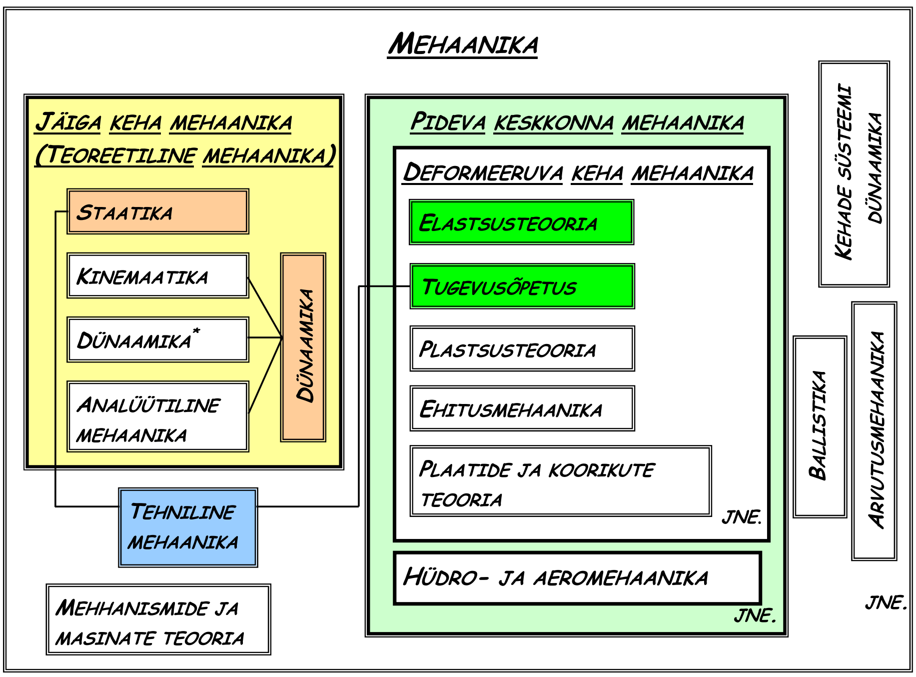
Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Mehaanika harud

Mehaanika on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joonis 1.1: Mehaanika harud

1.1.1 Jäiga keha mehaanika

Jäiga keha mehaanika ehk *teoreetiline mehaanika*[1] uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

- *Absoluutselt jäiga* keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

TTÜs õpetatakse tehnilise füüsika erialal jäiga keha mehaanikat kahe kursuse raames. Need on „Staatika” ja „Dünaamika”, kusjuures dünaamika kursus hõlmab endasse *kinemaatika*, *klassikalise dünaamika* ja *analüütilise mehaanika*.

Jäiga keha mehaanika harud

- *Staatika* uurib:
  1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja
  2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.

[1] Mõistet teoreetiline mehaanika kasutatakse viimasel ajal üha harvemini.

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.
- *Analüütiline mehaanika* baseerub integraal- ja diferentsiaalarvutusel ning tegeleb mehaanikaülesannete üldiste lahendusmeetodite leidmisega. Saadud meetodid on rakendatavad nii jäiga keha kui pideva keskkonna mehaanikas (k.a. staatika). Selliste meetodite saamiseks rakendatakse tihti variatsioonarvutust.

Mõned jäiga keha mehaanika põhimõisted

- Jäiga keha mehaanikas mõistetakse *liikumisena* vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega jäigalt koordinaatsüsteem. Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.
- *Punktmassiks* nimetatakse materiaalset keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.
- *Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

1.1.2 Pideva keskkonna mehaanika

Pideva keskkonna mehaanika (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

Joonis 1.2: Jäiga keha ja pideva keskkonna mehaanika võrdlus

Palju harusid

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika[2]
  - tugevusõpetus
  - elastsusteooria
  - plastsusteooria
  - jne.
- hüdro- ja aeromehaanika[3]
  - hüdrostaatika
  - hüdrodünaamika
  - jne.

