

Peatükk 2

Sisejõud ja pinged

Käesolevas peatükis rakendatakse varrastes ja talades tekkiivate pingete analüüsimiseks tugevusõpetuses (ja tehnilises mehaanikas) kasutatavaid hüpoteese, printsiipe ja meetodeid. Teisisõnu, käesolevas peatükis on vaatluse all nn. elementaarteooriale vastavad lahendid.

2.1. Välisjõud

2 - 2

2.1 Välisjõud

Deformeeruvat keha võib vaadelda koosnevana punktmassidest ja seega on tegu punktmasside (mehaanikalise) süsteemiga¹. Sise- ja välisjõudusid käsitleti ka *jäiga keha mehaanika* kursuses (tavaliselt dünaamika kursuses enne dünaamika tildteoreeme). Kõigepealt tuli määratleda vaadeldav keha (või punktmasside süsteem) ning seejärel defineeriti sise- ja välisjõud järgmiselt: *sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist ja *välisjõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi mittekuuluvad punktmassid mõjutavad vaadeldavasse süsteemi kuuluvaid punktmasse. Analooogiliselt defineeritakse sise- ja välisjõud ka pideva keskkonna mehaanikas (k.a. elastsusteoorias):

- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või keskkonnana) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.
- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja

¹Vt. ka „Dünaamika“ kursusest.

punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

Välisjõud jagunevad pind- ja mahujõududeks.

- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punkt-massile. Näiteks gravitatsioonijõud.

Pindjõud mõjub alati läbi mingi pinna ja seetõttu on tema dimensioon tavaliselt sama, mis pingel, s.t. N/m^2 . Piirjuhul, kui pind millel koormus mõjub on väga väike, asendatakse pindjõud sellel pinnal mõjuva pindjõudude resultantiga, s.t. tihedusega, mida nimetatakse *punktjõuks ehk koondatud jõuks*. Koondatud jõu dimensioon on loomulikult N . Kaks võrdvastupidist koondatud jõudu, millel on erinevad mõjusirged, moodustavad *koondatud momendi*. *Mahujõudude* dimensioon on N/m^3 ja *massijõududel* N/kg .

Toereaktsioonid kuuluvad välisjõudude hulka. Tugevusõpetuse (ja elastsusteooria) seisukohast olulisemad tugevde tüübid²:

²Vaata lisaks staatika kursusest.

2.1. Välisjõud

2 - 4

- 2D liikuv liigendtügi e. liigend — 1 jõud,
- 2D liikumatu liigendtügi e. liigend — 2 jõudu,
- 2D jäik kinnitus — 2 jõudu ja 1 moment,
- 3D jäik kinnitus — 3 jõudu ja 3 momenti.

Staatikaga määratud ja staatikaga määramata konstruktsioonid.

- Staatikaga määratud konstruktsioonide toereaktsioonide leidmine toimub staatika tasakaaluvõrrandite, printsiipide ja aksioomide abil, s.t. täpselt samuti kui seda tehti staatika kursuses.

— Tasapinnalised ülesanded — kuni 3 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

— 3D (ruumilised ülesanded) — kuni 6 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

— Konstruktsioon loetakse jäigaks.

— Jaotatud koormused asendatajkse üksikjõududega.

- Jõudu võib käsitleda libiseva vektorina.
- Jne., vaata lisaks staatika kursusest.
- Staatikaga määramata konstruktsioonide toereaktsioonide leidmise meetodeid käsitletakse tugevusõpetuse ja ehitusmehaanika kursustes. Sel juhul tuleb arvesse võtta kuidas konstruktsioon deformeerub.

2.2 Sisejõud ja lõikemeetod

Vastavalt Newtoni III seadusele mõjutavad kaks punktmassi teineteist võrdvastupidiste jõududega. Välisjõudude puudumisel mõjuvad tahke keha punktmasside vahel molekulaarse päritoluga jõud, mis tagavad talle nn. kujuja mahupüsivuse. Seda sorti jõud (mis oma olemuselt on samuti sisejõud) elastsusteooria ja tugevusõpetuse seisukohalt tildjuhul huvi ei paku ja neid arvesse ei võeta. Teisisõnu:

- kuna algolekus (välisjõudude puudumisel) loeme me kehad pingetest ja deformatsioonidest vabadeks, siis eeldatakse, et algolekus sisejõud puuduvad;

