Peatükk 6

Elastsusteooria tasandülesanne

6.1 Tasandülesande mõiste

Selleks, et iseloomustada *pingust* või *deformatsiooni elastse keha punktis* kasutatakse peapinge ja peadeformatsiooni mõistet. Pinguse puhul eristatatkse järgmist kolme juhtu:

- *ruumpingus* — kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* — kaks peapinget on nullist erinevad;
- *joonpingus* — vaid üks peapinge on nullist erinev.

Analoogiliselt, st. läbi peadeformatsioonide, defineeritakse *ruum-, tasand- ja joondeformatsiooni.*

Üldjuhul võib nii pinguse kui deformatsiooni iseloom olla keha erinevates punktides erinev. Kui igas keha punktis on pingus (deformatsioon) sama iseloomuga siis öeldakse, et kehas on *ühtlane pingus (deformatsioon)*.

Elastsusteooria ülesannet nimetatakse *tasandülesandeks* (ehk tasapinnaliseks ülesandeks) kui deformatsioon või pinge on kogu keha ulatuses tasapinnaline.

6.2 Tasanddeformatsioon

Vaadeldaval juhul on kõigis keha punktides deformatsioon tasapinnaline, st. üks peadeformatsioonidest on null. *Tasanddeformatsioon saab tekkida kui siirded*

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y), \qquad w = 0. \tag{6.1}$$

Vastavalt Cauchy seostele (3.6)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Selline deformatsiooniseisund tekib pikas kehas, millele mõjub keha pinnaga (z-teljega) ristuv koormus. $\surd$

Näiteks: pikk tugisein; (metroo)tunnel; pikk radiaalselt surutud võll; pika plaadi silindriline paine (NB! Saint Venant'i printsiip). pil-did

Pingete leidmiseks kasutame üldistatud Hooke'i seadust nn. pöördkujul (3.31):

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = 0, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Teisest küljest, arvestades Hooke'i seadust kujul (3.23), peab

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = 0,$$

kust saame

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Kuna siirded u ja v sõltuvad vaid koordinaatidest x ja y, siis avaldiste (6.2) ja (6.3) põhjal ka pinge σ_z sõltub vaid koordinaatidest x ja y.

Tasakaaluvõrrandid (5.5):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Arvestades ülesande sisu jääb järgi kaks võrrandit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

kusjuures ka mahujõud $Z = 0$.

Rajatingimustest (4.5)

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases}$$

jääb samuti alles 2 esimest võrrandit —

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m; \end{cases} \tag{6.5}$$

- keha külgpind on paralleelne z-tejega ning seetõttu normaali suunakoosinus $n = 0$;
- $p_{\nu z} = 0$ kuna muidu poleks meil tasanddeformatsiooni.

Pidevusvõrranditest deformatsioonides (3.19)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\dfrac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

jääb alles vaid esimene

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}. \tag{6.6}$$

6.3 Tasandpingus

Vaatleme olukorda, kus kõigis keha punktides üks peapingetest on null. Sellisel juhul saame valida Descartes'i ristkoordinaadid nii, et

$$\sigma_x=\sigma_x(x,y), \quad \sigma_y=\sigma_y(x,y), \quad \tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y), \quad \sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0. \tag{6.7}$$

Selline pingus tekib näiteks õhukeses plaadis, millele mõjub servades rakendatud koormus, mis on risti z-teljega. ⋆ joonis

Üldistatud Hooke'i seadusest (3.23) saame

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]=\dfrac{\sigma_x-\nu\sigma_y}{E}, & \gamma_{xy}=\dfrac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)\right]=\dfrac{\sigma_y-\nu\sigma_x}{E}, & \gamma_{yz}=\dfrac{\tau_{yz}}{G}=0, \\ \varepsilon_z=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]=-\nu\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{E}, & \gamma_{zx}=\dfrac{\tau_{zx}}{G}=0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Tasakaaluvõrrandid on tasandpinguse korral samad kui olid tasanddeformatsiooni korral, st. esitatud kujul (6.4).

6.4 Tasandülesande lahendamine pingetes

Väga sageli lahendatakse elastsusteooria ülesanded pingetes, sest sellel meetodil on võrreldes siiretes lahendamisega mõned eelised:

- sageli ongi ülesande lahendina vaja leida vaid pingeid, siirded on teisejärgulise tähtsusega ning neid polegi vaja leida;
- üldjuhul on siirete avaldised võrreldes pingete avaldisega tunduvalt keerukamad.

Tundmatud: pingetensori komponendid σ_x, σ_y ja τ_{xy}.

Esmalt peame pidevustingimuse (6.6)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

avaldama pingetes. Selleks kasutame üldistatud Hooke'i seadust kujul (6.8) kust leiame vajalikud osatuletised läbi pingete:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \dfrac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right), \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \dfrac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right), \\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\dfrac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Seega saab pidevustingimus kuju

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{6.10}$$

Viimasest avaldisest saab tasakaaluvõrrandite (6.4) abil elimineerida nihkepinge. Selleks diferentseerime $(6.4)_1$ x järgi ja $(6.4)_2$ y järgi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial X}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \dfrac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases} \tag{6.11}$$

Eeldades, et mahujõu on konstantsed, saame viimaste liitmise tulemusena

$$2\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \tag{6.12}$$

Asendades viimase tulemuse pidevustingimusse (6.10) saame peale teisendusi

$$\frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0. \tag{6.13}$$

Kasutades Laplace'i operaatorit ∇^2 saame väljendada *tasandülesande pidevustingimuse pingetes* kujul

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{6.14}$$

Tasandülesande lahendamine pingetes lihtsustub oluliselt kui tuua sisse *Airy' pingefunktsioon* $\varphi(x, y)$, mis on seotud pingekomponentidega järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \qquad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx, \tag{6.15}$$

kus X ja Y on konstantsed mahujõud. Alternatiivne võimalus siduda pingekomponendid ja pingefunktsioon:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy; \qquad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{6.16}$$

Nii (6.15) kui (6.16) korral on tasakaaluvõrrandid (6.4) automaatselt rahuldatud. Pannes selliselt defineeritud pingekomponendid pidevustingimusse (6.14) saame *biharmoonilise võrrandi*

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 \left(\nabla^2 \varphi \right) = 0. \tag{6.17}$$

Lahti kirjutatult saab viimane kuju

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0. \tag{6.18}$$

Funktsiooni, mis rahuldab biharmoonilist võrrandit (6.17) või (6.18) nimetatakse *biharmooniliseks funktsiooniks*.

Kuna tasakaaluvõrrandid on antud juhul automaatselt rahuldatud, siis taandub tasandülesande lahendamine pingetes neljandat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Siinjuures tuleb loomulikult arvesse võtta pingetes antud ääretingimusi. Peale pingefunktsiooni leidmist määratakse pingetensori komponendid (näiteks avaldistest (6.15)). Seejärel saab üldistatud Hooke'i seaduse abil leida deformatsioonikomponendid ja Cauchy seostest siirdekomponendid.

Tegelikult on pingefunktsiooni leidmine mitmel juhul suhteliselt lihtne. Vastavat meetodit võib nimetada *poolvastupidiseks meetodiks*. Selle põhjal antakse pingefunktsioon ette kas polünoomina või trigonomeetrilise reana, mis sisaldavad määramata konstante. Viimased määratakse ülesande lahendamise käigus ääretingimuste ja biharmoonilise võrrandi abil.

6.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Kui väljendada Airy funktsioon polünoomina

$$\begin{aligned}\varphi = &\left(\frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2\right) + \left(\frac{a_3}{3\cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3\cdot 2}y^3\right) + \\ &+ \left(\frac{a_4}{4\cdot 3}x^4 + \frac{b_4}{3\cdot 2}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{3\cdot 2}xy^3 + \frac{e_4}{4\cdot 3}y^4\right) + \ldots\end{aligned} \tag{6.19}$$

saab konstrueerida terve rea tasandülesande lahendusi. Vaadeldav lähenemisviis on rakendatav kui uuritakse ristkülikulisi plaate või talasid. Mahujõud, k.a. keha kaal, on hüljatud. Käesolevas alajaotuses vaatleme talasid, mille pikkus on l, kõrgus $2c$ ja laius 1. Tala teljeks on x-telg ja y telg on suunatud alla. †joonis Kuna lineaarses elastsusteoorias kehtib superpositsiooni printsiip, siis vaatleme algul polünoome kuni 5. astmeni eraldi. Järgmistes alajaotustes konstrueerime saadud tulemuste abil erinevaid lahendeid.

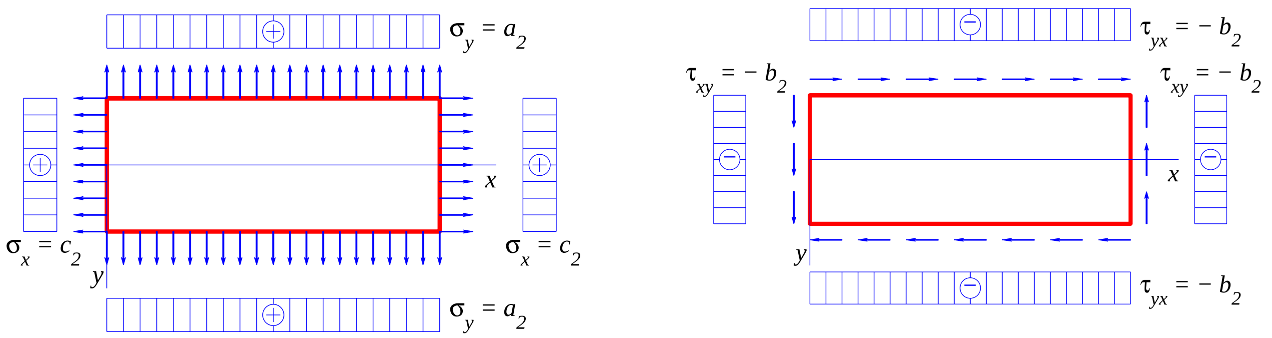
A) Ruutpolünoom

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \qquad (6.20)$$

Sellise valiku puhul on biharmooniline võrrand (6.18) automaatselt rahuldatud. Mahujõude hülgamise puhul saame avaldistest (6.15) pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \qquad (6.21)$$

Selline pingeseisund tähendab $a_2 > 0$, $b_2 > 0$ ja $c_2 > 0$ puhul ühtlast tõmmet kahes ristuvas sihis koos ühtlase nihkega. Vastavad rajatingimused on esitatud



Joonis 6.1: Ruutpolünoomile vastavad rajatingimused.

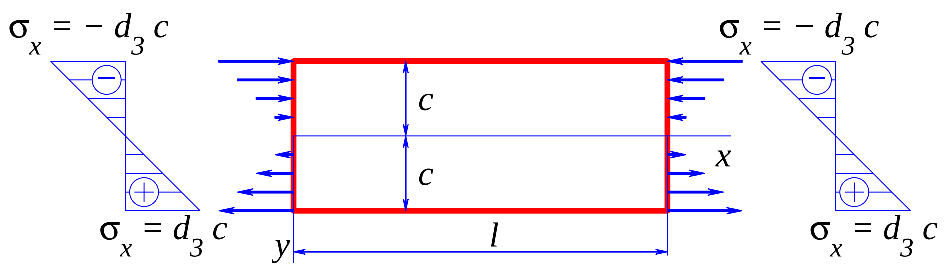
joonisel 6.1. Võttes osa polünoomi koefitsente võrdseks nulliga, saab rajatingimusi varieerida.

B) Kuuppolünoom

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3\cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3\cdot 2}y^3. \qquad (6.22)$$

Ka antud juhul on biharmooniline võrrand (6.18) automaatselt rahuldatud. Pingete avaldiste (6.15) põhjal aga

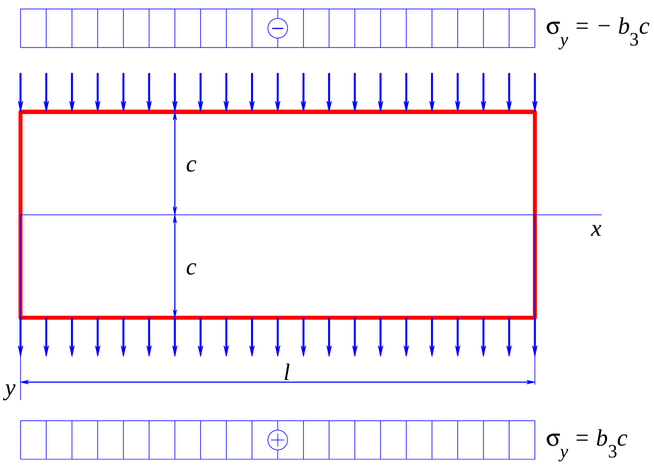
$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y. \qquad (6.23)$$

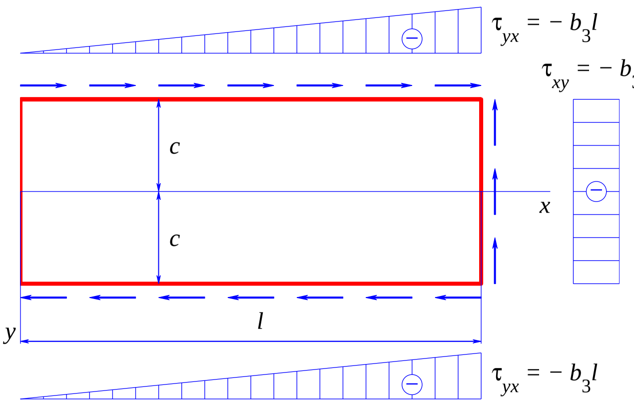


Joonis 6.2: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused: $d_3 \neq 0$, $a_3 = b_3 = c_3 = 0$.

Valides vaid $d_3 \neq 0$ saame puhtale paindele vastava pingeseisundi. Rajatingimused, mis vastavad juhule $d_3 > 0$ on esitatud joonisel 6.2.

Valides vaid $b_3 \neq 0$ saame pingeseisundi, mille korral pindadel $y = \pm c$ mõjuvad pinged $\sigma_y = \pm b_3c$ ja $\tau_{yx} = -b_3x$ ning pinnal $x = l$ pinge $\tau_{xy} = -b_3l$. Juhu $b_3 > 0$ jaoks on vastavad rajatingimused esitatud joonisel 6.3.





Joonis 6.3: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused: $b_3 \neq 0$, $a_3 = c_3 = d_3 = 0$.

Muud võimalused:

- Vaid $c_3 \neq 0 \ldots$
- Vaid $a_3 \neq 0 \ldots$
- Jne. ...

Teist ja kolmandat järku polünoomide puhul polnud vaja esitada täiendavaid

kitsendusi polünoomide koefitsentidele, sest biharmooniline võrrand oli automaatselt rahuldatud. Kõrgemat järku polünoomide puhul pole asi aga enam nii lihtne.

C) Neljandat järku polünoom

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2}x^3 y + \frac{c_4}{2}x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2}xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3}y^4. \tag{6.24}$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (6.18) rahuldatud vaid juhul kui

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \tag{6.25}$$

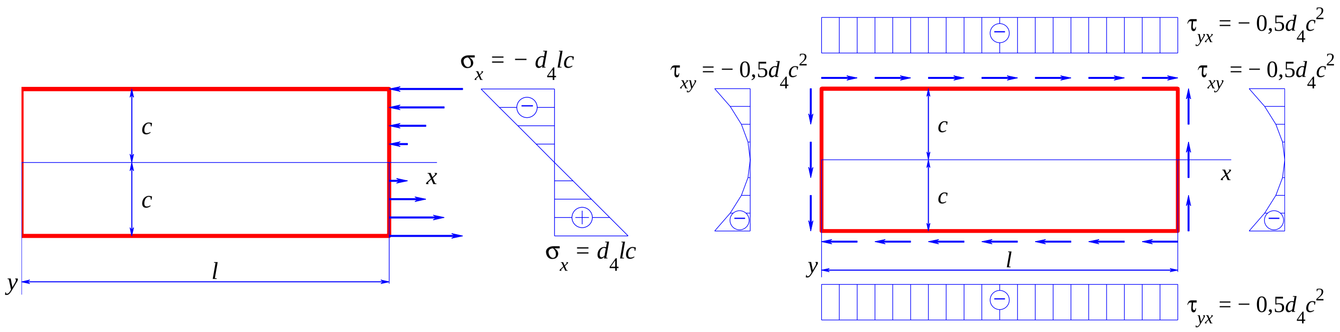
ning pingekomponendid (6.15) saavad kuju

$$\begin{cases} \sigma_x = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4)y^2; \\ \sigma_y = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2; \\ \tau_{xy} = -\dfrac{b_4}{2}x^2 - 2c_4 xy - \dfrac{d_4}{2}y^2. \end{cases} \tag{6.26}$$

Kuna koefitsentide $a_4, \ldots, d_4$ valik on vaba, siis on (6.26) abil võimalik kirjeldada mitmesuguseid rajatingimusi.

Näiteks kui vaid d_4 on nullist erinev polünoomi koefitsent, siis

$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2}y^2. \tag{6.27}$$



Joonis 6.4: Neljandat järku polünoomile vastavad rajatingimused juhul kui $d_4 > 0$ ja $a_4 = b_4 = c_4 = 0$.

Juhule $d_4 > 0$ vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -\dfrac{d_4}{2}c^2, \text{ kui } y = \pm c; \quad \tau_{xy} = -\dfrac{d_4}{2}y^2, \text{ kui } x = 0; \\ \tau_{xy} = -\dfrac{d_4}{2}y^2, \quad \sigma_x = d_4 l y, \text{ kui } x = l; \end{cases} \tag{6.28}$$

on kujutatud joonisel 6.4.

Kui vaid $c_4 > 0$ oleks nullist erinev polünoomi koefitsent, siis saaksime avaldistest (6.26)

$$\sigma_x = c_4 x^2 - 2c_4 y^2; \quad \sigma_y = c_4 y^2; \quad \tau_{xy} = -2c_4 xy. \tag{6.29}$$

Jne., jne.

D) Viiendat järku polünoom

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5\cdot 4}x^5 + \frac{b_5}{4\cdot 3}x^4 y + \frac{c_5}{3\cdot 2}x^3 y^2 + \frac{d_5}{3\cdot 2}x^2 y^3 + \frac{e_5}{4\cdot 3}xy^4 + \frac{f_5}{5\cdot 4}y^5. \tag{6.30}$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (6.18) rahuldatud kui

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5) \text{ ja } f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \tag{6.31}$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \dots \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = \dots \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = \dots \end{cases} \tag{6.32}$$

Valides vaid $d_5 > 0$ nullist erinevaks polünoomikoefitsendiks, saame pingejaotuse

$$\sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5xy^2. \tag{6.33}$$

Viimasele vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \sigma_y = \pm\frac{1}{3}d_5c^3, \quad \tau_{yx} = -d_5xc^2 \\ x = 0, & \sigma_x = -\dfrac{2d_5y^3}{3}, \quad \tau_{xy} = 0, \\ x = l, & \sigma_x = d_5(l^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad \tau_{xy} = -d_5ly^2. \end{cases} \tag{6.34}$$

Kuna biharmooniline võrrand (6.18) on lineaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tema lahendiks ka suvaline lahendite superpositsioon. Seega, liites eespool leitud elementaarlahendeid, saame leida meid huvitava probleemi lahendi.

Tala pinnal mõjuvate pingete (pindjõudude) peavektori ja peamomendi leidmine

- Vaatleme tala, mille pikkus on l, kõrgus $2c$ ja laius 1.
- Eeldame, et tala kontuuril mõjuvad normaal- ja nihkepinged on positiivsed.
- Valime taandamistsentriks koordinaatide alguse.