[2] I. k. *Solid mechanics*
[3] I. k. *Fluid mechanics*

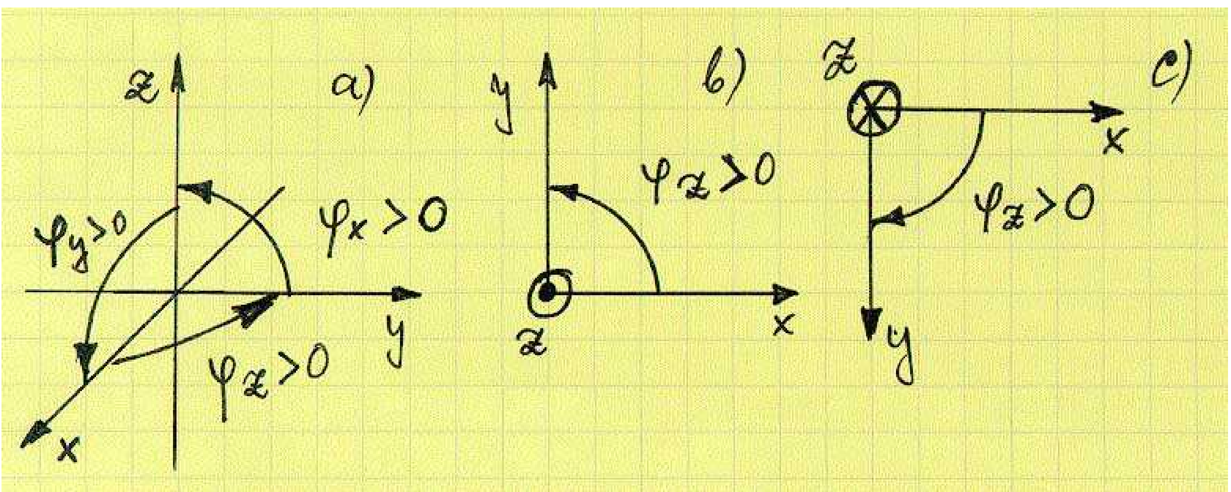
1.2 Ülevaade staatika kursusest

Kuna käesoleva kursuse eeldusaineks on „Staatika”, siis alustame lühikese ülevaatega staatika kursuse põhitõdedest.

- *Jäik keha*
- *Jõud*
  - Kehade vastastikuse mõju mõõt
- *Jõusüsteem*
  - koonduv JS, paralleeljõudude süsteem, jne.
- *Jõu moment, jõupaar*
  - $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- *Jõu ja momendi projektsioonid ning komponendid*
  - $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_z = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$

Koordinaadid ja koordinaatteljed

- Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)
- *Koordinaatteljed peavad moodustama parema käe kolmiku*
- Ümber telje toimuva *pöörde positiivne suund* määratakse kruvireegliga



Joonis 1.3: Pöörde positiivne suund

Sidemed ja sidemereaktsioonid

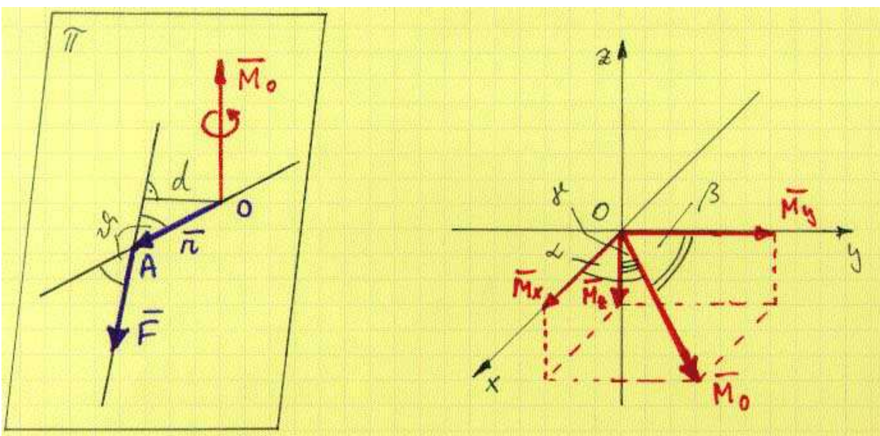
- *Vabaks kehaks* nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.
- *Side* on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.
- *Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud* on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.
- Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.
- *Sidemetest vabastatavuse printsiip:* Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.
- *Sidemete tüübid:* sile pind, kare pind, liikumatu liigend(tugi), liikuv liigend(tugi), kerge varras, painduv ühendus jne.

Jõu moment ja jõupaar

Jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti A kohavektori $\mathbf{r}$ ja jõuvektori $\mathbf{F}$ vektorkorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin\vartheta = Fd. \tag{1.1}$$

Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.