2.2. Sisejõud ja lõikemeetod

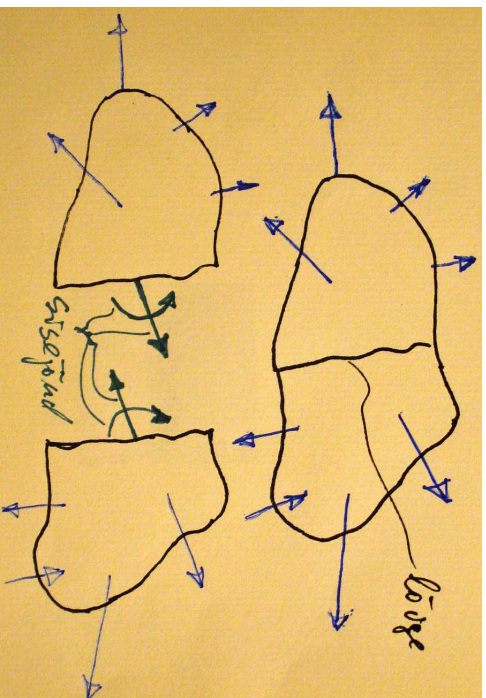
2 - 6

- meid huvitavad vaid sellised sisejõud, mis ilmnevad kehale rakendatud välisjõudude tulenusena.

Keha sisejõudude ja pingete määramise juures mängib tähtsat rolli lõikemeetod, mille idee on järgmine.

- Vaatleme tasakaalus olevat keha ja lõikame ta mõtteliselt kaheks osaks.
- Selleks, et mõlemad osad oleksid ka pärast (mõttelist) tükeldamist tasakaalus tuleb äralõigatud osa mõju asendada jõududega. Neid jõudusid nimetataksegi (vaadeldavas keha lõikes mõjuvateks) *sisejõududeks*.

Kuna enne (mõttelist) lõiget olid vaadeldava keha osad omavahel järgalt ühendatud, siis me toimime sisejõudude määramise juures analoogiliselt jäigale kinnitusele vastavate toereaktsioonide leidmisele staatika kursuses. Viimased peavad välistama nii lõikepinna punktide siirded kui pöörded. Staatika kursusest on teada, et tasapinnalise jõusüsteemi korral on sellisteks reaktsioonideks kaks jõudu ja üks moment ning 3D jõusüsteemi korral kolm jõudu ja kolm momenti.



Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

Rangemalt öeldes on jäiga kinnituse reaktsioonideks siiski üks jõud ja üks moment – reaktsioonjõudude peavektor ja peamoment. Toereaktsioonide leidmise korral määratakse tavaliselt nende kahe vektori projektsioonid koordinaattelgedel. Viimaste abil saab omakorda määrata toereaktsioonide koordinaattelgedel sihilised komponendid. Tasapinnalisel juhul on neist kuuest komponendist kolm samaselt nullid. Täpselt sama loogika kehtib sisejõudude määramise korral.

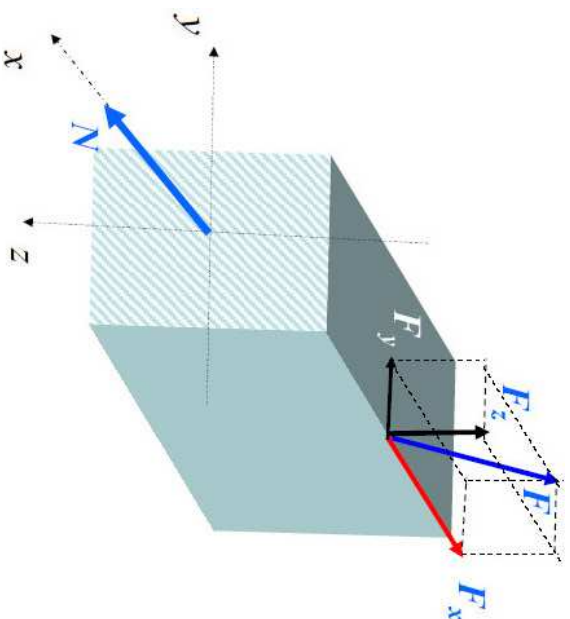
2.3. Sisejõudude liigid

Sisejõudude määramiseks tuleb vaadelda keha kumbagi poolt eraldi ning koostada staatikast tuntuud meetodeid kasutades tasakaaluvõrrandid, kust määratakse otsitavad sisejõud. Ettevaatlik tuleb siin olla juhtudel, kui lõige on tehtud jaotatud koormuse mõjumise piirkonnas. Sellisel juhul ei saa kogu jaotatud koormust asendada ühe jõuga nagu staatikas tehti. (Näide 2-1. Tala sisejõud. Lahendatakse loengus!)