Peavektori projektsioonid koordinaattelgedel x ja y:

$$\begin{aligned} R_x &= R_x(\sigma_x)\big|_{x=l} + R_x(\sigma_x)\big|_{x=0} + R_x(\tau_{yx})\big|_{y=c} + R_x(\tau_{yx})\big|_{y=-c} = \\ &= \int_{-c}^{c} \sigma_x\big|_{x=l}\,dy - \int_{-c}^{c} \sigma_x\big|_{x=0}\,dy + \int_0^l \tau_{yx}\big|_{y=c}\,dx - \int_0^l \tau_{yx}\big|_{y=-c}\,dx; \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned} R_y &= R_y(\sigma_y)\big|_{y=c} + R_y(\sigma_y)\big|_{y=-c} + R_y(\tau_{xy})\big|_{x=0} + R_y(\tau_{xy})\big|_{x=l} = \\ &= \int_0^l \sigma_y\big|_{y=c}\,dx - \int_0^l \sigma_y\big|_{y=-c}\,dx - \int_{-c}^{c} \tau_{xy}\big|_{x=0}\,dy + \int_{-c}^{c} \tau_{xy}\big|_{x=l}\,dy. \end{aligned} \tag{6.36}$$

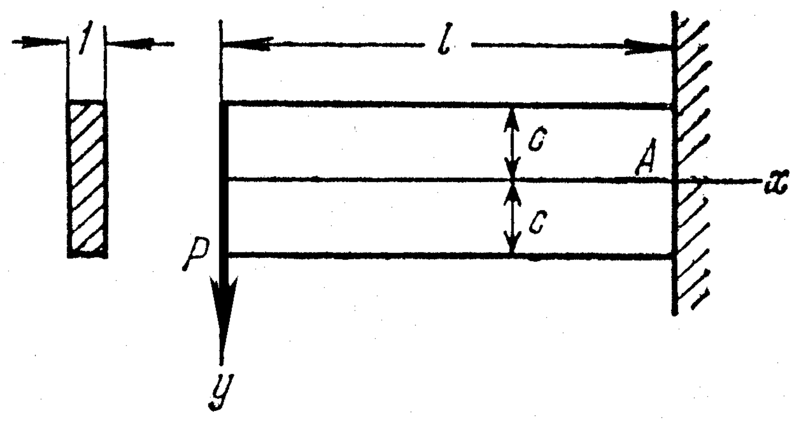
Peamoment koordinaatide alguse suhtes[1]

$$\begin{aligned}
M_O &= M_O(\sigma_x)\big|_{x=0} + M_O(\sigma_x)\big|_{x=l} + M_O(\sigma_y)\big|_{y=c} + M_O(\sigma_y)\big|_{y=-c} + \\
&+ M_O(\tau_{yx})\big|_{y=c} + M_O(\tau_{yx})\big|_{y=-c} + M_O(\tau_{xy})\big|_{x=l} = \\
&= \int_{-c}^{c} \sigma_x\big|_{x=0}\, y\, dy - \int_{-c}^{c} \sigma_x\big|_{x=l}\, y\, dy + \\
&+ \int_0^l \sigma_y\big|_{y=c}\, x\, dx - \int_0^l \sigma_y\big|_{y=-c}\, x\, dx - \\
&- \int_0^l \tau_{yx}\big|_{y=c}\, c\, dx - \int_0^l \tau_{yx}\big|_{y=-c}\, c\, dx + \int_{-c}^{c} \tau_{xy}\big|_{x=l}\, l\, dy.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

[1]Kuna y telg on suunatud alla, siis on positiivne moment päripäeva.

6.6 Konsooli paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega konsooli, mille vabas otsas ($x = 0$) on rakendatud jõud **P**, mida võib vaadelda kui otspinnal mõjuvate nihkepingete peavektorit (joonis 6.5). Konsooli pealmine ja alumine pind on pingevabad ja ots $x = l$ jäigalt kinnitatud.



Joonis 6.5: Kitsa ristkülikulise ristlõikega konsool pikkusega l, kõrgusega $2c$ ja paksusega 1.

Sellist olukorda saab vaadelda kui superpositsiooni puhtast nihkest (alajaotus 6.5 A valemid (6.21) $a_2 = c_2 = 0$ ja $b_2 \neq 0$) ja valemitega (6.27) esitatud juhust (alajaotus 6.5 C $a_4 = b_4 = c_4 = e_4 = 0$ ja $d_4 \neq 0$). Saame

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 = \tau_{yx}. \tag{6.38}$$

Rajatingimused

$$\tau_{yx}\big|_{y=\pm c} \equiv \tau_{xy}\big|_{y=\pm c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}, \tag{6.39}$$

$$\sum F_{iy}\Big|_{x=0} = P = -\int_{-c}^{c} \tau_{xy} dy = \int_{-c}^{c} \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{3P}{4c}. \tag{6.40}$$

Pannes nüüd konstandid b_2 ja d_4 valemitest (6.39) ja (6.40) pingete avaldisse (6.38) saame

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \tag{6.41}$$

Arvestades, et inertsimoment $I \equiv I_z = 2c^3/3$, siis √

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2). \tag{6.42}$$

Lahend on täpne Saint-Venanti printsiibi mõttes, st., 6.42 puhul on eeldatud, et tala otsas on nihkepinged paraboolse jaotusega.

Leiame nüüd siirdekomponendid u ja v. Lähtume Hooke'i seadusest koos Cauchy seostega, mille põhjal

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\sigma_x}{E} = -\dfrac{P}{EI} xy, \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\nu \dfrac{\sigma_x}{E} = \dfrac{\nu P}{EI} xy, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = -\dfrac{P}{2GI}(c^2 - y^2). \end{cases} \tag{6.43}$$

Integreerime $(6.43)_1$ koordinaadi x järgi ja $(6.43)_2$ koordinaadi y järgi:

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + f(y), \quad v = \frac{\nu P}{2EI} xy^2 + f_1(x), \tag{6.44}$$

kus funktsioonid $f(y)$ ja $f_1(x)$ on integreerimiskonstantide analoogid. •

Pannes (6.44) valemisse $(6.43)_3$ saame

$$-\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2GI}(c^2 - y^2). \tag{6.45}$$

Viimane on esitatav kujul

$$F(x) + G(y) = K, \tag{6.46}$$

kus

$$F(x) = \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{P}{2EI}x^2, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \left(\frac{\nu P}{2EI} - \frac{P}{2GI}\right)y^2, \quad K = -\frac{P}{2GI}c^2. \tag{6.47}$$

Kuna $F(x)+G(y) = K = const.$, siis peavad ka $F(x)$ ja $G(y)$ olema konstantsed. Tähistades $F(x) = d$ ja $G(y) = e$ saame valemitest (6.46) tingimuse

$$d + e = -\frac{P}{2GI}c^2 \tag{6.48}$$

ja diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{df(y)}{dy} = \left(\frac{P}{2GI} - \frac{\nu P}{2EI}\right)y^2 + e, \qquad \frac{df_1(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}x^2 + d. \tag{6.49}$$

Viimaste integreerimisel saame

$$f(y) = \left(\frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6EI}\right)y^3 + ey + g, \qquad f_1(x) = \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \tag{6.50}$$

Seega saavad siirete avaldised (6.44) kuju

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2 y + \left(\frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6EI}\right)y^3 + ey + g, \quad v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \tag{6.51}$$

Konstandid d, e, g ja h määratakse tingimusest (6.48) ja kolmest rajatingimustest siiretele.

Olgu punkt A tala ristlõike $x = l$ kese. Jäiga kinnituse tõttu peab see punkt olema fikseeritud — tema siirded on nullid ja ristlõige $x = l$ ei saa pöörduda ümber punkti A. Seega kui $x = l$ ja $y = 0$, siis $u = v = 0$ ning

$$g = 0 \quad \text{ja} \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl. \tag{6.52}$$

Võttes valemis $(6.51)_2$ $y = 0$, saame konsooli kõverdunud telje võrrandi (enne deformatsiooni on teljeks x-telg, st. sirge $y = 0$):

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l - x). \tag{6.53}$$

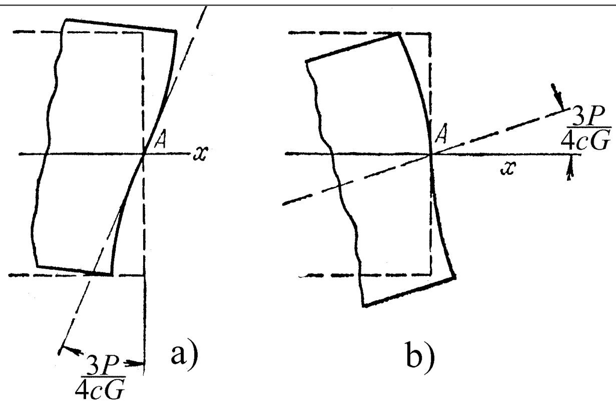
Konstandi d määramiseks kasutame kolmandat rajatingimust, mis ei luba vaadeldaval ristlõikel pöörelda ümber punkti A. Seda tingimust võib ette anda mitmel viisil. Vaatleme kahte:

a) tala telje element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0; \tag{6.54}$$

b) tala ristlõike vertikaalne element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0. \tag{6.55}$$



Joonis 6.6: Rajatingimused otsas $x = l$.

Juhul a) saame avaldiste (6.54), (6.53) ja (6.48) põhjal

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}. \tag{6.56}$$

Seega saavad siirdekomponentide avaldised (6.51) ja kõverdunud telje võrrand (6.53) kuju

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}\right)y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}. \end{cases} \tag{6.57}$$

Võrrand $(6.57)_3$ annab konsooli vaba otsa $x = 0$ läbipaindeks $Pl^3/3EI$, mis ühtib tugevusõpetusest tuntud tulemustega.

Juhul b) saame konstantidele väärtused

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \tag{6.58}$$

ning siirdekomponentide ja tala kõverdunud telje jaoks avaldised

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \frac{Pl^2}{2EI}y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \left(\frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pc^2}{2GI}\right)x + \frac{Pc^2 l}{2GI} + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2GI}(l-x). \end{cases} \tag{6.59}$$

Seega saame võrrandi $(6.59)_3$ kasutamise puhul tala teljele

$$\frac{Pc^2}{2GI}(l-x) = \frac{3P}{4Gc}(l-x) \tag{6.60}$$

võrra suuremad läbipainded kui võrrandi $(6.57)_3$ puhul. Põhjus on selles, et rajatingimused (6.54) keelavad tala telje pöörded kuid lubavad otspinna pöördeid punktis A (vt. joonis 6.6 a). Rajatingimused (6.55) keelavad aga tala otspinna pöörded kuid lubavad telje pöördeid (vt. joonis 6.6 b). Mõlemal juhul toimuvad pöörded ühe ja sama nurga α võrra kuigi pöörduvad erinevad elemendid: √

$$\alpha \sim \tan\alpha = -\frac{Pc^2}{2GI} = \begin{cases} -\frac{3P}{4cG} & \text{kui } b = 1, \\ -\frac{3P}{4cbG} & \text{kui } b \neq 1. \end{cases} \tag{6.61}$$

Tegelikult jääb aga kogu otspind $x = l$ paigale ja õiget tulemust ei anna ei juht a) ega b) ning kinnituskoha läheduses ei vasta ka pingejaotus valemitega (6.42) antule. Avaldise (6.42) puhul tuleb rakendada Saint-Venant'i printsiipi, st., et (6.42) annaks tõepärasema tulemuse, peame olema otsast $x = l$ piisavalt kaugel. Seega pikkade konsoolide puhul on tulemus „täpsem”, st. vastab enam tegelikkusele, kui lühikeste puhul.

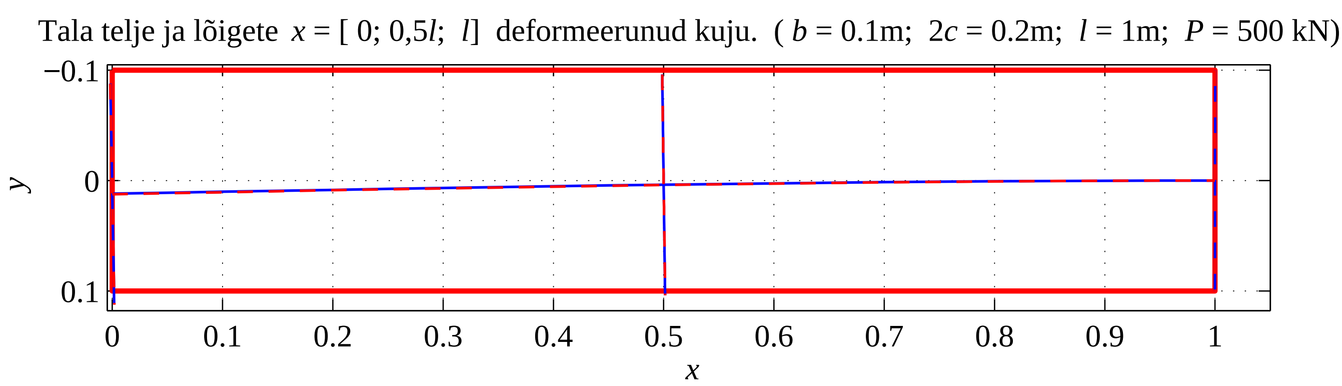
Näited

Joonistada:

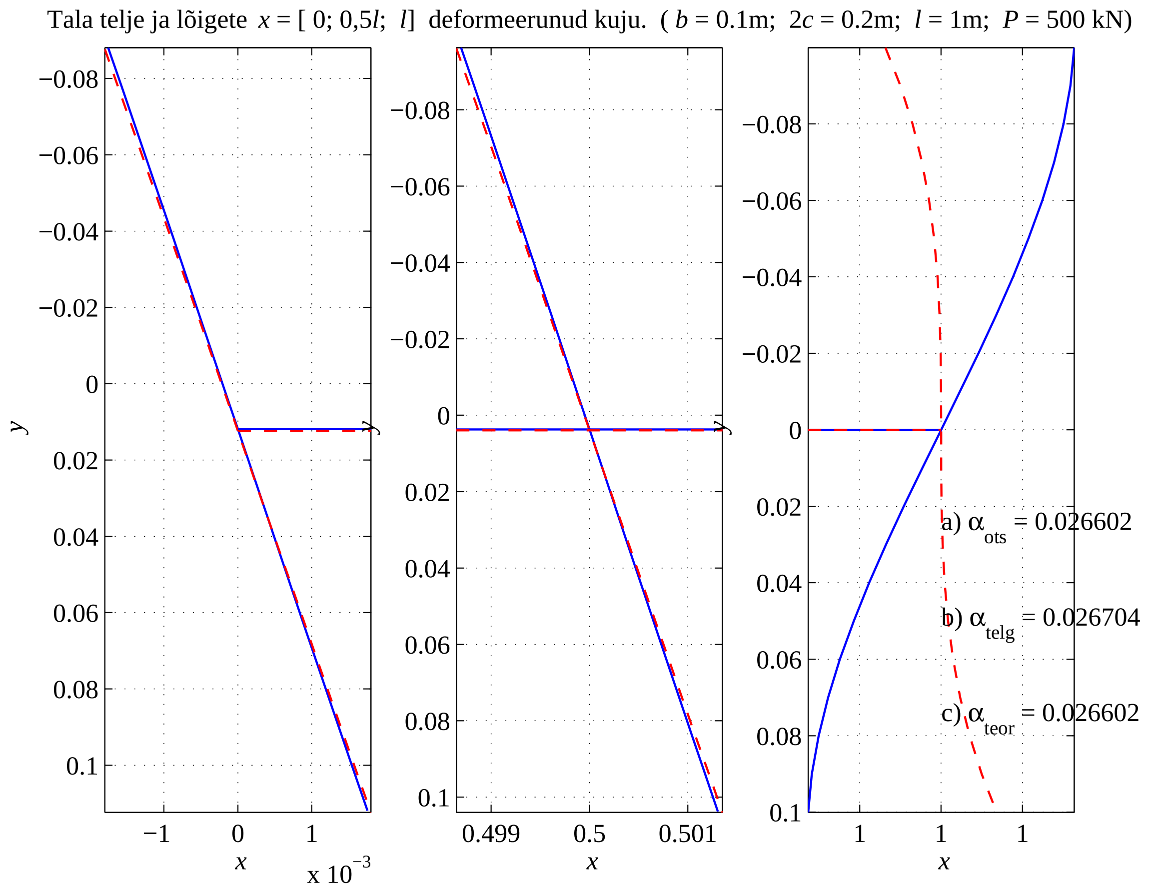
1. tala kõverdunud telg (elastne joon) ja
2. ristlõigete $x = 0; 0,5l; l$ deformeerunud kuju

erinevate c, l ja P väärtuste jaoks mõlema ülalvaadeldud ääretingimuse korral. Tala materjal on teras, mille elastsuskonstant $E = 210$ GPa ja $\nu = 0,3$ ning tala laius $b = 0,1$ m.

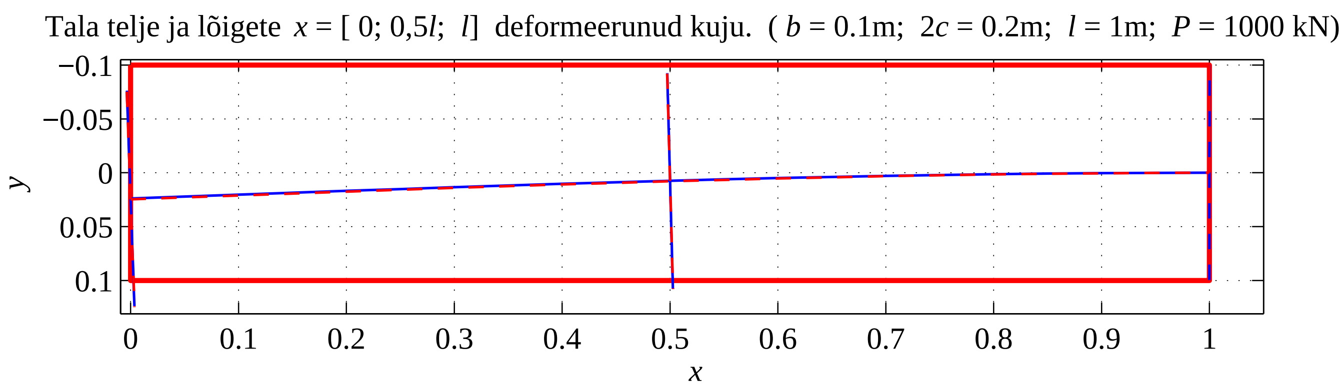
Järgnevatel joonistel tähistavad α_{telg} ja α_{ots} vastavalt kõverdunud telje ja otspinna numbriliselt leitud tõusunurka kraadides punktis A. Nurk α_{teor}, mis on leitud avaldisest $\tan\alpha_{teor} = 3P/(4cbG)$, vastab rajatingimuste a) korral kõverdunud otspinna tõusule ja rajatingimuste b) korral kõverdunud telje tõusule punktis A (võrdle joon. 6.6).