Joonis 1.4: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori $\mathbf{M}_O$ suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti O valikust kuid ei sõltu punkti A valikust jõu mõjusirgel.

Momentvektori $\mathbf{M}_O$ mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud $\mathbf{F}$ püüab tekitada pöörlemist.

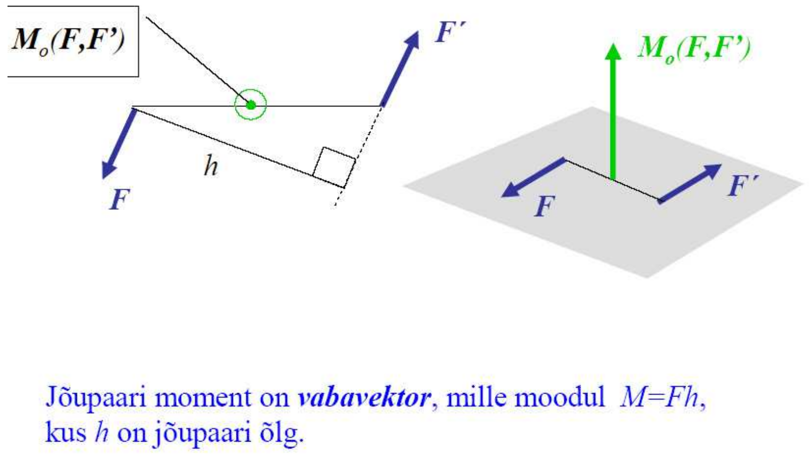
Pöörde suund määratakse *kruvireegliga* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

Jõu moment telje suhtes võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

- See on üldlevinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult võib ka jõu momenti telje suhtes käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valemist $M = \pm Fd$, s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruvireegliga. $\surd$

Jõupaari moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu $\mathbf{F}$ ja $-\mathbf{F}$ millel on erinev mõjusirge.

Jõupaari moment võrdub ühe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakenduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.

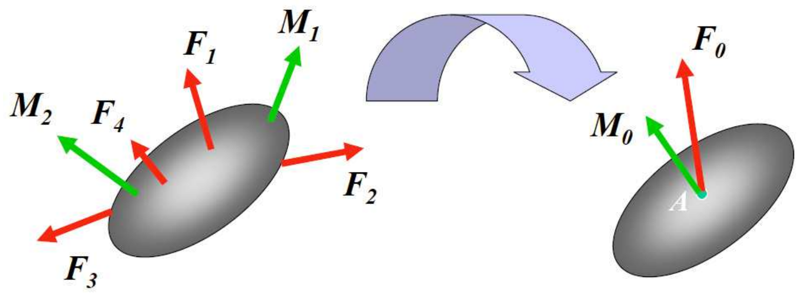


Joonis 1.5: Jõupaar ja jõupaari moment
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Jõusüsteemi taandamine ja tasakaal

Lemma jõu paraleellükkest. Jäiga keha mistahes punktis A rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti B kui lisada punktis A rakendatud jõu moment punkti B suhtes.

Staatika põhiteoreem (Poinsot' teoreem): Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 1.6: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment.
NB! Joonisel on ebatäpsus: Taandamistsenteri tähiseks on A kuid peaks olema O.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Jõusüsteemi peavektor: $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

Jõusüsteemi peamoment: $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$, kus punkti O nimetatakse *taandamistsentriks*. (Joonisel on kahjuks O asemel A.)

Jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis kui peavektor $\mathbf{F}_O$ ja mingi punkti O suhtes leitud peamoment $\mathbf{M}_O$ on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{1.2}$$

Skalaarsed tasakaalu tingimused:

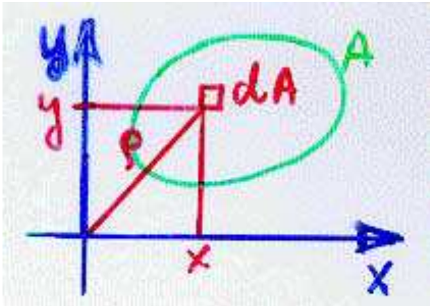
$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, \quad \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Tasapinnalise kujundi pinnamomendid

$n+m$ astme pinnamoment

$$\int_A x^m y^n dA \tag{1.4}$$

Nullastme pinnamoment — pindala:

