspunktis toimub vastava sisejõu epiüüris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva välisjõu suurusega.
3. Koondatud välismomendi rakenduspunktis toimub painde- või väändemomendi epiüüris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva momendi suurusega.
4. Paindemomendi epiüüri tõus on võrdne põikjõuga. Kohas, kus põikjõud on null, on paindemomendil ekstremaalne väärtus.
5. Kohas, kus põikjõu epiüüris on hüpe, on paindemomendi epiüüris murdekoht (epiüüri tõus muutub hüppeliselt). Erijuhul, kui hüpe käigus muutub ka põikjõu märk, on paindemomendil selles kohas ekstreemum.
6. Piirkonnas, kus väline lauskoormus on konstantne, on põik- ja pikijõud

*2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel*

lineaarsed funktsioonid koordinaadist  $x$ . Paindemoment on sellisel juhul aga ruutfunktsioon.

7. Epiüüride joonistamisel on otstarbekas meeles pidada, et määratud integraal esitab integreeritava funktsiooni graafiku ja  $x$ -telje vahele jääva kujundi pindala (lõigul  $[a, x]$ ).

**Näide 2-9.** Paindemomendi ekstreemumi määramine.



$$\Delta M = 1/2 Q(a)x_m,$$

kuna

$$x_m = Q(a)/p,$$

siis

$$\Delta M = Q^2(a)/2p$$

$$M_{max} = M(a) + Q^2(a)/2p$$

## 2.6 Pinge mõiste

On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemeetodi korral on sisejõud tegelikult jaotunud üle kogu lõikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud kuus sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi projekttsioone koordinaattelgedel.

Lõikepinnal mõjuva lauskoormuse intensiivsust nimetamegi *pingeks*. Tema mõõtühik  $1\text{ Pa} = 1\text{ N}/\text{m}^2$  langeb kokku rõhu ühikuga.

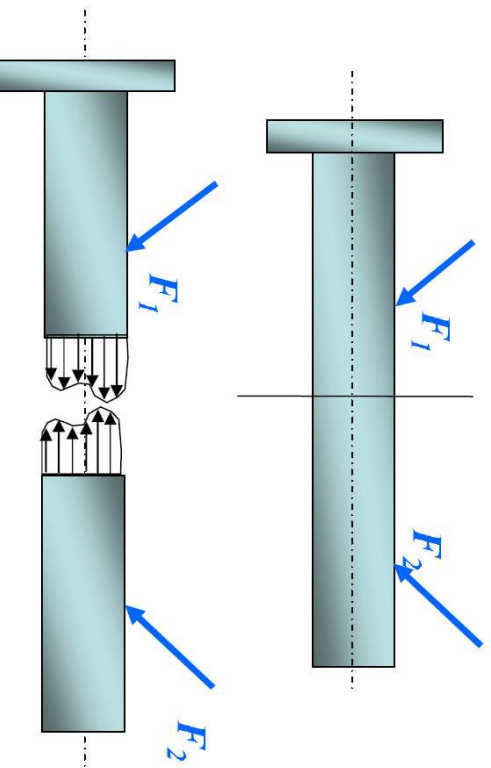
Kõige lihtsam on pinget arvutada juhul kui vardas mõjub vaid pikijõud. Siin eeldatakse, et pikijõud  $N$  on jaotunud ühtlaselt üle kogu lõikepinna  $A$  (joon. 2.11) ja seega pinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.3)$$

Oma olemuselt on vaadeldav pinge *normaalpinge*, sest ta mõjub risti vaadeldava pinnaga. Käesolevas kursuses tähistatakse normaalpingeid kreeka tähega  $\sigma$  ja vajadusel lisatakse indeks, mis osutab pinnanormaali sihile. Eestikeelsetes tugevusõpetuse ja tehnilise mehaanika õpikutes nimetatakse pikijõust põhjustatud normaalpingeid ka *pikikepingeteks*.

### 2.6. Pinge mõiste

### 2 - 32

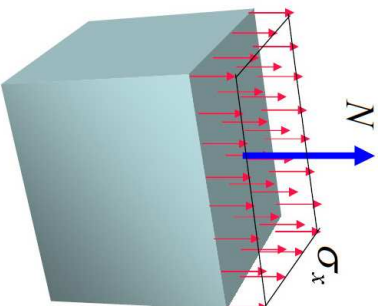


Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

Alajaotustes 2.2–2.6 kasutatud lähenemisviis, kus sisejõud jaotakse vastavalt sellele, kuidas nad on orienteeritud koordinaattelgde suhtes<sup>5</sup> ja pinged saavad oma nime selle järgi, millise sisejõuga on neil põhjuslik seos, on iseloomulik just tugevusõpetusele (tehnilisele mehaanikale). Sama lähenemisviisi on aga otstar-

<sup>5</sup>Koordinaatteljed orienteeritakse omakorda uuritava keha geometriast lähtudes.





Joonis 2.11: Pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

bekas rakendada ka elastsusteooria tulesannete korral kui uuritavateks objektideks on vardad (talad), plaadid ja koorikud.

Järgmises alajaotuses selgitame pinge mõistet pisut tildisemalt ning ülejäärgmises tuleme tagasi tugevuspõpetuses kasutatava lähenemisiivi juurde ja hakkame uurima pingeid varda ristlõike punktis.

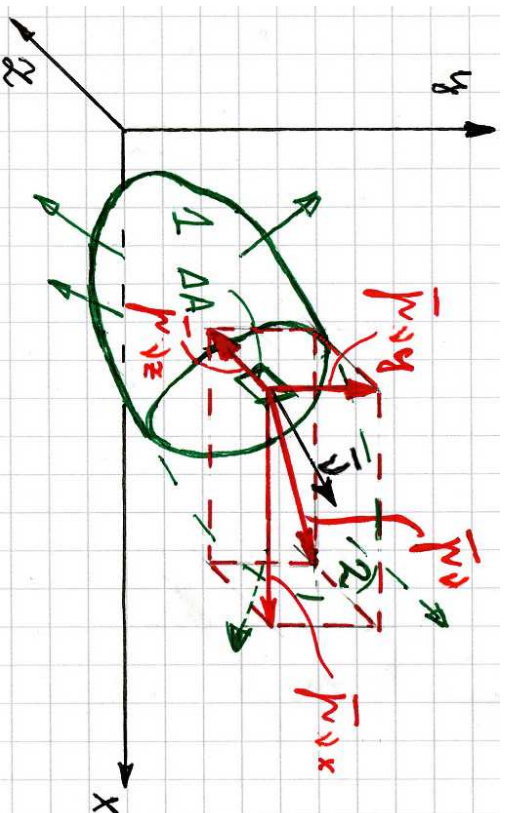
### 2.7. Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

2 - 34

## 2.7 Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.12).

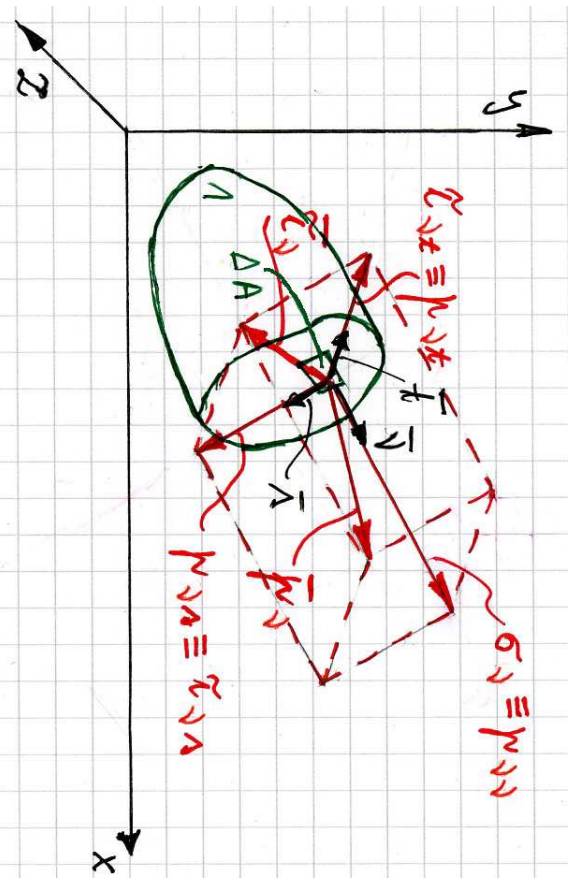
Joonis 2.12: Pingevektor  $\mathbf{P}_v$  ja tema koordinaattelgede  $xyz$  sililised komponendid.

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaaliga  $\nu$ . Mõjugu väikesel pinnal  $\Delta A$  sisejõud  $\Delta S$ . Suhet  $\Delta S / \Delta A$  võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal  $\Delta A$ .
- Kui minna piirile  $\Delta A \rightarrow 0$ , saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga  $\nu$*

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta A}. \quad (2.4)$$

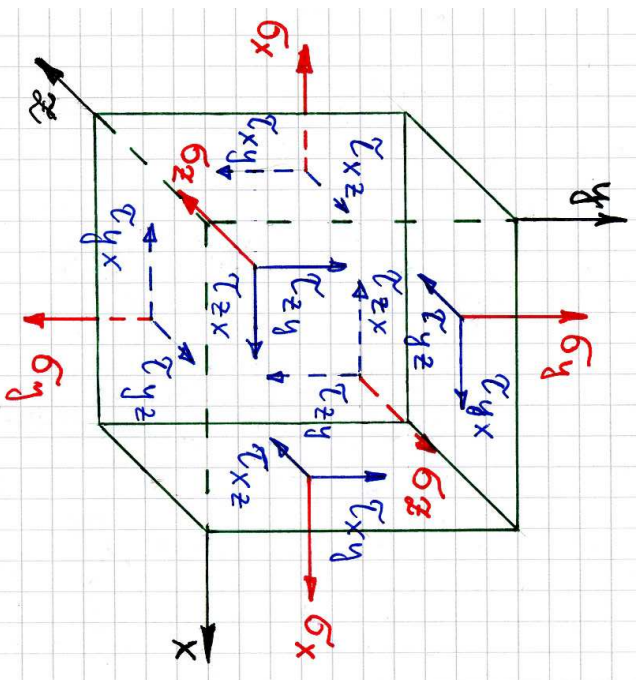
- Üldjuhul vektorite  $\nu$  ja  $\mathbf{p}_\nu$  suunad ei tihti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingvektori asemel tema projektioone koordinaattelgedel  $p_{\nu x}$ ,  $p_{\nu y}$ ,  $p_{\nu z}$ , mis omakorda määravad ära pingvektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgede  $xyz$  sihilised komponendid (vt. joon. 2.12). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormali sihti ja teine pinge-komponendi mõjumise sihti.

## 2.7. Pingvektor, tema projektioonid ja märgiregolid

Joonis 2.13: Pingvektori  $\mathbf{p}_\nu$  lahutamise normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pingvektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*:  $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$ . Nihkepinge  $\boldsymbol{\tau}_\nu$  lahutatakse tavaselt veelkord kaheks komponendiks:  $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$  (vt. joon. 2.13, kus  $\mathbf{p}_{\nu\nu} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$ ,  $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$  ja  $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ ).