2.3 Sisejõudude liigid

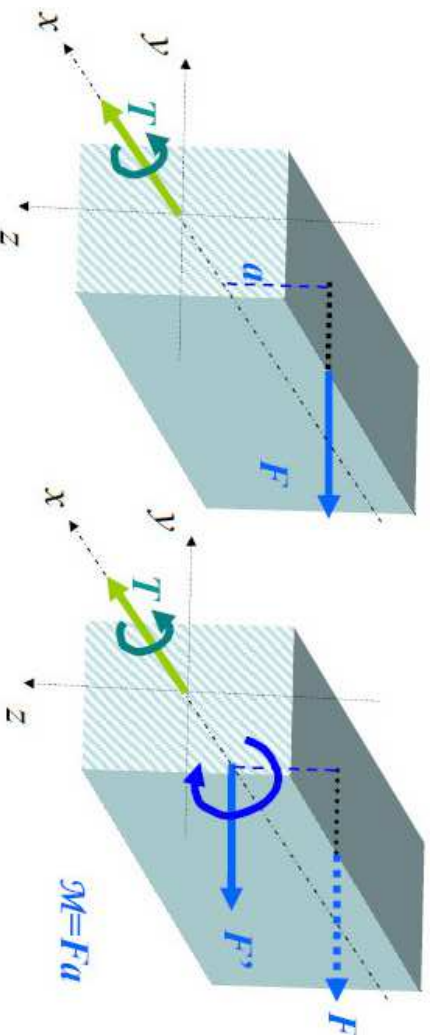
Varraste ja talade (ka plaatide) korral eristatakse sisejõududena *pikijõudu*, *väändmomenti*, *põkijõudu* ja *paindemomenti*. *Pikijõud* mõjub piki varda telge. Ta saab tekkida, kui välisjõududel on varda telje sihilisi komponente (joon. 2.2).

Väändmoment saab vardas tekkida siis, kui välisjõududel on komponente, mis annavad momente varda telje suhtes või talle on rakendatud pöördemoment, st. välismoment varda telje suhtes (joon. 2.3). Väändmoment pöörab varda ristlõikeid timber varda telje.



Joonis 2.2: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

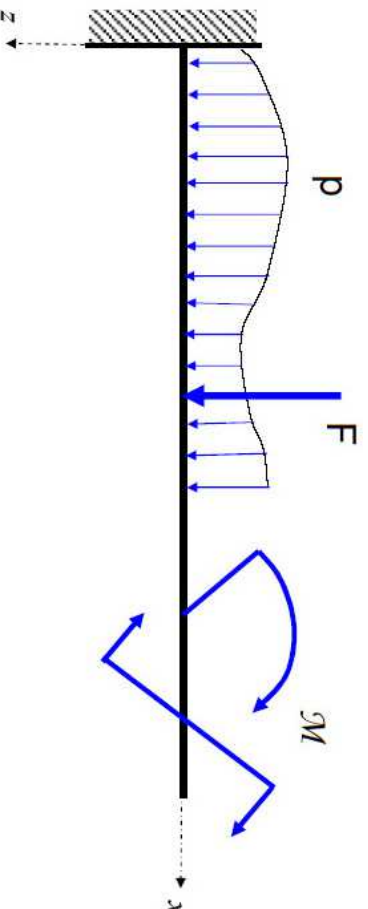


Taandades välisjõu F varda x -teljele saame välisjõu F' ja pöördemomendi \mathcal{M} .

Joonis 2.3: Vändemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

Põikjõud mõjub risti varda teljega ja ”üritab varrast läbi lõigata”. *Paindemomendi* toimel varras kõverdub. Need kaks sisejõudu saavad vardas tekkida siis kui talle mõjuvad välisjõud omavad varda teljega ristuvaid komponente. Lisaks võib *paindemoment* tekkida juhul kui vardale mõjub painet tekitav moment. Selliseid väliskoorumusi on kujutatud joonisel 2.4. Põikjõu sünonüümina kasutatakse ka terminit *lõikejõud*.