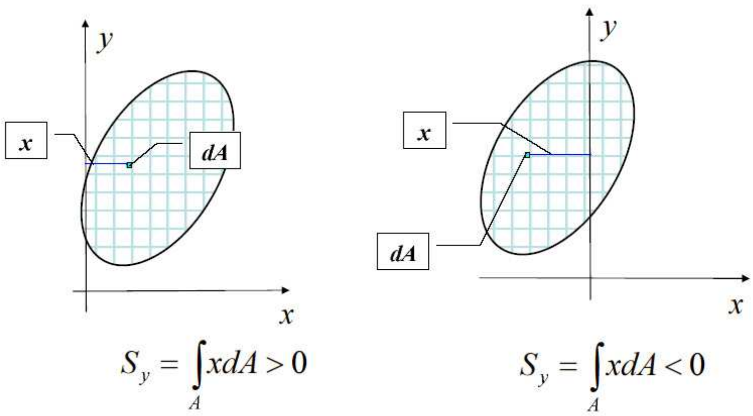


Joonis 1.7: Tasapinnalise kujundi pinnamomendid.

$$A = \int_A dA. \tag{1.5}$$

Esimese astme pinnamomendid — staatilised momendid:

$$S_x = \int_A y dA \qquad S_y = \int_A x dA. \tag{1.6}$$



Joonis 1.8: Staatiline moment.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Teise astme pinnamomendid — inertsimomendid momendid:

telginertsimomendid

$$I_x = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A x^2 dA; \tag{1.7}$$

polaarinertsimoment

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA; \tag{1.8}$$

tsentrifugaalinertsimoment

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \tag{1.9}$$

- Keskteljed
- Inertsimomendid pööratud telgede suhtes
- Peainertsimomendid
- Inertsimomendid kesktelgedega paralleelsete telgede suhtes
- Liitkujundi inertsimomendid

1.3 Klassikalise elastsusteooria põhieeldused ja põhihüpoteesid

Klassikalise elastsusteooria = lineaarne elastsusteooria

Uurimisobjekt: ideaalselt (täielikult) elastne keha.

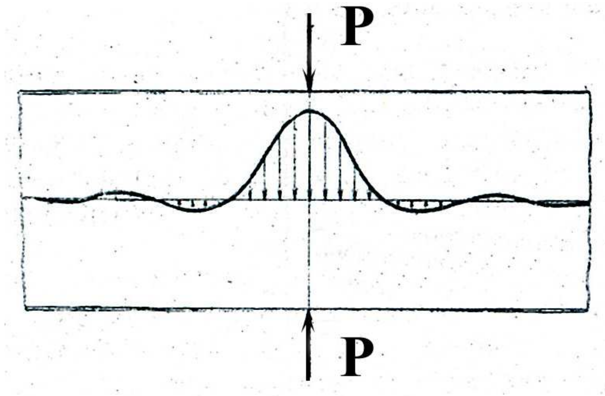
- *Ideaalselt elastne keha* taastab täielikult oma algse kuju ja mahu pärast välisjõudude mõju kõrvaldamist.
  - Defineeritakse nn. *algolek*: välisjõudude puudumisel puuduvad kehas pinged ja deformatsioonid.

Hüpoteesid ja eeldused

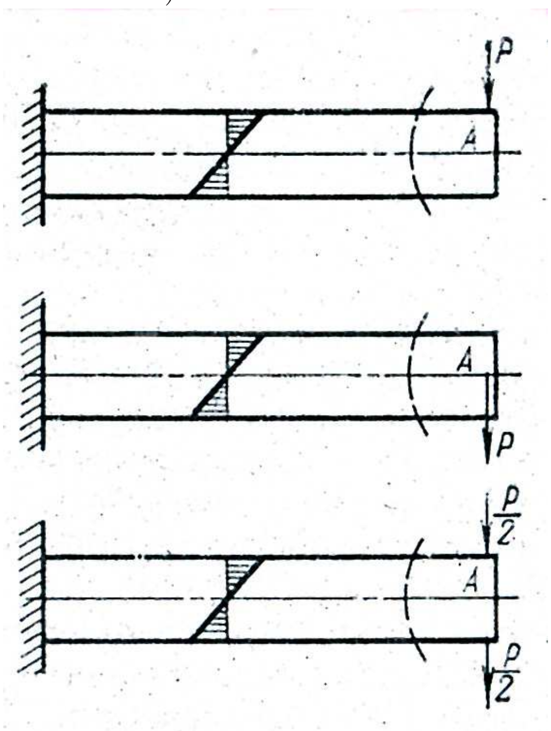
- *Pidevuse hüpotees:* eeldame, et uuritavad tahked kehad koosnevad ainest, mis täidab ruumi pidevalt
  - Keha mistahes mahus puuduvad tühimikud või katkevused.
- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *homogeenne*.
  - Pinge–deformatsiooni seosed on kõigis keha punktides samad.