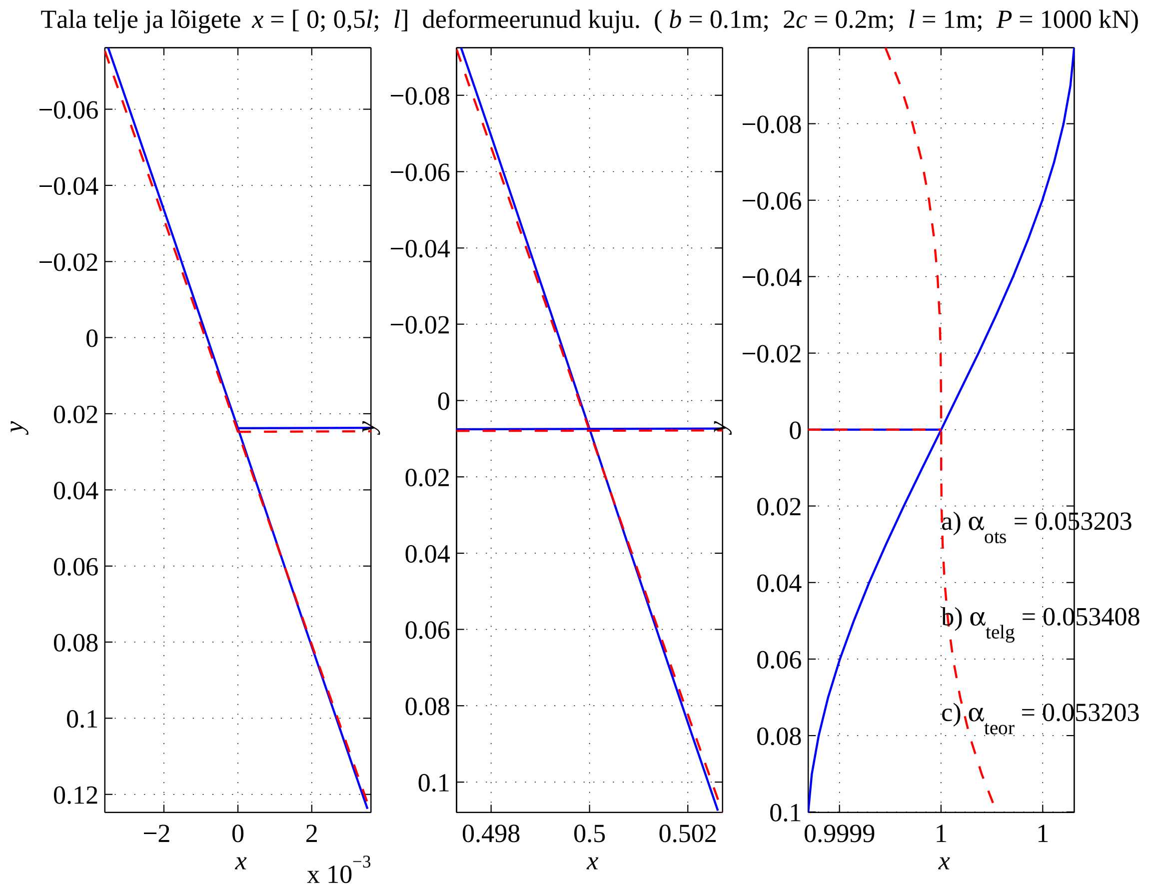
Joonis 6.7: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



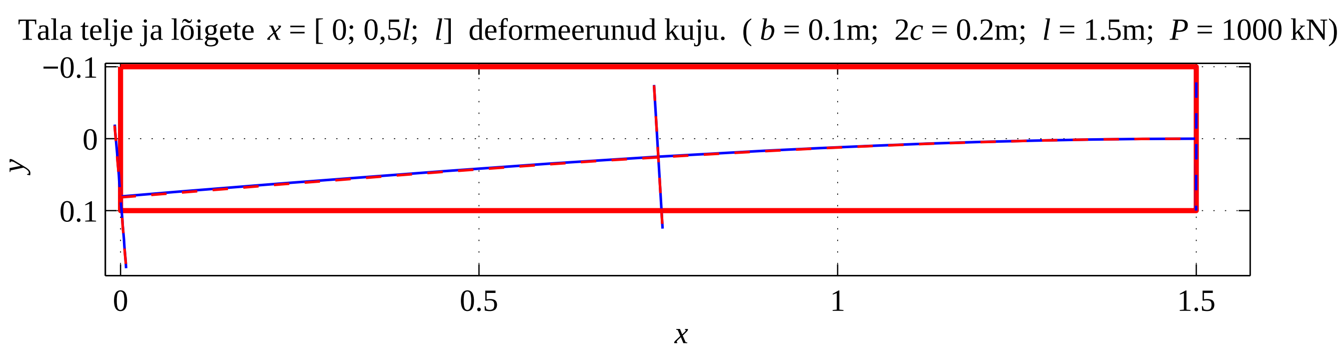
Joonis 6.8: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



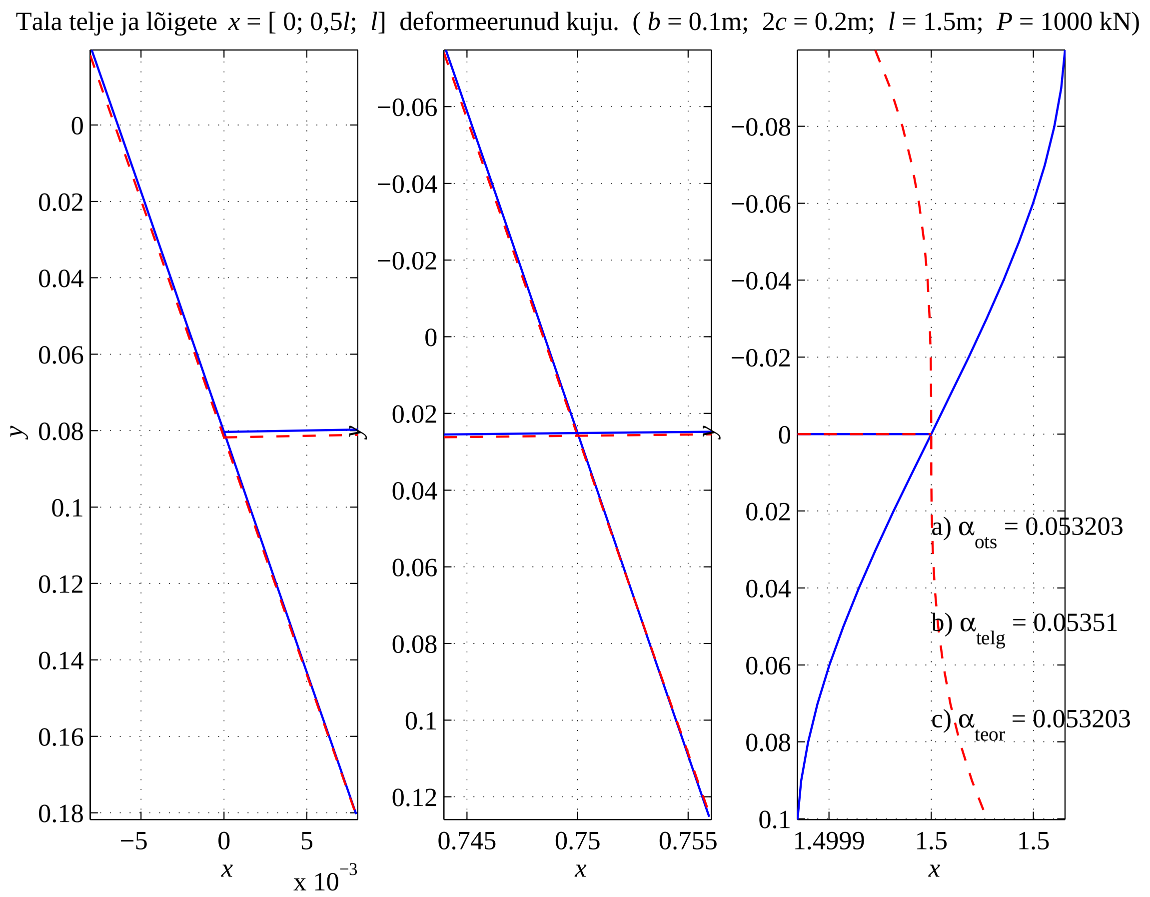
Joonis 6.9: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



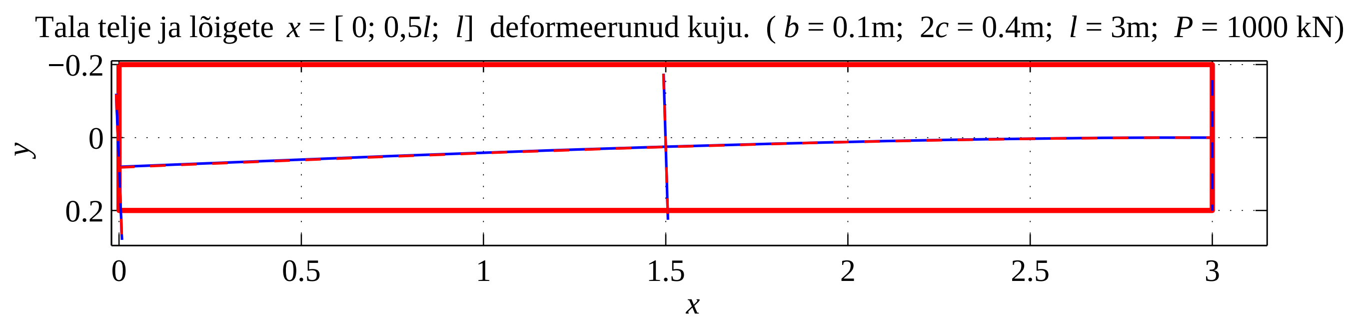
Joonis 6.10: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



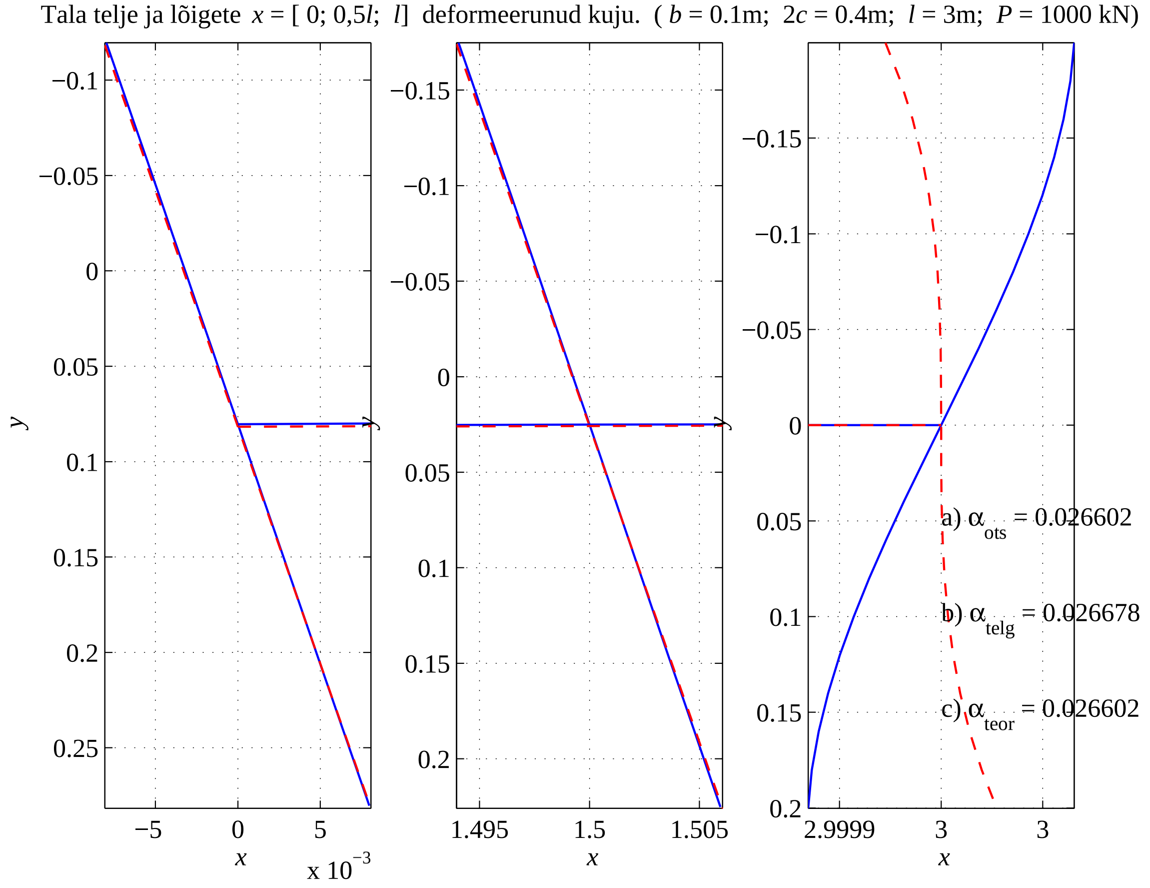
Joonis 6.11: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



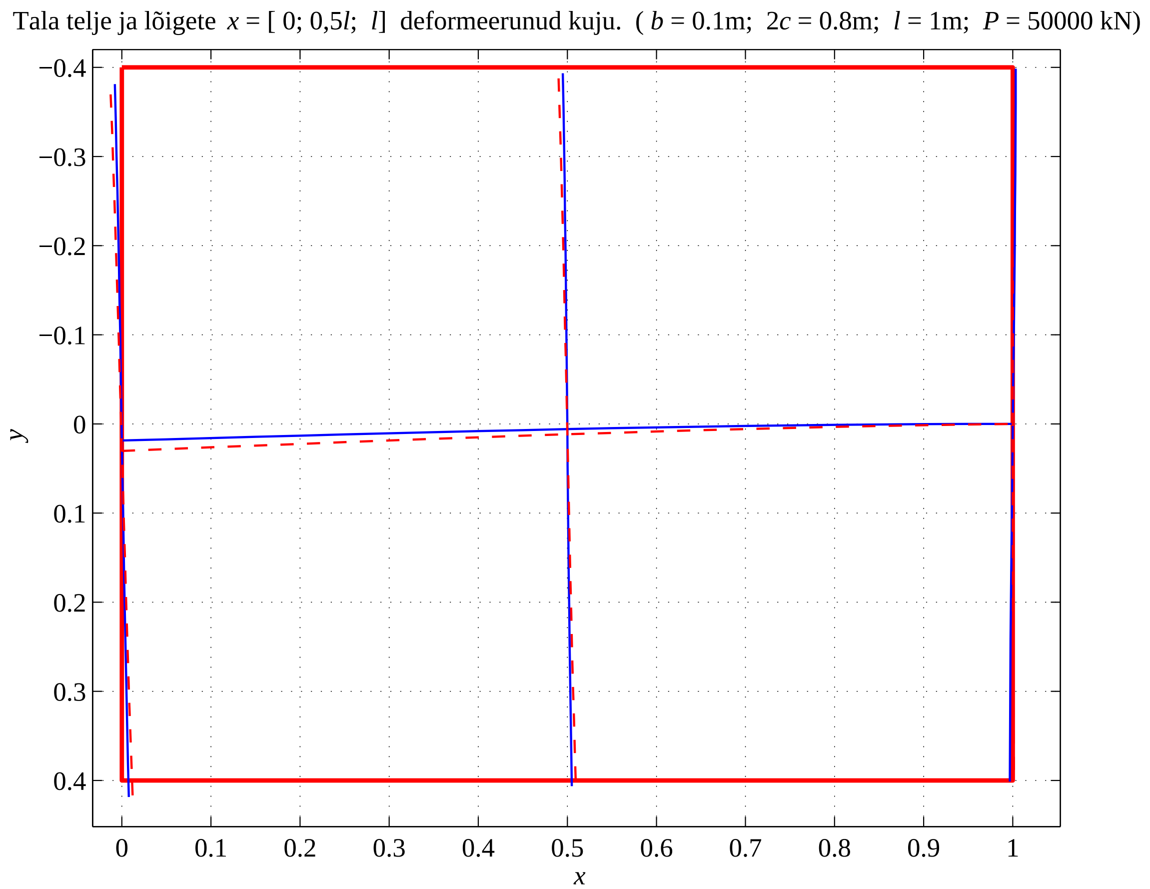
Joonis 6.12: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



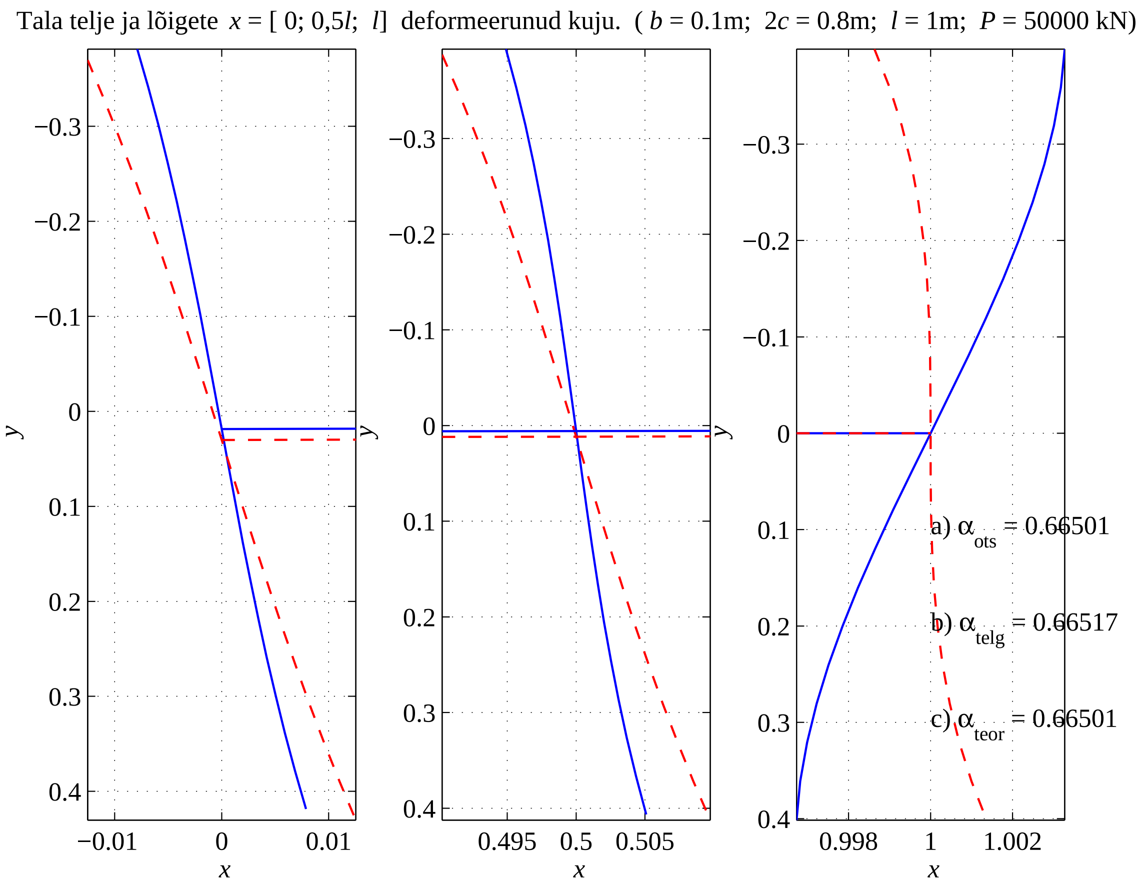
Joonis 6.13: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



Joonis 6.14: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

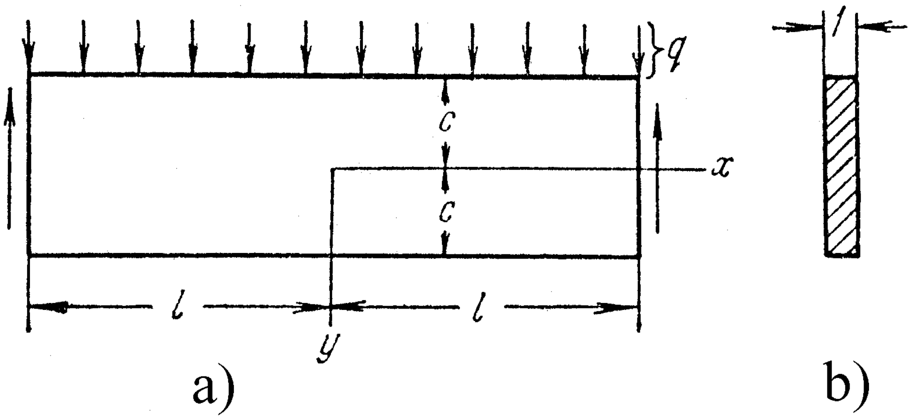


Joonis 6.15: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.