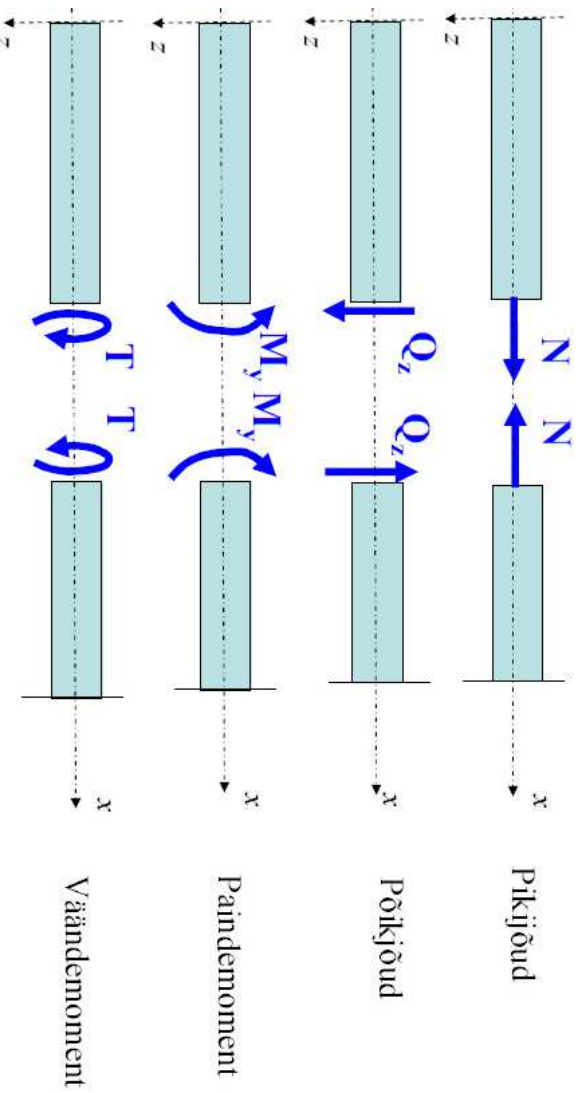


Joonis 2.4: Põikjõud ja paindemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

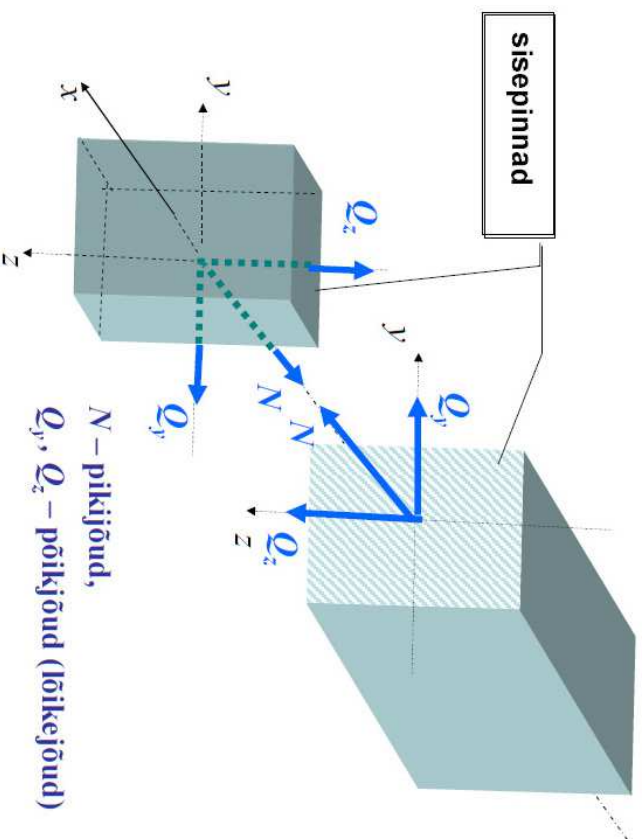
2.3. Sisejõudude liigid

Joonisel 2.5 on kujutatud käsitletud sisejõudusid tasapinnalisel (2D) juhul ja joonistel 2.6 ning 2.7 3D juhul. Neil joonistel on kasutatud sisejõudude tavapäraseid tähistusi: pikijõud – N , väändemoment – T , põikjõud – Q ja paindemoment – T .