- Eeldatakse, et ideaalselt elastne keha on *isotroopne*.
  - Keha elastsed omadused on samad kõigis suundades.
- *Superpositsiooni printsiip* ehk *jõudude mõju sõltumatuse printsiip.*
  - Lineaarne teooria: lineaarsed seosed ja väikesed deformatsioonid
    * Selle asemel, et uurida jõusüsteemi tervikmõju kehale võib uurida iga üksikjõu mõju eraldi ja tulemused liita. Teisisõnu, lineaarses elastsusteoorias loetakse erinevate lahendite summa alati lahendiks.
- *Saint Venant'i printsiip.* Kaks sõnastust:
  1. Tasakaalus olevate jõudude rakendamine mingil väikesel keha osal kutsub esile vaid lokaalseid pingeid rakenduskoha lähiümbruses (Joon. 1.9 a).
  2. Koormuse rakenduspunktist piisavalt kaugel ei sõltu pinged oluliselt koormuse rakendusviisist, st. jaotusest keha pinnal (Joon. 1.9 b).

a)



b)



Joonis 1.9: Saint Venant'i printsiip: a) kahe taskaalus olava jõu poolt põhjustatud normaalpingete epüür; b) kolm erineval jaotunud koormust, millel on sama peavektor.

- *Elastsusteooria põhiülesandeks* on elastses kehas välismõjude toimel tekkivate pingete ja deformatsioonide määramine.
- Kui pole tarvis arvestada termilisi efekte, siis vaadeldakse välismõjudena vaid välisjõudusid.
- Klassikalises elastsusteoorias on
  - pingete ja deformatsioonide vahelised seosed lineaarsed,
  - siirded (ehk paigutised) väikesed võrreldes kehade joonmõõtmetega,
  - deformatsioonid (suhtelised pikenemised ja nihkenurgad) väikesed võrreldes ühega.

1.4 Tugevusõpetus ja klassikaline elastsusteooria

Tugevusõpetus on mehaanika haru, mis uurib konstruktsioonielementide piisava tugevuse, jäikuse ja stabiilsuse saavutamist võimalikult ökonoomsel moel.

- *Tugevus* on konstruktsioonielemendi võime kanda koormust ilma purunemata.
- *Jäikus* on konstruktsioonielemendi võime kanda koormust ilma liigselt deformeerumata.
- *Stabiilsus* on konstruktsioonielemendi võime kanda koormust ilma stabiilset olekut kaotamata.

TTÜ ehitusteaduskonnas õpetatakse staatikat ja tugevusõpetust tehnilise mehaanika kursuse raames:

„Tehniline mehaanika" = „Staatika" + „Tugevusõpetus".

Tugevusõpetuses on kasutusel kõik lineaarse elastsusteooria põhieeldused ja hüpoteesid, kuid tehakse veel ka täiendavaid lihtsustusi. Näiteks, talade painde korral uuritakse tala asemel vaid tema telje deformeerunud kuju, jms. Eesmärgiks on saada võimalikult lihtsad mudelid, mille abil saaks adekvaatselt kirjeldada tehnikas kasutatavate lihtsamate konstruktsioonide ja nende elementide mehaanikalist käitumist. Tugevusõpetuse meetoditega leitud lahendeid (pingete, siirete või deformatsioonide avaldisi) nimetatakse klassikalises (ehk lineaarses) elastsusteoorias *elementaarteooriale* vastavateks lahenditeks, tihti ka *0-järku lahendiks* või *0-järku aproksimatsiooniks*.

Tugevusõpetuse (ja mitte ainult tugevusõpetuse) probleemide lahendamisel ei võeta arvesse kõiki vaadeldava keha omadusi, vaid kasutatakse nn. arvutusskeemi.