Kui lõike pind on paralleelne koordinaatasanditega, siis kasutatakse indeksi  $\nu$  asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks  $x$ .



Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

**Märgiregolid:** joonis 2.14.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

## 2.8. Pingetensor

## 2.8 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaatasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja kuus nihkepinget  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada  $3 \times 3$  (tasandilisesannete korral  $2 \times 2$ ) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Selle juurde tuleme tagasi pisut hiljem, kui hakkame käsitleda pingeid kalddpindadel, peapingeid jms.

### 2.8.1 Skalaar, vektor, tensor

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tensoreid.

*Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus.

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

*Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund.

- 3D juhul esitatav arvukolmikuna —  $3 \times 1$  või  $1 \times 3$  matriksina.
  - Arvud arvukolmikus sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
  - Vektori moodul ja suund on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Vektori iga komponent (projektsioon) on samuti seotud tihed suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihete indekseid.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.

---

#### 2.8. Pingetensor

#### 2 - 40

*Teist järku tensor* on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

- 3D juhul on teist järku tensor esitatav  $3 \times 3$  matriksina, st. 9 arvu abil.
  - Arvud matriksis sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
  - Tensor ise on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- Teist järku tensori komponentide tähistamisel kasutatakse kahte indekseid, sest iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda.
  - Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.

- Teisest küljest (“matemaatiliselt”) on teist järku tensor  $\mathbf{T}$  defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori  $\mathbf{u}$  vektoriks  $\mathbf{v}$ , i.e.

$$\mathbf{T} : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

kus punkt  $\cdot$  tähistab tensori  $\mathbf{T}$  sisekorrutist<sup>7</sup> vektoriga  $\mathbf{u}$ .

### Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada  $3 \times 3$  maatriksina ja iga vektori arvukolmikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga  $3 \times 3$  maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.
  - Pärast koordinaat teisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.

<sup>7</sup>Punktkorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product*, *dot product*, *scalar product*.

- \* Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
- \* Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõetmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
- \* Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi  $xy$  ja  $x'y'$ , mille vaheline nurk on  $\theta$ .

### Märkused:

- Vektoreid võib nimetada esimest järku tensoreiks ja skalaare nullindat järku tensoreiks.
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga).
  - Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

## 2.8.2 Pingetensori invariantid

Suuruseid

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (2.6)$$

nimetatakse *pingetensori invariantideks* ehk lihidalt *pinge invariantideks*. Invariantus tähendab siin seda, et need kolm suurust ei sõltu koordinaatide valikust (vaatamata sellele, et pingetensori komponendid omavad erinevates koordinaatsüsteemides illdjuhul erinevaid väärtusi). On märkimisväärne, et see invariantus ei piirdu vaid erinevalt orienteeritud Descartes'i ristkoordinaatidega vaid kehtib suvaliste koordinaatsüsteemide, k.a. silindrilised, sfäärilised, elliptilised, hüperboolsed jne. vahel.

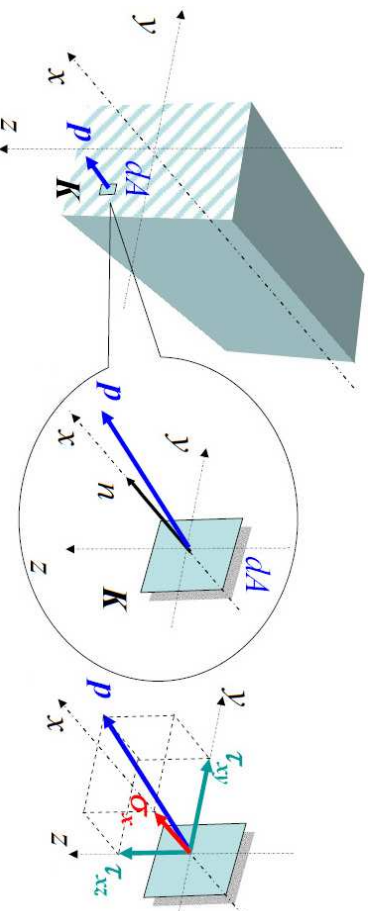
**Märkus:** Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

## 2.9. Pinged varda ristlõike punktis.

2 - 44

## 2.9 Pinged varda ristlõike punktis.

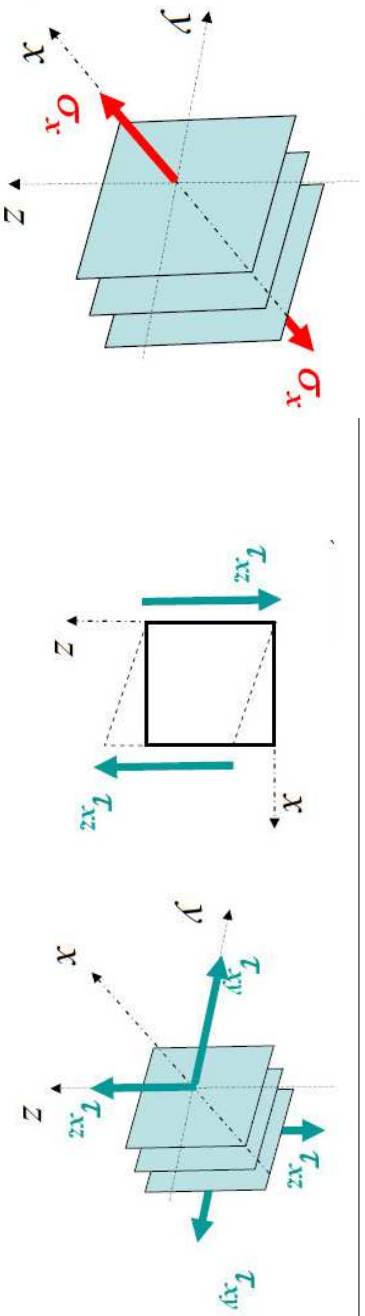
Varda korral on Descartes'i ristkoordinaadid valitud tavaliselt nii, et  $x$ -telg on varda teljeks. Seetõttu on  $x$ -telg ristlõike normaaliks ja teised 2 koordinaattelge on suunatud mööda lõikepinda. Vaatleme varda ristlõike punkti  $K$ , mida läbib pind normaaliga  $\mathbf{n} \parallel x$ . Seal mõjub pingektor<sup>8</sup>  $\mathbf{p}$  mille normalkomponendiks on  $\sigma_x$  ning tangentsiaalkomponentideks  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .



Joonis 2.15: Pinge varda punktis

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

<sup>8</sup>Siin oleme lihiduse pärast loobunud indeksist  $\mathbf{n}$  pingektori juures.



Joonis 2.16: Normaalpinge  $\sigma_x$  ning nihkepinged  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsistist.)

- Normaalpinged  $\sigma_x$  iseloomustavad varda telje sihis mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad muudavad varda ristloigete vahelist kaugust.
- Normaalpinge  $\sigma_x$  määrgireegel on analoogiline pikijõu määrgireeglga.
- Nihkepinged iseloomustavad varda teljega risti mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad nihutavad (või pööravad) erinevaid varda lõikeid (materjalikihte) üksteise suhtes.
- Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  määrgireegel on analoogiline põikjõu määrgireeglga.

## 2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

### 2.10 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Pinge mõiste selgitamisega tegime algust alajaotuses 2.6, käesolevas alajaotuses tuletame seosed varda ristloikes mõjuvate sisejõudude ja pingete vahel. Siinjuures peame silmas, et ristloikes mõjuvad sisejõud ei kujuta endast mitte midagi muud kui samas ristloikes mõjuvate pingete peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedele. Pikemalt seletades:

1. ristloikes mõjuvad pinged moodustavad jõuvälja, mille saab vastavalt staatika põhiteoreemile taandada ristloike pinnakeskmesse,
  - selle tulemusena on pinged asendatud ühe jõu ja ühe momendiga;
2. projekteerides saadud jõu ja momendi koordinaattelgedele saame peavektori ja peamomendi lahutada kolmeks koordinaattelgede sihiksiks komponentiks,
  - saadud kuus komponenti kannavad meile juba tuntud nimetusi – pikijõud ( $N$ ), põikjõud ( $Q_y$  ja  $Q_z$ ), väändemoment ( $T$ ) ning paindemoment ( $M_y$  ja  $M_z$ ).

On selge, et rääkides seostest pingete ja varda sisejõudude vahel on võimalikud nn. kaks erinevat ülesande püstitust:

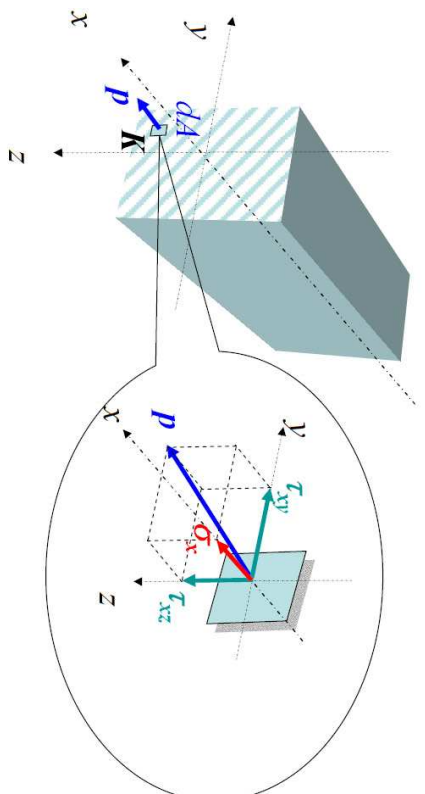
1. Teades pingeid, leida sisejõud.
2. Teades sisejõudusid, leida pinged.

Esimene neist on tunduvalt lihtsam, kuid teine suurema praktilise tähtsusega (vähemalt tugevusõpetuse seisukohalt).

### 2.10.1 Sisejõudude avaldamine pingete kaudu

**Pikijõud.** Vaatleme ristlõike elementaarpinna  $dA$ , kus mõjub keskmine pinge  $\mathbf{p}$ , millele vastav normaalpinge on  $\sigma_x$  (joon. 2.17). Vaadeldaval elementaarpinna pingest  $\sigma_x$  põhjustatud summaarne jõud  $\sigma_x dA$  mõjub samuti pinnanormaali  $\mathbf{n}$  sihis. Ristlõikes mõjuvate normaalpingete peavektori saame integreerides:

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.7)$$



Joonis 2.17: Pinged varda ristlõike elementaarpinna  $dA$ .  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

**Põikjõud.** Ristlõikes mõjuvate põikjõudude  $Q_y$  ja  $Q_z$  arvutamine käib analoogiliselt pikijõuga. Nüüd vaadeldakse ristlõike elementaarpinna  $dA$  mõjuvaid nihkepingeid  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  (pingevektori  $\mathbf{p}$  projektsioon  $y$ - ja  $z$ -telgedel, vt. joon. 2.17) ja saadakse põikjõudude leidmiseks valemid

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.8)$$



*Paindemomendid*  $M_y$  ja  $M_z$  on seotud normaalpingega  $\sigma_x$ . Kui paine toimub  $x - z$  tasandis, siis iseloomustab painet paindemoment  $M_y$  ning kui  $x - y$  tasandis, siis  $M_z$ . Eksperimentide põhjal on leitud, et momendid  $M_y$  ja  $M_z$  tuleb arvutada ristloike kesktelgede<sup>9</sup> suhtes. Vastavalt paindemomendi märgireeglile põhjustab elemetaarpinnal  $dA$  mõjuv summaarne jõud  $\sigma_x dA$  elemetaarpaindemomendid  $z\sigma_x dA$  ja  $y\sigma_x dA$  vastavalt  $y$ - ja  $x$ -telje suhtes (vt. joon. 2.17). Vastavad peamomendid saadakse integreerimise teel:

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \quad \text{ja} \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA. \quad (2.9)$$

*Väändmoment.* Ristloikes mõjuva väändemomendi arvutamise juures tuleb silmas pidada, et vastavalt sisejõudude ja pingete märgireeglitele põhjustab elemetaarpinnal  $dA$  mõjuv positiivne nihkepinge  $\tau_{xz}$  positiivse väändemomendi ja positiivne nihkepinge  $\tau_{xy}$  negatiivse väändemomendi (vt. joon. 2.17). Integreerides üle kogu ristloike, saame

$$T = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA. \quad (2.10)$$

<sup>9</sup>Ristloike keskteljed läbivad ristloike pinnakeset.