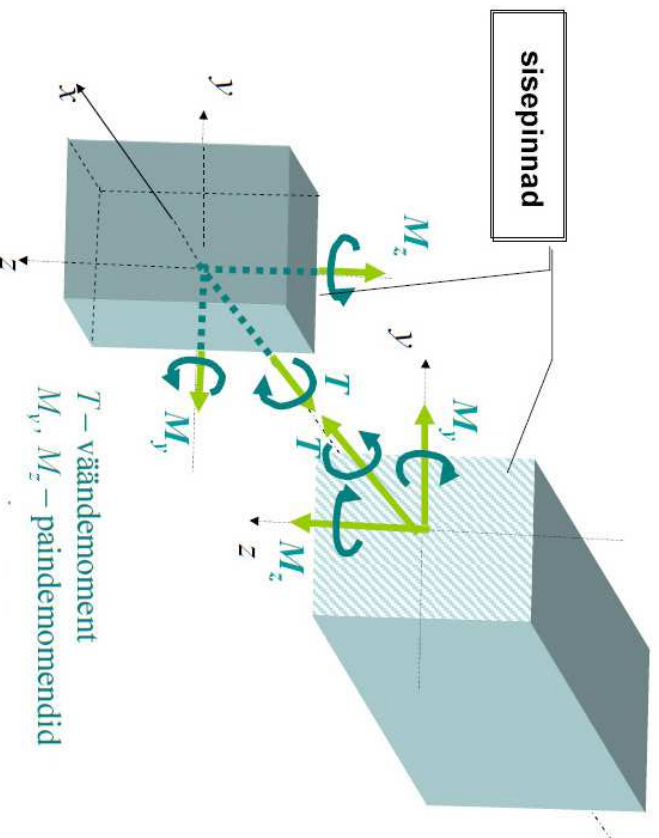


Joonis 2.5: Sisejõudude liigid – 2D juht.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)



Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — pikki- ja põikjõud 3D juhul.
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)



Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemomendid 3D juhul.
NB! M_z on siin negatiivne, teised positiivsed.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

2.4 Sisejõudude märgireeglid

Sisejõudude positiivsetele ja negatiivsetele suundadele on kehtestatud suhteliselt ranged märgireeglid³. Enne nende juurde asumist tuleb aga täpsustada koordinaattelgede asend ja tuua sisse mõned mõisted.

Tugevusõpetuses, ehitusmehaanikas ja mõnes muus mehaanika osas, kus käsitletakse varraste, plaatide ja koorikute mehaanikalist käitumist, on tihhti kombeks suunata vertikaalne koordinaattele alla. Kuna pöörde positiivne suund on seotud telgede asendiga, siis loetakse nüüd positiivseks tavapärasega võrreldes vastupidist pööret (vt. 1. peatükk lk. 8). Selline telgede asend oli eelmises alajaotuses juba kasutusel.

Mõttelisel lõikel tekkivat pinda nimetatakse *sisepinnaks* (vt. joon. 2.6 ja 2.7). Tavaliselt tehakse lõiked risti telgedega. Sel juhul saab defineerida positiivsed ning negatiivsed sisepinnad. Sisepinda nimetatakse *positiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattele positiivses suunas ja *negatiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattele negatiivses suunas. Joonistel 2.6 ja 2.7 kujutatud juhtudel on lõikamise käigus tekkinud tagumisel

³Tõsi küll, erinevte autorite õpikutes ja teatmeteostes võib kohata väga erinevaid märgireegleid.

vardaosal positiivne sisepind ja eesmisel vardaosal negatiivne sisepind. Joonisel 2.5 kujutatud 2D juhul on positiivne sisepind tekkinud varda vasakpoolisel osal ja negatiivne parempoolisel osal.

Tala painde uurimisel osutuvad tähtsateks nn. *positiivsed ja negatiivsed kiud*. Varda mõttelisi kiudusid nimetatakse positiivseteks kui z -koordinaat on selles tala osas positiivne. Ja vastupidi, varda mõttelisi kiudusid nimetatakse negatiivseteks kui z -koordinaat on selles tala osas negatiivne. Selline määratlus kehtib juhul kui tala paindub $x - z$ tasapinnas (joon. 2.4). Kui paine toimub aga $x - y$ tasapinnas, siis on positiivsed ja negatiivsed kiud määratud y -telje abil.

Graafiliselt on *sisejõudude positiivsed suunad* 2D juhu jaoks kujutatud joonisel 2.8 ning 3D juhu jaoks joonistel 2.6 ja 2.7 (välja arvatud M_z , mis on joonisel 2.7 negatiivne). Sõnastatult on sisejõudude märgireeglid järgmised.