Joonis 6.16: Rajatingimused a) — sinine pidev joon; rajatingimused b) — punane kriipsjoon.

6.7 Ühtlaselt koormatud tala paine



Joonis 6.17: Ühtlaselt koormatud kitsa ristkülikulise ristlõikega tala.

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (joonis 6.17), tala pikkus on $2l$, kõrgus $2c$ ja paksus 1. Tala on otstes vabalt toetatud ja talle mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega q.

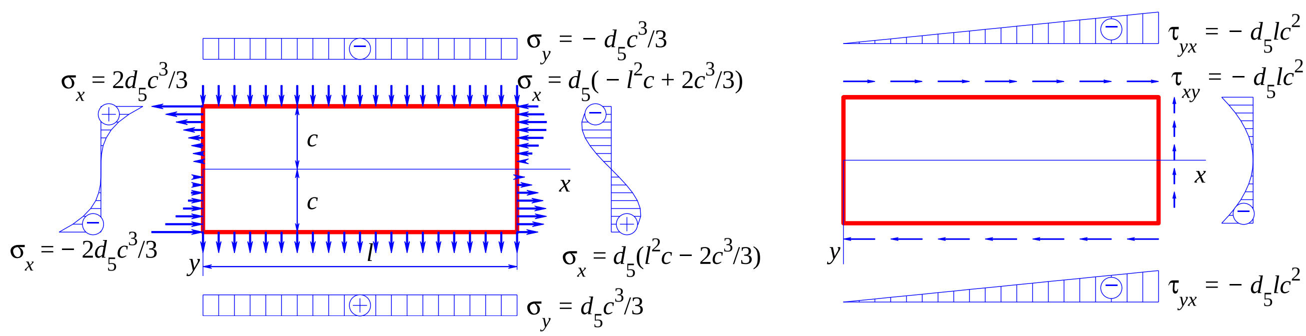
Rajatingimused: a) külgpindadel $y = \pm c$

$$\tau_{xy}\big|_{y=\pm c} = 0, \quad \sigma_y\big|_{y=+c} = 0, \quad \sigma_y\big|_{y=-c} = -q; \tag{6.62}$$

b) otspindadel $x = \pm l$

$$\begin{cases} \int_{-c}^{c} \tau_{xy}\big|_{x=\pm l}\, dy = \mp ql, & \text{põikjõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^{c} \sigma_x\big|_{x=\pm l}\, dy = 0, & \text{pikijõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^{c} \sigma_x\big|_{x=\pm l}\, y dy = 0, & \text{paindemoment tala otstes.} \end{cases} \tag{6.63}$$

Rajatingimusi (6.62) ja (6.63) saab rahuldada kui kombineerida alajaotuses 6.5 leitud lahendeid.



Joonis 6.18: Viiendat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_5 \neq 0$ ja $a_5 = b_5 = c_5 = e_5 = f_5 = 0$ puhul.

Lähtume lahendist (6.33) (lk. 21)

$$\sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5xy^2,$$

millele vastavad rajatingimused on kujutatud joonisel 6.18. Et vabaneda tõmbepingetest küljel $y = c$ ja nihkepingetest külgedel $y = \pm c$ lisame tõmbe $\sigma_y = a_2$ lahendist (6.21) ja pinged $\sigma_y = b_3y$ ning $\tau_{xy} = -b_3x$ lahendist (6.23). Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \qquad \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3 + b_3y + a_2, \\ \tau_{xy} = -d_5xy^2 - b_3x. \end{cases} \tag{6.64}$$

Rajatingimustest (6.62) määrame

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}, \quad d_5 = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}. \tag{6.65}$$

Arvestades, et $I = I_z = 2c^3/3$ saame valemitest (6.64) ja (6.65)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{q}{2I}(x^2y - \dfrac{2}{3}y^3), & \sigma_y = -\dfrac{q}{2I}(\dfrac{1}{3}y^3 - c^2y + \dfrac{2}{3}c^3), \\ \tau_{xy} = -\dfrac{q}{2I}(c^2 - y^2)x. \end{cases} \tag{6.66}$$

Leitud pingekomponendid rahuldavad lisaks rajatingimustele (6.62) ka $(6.63)_{1-2}$. Et oleks rahuldatud ka $(6.63)_3$ lisame puhtale paindele vastavad pinged $\sigma_x = d_3 y$ ja $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ lahendist (6.23). Rajatingimusest $(6.63)_3$ leiame

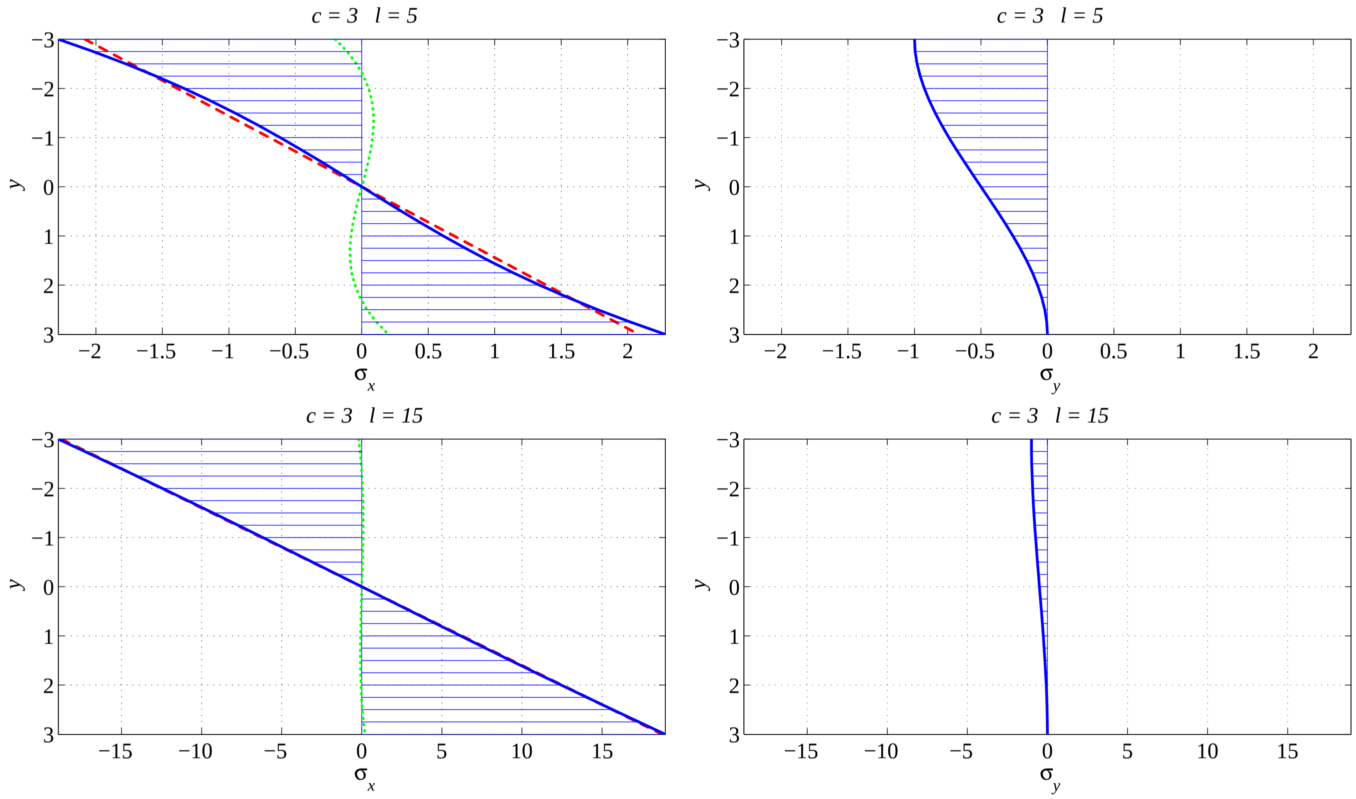
$$d_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right). \tag{6.67}$$

Seega avaldub normaalpinge σ_x lõpuks kujul

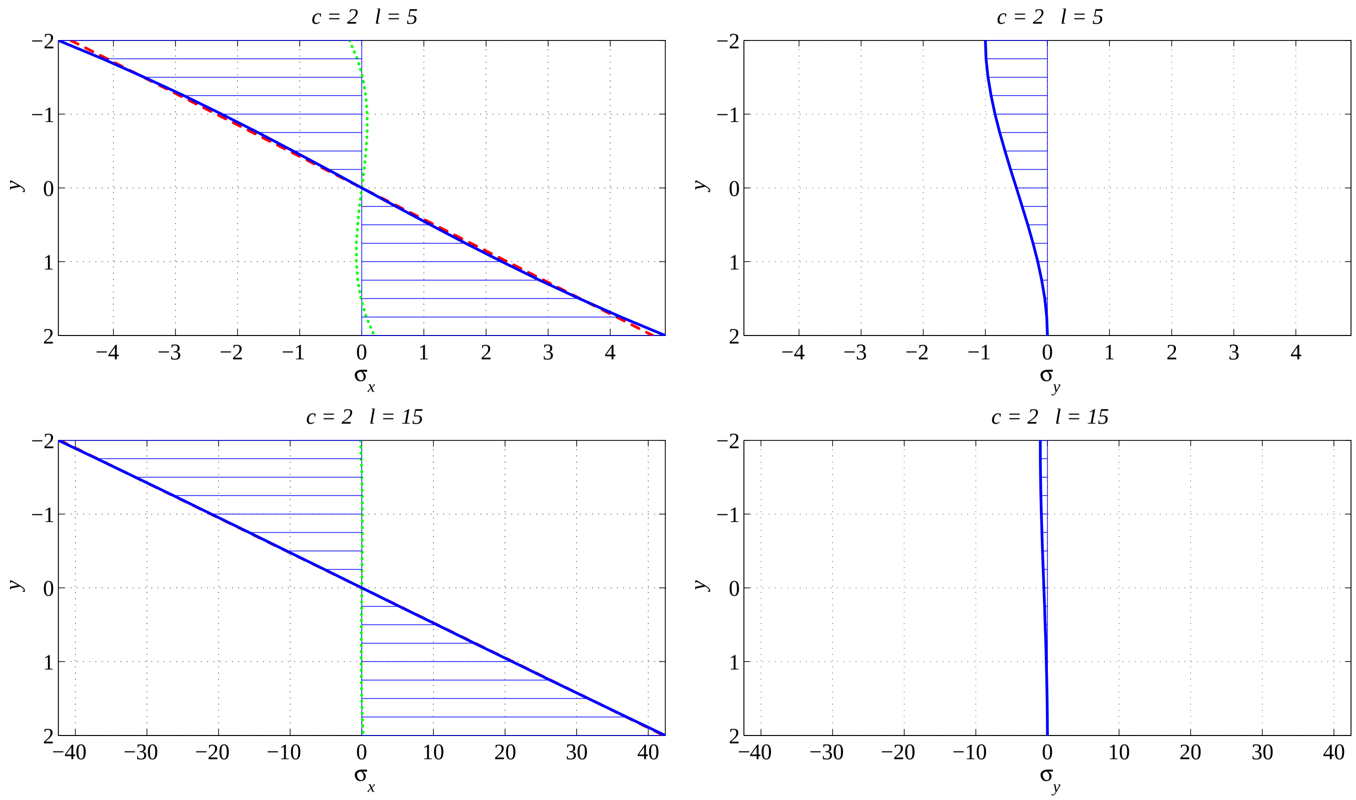
$$\sigma_x = \underbrace{\frac{q}{2I}\left(l^2 - x^2\right)y}_{\text{„põhiliige"}} + \underbrace{\frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)}_{\text{„parandusliige"}}. \tag{6.68}$$

Avaldise (6.68) esimest liiget saab vaadelda kui elementaarsele paindeteooriale vastavat põhiliiget ning teist teist kui parandusliiget, mis on väike võrreldes esimesega. „Parandusliige" on põhjustatud sellest, et elementaarteooria puhul eeldatakse, et $\sigma_y \equiv 0$, kuid (6.66) põhjal pole see nii. Lisaks on valemite (6.66) ja (6.68) põhjal selge, et σ_y ja σ_x avaldise „parandusliige" ei sõltu koordinaadist x.

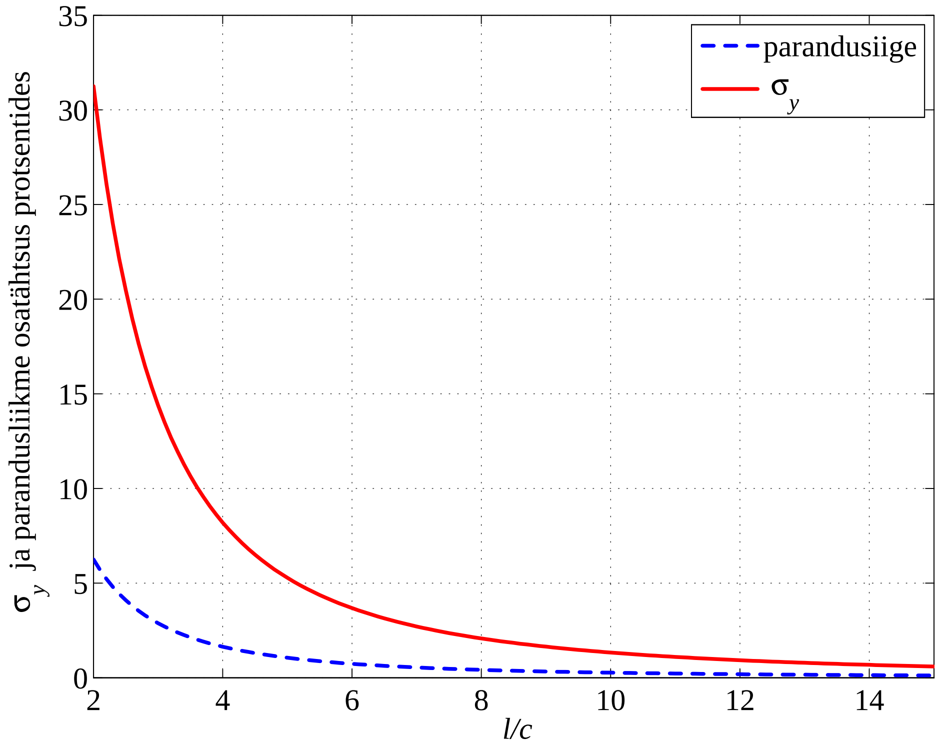
Joonistel 6.19 ja 6.20 on esitatud pingete σ_x ja σ_y epüürid võrdluse mõttes samas mõõtkavas. Sinine pidevjoon vastab σ_x puhul summaarsele pingele vastavalt valemile (6.68), punane kriipsjoon esitab nn. põhiliiget ja roheline punktiirjoon parandusliiget. Nendelt joonistelt selgub, et mida suurem on tala pikkuse ja kõrguse suhe l/c, seda tühisem on parandusliikme mõju ja pinge σ_y maksimaalne väärtus võrreldes σ_x maksimaalse väärtusega.



Joonis 6.19: Pinged σ_x ja σ_y ühtlaselt koormatud talas vastavalt valemitele (6.66) ja (6.68). Tala laius on 1 ja kõrgus $2c = 6$. Ülemistel joonistel on tala pikkus $2l = 10$ ja alumistel joonistel $2l = 30$. Pinge σ_x on esitatud tala keskel kohal $x = 0$. Punane kriipsjoon vastab elementaarteooriast pärit põhiliikmele ja roheline punktiirjoon parandusliikmele.



Joonis 6.20: Pinged σ_x ja σ_y ühtlaselt koormatud talas vastavalt valemitele (6.66) ja (6.68). Tala laius on 1 ja kõrgus $2c = 4$. Ülemistel joonistel on tala pikkus $2l = 10$ ja alumistel joonistel $2l = 30$. Pinge σ_x on esitatud tala keskel kohal $x = 0$. Punane kriipsjoon vastab elementaarteooriast pärit põhiliikmele ja roheline punktiirjoon parandusliikmele.



Joonis 6.21: Pinge σ_y ja parandusliikme osatähtsus protsentides sõltuvana tala pikkuse ja kõrguse suhtest.

Valemi (6.68) parandusliikme ja pinge σ_y osatähtsuse hindamiseks on joonisel 6.21 esitatud suhted

$$\frac{\max_y \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y\right)}{\max_y \sigma_x}. \qquad \text{ja} \qquad \frac{\max_y \sigma_y}{\max_y \sigma_x}.$$

Selle joonise põhjal on selge, et parandusliikme osatähtsus on alla 5 % juba siis kui suhe $l/c > 2,5$ ja pingete σ_y ja σ_x maksimaalsete väärtuste suhe on 5 % väiksem kui suhe $l/c > 5,5$.

Avaldisega (6.68) esitatud pinged annavad otspindadel nulliga võrduva peavektori ja peamomendi. Lahend on täpne vaid juhul kui otspindadel $x = \pm l$ mõjuks pindjõud

$$t_x = \pm \frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y\right). \tag{6.69}$$

Saint-Venaint'i printsiibi põhjal loetakse lahend täpseks punktides, mis on otstest $x = \pm l$ kaugemal kui tala kõrgus, st. $2c$, ka $t_x = 0$ puhul.

Tala punktide siirded u ja v leitakse analoogiliselt alajaotusele 6.6. Nüüd eeldatakse, et punktis $x = y = 0$ on horisontaalsed siirded võrdsed nulliga ja vertikaalsed siirded võrdsed läbipaindega δ. Kokku saame, et

$$\begin{cases} u = \dfrac{q}{2EI}\left[\left(l^2 x - \dfrac{x^3}{3}\right) y + x\left(\dfrac{2}{3}y^3 - \dfrac{2}{5}c^2 y\right) + \nu x\left(\dfrac{1}{3}y^3 - c^2 y + \dfrac{2}{3}c^3\right)\right], \\ v = -\dfrac{q}{2EI}\left\{\dfrac{y^4}{12} - \dfrac{c^2y^2}{2} + \dfrac{2}{3}c^3 y + \nu\left[\left(l^2 - x^2\right)\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^4}{6} - \dfrac{1}{5}c^2y^2\right]\right\} - \\ \quad -\dfrac{q}{2EI}\left[\dfrac{l^2x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{1}{5}c^2x^2 + \left(1 + \dfrac{1}{2}\nu\right)c^2x^2\right] + \delta. \end{cases} \tag{6.70}$$

Kuna $(6.70)_1$ põhjal horisontaalsed siirded tala keskjoonel

$$u|_{y=0} = \frac{\nu q x}{2E}, \tag{6.71}$$

siis ei osutu keskjoon neutraalseks jooneks. Tala keskjoone punktide vertikaalne siire

$$v|_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI}\left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5}c^2x^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\nu\right)c^2x^2\right]. \tag{6.72}$$

Kuna tala otsad on vabalt toetatud, siis $v|_{x=\pm l} = 0$ ja

$$\delta = \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[1 + \frac{12}{5}\frac{c^2}{l^2}\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)\right]. \tag{6.73}$$

Avaldises (6.73) nurksulgude ees olev kordaja esitab elementaarteooriale vastavat läbipainet (eeldades, et tala ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks). Teine liige nurksulgudes esitab parandust, st. arvestab põikjõu mõju läbipaindele.

Diferentseerides (6.72) kaks korda saame keskjoone kõverust iseloomustava avaldise

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{y=0} = \frac{q}{EI}\left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2\left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}\right)\right]. \tag{6.74}$$

Ka selles avaldises vastab esimene liige elementaarteooria valemile ning on proportsionaalne paindemomendiga $q(l^2 - x^2)/2$.

Kui soovitakse arvesse võtta ka omakaalu, tuleb lisada pinge

$$\sigma_y = \rho g(c - y), \tag{6.75}$$

mis annab tala ülemisel pinnal $y = -c$ pingeks $\sigma_y = 2\rho g c$ ja alumisel pinnal $y = c$ vastavalt $\sigma_y = 0$.