## 2.10.2 Pingete avaldamine sisejõudude kaudu

Elmises alajaotuses (st. 2.10.1) tuletatud valemite korral pole tähtis, kas kasutusel on tugevusõpetuse (ehk nn. elementaartheooria) eeldused ja hüpoteesid või lineaarse elastsusteooria omad. Käesolevas alajaotuses osutub aga ülitähtsaks täpsustada, et praegust rakendametugevusõpetusele ehk nn. elementaartheooriale vastavaid lihtsustusi. Universaalsena<sup>10</sup> kuulub nende hulka *ristloigete tasandilisuse hüpotees*, ehk *Bernoulli hüpotees*: ristloiked, mis enne deformatsiooni olid tasapinnalised, jäävad ka peale deformatsiooni tasapinnalisteks.

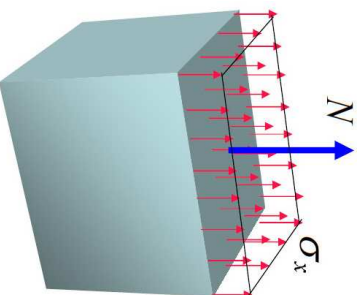
*Pikikepinged.* Pingeid, mis on põhjustatud pikijõust, nimetatakse *pikikepingeteks*. Siin eeldatakse, et

- vardale mõjub vaid piki tema telge mõjuv väliskoorumus,
  - seega mõjub varda ristloigetes vaid üks sisejõud — pikijõud,
- pikijõust põhjustatud normaalpinge on jaotunud ühtlaselt üle kogu ristloike (vrd. Bernoulli hüpotees ja vt. joon. 2.18).

<sup>10</sup>See hüpotees kehtib elementaartheooria raames tõmbel-survel, paindel, lõikel ja väändel.

Seega saame seose

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.11)$$



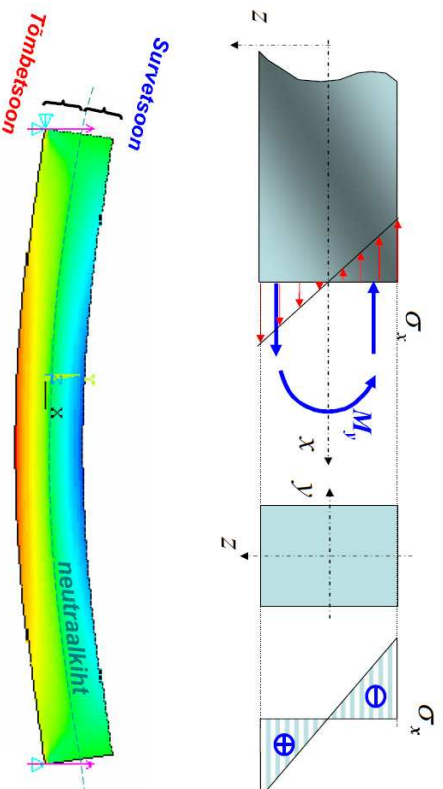
Joonis 2.18: Pikijõud ja pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

**Paindepinge.** Paindemomendist põhjustatud pingeid nimetatakse *paindepingeteks*. Oma olemuselt on paindepinged normaalpinged. Mõjuгу talale selline väliskoorumus, mille toimel tekib üks sisejõud – paindemoment  $M_y$  (joon. 2.19). Eksperimentaalsete ja teoreetiliste tulemuste põhjal ning kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga eeldatakse elementaarteoorias, et tekkinud paindepinge

2.10. Seosed pingete ja varnda sisejõudude vahel

2 - 52



Joonis 2.19: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

sõltub koordinaadist  $z$  lineaarselt, st,

$$\sigma_x = kz, \quad (2.12)$$

kus  $k$  on konstant, mille määramiseks kasutame seoseid (2.9):

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA = \int_A kz^2 dA = kI_y, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_y}{I_y}. \quad (2.13)$$

Avaldiste (2.12) ja (2.13) põhjal

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.14)$$

Tugevusarvutuste seisukohalt omavad tähtsust just maksimaalsed paindepinged, mis tekivad neis ristlõike punktides, kus koordinaat  $z$  omab ekstreemalseid väärtusi ( $z_{\max}$  ja  $z_{\min}$ ). Kui ristlõige on sümmeetriline  $y$ -telje suhtes, siis on  $z_{\max} = -z_{\min}$  ja arvutuste lihtsustamiseks võib tuua sisse *ristlõike tugevusmomenti*

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (2.15)$$

Viimase abil saame maksimaalse paindepinge arvutamiseks valem

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}. \quad (2.16)$$

Kui talale mõjuva väliskoorumuse toimel tekib vaid paindemoment  $M_z$ , siis saame eelnevatega analoogilised valemid

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (2.17)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad \max \sigma_x = \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.18)$$

2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

2 - 54

**Märkused:**

- Tugevusmomentide  $W_y$  ja  $W_z$  arvutamise juures tuleb silmas pida, et kui ristlõikeks on liitkuju, st. ta on jaotatav  $n$  lihtsaks osakujuandiks, siis tuleb kõigepealt leida liitkujuandi inertsimomentid  $I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)}$  ja/või  $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)}$ . Seejärel arvutatakse tugevusmomentid  $W_y$  ja  $W_z$  valemite (2.15) ja (2.18)<sub>1</sub> põhjal<sup>11</sup>.
- Kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga on paindepingete arvutamise juures eeldatud, et paindemomentist  $M_z$  põhjustatud paindepinged on  $z$  järgi konstantsed ja  $M_y$  põhjustatud paindepinged on  $y$  järgi konstantsed, vt. valemid (2.14) ja (2.17). Viimaste valemitega esitatud lineaarsed seosed on samuti kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga.
- Varda paindel jääb surutud ja tõmmatud kihtide vahele kiht, milles nn. kiindude pikkus ei muutu ja kus paindepinge on null (vt. joon. 2.19). Vastavat varda kihti nimetatakse *neutraalkihiks*. Neutraalkihi ja ristlõike lõikejoont nimetatakse *nulljooneks*.

<sup>11</sup> NB!  $W_y \neq W_y^{(1)} + W_y^{(2)} + \dots + W_y^{(n)}$  ja  $W_z \neq W_z^{(1)} + W_z^{(2)} + \dots + W_z^{(n)}$

- On selge, et  $x - z$  tasapinnas toimuva painde korral on  $z = 0$  korral paindepinge  $\sigma_x = 0$ .
- Elementaar-teooria korral eeldatakse, et nulljooned on määratud kesk-peatelgedega.

**Näide 2-10.** Pikkepinged vardas. Lahendatakse loengus.

**Näide 2-11.** Paindepinged talas. Lahendatakse loengus.

### Väände- ja löikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändmomentidist ja löikepinge põikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomentidist põhjustatud normaalpingete leidmine, siis pihendame neile omaette jaotise.

---

### 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

## 2.11 Nihkepinged varda ristlõikes<sup>12</sup>

### 2.11.1 Üldised seaduspärasused

#### Nihkepingete paarsuse seadus.

Elementaar-teoorias kasutatakse nn. nihkepingete paarsuse seadust, mis tule-tatakse järgmiselt<sup>13</sup>. Eeldame, et vardas on homogeenne pingeseisund ehk ho-mogeenne pingus<sup>14</sup>. Sellisel juhul peavad elementaar-risttahuka vastastahkudel mõjuma võrdvastupidised pinged. See tingimus kehtib nii normaal- kui nihke-pingete kohta ning ta on tuletatud tasakaalutingimustest  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$  ja  $\sum F_{iz} = 0$  (vt. joon. 2.20 a) ja b)). Teatavasti on aga tasakaaluks vajalik veel kolme võrrandi kehtimine, st.  $\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0$ ,  $\sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0$  ja  $\sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$ . Nende põhjal saadaksegi nihkepingete paarsuse seadus (vt. joon. 2.20 c):

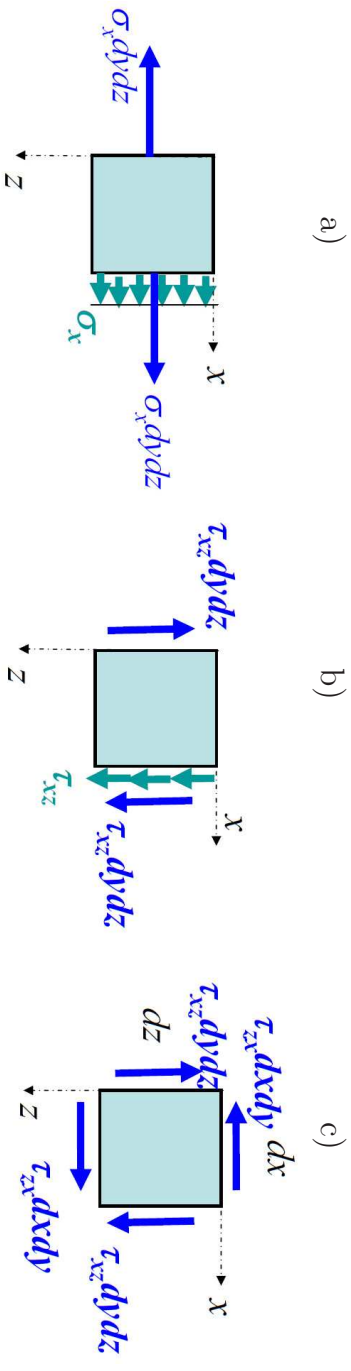
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.19)$$

<sup>12</sup>Joonised on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.

<sup>13</sup>Hiljem esitame sama seaduspärasuse jaoks rangema tuletuskäigu.

<sup>14</sup>Pinguse ehk pingeseisundi all mõistetakse keha punkti lähivatel kõlkvõimalikel pindadel mõjuvate pingete hulka. Pinguse mõiste juurde tuleme hiljem tagasi.

Homogeenne pinguse korral on keha kõigis punktides tihesugune pingus.