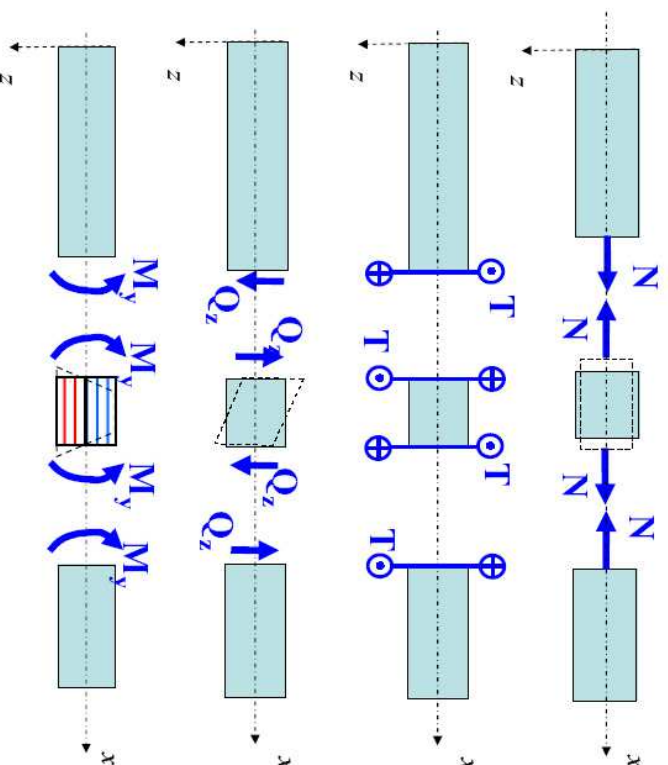
- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
 - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.

- **Väändmomenti** *positiivne suund* on määratud kruvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjuv väändmoment on positiivne kui väändmomenti suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
- **Positiivne põikjõud** Q_z mõjub positiivsel sisepinnal z -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal z -telje negatiivses suunas.
 - Analoogiline märgireegel kehtib ka põikjõu Q_y jaoks.
 - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne põikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
- **Positiivne paindemoment** tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
 - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

Märkus: Piki- ja põikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändmomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

2.4. Sisejõudude märgireeglid

Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



2

Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

Sisejõudused on tavaliselt kasulik teada igas varda ristlõikes ning seetõttu on osutunud otstarbekaks esitada neid graafiliselt. Vastavaid graafikuid nimetatakse eesti keeles *epüürideks*⁴. Enam vähem analoogiliselt, st. epüüride abil, esitati staatika kursuses lauskoormusi ehk jaotatud koormusi. Epüüri kõrvale kirjutatakse tema nimi ja ühikud. Näiteks N -epüür kN, või lühidalt N kN.

Epüüride koostamist selgitame järgnevate näidete abil, millest näited 2.2 – 2.7 on eraldi failides:

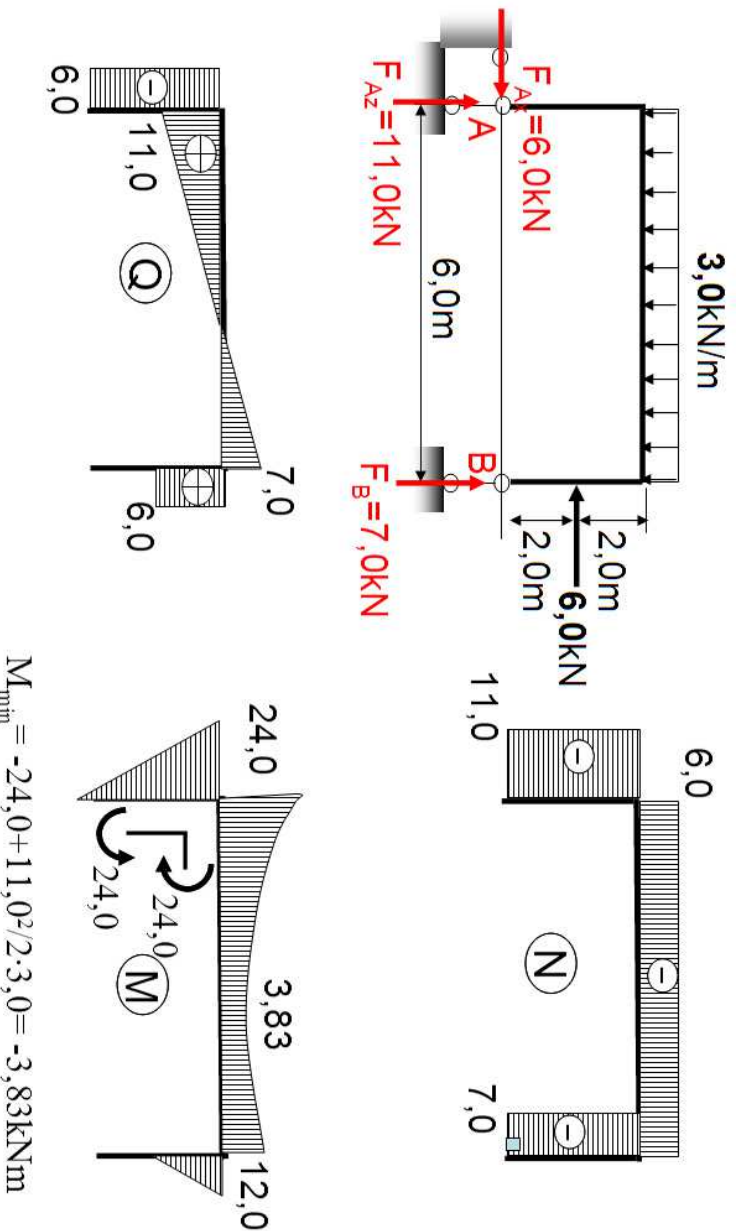
- pikijõud ja väändemoment – NAITTED 2.2-5.pdf
- põikjõud ja paindemoment – NAITTED 2.6-7.pdf