Näide

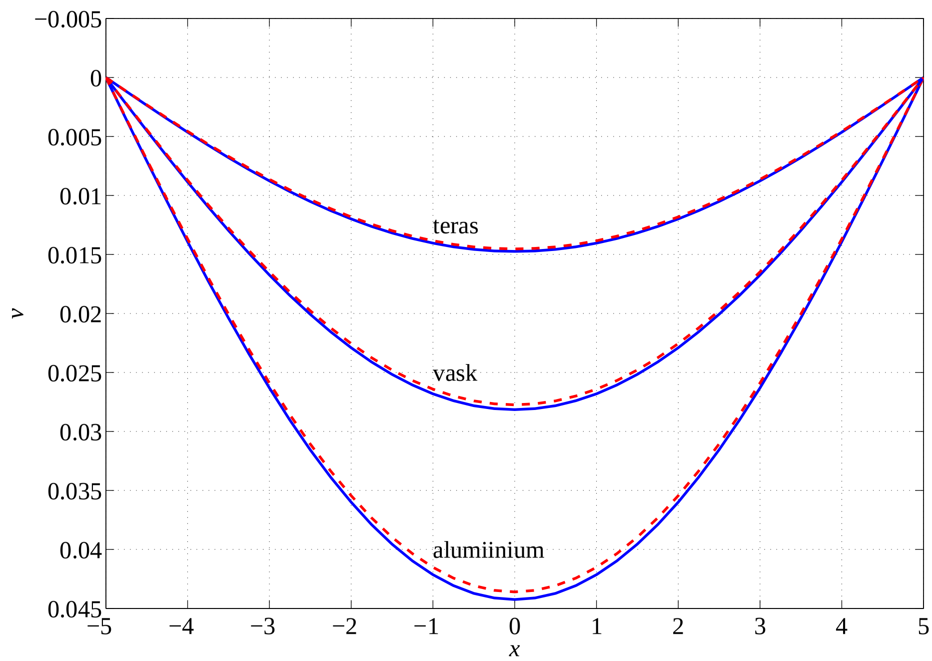
- Tala pikkus $2l = 10$ m, kõrgus $2c = 0,8$ m ja laius $b = 0,1$ m, koormus $q = 100$ kN/m.
- Materjalid:
  Teras: $\rho = 7800$ kg/m^3, $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, omakaal $61,2144$ kN.
  Alumiinium: $\rho = 2600$ kg/m^3, $E = 70$ GPa, $\nu = 0.35$, omakaal $20,4048$ kN.
  Vask: $\rho = 8900$ kg/m^3, $E = 110$ GPa, $\nu = 0.32$, omakaal $69,8472$ kN.

Joonistada tala kõverdunud keskjoon vastavalt valemile (6.72) ja elementaarteooria valemile[2]

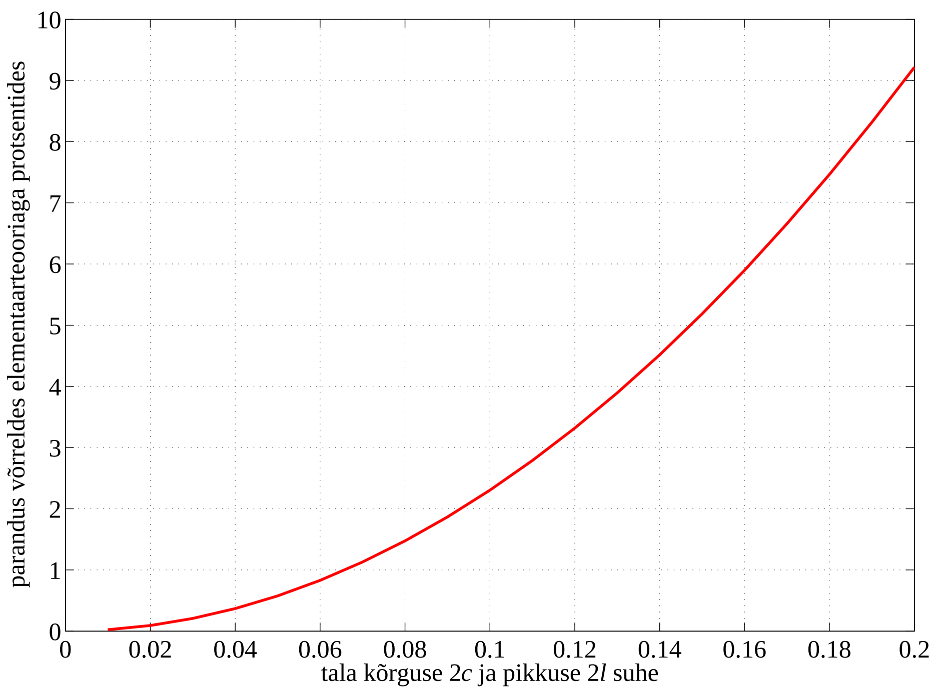
$$v = \frac{q}{EI}\left[\frac{(x+l)^4}{24} - \frac{l(x+l)^3}{6} + \frac{l^3(x+l)}{3}\right] \tag{6.76}$$

ning hinnata valemi (6.73) nn. parandusliikme osatähtsust sõltuvana tala kõrguse ja pikkuse suhtest.

[2]Parnes, Raymond. Solid mechanics in engineering. Wiley, Chichester, 2001.



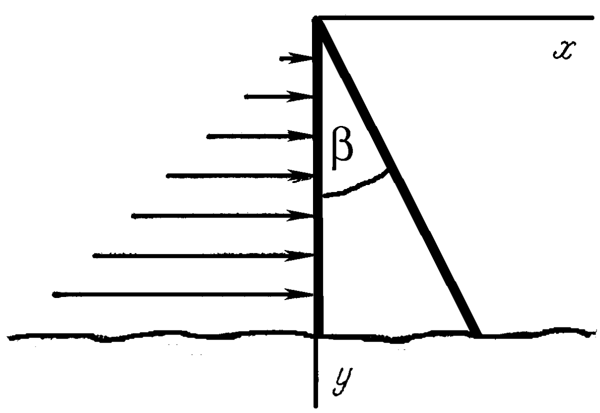
Joonis 6.22: Vabalt toetatud tala telje siirded. Punane kriipsjoon vastab nn. elementaarteooriale ja sinine pidevjoon valemile (6.72).



Joonis 6.23: Vabalt toetatud tala paine. Valemi (6.73) parandusliikme osatähtsus protsentides sõltuvana tala kõrguse ja pikkuse suhtest (vt. alajaotus 6.7 lk. 54).

6.8 Hüdrostaatiliselt koormatud tugiseina arvutus.

Vaatleme kolmurkse ristlõikega tugiseina, millele mõjub hüdrostaatiline surve (joon 6.24). Olgu vedeliku tihedus ρ, tugiseina kaldenurk β ja seina materjali erikaal γ. Seega on seinale mõjuvateks välisjõududeks vedelikust põhjustatud hüdrostaatiline surve $p = \rho g y$ ja mahujõud $Y = \gamma$ (seina erikaal). Hülgame seina ja vundamendi vahelised mõjud, st., vaatleme $0 \leq y < \infty$.



Joonis 6.24: Hüdrostaatiliselt koormatud kolmurkse ristlõikega tugisein.

Sellistel eeldustel on tegu tasapinnalise ülesandega ja rajatingimused

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \end{cases}$$

Vertikaalsel küljel $x = 0$ ja pinnanormaali suunakoosinused $l = -1$ ning $m = 0$. Kuna sellele seinale mõjub hüdrostaatiline surve p, siis vastavalt rajatingimustele

$$\begin{cases} \rho g y = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{yx} 0, \\ 0 = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x = -\rho g y, \\ \tau_{xy} = 0. \end{cases} \tag{6.77}$$

Kaldküljel $x = y \tan\beta$, $l = \cos\beta$, $m = -\cos(90^\circ - \beta) = -\sin\beta$. Kuna kaldkülg on koormusest vaba, siis saavad rajatingimused kuju

$$\begin{cases} 0 = \sigma_x \cos\beta + \tau_{yx}(-\sin\beta), \\ 0 = \tau_{xy}\cos\beta + \sigma_y(-\sin\beta), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x = \tau_{yx}\tan\beta, \\ \tau_{xy} = \sigma_y \tan\beta. \end{cases} \tag{6.78}$$

Lahendi leidmisel lähtume kuuppolünoomist (6.22)

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3\cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2 y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3\cdot 2}y^3.$$

Vastavalt valemitele (6.15) avalduvad pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \qquad \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \qquad \tau_{yx} = -b_3 x - c_3 y - \gamma x. \tag{6.79}$$

Alternatiivsete valemite (6.16) kaudu aga kujul

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \qquad \sigma_y = a_3 x + b_3 y - \gamma y; \qquad \tau_{yx} = -b_3 x - c_3 y. \tag{6.80}$$

Järgnevalt näeme, et mõlemal juhul saame pärast rajatingimuste (6.77) ja (6.78) rahuldamist sama tulemuse.

Lähtume esiteks valemeist (6.79). Rajatingimused vertikaalküljel (6.77) annavad

$$d_3 = -\rho g \quad \text{ja} \quad c_3 = 0. \tag{6.81}$$

Kaldküljel $x = y\tan\beta$ ja rajatingimused (6.78) saavad kuju

$$\begin{cases} 2c_3 \tan\beta + b_3 \tan^2\beta + d_3 + \gamma\tan^2\beta = 0 \\ a_3 \tan^2\beta + 2b_3\tan\beta + c_3 + \gamma\tan\beta = 0 \end{cases} \tag{6.82}$$

Arvestades (6.81) saame viimastest avaldada

$$a_3 = \frac{\gamma}{\tan\beta} - \frac{2\rho g}{\tan^3\beta}, \qquad b_3 = \frac{\rho g}{\tan^2\beta} - \gamma. \tag{6.83}$$

Sellega ongi neli tundmatut konstanti määratud ning pingete avaldised (6.79) saavad kuju

$$\sigma_x = -\rho g y; \quad \sigma_y = (\gamma - 2A)\frac{x}{\tan\beta} + (A-\gamma)\,y; \quad \tau_{yx} = -Ax, \tag{6.84}$$

kus konstant

$$A = \frac{\rho g}{\tan^2\beta}. \tag{6.85}$$

Kui teha sama protseduur läbi alternatiivsete pingeavaldiste (6.80) jaoks, siis saame rajatingimustest (6.77) tulemuseks avaldised (6.81). Rajatingimused kaldküljel annavad aga valemeist (6.83) erineva tulemuse konstandi b_3 jaoks

$$a_3 = \frac{\gamma}{\tan\beta} - \frac{2\rho g}{\tan^3\beta}, \qquad b_3 = \frac{\rho g}{\tan^2\beta}. \tag{6.86}$$

Pannes aga avaldistega (6.81) ja (6.86) esitatud konstantide $a_3, \ldots, d_3$ väärtused pingete avaldistesse (6.80) saame sama tulemuse, mis eelmiselgi juhul. Seega võime kokkuvõttes öelda, et vaadeldava ülesande korral on pinged tugiseinas leitavad valemite (6.84) abil.

Valemi $(6.84)_2$ põhjal vertikaalküljel $\sigma_y = (A-\gamma)\,y$. Seega selleks, et vältida tõmbepingeid ($\sigma_y > 0$) peab $A < \gamma$, kust saame kaldenurga jaoks kriitilise väärtuse

$$\beta^* = \arctan\sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}. \tag{6.87}$$

Kui $\beta > \beta^*$, siis on vertikaalkülg surutud. Võttes vee tiheduseks $\rho = 1000$ kg/m^3 ja seina materjaliks betooni erikaaluga $\gamma = 2400g$ N/m^3 saame $\beta^* = \arctan\sqrt{1000/2400} = 32,8^\circ$. Erikaalu $\gamma = 2000g$ N/m^3 korral saame aga $\beta^* = 35,2^\circ$.

Vaatleme nüüd tugiseina lõiget $y = y_0$. On selge, et selles lõikes $0 \le x \le y_0\tan\beta$. Vastavalt valemeile (6.84) on normaalpinge $\sigma_x = -\rho g y_0$, st. konstantne. Teine normaalpinge, st. σ_y, muutub aga väärtusest $\sigma_y|_{x=0} = (A-\gamma)y_0$ väärtuseni $\sigma_y|_{x=x_0} = -Ay_0$. Nihkepinge $\tau_{xy}|_{x=0} = 0 \le \tau_{xy} \le \tau_{xy}|_{x=x_0} = -Ay_0\tan\beta$. $\surd$ epüüri

Tugevusõpetuse kursuse raames saadud valemid, nn. 0-järku lahend, erineb saadust oluliselt pingete σ_x ja τ_{xy} osas, kusjuures σ_y langeb kokku:

$$\sigma_x^0 = 0; \qquad \sigma_y = \sigma_y^0 \qquad \tau_{xy}^0 = -\frac{3\rho g}{\tan^3\beta}\left(x\tan\beta - \frac{x^2}{y}\right). \tag{6.88}$$

Nihkepinge avaldise puhul on 0-järku teoorias lähtutud samadest eeldustest, mis talade paindel ja saadud paraboolne jaotus.

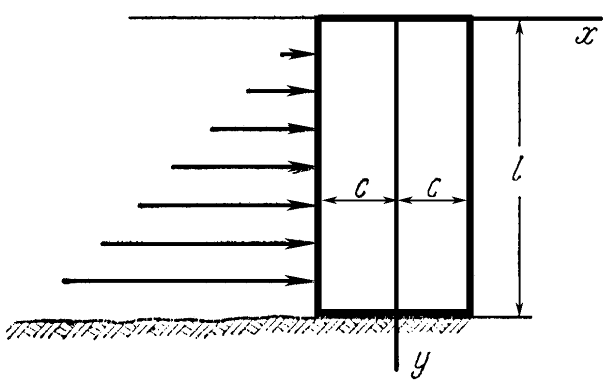
Märkused:

- Vaadeldava ülesande lahendusele ei anna polünoomi järgu tõstmine mitte mingeid lisaliikmeid — kõik kõrgemat järku liikmed peavad vaadeldavate rajatingimuste korral olema nullid.
- Käesoleva lahendi puhul pole arvestatud vundamendi mõju — tugiseina alumisel osal on lubatud vabalt deformeeruda. Tegelikkuses sõltub aga suuremate y väärtuste korral vertikaalne deformatsioon vundamendi jäikusest.
- Kui me sooviksime arvestada ka rajatingimusi tugiseina alumisel osal (seina ja vundamendi kinnituskohas), siis muutuks ülesanne tunduvalt keerukamaks ja teda poleks võimalik lahendada polünoomides.
- Võttes kasutusele kuuendat järku polünoomid, saab leida lahendi ristkülikulise tugiseina (vertikaalse konsooli) jaoks. Seda vaadeldakse järgmises alajaotuses.

6.9 Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool

Kui üldistada alajaotuses 6.5 esitatud lahendusmetoodikat ja vaadelda 6. järku polünoomi, siis saame leida pingejaotuse hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalse konsooli jaoks:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{\rho g y}{2} + \rho g y \left(\dfrac{x^3}{4c^3} - \dfrac{3x}{4c} \right), \qquad \sigma_y = \dfrac{\rho g y^3 x}{4c^3} + \dfrac{\rho g}{4c^3} \left(-2yx^3 + \dfrac{6}{5} c^2 y x \right), \\ \tau_{xy} = \dfrac{3\rho g y^2}{8c^3}(c^2 - x^2) - \dfrac{\rho g}{8c^3}(c^4 - x^4) + \dfrac{\rho g}{4c^3} \dfrac{3}{5} c^2 (c^2 - x^2). \end{cases} \tag{6.89}$$



Joonis 6.25: Vertikaalsele konsoolile mõjuv hüdrostaatiline surve.

Siin tähistab ρ vedeliku tihedust (kg/m^3) ja seega on koormuse intensiivsus sügavusel y võrdne $\rho g y$, põikjõud $\rho g y^2/2$ ja paindemoment $\rho g y^3/6$. σ_y ja τ_{xy} avaldiste esimesed liikmed vastavad jällegi elementaarteooriale.

Konsooli vabal otsal $y = 0$ on leitud lahendi põhjal normaalpinged nullid. Nihkepinged

$$\tau_{xy} = -\frac{\rho g}{8c^3}(c^4 - x^4) + \frac{\rho g}{4c^3}\frac{3}{5}c^2(c^2 - x^2) \tag{6.90}$$

pole nullid, kuid on väikesed üle kogu pinna ning nende peavektor on ligikaudu null. See võimaldab lugeda väliskoormuse kohal $y = 0$ nulliks.

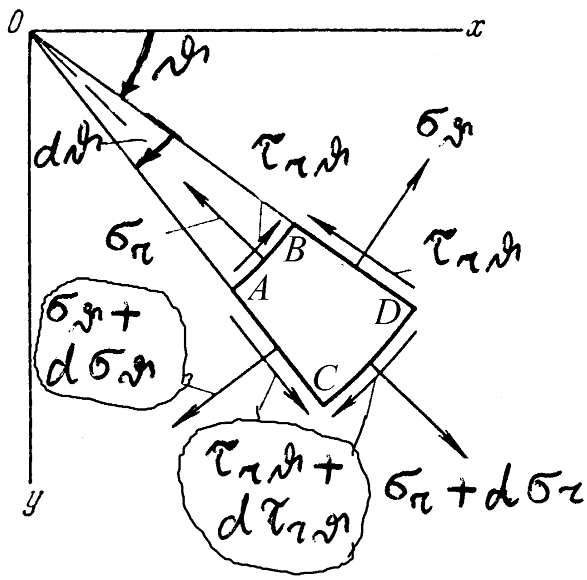
Kui tahetakse arvesse võtta ka konsooli materjali omakaal, siis tuleb σ_y avaldisse lisada liige $-\gamma y$, kus γ on konsooli materjali erikaal.

Vaadeldav lahend pärineb Timoshenko ja Goodier õpikust[3] ning tegelikult pole ka siin arvesse võetud vundamendi mõju.

[3] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1970. Venekeelne tõlge: Teoria uprugosti, Mir, Moskva, 1975.

6.10 Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides

6.10.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 6.26: Väikese elemendi $ABCD$ tasakaal.

DRK-s esitatud tasakaaluvõrrandite analoog saadakse kui vaadeldakse elemendi $ABCD$ tasakaalu ja projekteeritakse tema külgedel mõjuvad summaarsed jõud ja mahujõud ϑ ja r sihile.

Minnes üle piirile $d\vartheta \to 0$ ja $dr \to 0$ saame

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + f_r = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \dfrac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + f_\vartheta = 0. \end{cases} \tag{6.91}$$

Siin tähistavad f_r ja f_ϑ mahujõudude projektsioone radiaal ja tangentsiaal suunale (r ja ϑ kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni $\varphi = \varphi(\vartheta, r)$, nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, \qquad \sigma_\vartheta = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right). \end{cases} \tag{6.92}$$

Nüüd Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right) \tag{6.93}$$

ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)^2 \varphi = 0. \tag{6.94}$$

Kui pingekomponendid ja seega ka φ sõltuvad vaid koordinaadist r, siis saab võrrandi (6.94) üldlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \tag{6.95}$$

6.10.2 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

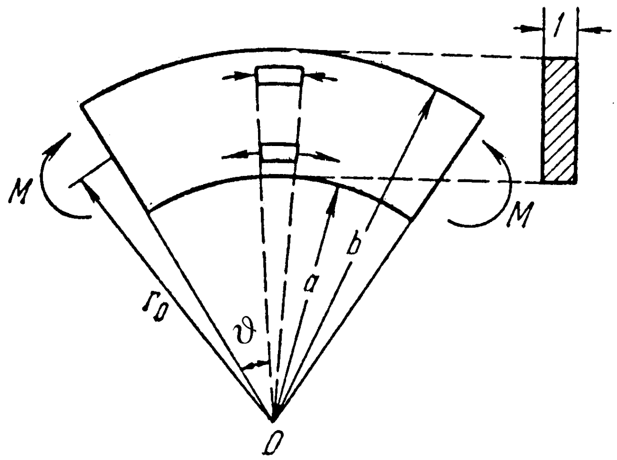
$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \vartheta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r}. \end{cases} \tag{6.96}$$

Siin mõistetakse suurusi u ja v kui radiaalset ja tangentsiaalset siirdekomponenti. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r), \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \tag{6.97}$$

Siirete määramine toimub analoogiliselt DRK-ga.