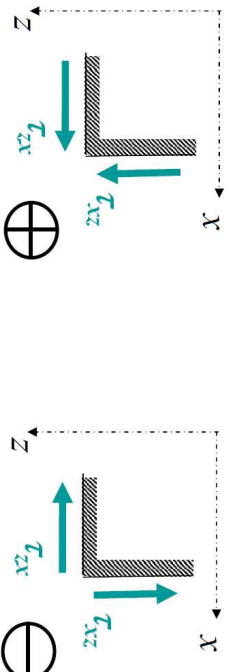


Joonis 2.20: Elementaarriisttahuka tahkudel mõjuvad pinged.

Näiteks,

$$\sum M_y(\mathbf{F}_i) = -(\tau_{xz} dy dz) dx + (\tau_{zx} dx dy) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.20)$$

Avaldiste (2.19) põhjal on selge ka see, et kui mingis keha punktis on nihkepinge  $\tau_{xy} > 0$ , siis ka  $\tau_{yx} > 0$  ja vastupidi (vt. joonis 2.21). Analoogilised seosed kehtivad ka tilejäanud kahe nihkepingete paari jaoks.



Joonis 2.21: Nihkepingete paarsus.

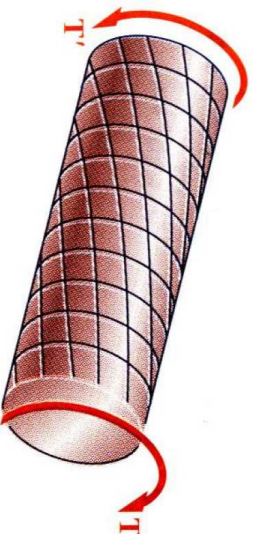
### Nihkepinged ristlõike serval

- Ristlõike serval mõjub nihkepinge puutuja sisihis.
- Kuna ristlõike nurgapunktis on lõpmata palju puutujaid, siis seal on nihkepinge null.

## 2.11.2 Väändepinged ümarvarda ristlõikes

Olgu ümarvarda otstesse rakendatud momendid  $T$  ja  $T'$  (joonis 2.22). Selle tulemusena tekib vardas deformatsioon, mida nimetatakse *väändeks*. Väändel tekkivate pingete ja teformatsioonide uurimisel on elementaar-teoorias kasutusel järgmised eeldused:

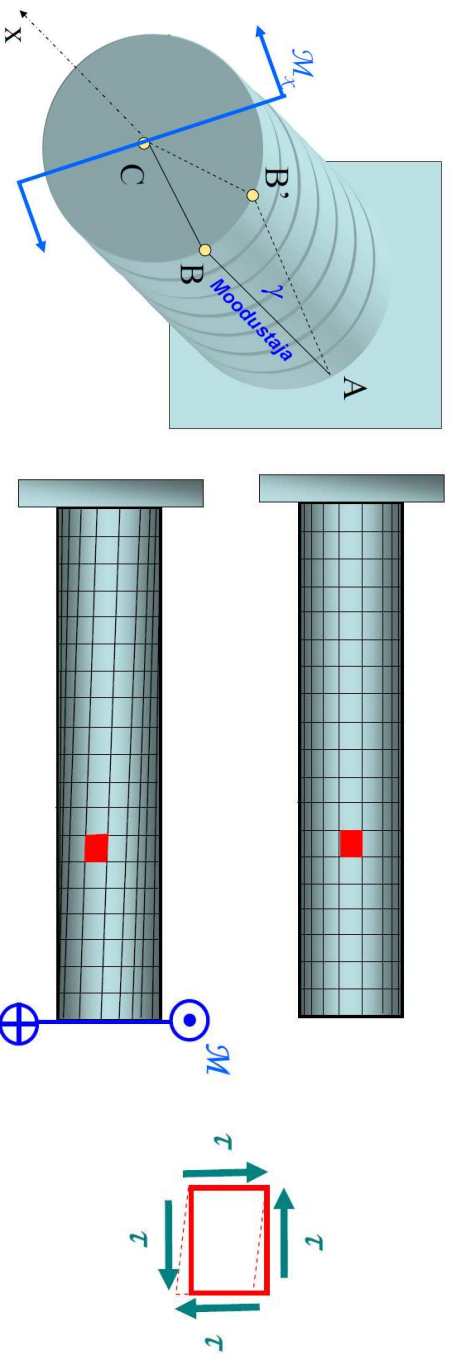
- Kehtib Bernoulli hüppotees.
- Varda telg jääb sirgjooneliseks.
- Ristlõike raadiused jäävad sirgjooneliseks.



allikas: [www.clarkson.edu/class/es22201/3\\_torsion.ppt](http://www.clarkson.edu/class/es22201/3_torsion.ppt)

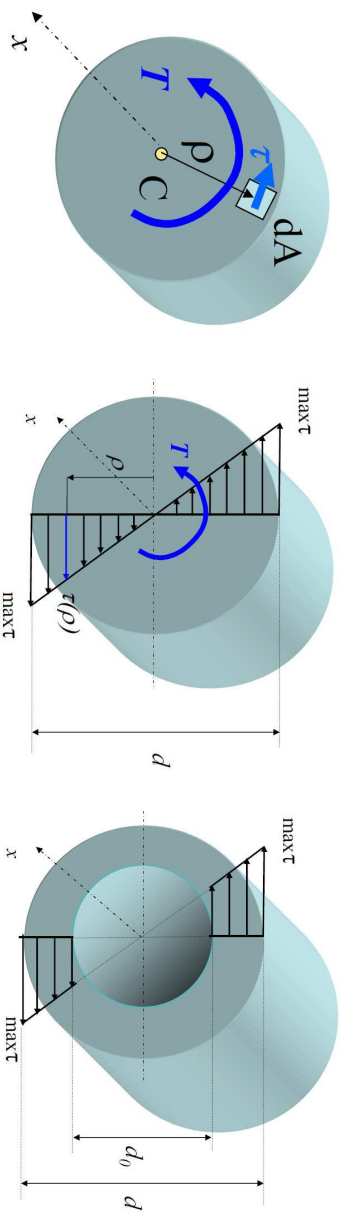
Joonis 2.22: Ümarvarda väände.

## 2.11. Niikepinged varda ristlõikes



Joonis 2.23: Väändedeformatsioon.

Tehtud eelduste põhjal pöörduvad ristlõiked väändel timber varda telje. Selle tulemusena pöörduvad varda moodustajad nurga  $\gamma$  võrra. Seega on väändedeformatsioon oma olemuselt nihkedeformatsioon ja algsed ristkülikulised pinnalemendid muutuvad rööpkülikulisteks. Nurka  $\gamma$  nimetatakse *väändnurkaks*, ta on üks oluline väännet iseloomustav suurus ja tema juurde tuleme hiljem tagasi.



Joonis 2.24: Väändepinged ümarvardas ja paksuseinallisel torus.

Tehtud eeldustest ja Hooke'i seadusest (pingete ja deformatsioonide vahel on lineaarne sõltuvus) lähtudes peab väändepinge olema lineaarfunktsioon varda raadiusest  $\rho$ , s.t.  $\tau = k\rho$  (joon. 2.24). Konstandi  $k$  määrame väändemomendi ja väändepinge vahelisest seosest kasutades polaarinertsimomenti  $I_\rho$ :

$$T = \int_A \rho \tau dA = k \int_A \rho^2 dA = k I_\rho \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T}{I_\rho}. \quad (2.21)$$

Nüüd saame väändepinge jaoks valemi

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_\rho 2}. \quad (2.22)$$

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

Valemid (2.22) kehtivad ka rõngasristlõike korral (vt. joon. 2.24).

Väändepingete arvutamise valem on paljuski analoogiline paindepingete arvutamise valemiga: maksimaalsed pinged on ristlõike servas. Seega on ka siin võimalik sisse tuua ristlõike tugevusmoment – antud juhul nimetatakse seda polaar-tugevusmomentiks – mille abil saab määrata maksimaalseid väändepingeid:

Ristlõige	$I_\rho$	$W_\rho$
	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$ $c = \frac{d_0}{d}$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4)$

Joonis 2.25: Polaarinertsimomendid ja polaar-tugevusmomentid.

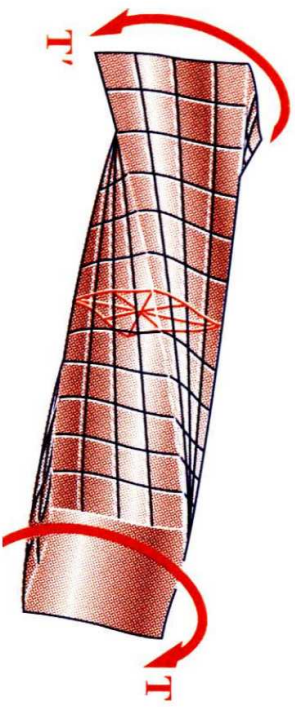
$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{2I_\rho}{d} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho}. \quad (2.23)$$

Tihti kasutatakse polaarinertsimomendi ja polaar-tugevusmomenti tähistena vastavalt  $I_\rho$  ja  $W_\rho$ , st. kasutatakse indeksi  $\rho$  asemel indeksi  $p$ .

**Näide 2-12.** Väändepinged ümar- ja rõngasristlõikes. Lahendatakse loengus.

### 2.11.3 Väändepinged mitteümaristlõigetes

Ümar- ja rõngasristlõigete korral on väändepinged arvutamise suhteliselt lihtne, kuid muude ristlõigete, st. mitteümaristlõigete, korral on see tundvalt keerulisem. Bernoulli hüpoteesi taoliste ristlõigete korral tavaliselt enam ei kehti (joon. 2.26). Selliseid väändepinget



allikas: [www.clarkson.edu/class/es22201/3\\_torsion.ppt](http://www.clarkson.edu/class/es22201/3_torsion.ppt)

2.26). Selliseid väändepinget

Joonis 2.26: Ristkülikvarda väände.

käsitletakse lineaarses elastsusteoorias. Elementaartheooria (tugevusõpetuse) kursustes refereeritakse vaid lineaarse elastsusteooria raames saadud tulemusi, piirdudes tavaliselt maksimaalsete väändepingete valemitega kujul

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}, \quad (2.24)$$

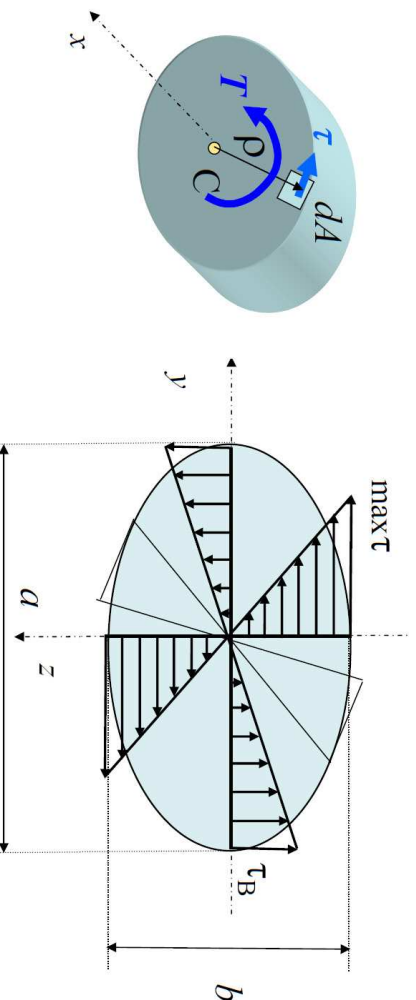
kus  $W_t$  on ristlõike tugevusmoment.