Näited 2.8 ja 2.9, mis pärinevad emeriitprofessor Jaan Metsaveere õppematerjalidest, on aga esitatud järgmisel kahel leheküljel.

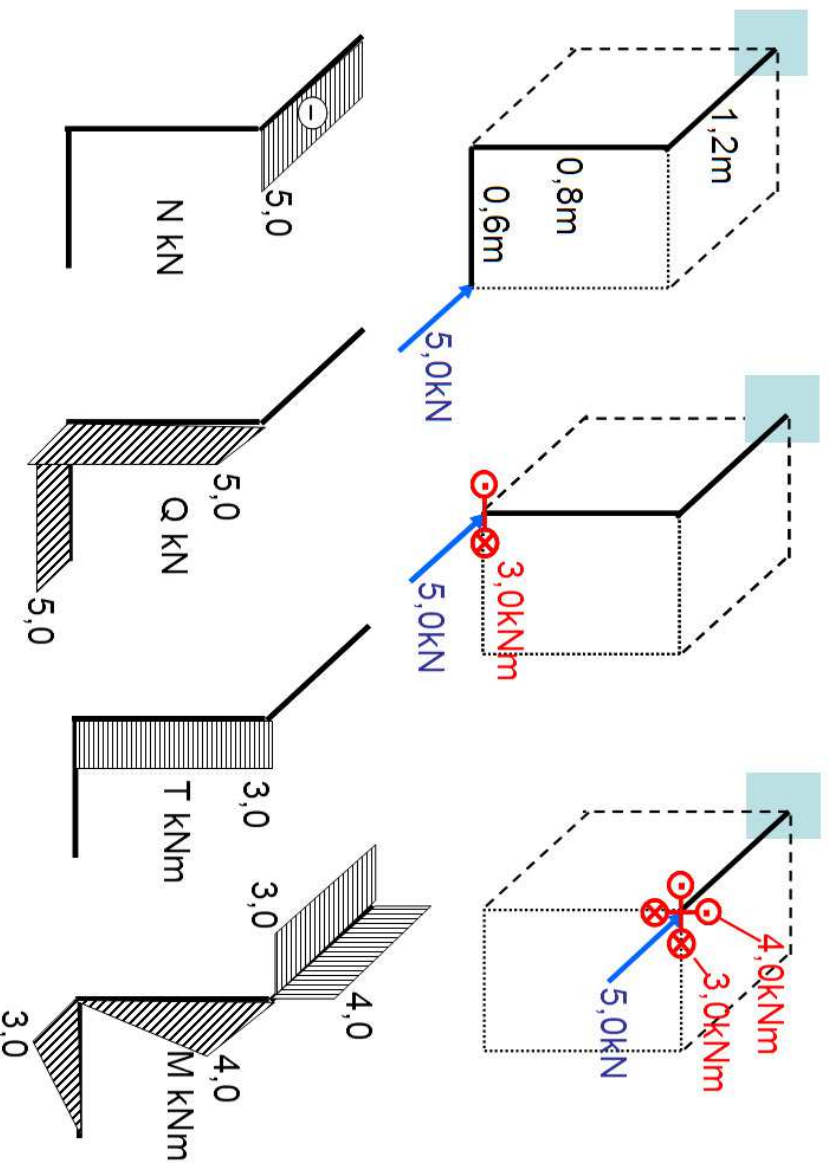
⁴Inglise keeles on epüüri vaste *diagram*, näiteks põikjõu epüür on inglise keeles *shear-force diagram*

2.4. Sisejõudude märgiregolid

Näide 2-8. Koostada tasandraami sisejõudude epüürid.