6.11 Kõvera tala paine



Joonis 6.27: Kõvera tala paine.

Näitena vaatleme kõvera tala puhast painet, st. vaatleme tala, mis paindub kõverustasapinnas otstesse rakendatud momentide M mõjul. Sel juhul jääb paindemoment konstantseks kogu varda pikkuse ulatuses, järelikult sõltub pinge vaid radiaalkoordinaadist r. Seega saab kasutada lahendit (6.95).

Rajatingimused:

$$\begin{cases} \sigma_r = 0, \quad r = a,\ r = b, \\ \displaystyle\int_a^b \sigma_\vartheta dr = 0, \quad \int_a^b \sigma_\vartheta r dr = -M \\ \tau_{r\vartheta} = 0, \quad \text{kõigil rajapindadel.} \end{cases} \tag{6.98}$$

Pärast rajatingimuste (6.98) rahuldamist ja tähistuse

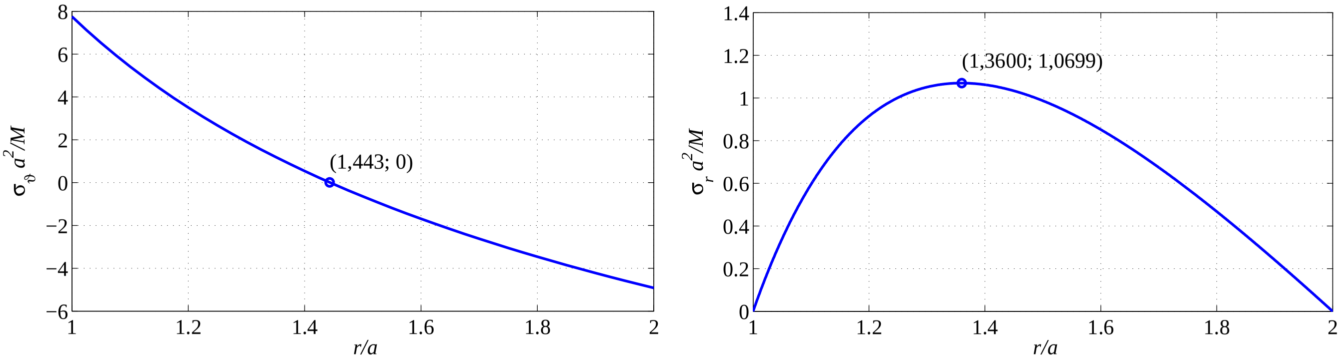
$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \tag{6.99}$$

sissetoomist saame

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{4M}{N} \left(\dfrac{a^2b^2}{r^2} \ln \dfrac{b}{a} + b^2 \ln \dfrac{r}{b} + a^2 \ln \dfrac{a}{r} \right), \\ \sigma_\vartheta = -\dfrac{4M}{N} \left(-\dfrac{a^2b^2}{r^2} \ln \dfrac{b}{a} + b^2 \ln \dfrac{r}{b} + a^2 \ln \dfrac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \\ \tau_{r\vartheta} = 0. \end{cases} \tag{6.100}$$

Lahend on täpne vaid siis kui pingejaotus otspindadel vastab avaldisele $(6.100)_2$. Muil juhtudel tuleb rakendada Saint-Venanti printsiipi.

Joonisel 6.28 on esitatud suurused $\sigma_\vartheta a^2/M$ ja $\sigma_r a^2/M$ sõltuvana suhtest r/a juhul kui $b/a = 2$.



Joonis 6.28: Pingete jaotus kõvera tala paindel.

Järeldused: 1) $\sigma_r > 0$ iga r puhul vaadeldavas piirkonnas; 2) neutraalne telg vastab $r/a = 1,443$ ja $\max \sigma_\vartheta > |\min \sigma_\vartheta|$; 3) σ_r maksimum ei asu neutraalsel teljel.

6.12 Pöörlev ketas

Teiseks näiteks polaarkoordinaatide puhul on pöörleva ketta ülesanne. Vaatleme pöörlevat ketast, mis pöörleb jääva nurkkiirusega ω. Ketta paksuse loeme raadiusega võrreldes väikeseks. Ainsaks mahujõuks (mida arvesse võtame) on inertsjõud, st. $f_r = \rho\omega^2 r$ ja $f_\vartheta = 0$. Antud juhul on tegu nn. polaarsümmeetrilise ülesandega, kus σ_r ja σ_ϑ sõltuvad vaid koordinaadist r ja seega valemi (6.92) põhjal $\tau_{r\vartheta} = 0$. Teine tasakaaluvõrrandeist (6.91) on antud juhul automaatselt rahuldatud ja esimesele saab anda kuju

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\vartheta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \tag{6.101}$$

Kuna ka ε_r ja ε_ϑ on vaid r funktsioonid, siis (6.96) põhjal

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}. \tag{6.102}$$

Hooke'i seadusest (6.97)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r - \nu\varepsilon_\vartheta), \quad \sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\vartheta - \nu\varepsilon_r). \tag{6.103}$$

Asendades nüüd deformatsioonikomponendid (6.102) Hooke'i seadusse (6.103) ning viimase omakorda tasakaaluvõrrandisse (6.101) saame diferentsiaalvõrrandi siirdekomponendi u määramiseks:

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r^3. \tag{6.104}$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujul

$$u = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1\frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8}\rho\omega^2 r^3\right]. \tag{6.105}$$

Vastavad pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = C + C_1\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\vartheta = C - C_1\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2. \end{cases} \tag{6.106}$$

Konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest.

Täisketta (ilma auguta keskel) puhul vastab $r = 0$ siire $u = 0$, seega $C_1 = 0$. Ketta serval $r = b$ jõudude puudumisel $\sigma_r = 0$, seega

$$C = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2. \tag{6.107}$$

Seega pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2) \\ \sigma_\vartheta = \dfrac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 - \dfrac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 \end{cases} \tag{6.108}$$

Plaadi keskel on neil pingetel maksimaalne väärtus

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2. \tag{6.109}$$

Kui ketta keskel on ava raadiusega a, siis konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest $\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = 0$ —

$$C = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2 + b^2), \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 b^2. \tag{6.110}$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 - \dfrac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right), \\ \sigma_\vartheta = \dfrac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 + \dfrac{a^2b^2}{r^2} - \dfrac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right). \end{cases} \tag{6.111}$$

Radiaalpinge σ_r on nüüd maksimaalne kohal $r = \sqrt{ab}$ ja tangentsiaalpinge (rõngaspinge, i.k. *hoop stress*) σ_ϑ sisemisel serval

$$\begin{cases} \max \sigma_r = \dfrac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b-a)^2, \\ \max \sigma_\vartheta = \dfrac{3+\nu}{4}\rho\omega^2\left(b^2 + \dfrac{1-\nu}{3+\nu}a^2\right). \end{cases} \tag{6.112}$$

Kui $a \to 0$, siis $\max \sigma_\vartheta$ läheneb väärtusele, mis on kaks korda suurem kui avaldisega (6.109) esitatud väärtus. Seega kui teha täisketta tsentrisse väike ava, siis suureneb tangentsiaalpinge plaadi tsentris kaks korda.

6.13 Radiaalne pingus.

Küllaltki tihti esineb ülesandeid, kus igas keha punktis on nullist erinev vaid radiaalne pinge σ_r. Sellist pingust nimetatakse *radiaalseks pinguseks.*

Antud juhul saab esitada pinge $\sigma_r(r,\vartheta)$ kahe funktsiooni korrutisena:

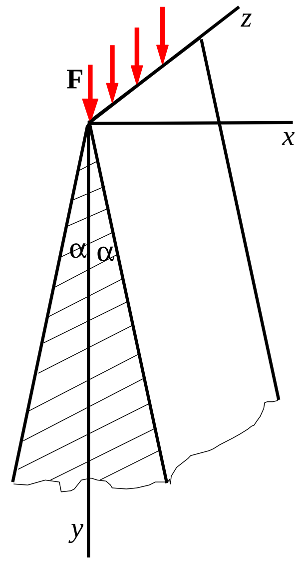
$$\sigma_r(r,\vartheta) = \varphi(r)\psi(\vartheta). \tag{6.113}$$

Pannes viimase tasakaalu- ja pidevusvõrrandeisse ning integreerides, saame radiaalse pinguse jaoks pingekomponentide avaldised

$$\sigma_r(r,\vartheta) = -\frac{k}{r}\cos(\vartheta - \vartheta_0), \qquad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0, \tag{6.114}$$

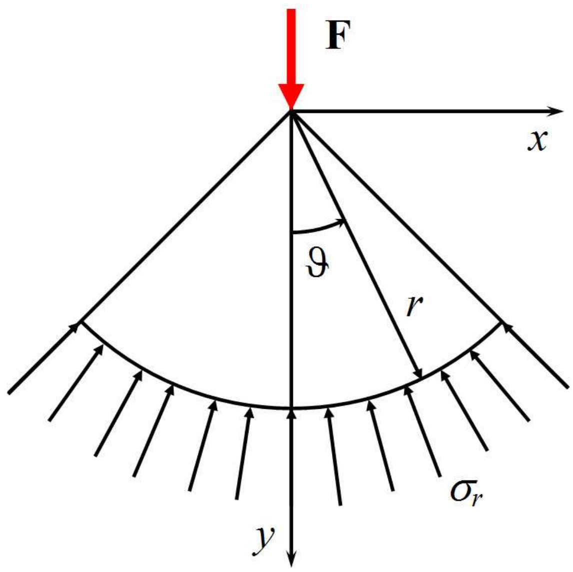
kus integreerimiskonstandid k ja ϑ_0 määratakse rajatingimustest.

6.14 Kiilu surve.



Joonis 6.29: Sümmeertiline kiil ja tema sümmeetriatasandis mõjuv jõud.

Vaatleme lõpmata pikka sümmeetrilist kiilu (joonis 6.29), mille sümmeetriatasandis mõjub joonkoormus **F**. Kiilu tipunurga tähistame 2α. Analoogiliselt tugiseina arvutusega, hülgame rajatingimused kiilu alaservas ja vaatleme $0 \le y \le \infty$.



Joonis 6.30: Sümmeertilisele kiilule mõjuv jõud, radiaalne pinge, polaar ja ristkoordinaadid.

Võtame kasutusele polaarkoordinaadid r ja ϑ (joonis 6.30). Sellisel juhul on tegu radiaalse pingusega ja pingekomponendid on esitatavad kujul (6.114). Konstantide k ja ϑ_0 määrmiseks tuleb kõik joonisel 6.30 kujutatud jõud (ja pinged) projekteerida koordinaatide r ja ϑ (või x ja y sihile). Kuna välisjõud on vaadeldaval juhul vertikaalne (ja mõjub sümmeetriatasandis), siis on konstant $\vartheta_0 = 0$. Konstandi k määramiseks projekteeritakse **F** ja σ_r y-teljele:

$$F - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r (\cos\vartheta) r d\vartheta = 0, \quad (6.115)$$

kust arvestades (6.114) saame

$$F - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{k}{r} \cos^2 \vartheta r d\vartheta = 0, \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha}. \tag{6.116}$$

Kokku saame seega lahendi kujul:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \vartheta}{r}, \qquad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0. \tag{6.117}$$

Kuna valemite (6.114) tuletamisel kasutati nii tasakaalu kui pidevuse võrrandeid, siis rahuldab ka vaadeldava ülesande lahend (6.117) nii tasakaalu kui pidevuse võrrandeid.

Praktiliste probleemide korral (vt. näiteks järgmist alajaotust) on siiski otstarbekas kasutada koordinaate x ja y. Üleminekuks on järgmised valemid:

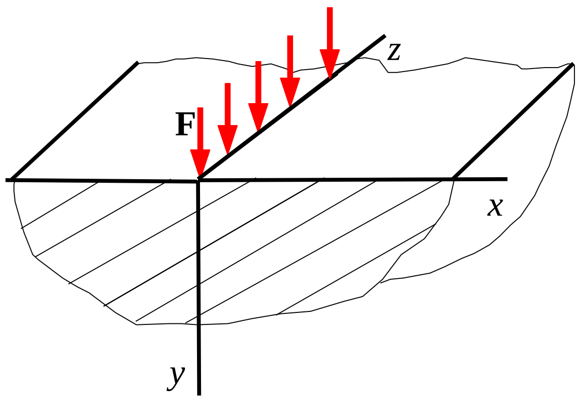
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r l^2 + \sigma_\vartheta m^2 + 2\tau_{r\vartheta} l m, \\ \sigma_y = \sigma_r l_1^2 + \sigma_\vartheta m_1^2 + 2\tau_{r\vartheta} l_1 m_1, \\ \tau_{xy} = \sigma_r l l_1 + \sigma_\vartheta m m_1 + \tau_{r\vartheta}(l m_1 + l_1 m), \end{cases} \tag{6.118}$$

$$\begin{cases} l = \cos(r, x) = \sin \vartheta, \\ m = \cos(\vartheta, x) = \cos \vartheta, \\ l_1 = \cos(r, y) = \cos \vartheta, \\ m_1 = \cos(\vartheta, y) = -\sin \vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{6.119}$$

Kokku saame kolm koordinaatidele x ja y vastavat pingekomponenti

$$\sigma_x = -\frac{k x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{k y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{k x y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{6.120}$$

6.15 Koondatud jõu mõju poolruumile



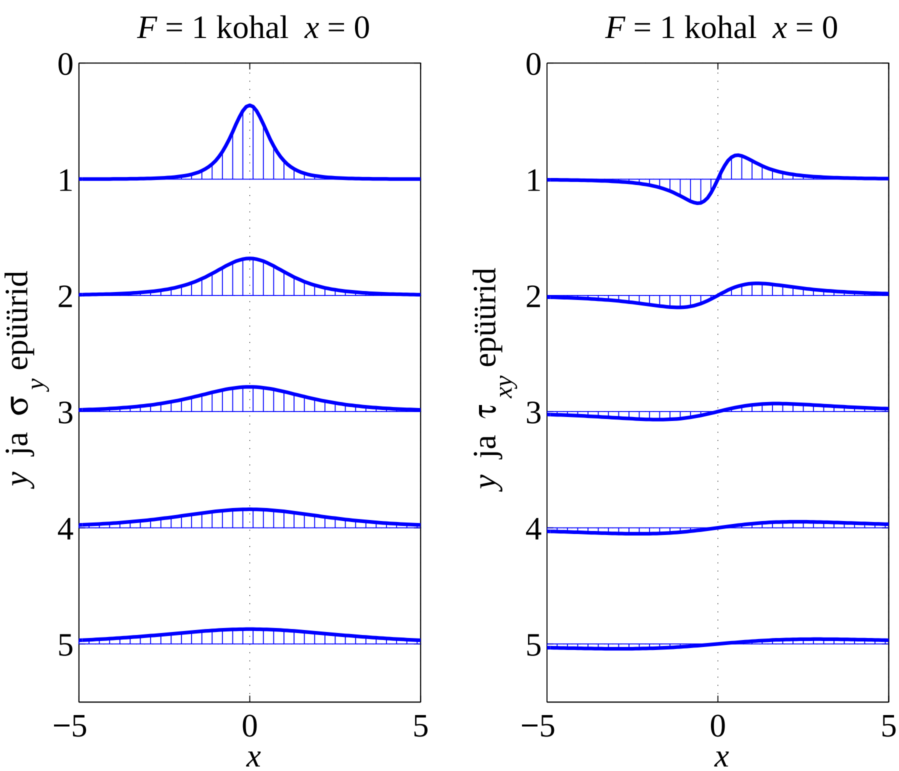
Joonis 6.31: Elastsele poolruumile mõjuv koondatud jõud.

Vaatleme elastset keskkonda, mis on piiratud koordinaattasandiga (x, z) ja millele mõjub piki z telge rakendatud jõud **F**. Selline ülesanne on tuntud *Flamant' ülesandena* ja ta kujutab endast eelmises alajaotuses vaadeldud kiilu ülesande erijuhtu, kus nurk $\alpha = \pi/2$. Järelikult konstant $k = 2F/\pi$ ja pingekomponendid polaarkoordinaatides

$$\sigma_r = -\frac{2F\cos\vartheta}{\pi r}, \qquad \sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0 \tag{6.121}$$

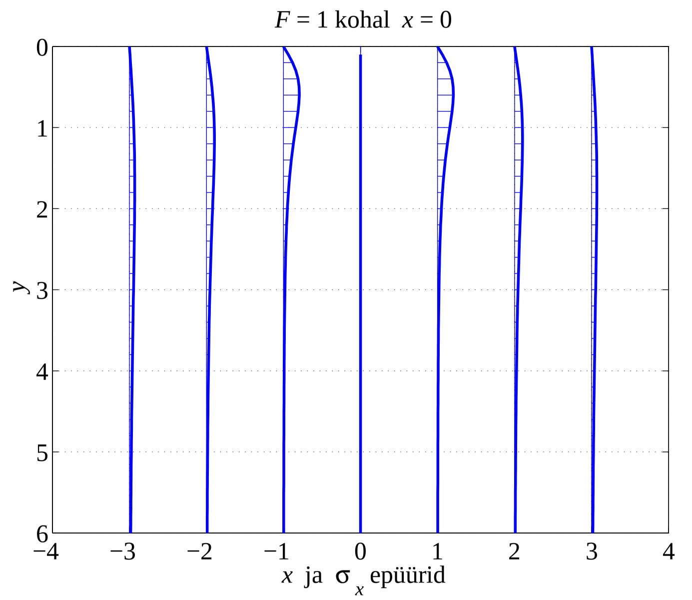
ning ristkoordinaatides

$$\sigma_x = -\frac{2Fx^2y}{\pi(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Fy^3}{\pi(x^2+y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2Fxy^2}{\pi(x^2+y^2)^2}. \tag{6.122}$$



Joonis 6.32: Normaapinge σ_y ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaadi y fikseeritud väärtuste jaoks kohal $x = 0$ mõjuva ühikulise jõu **F** korral.

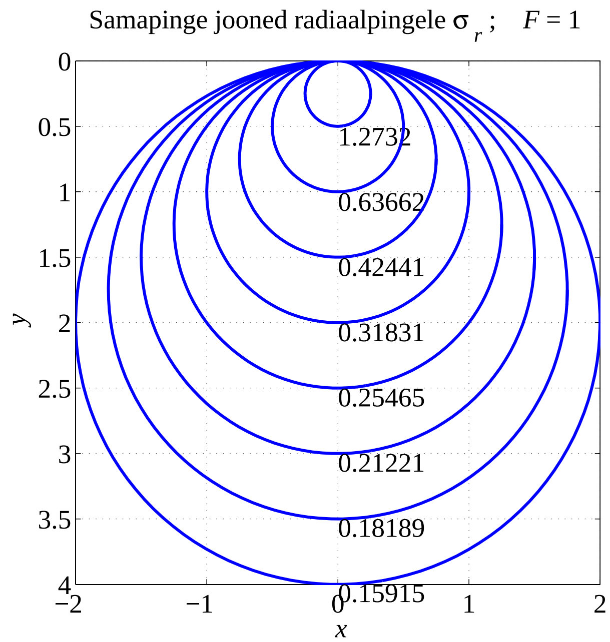
On selge, et vaadeldavas piirkonnas on normaalpinged negatiivsed iga x ja y korral, nihkepinge τ_{xy} aga muudab jõu rakenduspunkti kohal oma märki: negatiivsete x korral on $\tau_{xy} > 0$ ja positiivsete x korral on $\tau_{xy} < 0$. Joonisel 6.32 on esitatud normaalpinge σ_y ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaadi y fikseeritud väärtustel $y_0 = 1, 2, \ldots, 5$.