#### 2.11. Niikepinged varda ristlõikes

#### Elliptiline varras

Elliptilise ristlõikega vardas arvutatakse pingeid pooltelgede otstes järgmiste valemitega (joon. 2.27):

$$W_t = \frac{\pi ab^2}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi ab^2}, \quad \tau_B = \frac{16T}{\pi a^2 b}. \quad (2.25)$$



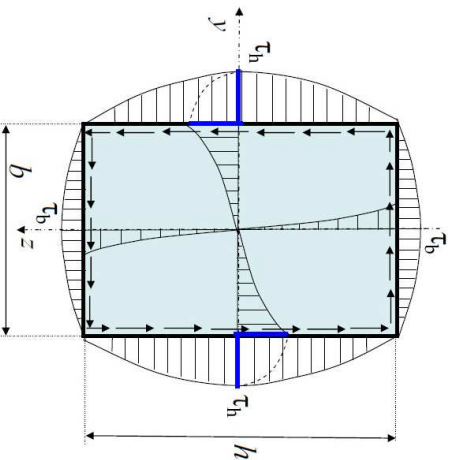
Joonis 2.27: Elliptilise ristlõikega varda väände.



### Ristkülikuline varras

Ristkülikulise ristlõikega vardas on väändepinged pikki servi jaotunud parabool-selt ja omavad maksimumalmeid väärtusi servade keskpunktides. Ristlõike nurkades on väändepinged nullid (joon. 2.28). Iseloomulikud pinged leitakse valemitega

$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.26)$$



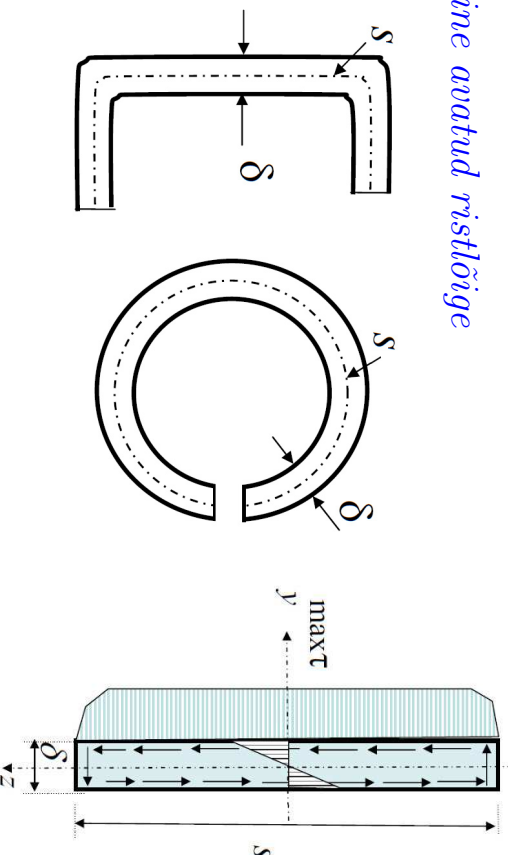
$h/b$	1	1,2	1,5	2	3	5	10	$\infty$
$k_h$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
$k_b$	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vardas.

**Näide 2-13.** Väändepinged ristkülikulises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

### 2.11. Niikepinged varda ristlõikes

### Õhukeseseinaline avatud ristlõige



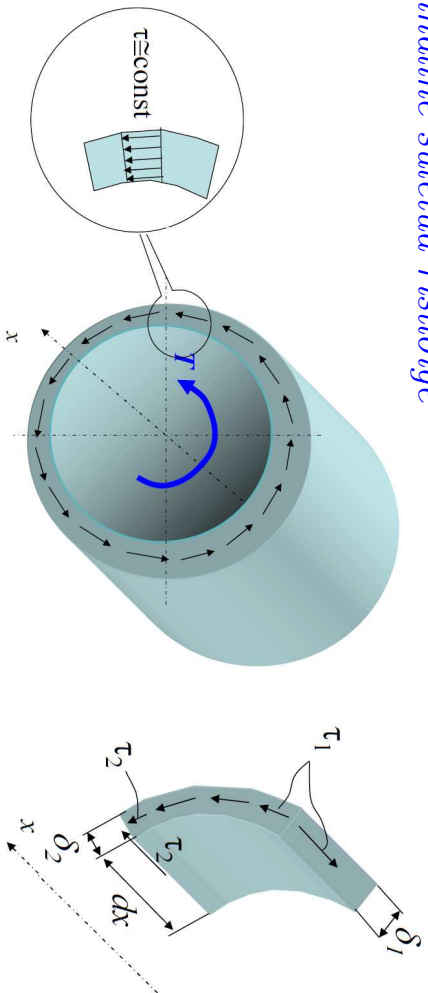
Joonis 2.29: Väändepinged õhukeseseinalises avatud ristlõikes.

Väga mitmed konstruktsioonielemendid on valmistatud metall-lehtedest, mille ristlõike paksus  $\delta$  on väike võrreldes kõrgusega  $s$  (joon. 2.29). Vastavalt tabelile joonisel 2.28 on sellise ristlõike korral  $k_h = 0.333 = 1/3$  ja ristlõike tugevusmoment ja maksimaalne väändepinge

$$W_t = \frac{s\delta^2}{3}, \quad \tau_{\max} = \frac{3T}{s\delta^2}. \quad (2.27)$$

Valemid (2.27) kehtivad ka metall-lehest tehtud avatud ristlõikega varraste jaoks.

## Õhukeseseineline suletud ristlõige



Joonis 2.30: Väändepinged õhukeseseinälises suletud ristlõikes.

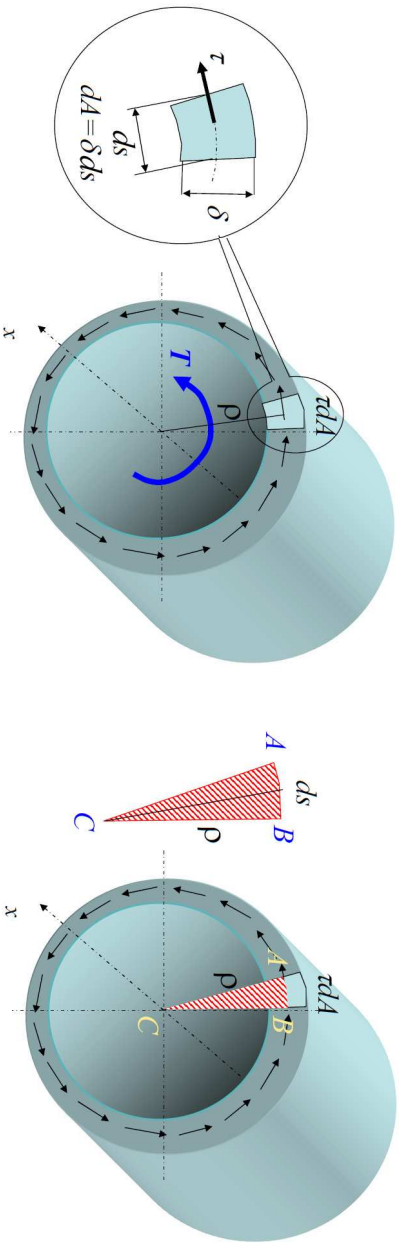
Vaatleme muutuva seinapaksusega suletud ristlõiget (joon. 2.30). Kuna seinapaksus on väike, siis loeme pinge seinapaksuse järgi konstantseks. Samas on lihtne näidata, et paksemas osas on pinge väiksem ja õhemas osas suurem. Projekteerime joonise 2.30 parempoolsel osal kujutatud jõud  $x$ -teljele:

$$\sum F_{ix} = -\tau_1 \delta_1 dx + \tau_2 \delta_2 dx = 0. \quad (2.28)$$

kust saamegi, et

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 \quad \text{ehk} \quad \tau \delta = \text{const}. \quad (2.29)$$

## 2.11. Niikepinged varda ristlõikes



Joonis 2.31: Väändepinged õhukeseseinälises suletud ristlõikes.

Järgnevalt tuletame valemid maksimaalse väändepinge arvutamiseks. Alustame nagu tavaliselt väändemomendi ja väändepingete vahelisest seosest<sup>15</sup> (joon. 2.31):

$$T = \int_A \rho \tau dA = \oint_s \rho \tau \delta ds. \quad (2.30)$$

Kuna  $\tau \delta = \text{const}$  ja  $\rho ds = 2d\omega$  on kolmnurga  $ABC$  kahekordne pindala, siis

$$T = \tau \delta \oint_s \rho ds = 2\tau \delta \oint_s d\omega = 2\tau \delta \omega, \quad (2.31)$$

<sup>15</sup>Vasakpoolsel joonisel on  $ds$  asemel  $s$

kus  $\omega$  on ristlõike keskjoonega piiratud kujundi (antud juhul ringi) pindala (vt. joon. 2.32).

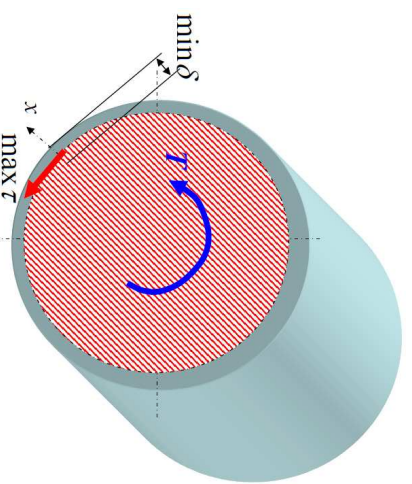
Kuna  $\tau\delta = \text{const}$ , siis vastab maksimaalsele väändepingele minimaalne seinapaksus ning tuues sisse õhukeseseinalises suletud ristlõike tugevumomendi väändel

$$W_t = 2\omega\delta_{min} \quad (2.32)$$

saame maksimaalse väändepinge leidmiseks valemid

$$\frac{T}{W_t} = \frac{T}{2\omega\delta_{min}}. \quad (2.33)$$

Joonis 2.32: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

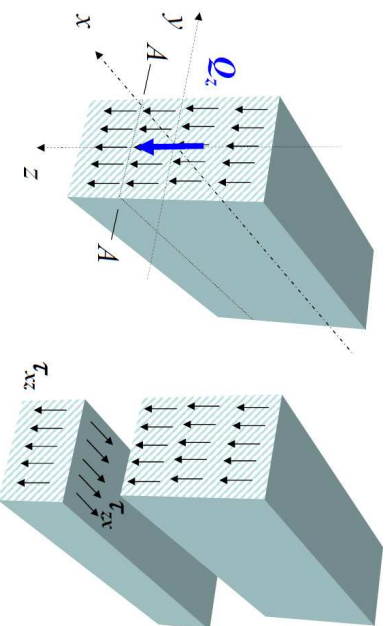


**Näide 2-14.** Väändepinged avatud ja suletud õhukeseseinalises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

### 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

#### 2.11.4 Lõikepinge

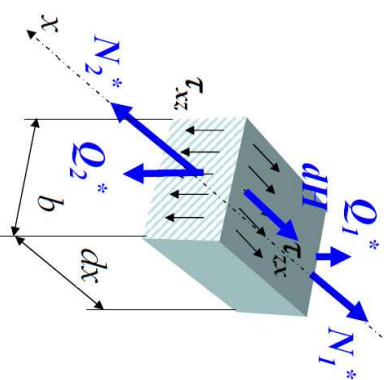
Vaatleme tala, kus mõjub põikjõud  $Q_z$  (joon. 2.33). Teatavasti on põikjõud  $Q_z$  lõikepingete  $\tau_{xz}$  peavektoriiks. Põikjõud  $Q_z$  esineb alati koos paindemomendiga  $M_y$  ja seega mõjuvad vadeldaval ristlõikel ka normaalspinged  $\sigma_x$ , mida sel joonisel ei ole kujutatud. Lisaks eeldame, et tala on kooramatud nii tema pealne ja alumine pind on nihkepingest vabad.