- *Arvutusskeem* on konstruktsiooni või konstruktsioonielemendi lihtsustatud mudel, mis võtab arvesse vaid vaadeldava ülesande eisukohalt olulisi omadusi
- *Algmõõtmete printsiip:* teostatakse arvutused algmõõtmetega ja jäetakse arvestamata deformatsioonid[4].

Lisaks pingete ja deformatsioonide leidmisele on tugevusõpetuse põhisisuks tugevusarvutuste meetodite loomine ja rakendamine. Just tugevusarvutuste põhjal dimensioneeritakse konstruktsioonielemendid. Nii elastsusteoorias kui tugevusõpetuses on uuritavateks konstruktsioonielementideks elasetsed kehad.

[4] Seda printsiipi saab loomulikult kasutada vaid seni kuni keha mõõtmed ei muutu deformeerimise käigus oluliselt.

Kehade liigitus vastavalt nende mõõtmetele. Tahkise mehaanikas (k.a. tugevusõpetus) on kombeks jagada uuritavaid kehasid kolme klassi:

1. *Varras*[5] *ja tala*[6]. Keha, mille üks mõõde on suur võrreldes teistega nimetatakse *vardaks*.
   - Paindele töötavat varrast nimetatakse *talaks*.
   - *Varda telg* on joon, mis läbib varda ristlõigete pinnakeskmeid.
   - Vastavalt telje kujule saab vardaid jaotada *sirgeteks* ja *kõverateks*.
     - Kõvere varda erijuhuks on *murdjooneline varras*.
   - Eristatakse ka ühtlasi ja muutuva ristlõikega vardaid.
2. *Plaat ja koorik*. Keha, mille üks mõõde on väike, võrreldes teistega nimetatakse *koorikuks*.
   - Koorikut, mille kõverus on null (kõverusraadius on lõpmata suur) nimetatakse *plaadiks*.

[5] I. k. *bar*
[6] I. k. *beam*

3. *Massiivne keha ehk 3D keha*. Keha, mille kõik kolm mõõdet on sama suurusjärku, nimetatakse massiivseks kehaks.

Vardaid võiks nimetada ka 1D kehaks ja plaate ning koorikuid 2D kehadeks. *Tugevusõpetuse kursuses tegeldakse tavaliselt vaid varraste ja taladega, elastsusteoorias aga lisaks ka plaatide, koorikute ja massiivsete kehadega.*

Tugevusõpetus *vrs* lineaarne elastsusteooria – ühiseid ja erinevaid jooni

- Kuna tugevusõpetus põhineb lineaarsel elastsusteoorial, siis on neil kahel ainel väga palju ühist — materjalid on lineaarselt elastsed, homogeensed, isotroopsed; kehtib Saint Venant'i printsiip jne.
- Teisest küljest on tugevusõpetuse puhul tegu maksimaalselt lihtsustatud teooriaga — seega leiavad paljud probleemid lineaarses elastsusteoorias käsitlemist vähem lihtsustatud kujul.
  - Näiteks talade paine.
  - *Bernoulli hüpotees ehk ristlõigete tasandilisuse hüpotees*[7] ei kehti lineaarses elastsusteoorias alati.

[7] Ristlõiked, mis olid enne deformatsiooni tasapinnalised, jäävad ka peale deformatsiooni tasapinnaliseks.

- Mitmed lineaarse elastsusteooria uuritavad probleemid pole aga üldse tugevusõpetuse uurimisobjektiks, näiteks plaatide paine.
- Käesolevas kursuses toome alati välja, millised tugevusõpetuses kasutatavad täiendavad lihtsustused on ühe või teise ülesande lahendamise juures kasutusel.

Käesolevas kursuses on peamiseks uurimisobjektiks valitud elastne varras (tala). Selleks on kaks põhjust: 1) varras on lihtsaim võimalik uurimisobjekt ja 2) sel juhul on huvilistel peale „Elastsusteooria aluste" kursuse läbimist võimalik õppida tugevusarvutusi käsitlevat kursust „Tehniline mehaanika II". Lisaks sisejõudude määramisele (kus pole vahet, kas tegu on tegevusõpetuse või lineaarse elastsusteooriaga) õpitakse arvutama pingeid ja deformatsioone varda punktis nii tugevusõpetuse kui ka lineaarse elastsusteooria meetoditega. Harjutustundides piirdutakse peaasjalikult elementaarteooriale vastavate ülesannetega.