Joonis 6.33: Normaapinge σ_x epüürid koordinaadi x fikseeritud väärtuste jaoks kohal $x = 0$ mõjuva ühikulise jõu **F** korral.

Joonisel 6.33 on esitatud normaalpinge σ_x epüürid koordinaadi x fikseeritud väärtuste $x_0 = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ jaoks.

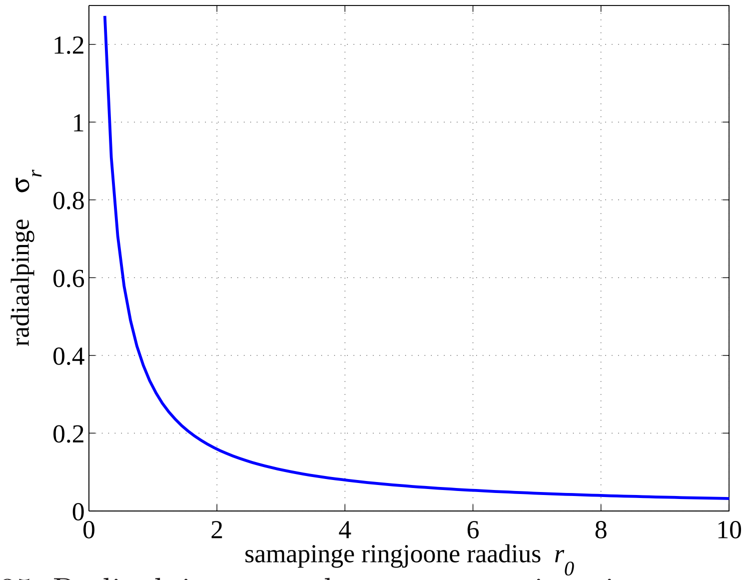
Fikseeritud y korral omab normaalpinge σ_y ekstremaalset väärtust kohal $x = 0$, ja nihkepinge τ_{xy} kohal $|x| = y_0/\sqrt{3}$. Analoogiliselt, fikseeritud x korral omab normaalpinge σ_x ekstremaalset väärtust kohal $y = x_0/\sqrt{3}$. $\surd$



Joonis 6.34: Radiaalpinge σ_r samapinge jooned kohal $x = 0$ mõjuva ühikjõu **F** korral.

Joonisel 6.34 on esitatud radiaalpinge σ_r samapinge jooned — ringjoonel raadiusega r_0 on radiaalpinge $\sigma_r = -F/\pi r_0$. Kõik sellised ringjooned puutuvad x-telge jõu **F** rakenduspunktis.

Sellise graafilise radiaalpingte esituse andis esmakordselt Joseph Boussinesq ning seetõttu nimetatakse neid ringe *Boussinesqi ringideks*.



Joonis 6.35: Radiaalpinge σ_r sõltuvana samapinge joone raadiusest r_0.

Joonisel 6.35 on näidatud kuidas sõltub radiaalpinge σ_r samapinge joone raadiusest r_0.

Valemeid (6.121) ja (6.122) võib kasutada selleks, et hinnata vundamendialuseid pingeid pinnases. Kuigi pinnas üldiselt ei käitu elastselt, on siiski leitud, et väikeste sisepingete korral on kõigil pinnastel rakendatav lineaarne elastsusteooria.

Eelpool vaadeldud lahend on lihtsalt üldistatav suvalise joonkoormuse $p(x)$ jaoks, mis mõjub lõigul $[a, b]$. Esmalt vaatleme juhtu, kus koondatud jõud $\mathbf{F}$ ei mõju mitte koordinaatide alguses, vaid punktis $x = x_0$. Sel juhul saavad valemid (6.122) kuju

$$\sigma_x = -\frac{2F\xi^2 y}{\pi(\xi^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2F y^3}{\pi(\xi^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2F\xi y^2}{\pi(\xi^2 + y^2)^2} \tag{6.123}$$

kus $\xi = x - x_0$.

Selleks, et arvutada lõigul $a \leq x \leq b$ mõjuvast joonkoormusest $p(x)$ põhjustatud pingeid, tuleb saadud valemites teha asendus $F = p(\xi)d\xi$ ja integreerida lõigul $[a, b]$.

Juhul kui $p = const.$, saame

$$\sigma_x = -\frac{2p}{\pi}\int_{x=a}^{x=b}\frac{\xi^2 y}{(\xi^2+y^2)^2}d\xi = -\frac{p}{\pi}\left(\arctan\frac{\xi}{y} - \frac{y\xi}{\xi^2+y^2}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= -\frac{p}{\pi}\left[\arctan\frac{(x-b)}{y} - \arctan\frac{(x-a)}{y} - \frac{y(x-b)}{(x-b)^2+y^2} + \frac{y(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right], \tag{6.124}$$

$$\sigma_y = -\frac{2p}{\pi}\int_{x=a}^{x=b}\frac{y^3}{(\xi^2+y^2)^2}d\xi = -\frac{p}{\pi}\left(\arctan\frac{\xi}{y} + \frac{y\xi}{\xi^2+y^2}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= -\frac{p}{\pi}\left[\arctan\frac{(x-b)}{y} - \arctan\frac{(x-a)}{y} + \frac{y(x-b)}{(x-b)^2+y^2} - \frac{y(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right], \tag{6.125}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2p}{\pi}\int_{x=a}^{x=b}\frac{\xi y^2}{(\xi^2+y^2)^2}d\xi = \frac{p}{\pi}\frac{y^2}{\xi^2+y^2}\Bigg|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{p}{\pi}\left[\frac{y^2}{(x-b)^2+y^2} - \frac{y^2}{(x-a)^2+y^2}\right]. \tag{6.126}$$

Saadud valemite (6.124)–(6.126) abil on võimalik hinnata pingeid vundamendialuses pinnases.

Jaan Metsaveere koostatud õppevahendis[4] on välja pakutud alternatiivne valem

$$\sigma_y^* = \frac{p}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, \tag{6.127}$$

kus p on alusmüüri pikkusühikule mõjuv koormus, $2a$ vundamendi pikkus ja $-a \leq x \leq a$. See valem baseerub ideel määrata vundamendi ja pinnase vaheline rõhk, mis põhjustab ühtlase vertikaalsiirde kogu vundamendi ulatuses. Viimase valemi põhjal peaks vundamendi servades $x = \pm a$ tekkima lõpmata suured pinged. Tegelikkuses selline olukord ei realiseeru — juba suhteliselt väikeste pingete juures tekkivad $x = \pm a$ ümbruses plastsed deformatsioonid ning tegelik pingejaotus on tunduvalt ühtlasem.

[4] J. Metsaveer, Plaatide arvutus ja tasandülesanne, Tallinn, 1987

6.16 Näide: joonkoormuse mõju poolruumile

Ülesanne. Poolruumile mõjub lõigul $-5 \leq x \leq 5$ kontsantne joonkoormus $p = 1$. Leida normaalpinged σ_x, σ_y ja τ_{xy} koordinaatide x ja y fikseeritud väärtuste jaoks kasutades eelmises alajaotuses toodud valemeid.

Lahendus.

1. Normaalpinge σ_y arvutamiseks saab kasutada valemeid (6.125), $(6.123)_2$ või (6.127).

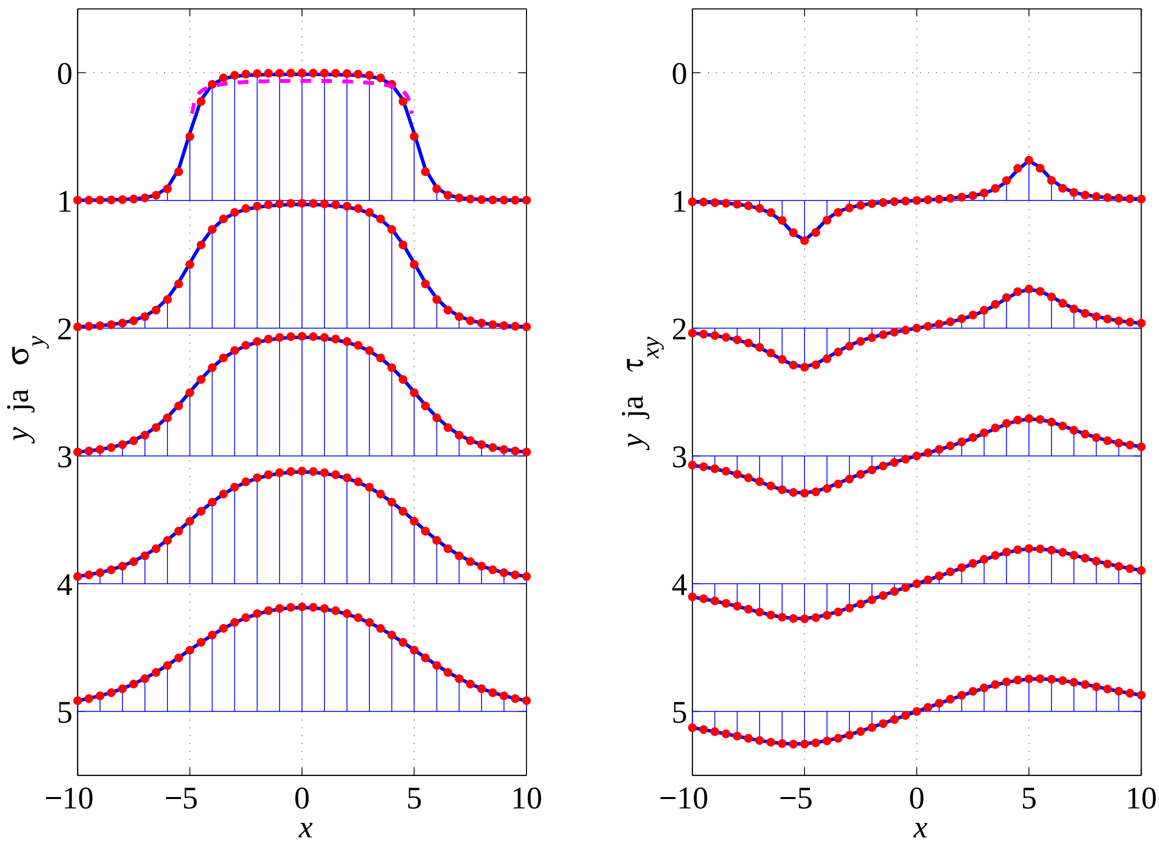
   - Valem (6.125) võimaldab leida pinge σ_y väärtusi iga y ja x jaoks.
   - Valemi $(6.123)_2$ rakendamiseks tuleb lõik $-5 \leq x \leq 5$ jagada n võrdseks osalõiguks pikkusega $\Delta x = 2a/n$ ja joonkoormus $n+1$ koondatud jõuks. Osalõikude otstes $x_i = -a + i\Delta x$, $(i = 0, ..., n)$ mõjuvad sel juhul koondatud jõud $F_i = 2ap/(n+1)$. Iga jõud F_i põhjustab pinge $\sigma_y(F_i)$. Seega, rakendades superpositsiooni printsiipi, avaldub $n+1$ jõust põhjustatud pinge summana $\sigma_y = \sum_{i=0}^{n} \sigma_y(F_i)$.
   - Valem (6.127) on mõeldud pingete arvutamiseks vahetult vundamendi all ning seetõttu pole seal koordinaati y.

   - Tulemused on esitatud joonistel 6.36–6.38. Joonisel 6.36 on osalõikude arv $n = 100$, joonisel 6.37 $n = 20$ ja joonisel 6.38 $n = 10$. Punane punktiirjoon vastab valemile (6.125), violetne kriipsjoon valemile (6.127) ja sinine pidev joon valemile $(6.123)_2$.

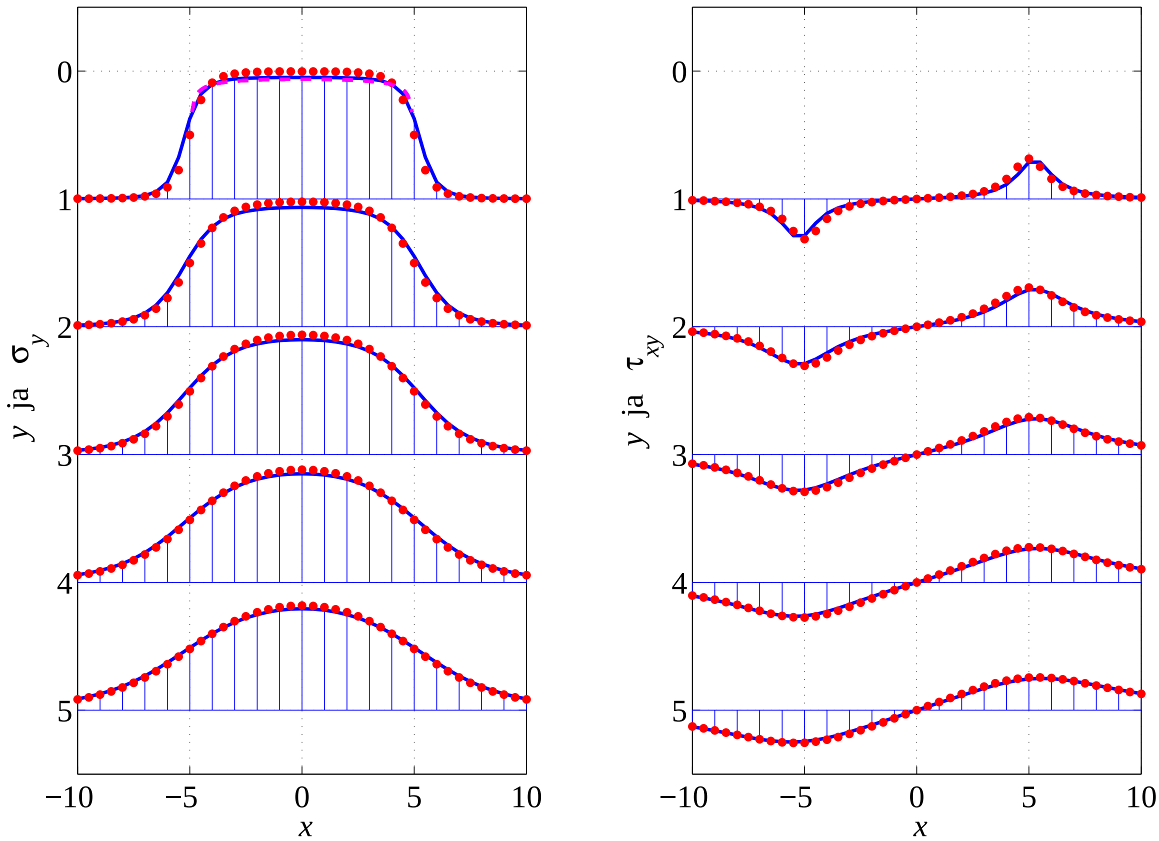
2. Nihkepinge τ_{xy} arvutamiseks saab kasutada valemeid (6.126) või $(6.123)_3$.

   - Valemi (6.126) abil leida pinge τ_{xy} väärtusi iga y ja x jaoks.
   - Analoogiliselt normaalpingega σ_y, tuleb valemi $(6.123)_3$ rakendamiseks lõik $-5 \leq x \leq 5$ jagada n võrdseks osalõiguks ja joonkoormus $n+1$ koondatud jõuks. Kokku saame nüüd $\tau_{xy} = \sum_{i=0}^{n} \tau_{xy}(F_i)$.
   - Tulemused on esitatud joonistel 6.36–6.38. Joonisel 6.36 on osalõikude arv $n = 100$, joonisel 6.37 $n = 20$ ja joonisel 6.38 $n = 10$. Punane punktiirjoon vastab valemile (6.126) ja sinine pidev joon valemile $(6.123)_3$.

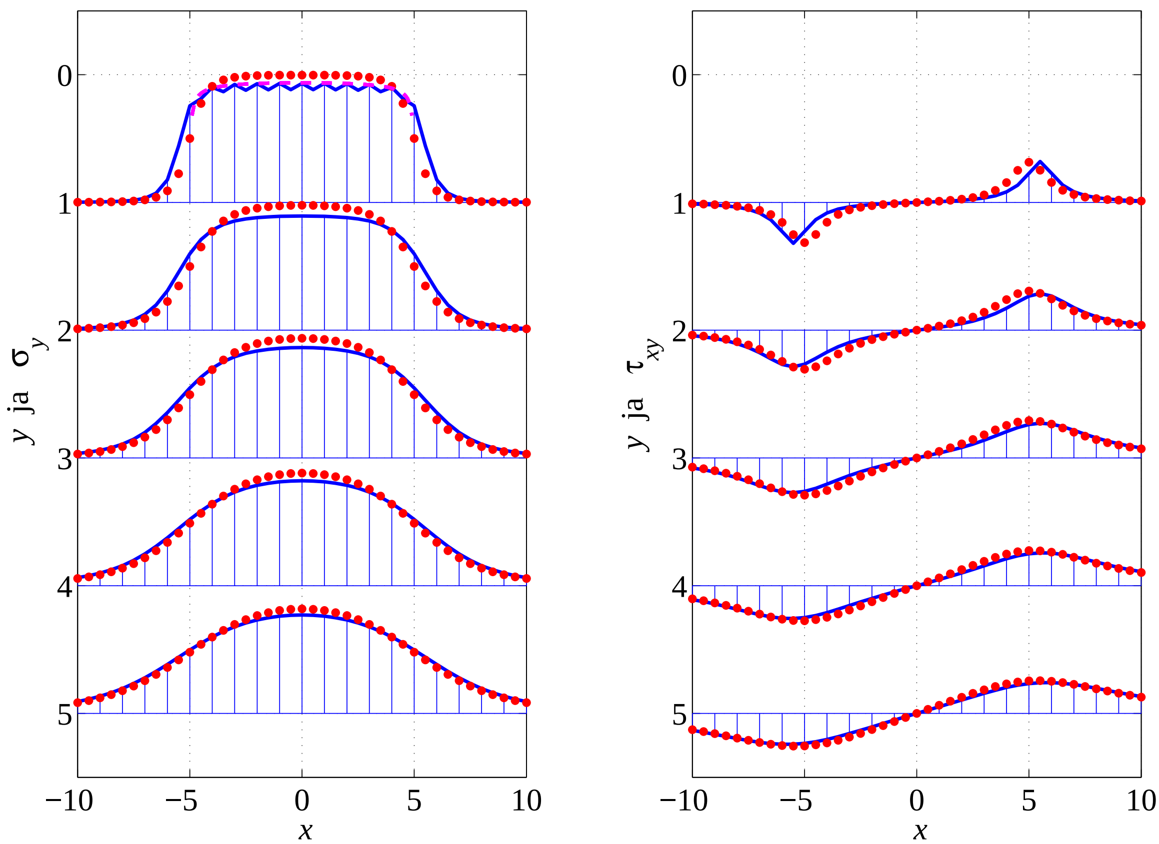
3. Normaalpinge σ_x arvutamiseks saab kasutada valemeid (6.124) või $(6.123)_1$.
   - Valemite (6.124) ja $(6.123)_1$ kasutamise põhimõtted on samad, mis eelnevatel juhtudel.
   - Tulemused on esitatud joonistel 6.39–6.41. Joonisel 6.39 on osalõikude arv $n = 100$, joonisel 6.40 $n = 20$ ja joonisel 6.41 $n = 10$. Punane punktiirjoon vastab valemile (6.124) ja sinine pidev joon valemile $(6.123)_1$.
4. Joonistel 6.42–6.44 on lisaks esitatud samapingejooned pingetele σ_x, σ_y ja τ_{xy} piirkonnas $-10 \le x \le 10$, $0 < y \le 5$.