Joonis 2.33: Põikjõud ja lõikepinged (1)

Põikjõust põhjustatud pingete ristlõikes jaotumise seaduspäraste selgitamiseks teeme talas täiendava lõike ja vaatleme parempoolisel joonisel 2.33 kujutatud alumise osa tasakaalu. Nihkepingete paarsuse seaduse põhjal mõjuvad vaadeldava vardaosa pealmisel pinnal nihkepinged  $\tau_{zx}$ .

Eraldame nüüd tala alumisest osast väikese rsitrahuka pikku-  
sega  $dx$ , lainusega  $b$  ja "muttu-  
va" kõrgusega  $h/2 - z$ . Risttahuka ots-  
tahkudel mõjuvad pikijõud  $N_1^* \neq N_2^*$   
ja põikjõud  $Q_1^* \neq Q_2^*$ ; Pealmisel  
tahul mõjub pingete  $\tau_{zx}$  peavektor  
 $dH$ . Eeldades, et  $N_2^* > N_1^*$  saame  
tasakaalutingimusest  $\sum F_{ix} = 0$



Joonis 2.34: Põikjõud ja lõikepinged (2)

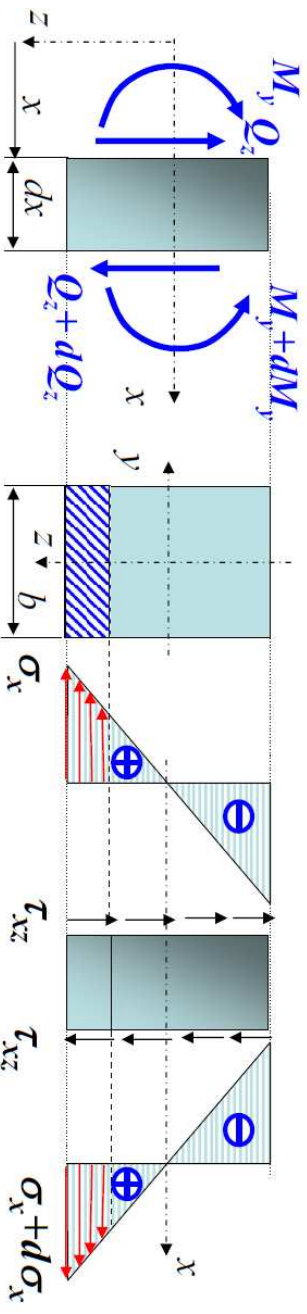
$$dH = N_2^* - N_1^*. \quad (2.34)$$

Edaspidises rakendame Žuravski<sup>16</sup> hüpoteesi, mille kohaselt on lõikepinged talas  
jaotunud ühtlaselt  $y$ -koordinaadi järgi. Seega saame valemi

$$\tau_{zx} = \frac{dH}{b dx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx}. \quad (2.35)$$

Nüüd on õige aeg sisse tuua ka põikjõuga  $Q_z$  koos käiv paindemoment  $M_y$  (joon.  
2.35).

<sup>16</sup>Inglisekeelses kirjanduses Jourawski.



Joonis 2.35: Põikjõud ja lõikepinged (3)

Tähistame vaadeldava ristrahuka otspinna (joon. 2.34) pindala  $A^*$ . Joonisel 2.35  
on see pind viirutatud. Nüüd saame esitada ristrahuka otspindadel mõjuvad  
pikijõud paindemomendi kaudu:

$$\begin{aligned} N_1^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y}{I_y} S_y^*, \\ N_2^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} S_y^*, \end{aligned} \quad (2.36)$$

kus  $S_y^*$  on viirutatud pinna staatiline moment  $y$ -telje suhtes.

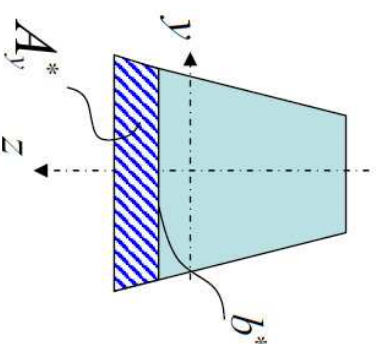
Arvestades lõikepingete paarsuse seadust ja valemeid (2.35) ning (2.36) saame

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b \, dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y^*}{I_y b}. \quad (2.37)$$

Rakendades diferentsiaalseteid oleme kokkuvõttes saanud valemi, mis on rakendatav meelevaldse kujuga ristlõike jaoks:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}. \quad (2.38)$$

Siin  $Q_z$  on vaadeldavas ristlõikes mõjuv põikjõud,  $b^*$  on viirutatud pinnana "ülemine joommõde" (joon. 2.36),  $S_y^*$  viirutatud pinnastaatiline moment  $y$ -telje suhtes ja  $I_y$  ristlõike peainertsimoment. Järgnevalt vaatleme lõikepingete leidmist mõnes mõnes spetsiifilise kujuga ristlõikes.



Joonis 2.36: Põikjõud ja lõikepinged (4)

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

**Ristkülik**

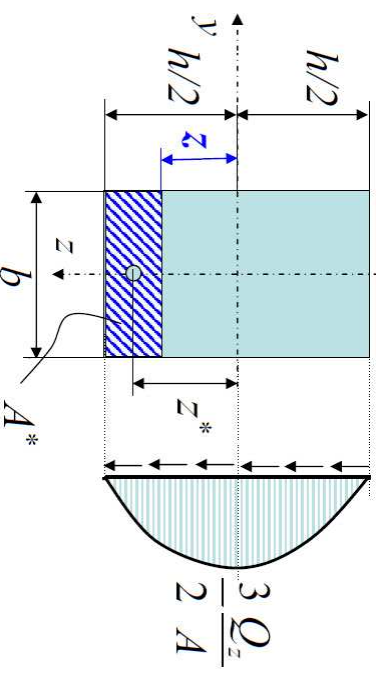
Kasutame valemnit (2.38) ja leiame seal kasutatavad geomeetrilised suurused ristküliku korral:

$$I_y = \frac{bh^3}{12},$$

$$S_y^* = z^* A^* = \dots = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*} = \dots = \frac{6Q_z}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

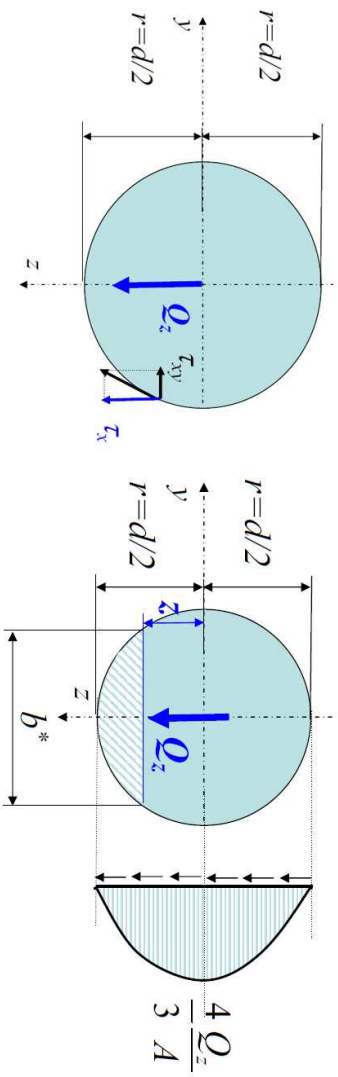


Arvestades, et ristküliku pindala  $A = bh$ , saame lõpuks valemid

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A}. \quad (2.39)$$

Seega on tegu ruutparabooliga ja  $\tau_{xz} = 0$  kui  $z = \pm 0, 5h$  ning mille maksimum on kohal  $z = 0$ .

## Ring



Joonis 2.38: Lõikepinged ümaristlõikes

Kuna ristlõike serval on nihkepinged puutuja sihilised, siis lahutame selle kaheks komponendiks ja tuletame valemid lõikepinge  $\tau_{xz}$  leidmiseks. Kasutame jällegi valemite (2.38) ja leiame vajalikud geomeetrilised suurused ringi korral:

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad b^* = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad S_y^* = \frac{3}{2}(r^2 - z^2)^{3/2}.$$

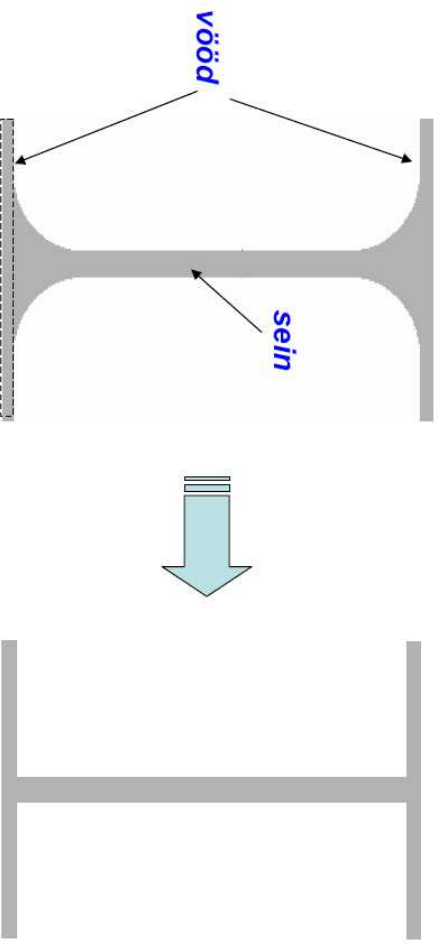
Kokku saame jällegi ruutparabooli, mille maksimum on kohal  $z = 0$  ja mis on null kui  $z = \pm r$ :

$$\tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A}. \quad (2.40)$$

## 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

## I-tala.

Vaatleme valtsmetallist profiili, mille ristlõige on I tähe kujuline. Tävaliselt nimetatakse sellist tala I-talaks (joon. 2.39). Eesmärgiks on leida nihkepingete jaotus sellises ristlõikes. Lihtsuse mõttes vaatleme sellist profiili koosnevana ristkülikutest.

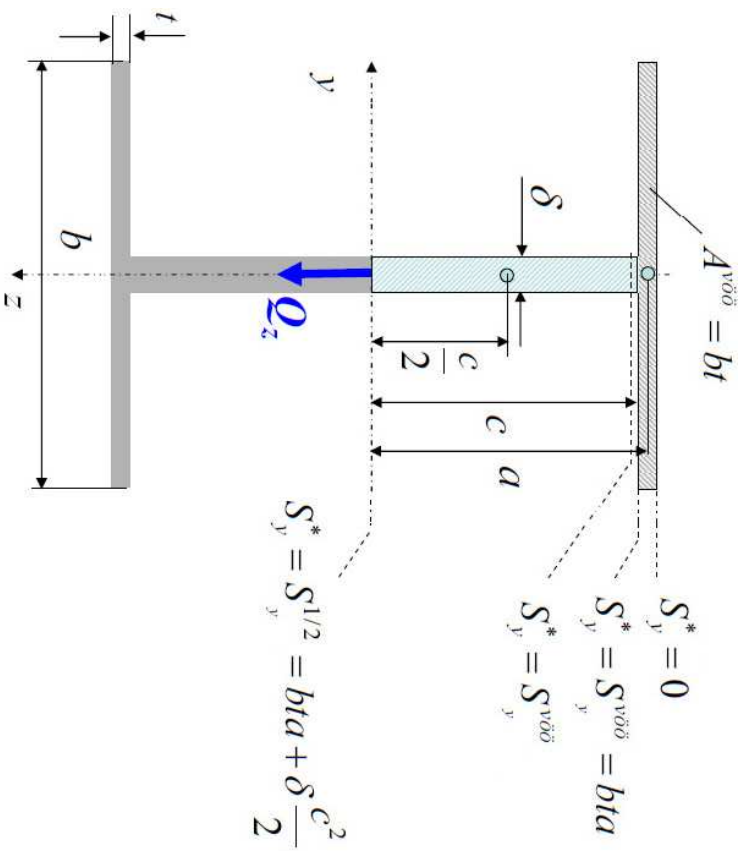


Joonis 2.39: I-tala.

Lõikepinge arvutamiseks kasutame endiselt valemite (2.38):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}.$$

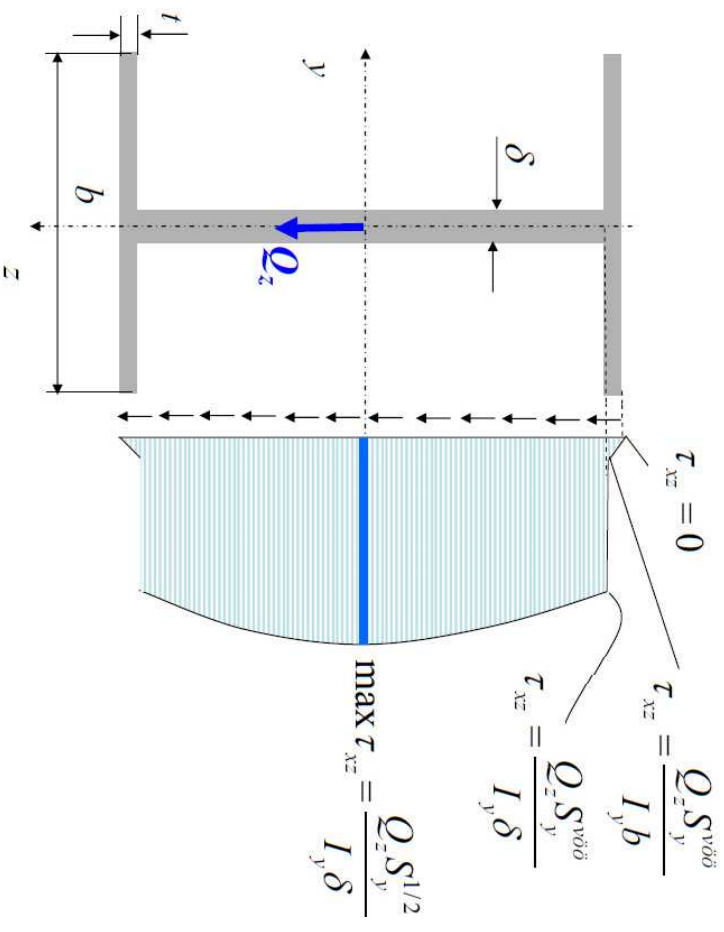
Seega on nihkepingete eüüride koostamiseks teada tervet rida staatilisi momente, mis on esitatud joonisel 2.40



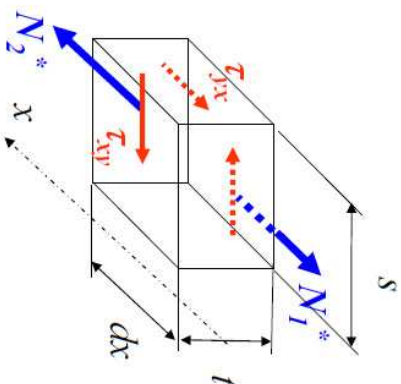
Joonis 2.40: I-tala iseloomulikud staatilised momentid.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Joonisel 2.41 on kujutatud lõikepinge  $\tau_{xz}$  eüüür I-tala jaoks. Nihkepinge valemite esinevad staatilised momentid tuleb arvutada joonisel 2.40 esitatud valemite abil. Üleminek seinalt võile on tegelikkuses sujuv (vt. joon 2.39) ja seetõttu ei esine tegelikkuses ka sellist järsku hüpet nagu on joonisel 2.41. On selge, et võrreldes seinaga on lõikepingete  $\tau_{xz}$  väärtused vöös väikesed.



Joonis 2.41: Lõikepinge  $\tau_{xz}$  eüüür I-tala korral.



Joonis 2.42: Lõikepinge  $\tau_{xy}$  põhjused.

Tala vöös esinevad lisaks lõikepingetele  $\tau_{xz}$  veel lõikepinged  $\tau_{xy}$ . Üks nende olemasolu põhjendus<sup>17</sup> on esitatud joonisel 2.42. Feldades, et  $N_2^* > N_1^*$ , tasakaalustab pikijõu juurdekasvu  $dN$  nihkepingest  $\tau_{yx}$  põhjustatud jõud  $\tau_{yx}tdx$ . Nihkepingete paarsusseaduse põhjal peab nihkepingega  $\tau_{yx}$  koos eksisteerima nihkepinge  $\tau_{xy}$ , mille arvutamiseks kasutame valemiga (2.38) analoogilist valemit

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}. \quad (2.41)$$

<sup>17</sup>Eksisteerib veel teisigi põhjendusi. Näiteks, et vöös mõjuv pinge  $\tau_{yx}$  tasakaalustab seinas mõjuvat pinget  $\tau_{xz}$ .

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Joonise 2.43 põhjal saame viimasest valemist

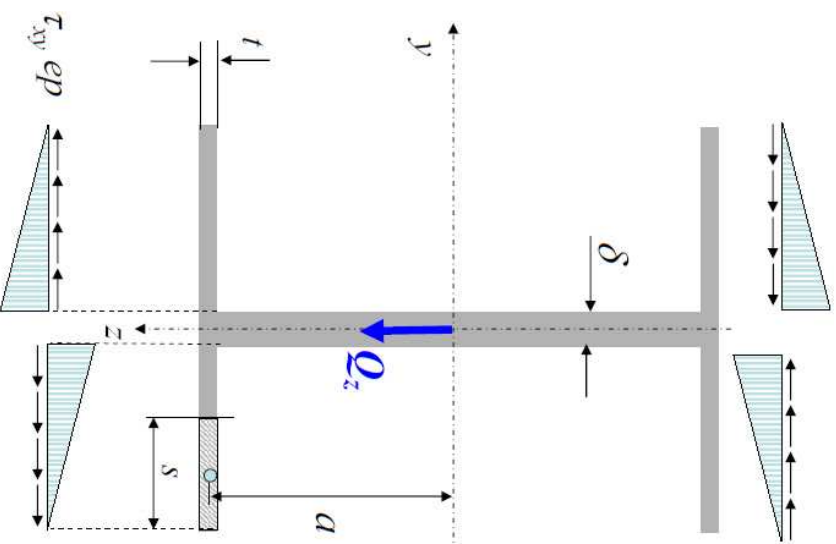
$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t} = \frac{Q_z s a t}{I_y t} = \frac{Q_z s a}{I_y}. \quad (2.42)$$

$S_y^*$  tähistab siin viirutatud pinnastaatilist momenti  $y$ -teljesuhtes. Arvestades, et tala vöö laius on  $b$  ja seina paksus  $\delta$ , saame nihkepingete  $\tau_{xy}$  ekstreemaalsed väärtused

$$\max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a (b - \delta)}{2 I_y}. \quad (2.43)$$

On selge, et vöö „sobivate“ mõõtmete korral võivad nihkepinged  $\tau_{xy}$  omada märkimisväärsed väärtusi.

Tala vöös mõjuvate nihkepingete summeerimisel saame peavektorid  $Q_2$ ,  $Q'_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q'_3$  (vt. joon. 2.44).



Joonis 2.43: Lõikepinge  $\tau_{xy}$  epiüür I-tala vöös.



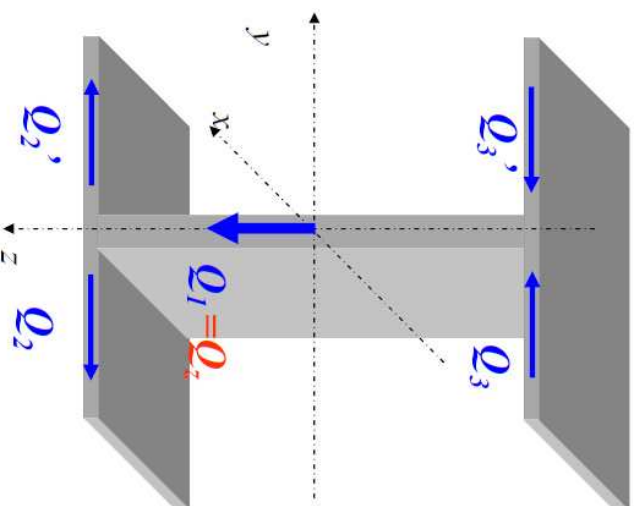
Valemi (2.42) põhjal

$$Q_2 = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^l \frac{Q_z s a}{I_y} t ds \quad (2.44)$$

Arvestades, et  $a = h/2 - t/2 \approx h/2$  ja  $l = b/2 - \delta/2 \approx b/2$  saame

$$Q_2 = \frac{Q_z a t}{I_y} \int_0^l s ds = \frac{Q_z a t l^2}{2 I_y} \approx \frac{Q_z h t b^2}{16 I_y}. \quad (2.45)$$

On selge, et jooniste 2.43 ja 2.44 põhjal vektorid  $\mathbf{Q}_2 = -\mathbf{Q}'_2$ ,  $\mathbf{Q}_3 = -\mathbf{Q}'_3$  ja  $\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_1$  ( $\mathbf{Q}_1$  on sisse toodud vöö ja seina vahelise analoogia mõttes) ning moodulid  $Q_2 = Q_3$



Joonis 2.44: Põikjõud I-talal.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

**Näide 2-15. Painde- ja lõikepinged I-talal (nn. keevisristlõige).**

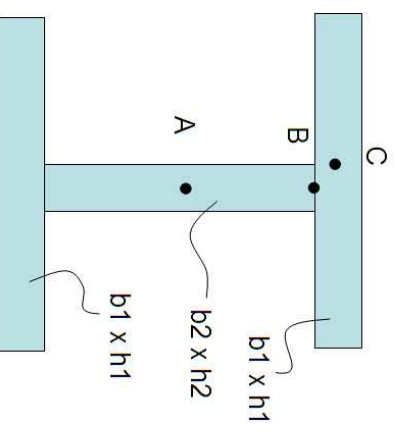
Tala ristlõikes mõjub paindemoment  $M = 20$  kNm ja põikjõud  $Q = 100$  kN. Koostada paindepinge  $\sigma_x$  ja lõikepingete  $\tau_{xz}$  ning  $\tau_{xy}$  eüürid. Ristlõike mõõtmed:  $b1 = 6$  cm,  $h1 = 2$  cm,  $b2 = 2$  cm,  $h2 = 10$  cm. Kuidas mõjutab mõõtmete suurendamine ja/või vähendamine pingeid?