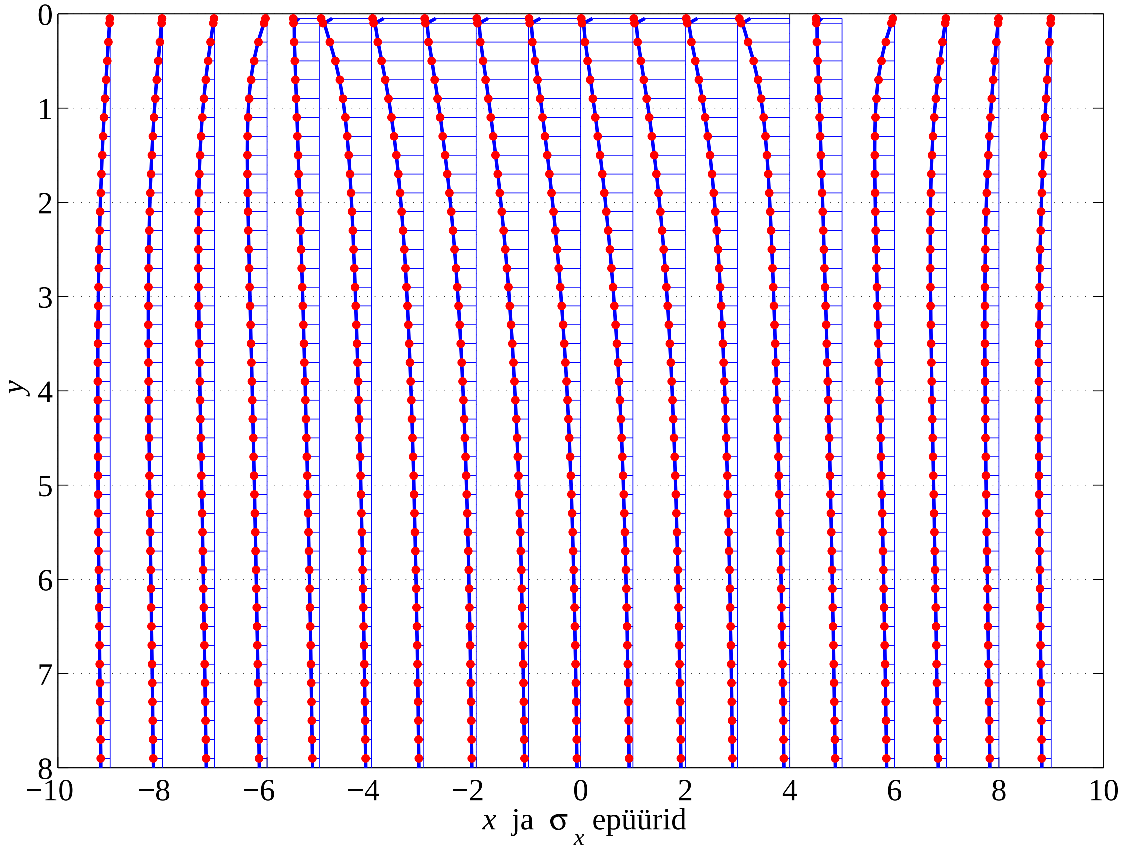
Joonis 6.36: Normaapinge σ_y ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaadi y fikseeritud väärtuste jaoks lõigul $-5 \le x \le 5$ mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv $n = 100$.



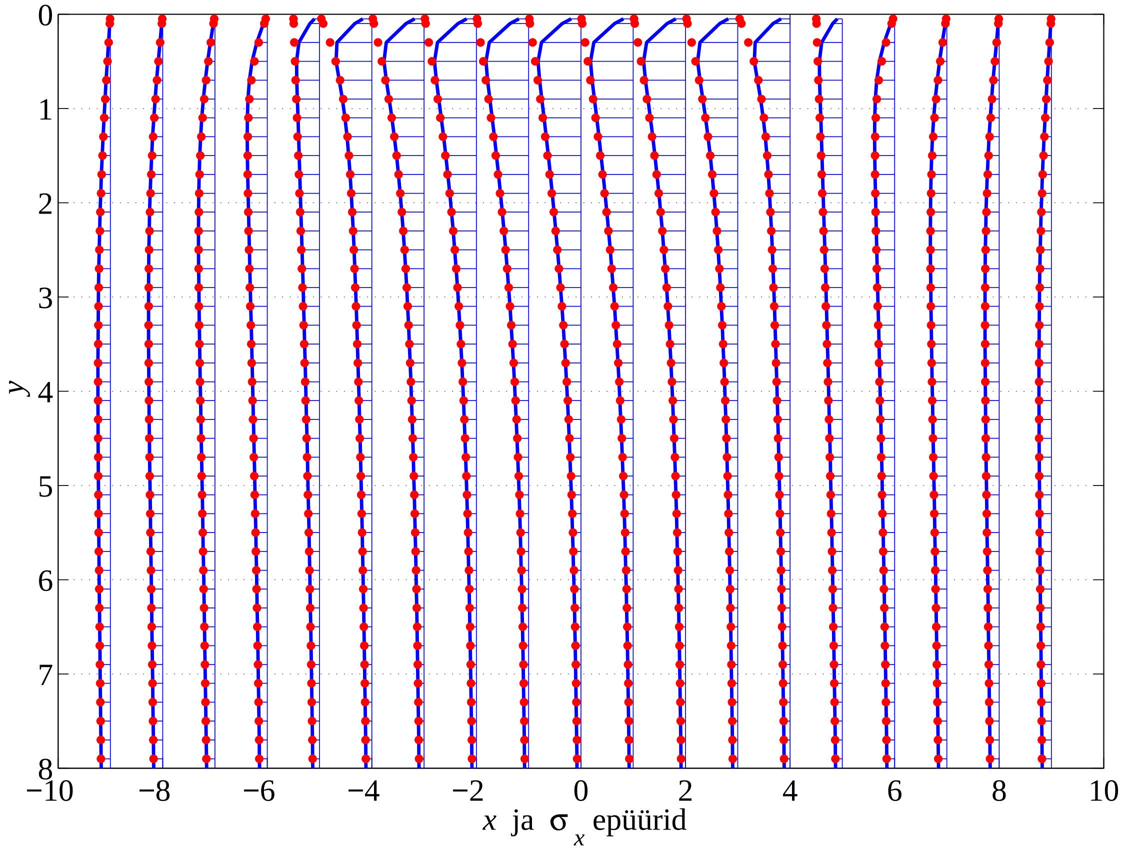
Joonis 6.37: Normaapinge σ_y ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaadi y fikseeritud väärtuste jaoks lõigul $-5 \leq x \leq 5$ mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv $n = 20$.



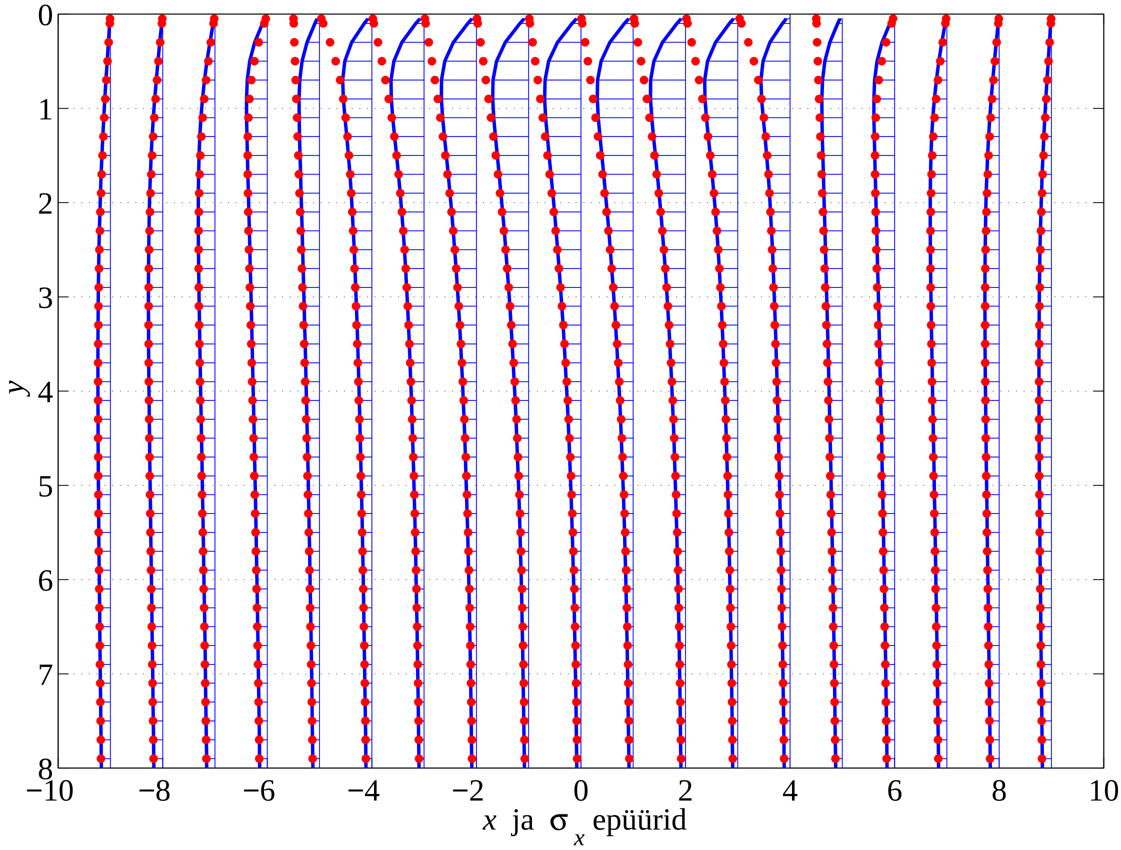
Joonis 6.38: Normaapinge σ_y ja nihkepinge τ_{xy} epüürid koordinaadi y fikseeritud väärtuste jaoks lõigul $-5 \leq x \leq 5$ mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv $n = 10$.



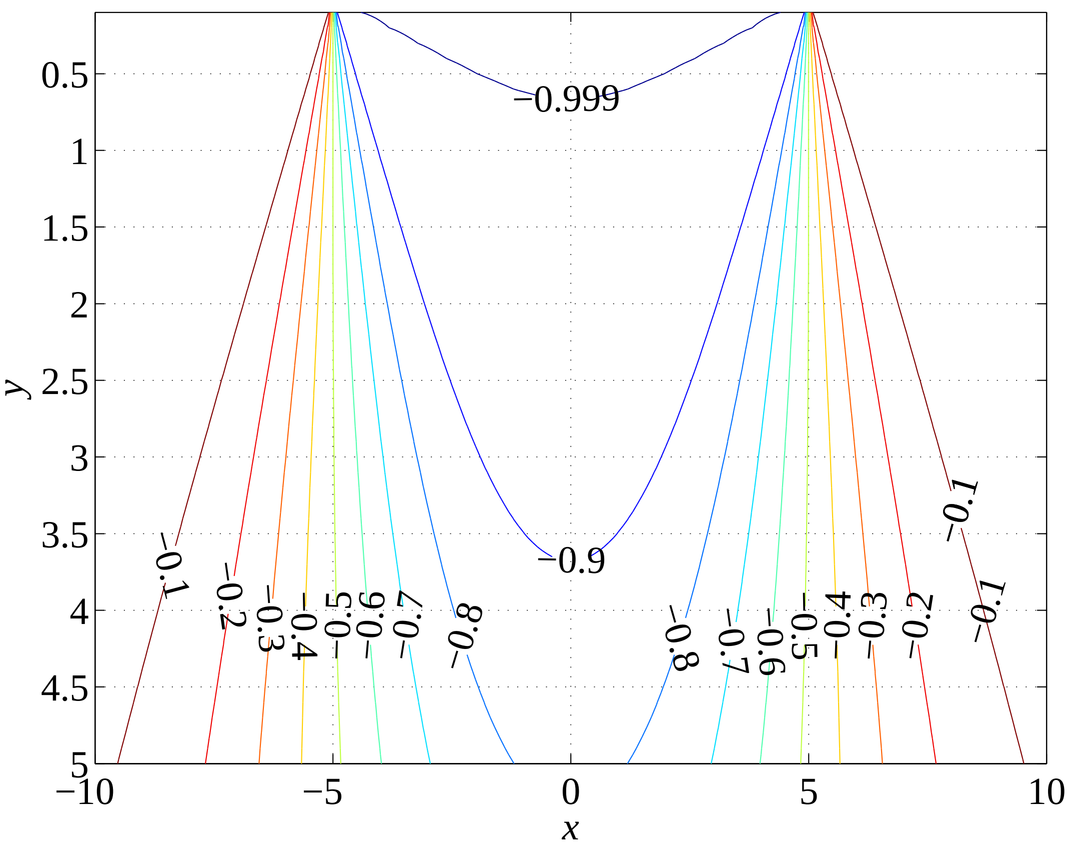
Joonis 6.39: Normaapinge σ_x epüürid koordinaadi x fikseeritud väärtuste jaoks lõigul $-5 \leq x \leq 5$ mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv $n = 100$.



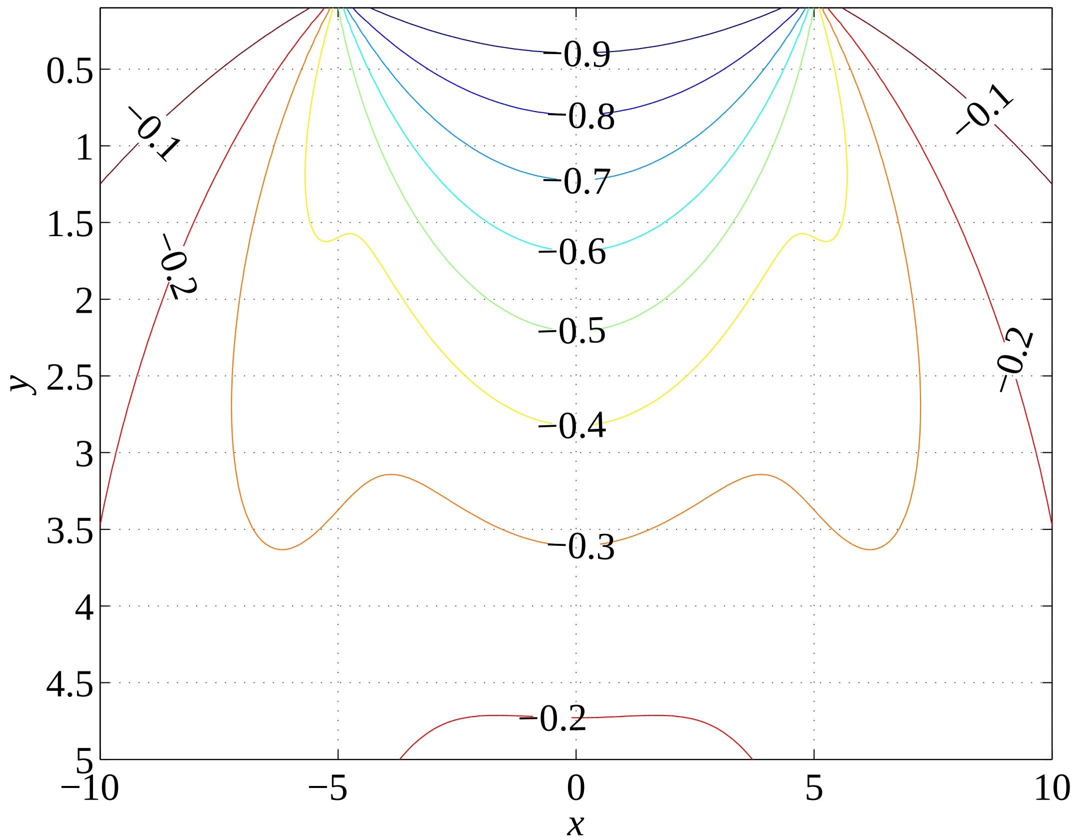
Joonis 6.40: Normaapinge σ_x epüürid koordinaadi x fikseeritud väärtuste jaoks lõigul $-5 \leq x \leq 5$ mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv $n = 20$.



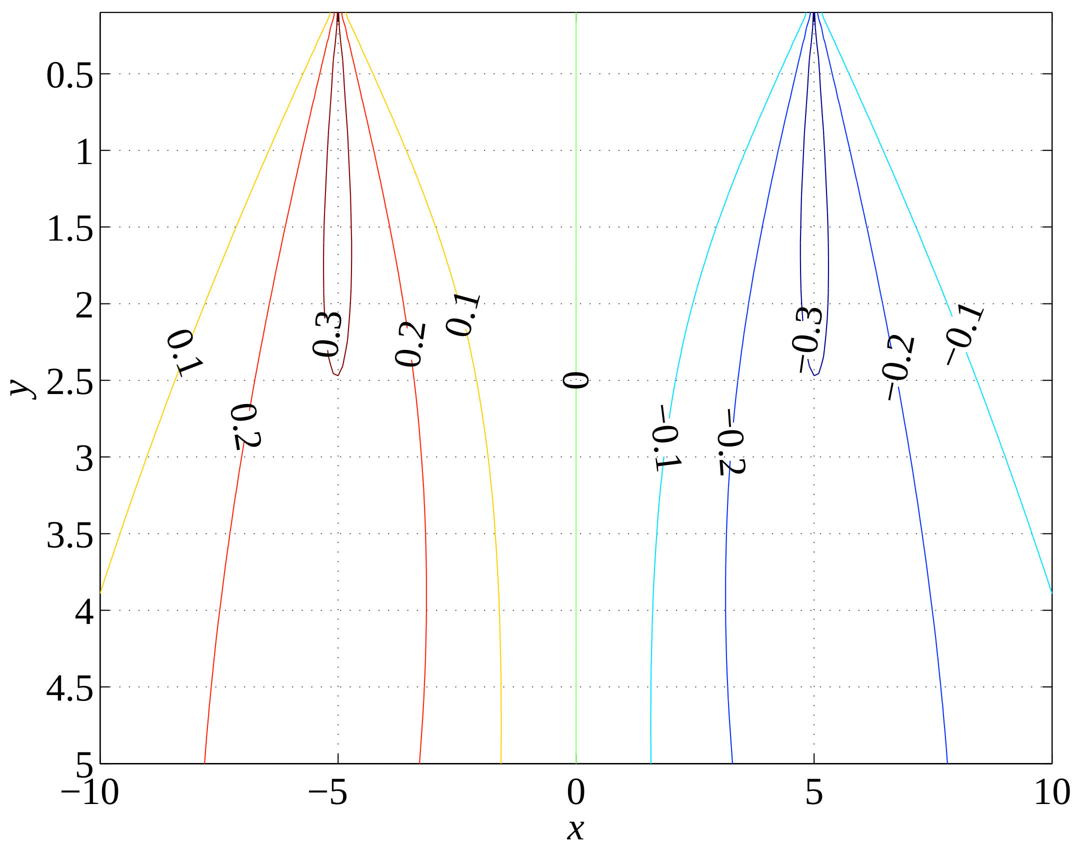
Joonis 6.41: Normaapinge σ_x epüürid koordinaadi x fikseeritud väärtuste jaoks lõigul $-5 \leq x \leq 5$ mõjuva ühikulise joonkoormuse korral, osalõikude arv $n = 10$.



Joonis 6.42: Samapingejooned normaapinge σ_y jaoks.



Joonis 6.43: Samapingejooned normaapinge σ_x jaoks.



Joonis 6.44: Samapingejooned nihkepinge τ_{xy} jaoks.