*Lahendus.*

Paindepinged arvutatakse valemite (2.15) ja (2.16) põhjal:

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}},$$

Joonis 2.45: I-tala ristlõige



Nihkepingete arvutamiseks kasutame valemeid (2.38) ja (2.43):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}, \quad \max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a (b - \delta)}{2 I_y}.$$

Viimaste jaoks on vaja leida mitmed inertsi-, tugevus- ja staatilised momendid

$$I_y, \quad W_y, \quad S_y^{*A}, \quad S_y^{*B}$$

Epüüride joonistamiseks vajalikud arvud on järgnevas tabelis. Epüürid joonistatakse ja täiendavaid seletusi antakse loengus.

M	Q	h1	b1	h2	b2	ly	Wy	Sat	Sbt	sx	taxz	tbxz2	tbxz1	txy
KNm	kN	cm	cm	cm	cm	cm4	cm3	cm3	cm3	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa
20	100	2	6	10	2	1038,7	148,4	97	72	134,79	46,69	34,66	11,55	11,55
20	100	1	6	10	2	530,7	88,4	58	33	226,13	54,65	31,09	10,36	20,73
20	100	3	6	10	2	1714,7	214,3	142	117	93,31	41,41	34,12	11,37	7,58
20	100	2	6	10	1	955,3	136,5	84,5	72	146,55	88,45	75,37	12,56	15,70
20	100	2	6	10	3	1122,0	160,3	110	72	124,78	32,53	21,39	10,70	8,02
20	100	2	5	10	2	893,3	127,6	85	60	156,72	47,57	33,58	13,43	10,07
20	100	2	8	10	2	1329,3	189,9	121	96	105,32	45,51	36,11	9,03	13,54
20	100	2	6	9	2	855,5	131,6	86,3	66	151,96	50,41	38,57	12,86	12,86
20	100	2	6	11	2	1243,8	165,8	108	78	120,59	43,51	31,35	10,45	10,45

2.12. Ristlõigete geomeetriliste karakteristikute tabelid

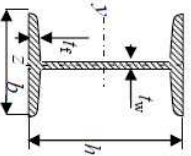
## 2.12 Ristlõigete geomeetriliste karakteristikute tabelid

Tugevusõpetuses esitatakse sellised tabelid tavaliselt valtsmetallide kohta ja kuna tihti on tegu terasega siis kutsutakse neid tabelleid sel juhul terasprofiilide tabeliteks. Kuna erinevatel tootjatel ja erinevatel riikidel on erinevad standardised ristlõiked, siis eksisteerib ka palju erinevaid terasprofiilide tabelleid. Loomulikult pole konstruktsioonieleemendid ainult valtsterasest ja leidub väga erinevate kujudega ristlõikeid ning neile vastavaid tabelleid.

Siin vaatleme ühte komplekti, mis on ka käesoleva peatüki lisas ja mida võib vajaduse minna ülesannete lahendamise juures. Tabelid pärinevad kolleegidelt mehhanika instituudist ja profiilid vastavad autorile teadaoleva info kohaselt Euroopa standardile.

Järgnevalt on esitatud tabelite algused kahte liiki I-profiilile, nn. karprauale ning võrd- ja erikülgsel nurrkrauale. Pikemad tabelid on esitatud Lisas 2-A.

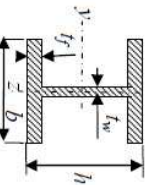
## IPN



A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  
 $W_y$ ,  $W_z$ -tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  
 $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ -tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoormuseetodi korral,  
 $i_y$ ,  $i_z$ -inertsiraadiused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  – väändemertsimoment,  
 $A_{yz}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtis.

Profiili nr.	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	t <sub>e</sub>	A	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	W <sub>pl,y</sub>	i <sub>y</sub>	A <sub>yz</sub>	I <sub>z</sub>	W <sub>z</sub>	W <sub>pl,z</sub>	i <sub>z</sub>	I <sub>x</sub>
mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>4</sup>
IPN 80	80	42	3,9	5,9	7,58	77,8	77,8	19,5	22,8	3,20	3,41	6,29	3,00	5,0	0,91	0,87
IPN 100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	39,8	4,01	4,85	12,2	4,88	8,1	1,07	1,60	

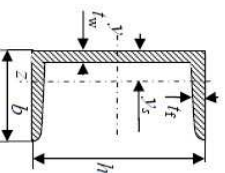
## IPE



A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  
 $W_y$ ,  $W_z$ -tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  
 $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ -tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoormuseetodi korral,  
 $i_y$ ,  $i_z$ -inertsiraadiused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  - väändemertsimoment  
 $A_{yz}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtis.

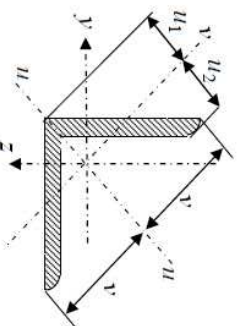
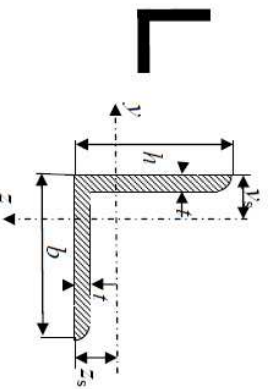
Profiili nr.	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	t <sub>e</sub>	A	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	W <sub>pl,y</sub>	i <sub>y</sub>	A <sub>yz</sub>	I <sub>z</sub>	W <sub>z</sub>	W <sub>pl,z</sub>	i <sub>z</sub>	I <sub>x</sub>
mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>4</sup>
IPE 80	80	46	3,8	5,2	7,64	80,1	20,0	23,2	3,24	3,58	8,49	3,69	5,82	1,05	0,70	
IPE 100	100	55	4,1	5,7	10,3	171	34,2	39,4	4,07	5,08	15,9	5,79	9,15	1,24	1,20	

## UPN



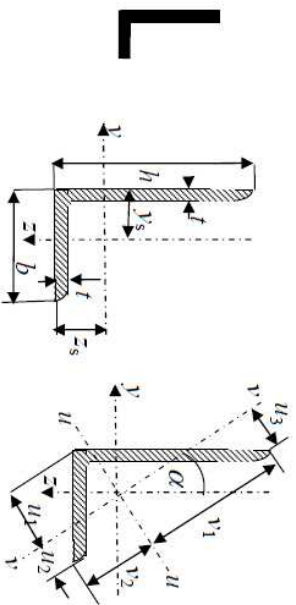
A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  
 $W_y$ ,  $W_z$ -tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  
 $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ -tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoormuseetodi korral,  
 $i_y$ ,  $i_z$ -inertsiraadiused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  – väändemertsimoment,  
 $A_{yz}$ ,  $A_{xy}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks z ja y-telje suhtis.

Profiili nr	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	t <sub>e</sub>	A	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	W <sub>pl,y</sub>	i <sub>y</sub>	A <sub>yz</sub>	I <sub>z</sub>	W <sub>z</sub>	W <sub>pl,z</sub>	i <sub>z</sub>	A <sub>xy</sub>	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	I <sub>yz</sub>
mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm
UPN 80	80	45	6,0	8,0	4,00	106	26,5	31,8	3,10	5,10	19,4	6,36	12,1	1,33	7,14	2,16	1,45		
UPN 100	100	50	6,0	8,5	4,50	206	41,2	49,0	3,91	6,46	29,3	8,49	16,2	1,47	8,43	2,81	1,55		



A - ristlõike pindala,  
 $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid y, z-telje suhtes,  
 $I_{u1}$ ,  $I_{u2}$  – inertsimomendid u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>-telje suhtes,  
 $W_y$ ,  $W_z$  - tugevusmomendid y, z-telje suhtes,  
 $i_y$ ,  $i_z$  – inertsiraadiused u, v-telje suhtes,  
 $A_{yz}$  – tseentrifugaalmoment y, z-telje suhtes.

Profiili nr.	h = b	t	A	z <sub>s</sub> =y <sub>s</sub>	v	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	I <sub>y</sub> =I <sub>z</sub>	W <sub>y</sub> =W <sub>z</sub>	i <sub>y</sub> =i <sub>z</sub>	I <sub>u</sub>	i <sub>u</sub>	I <sub>v</sub>	i <sub>v</sub>	I <sub>yz</sub>
mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm	cm	cm	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm	cm <sup>4</sup>	cm	cm <sup>4</sup>	cm	cm <sup>4</sup>
L 90 x 90 x 7	90	7	12,2	2,45	6,36	3,47	3,16	92,5	14,1	2,75	14,7	3,47	38,0	1,76	-54,5
L 90 x 90 x 8	90	8	13,9	2,50	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	16,6	3,46	42,9	1,76	-61,5



B- ristliigke pindala,  
 $I_y, I_z$  - inertsimomendid  $y, z$ -telje suhtes,  
 $I_{u_1}, I_{v_1}$  - inertsimomendid  $u, v$ -telje suhtes,  
 $I_{u_2}, I_{v_2}$  - inertsimomendid  $y, z$ -telje suhtes,  
 $I_{u_3}, I_{v_3}$  - inertsiraadiused  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  
 $I_{u_1}, I_{v_1}$  - inertsiraadiused  $u, v$ -telje suhtes,  
 $I_{yz}$  - tsentrifugaalmoment  $y, z$ -telje suhtes.

Profiili nr.	$h$ mm	$b$ mm	$t$ mm	$A$ cm <sup>2</sup>	$z_s$ cm	$y_s$ cm	$y_1$ cm	$y_2$ cm	$u_1$ cm	$u_2$ cm	$u_3$ cm	$\alpha$ °
L 120 x 80 x 8	120	80	8	15,5	3,83	1,87	8,23	5,97	3,25	4,19	2,09	23,6
L 120 x 80 x 10	120	80	10	19,1	3,92	1,95	8,19	6,01	3,35	4,17	2,15	23,5
Profiili nr.	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_z$ cm <sup>3</sup>	$i_z$ cm	$I_{u_1}$ cm <sup>4</sup>	$i_{u_1}$ cm	$I_{v_1}$ cm <sup>4</sup>	$i_{v_1}$ cm	$I_{yz}$ cm <sup>4</sup>	
L 120 x 80 x 8	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,4	1,73	-78,5	
L 120 x 80 x 10	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,6	1,72	-95,3	