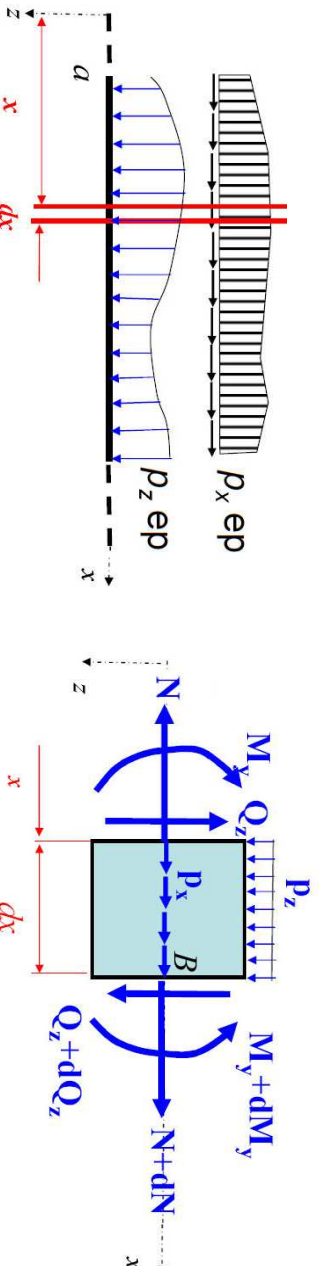
Näide 2-9. Koostada muritud varda sisejõudude epiüürid.



2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

2.5 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Vaatleme varda osa, kus piki telge mõjub lauskoormus intensiivsusega p_x ja risti teljega lauskoormus intensiivsusega p_z . Koordinaadil x on vardast ristlõigete abil eraldatud lõpmata lühike element pikkusega dx (joon. 2.9). Koostame selle elemendi jaoks tasakaaluvõrrandid, projekteerides kõik talle mõjuvad jõud x - ja z -teljele ning leides momentid punkti B suhtes.



Joonis 2.9: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsuse (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* leengukonspetsist.)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= N + dN - N + p_x \cdot dx = 0, \\ \sum_i F_{iz} &= Q + dQ - Q_z + p_z \cdot dx = 0, \\ \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) &= -M_y - Q_z \cdot dx + M_y + dM_y + p_z \cdot dx \cdot (0, 5dx) = 0, \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga dx läbijagamist, ning viimasest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalset:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga dx ning integreerime lõigul $[a, x]$:

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

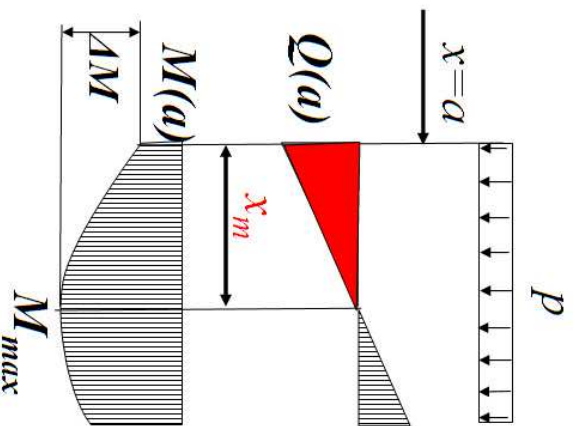
Järeldused. Äsjatuletatud seosed ning vaadeldud näited võimaldavad teha olulisi järeldusi sisejõudude epiüiride kuju (käitumise) kohta.

1. Piirkondades, kus lauskoormus puudub, on pikki- ja põikjõud konstantsed, paindemoment on aga sellises piirkonnas lineaarfunktsioon koordinaadist x .
2. Koondatud välisjõu rakenduspunkti toimub vastava sisejõu epiüüris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva välisjõu suurusega.
3. Koondatud välismomendi rakenduspunkti toimub painde- või väändemomendi epiüüris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva momendi suurusega.
4. Paindemomendi epiüüri tõus on võrdne põikjõuga. Kohas, kus põikjõud on null, on paindemomendil ekstremaalne väärtus.
5. Kohas, kus põikjõu epiüüris on hüpe, on paindemomendi epiüüris murdekohat (epiüüri tõus muutub hüppeliselt). Erijuhul, kui hüppe käigus muutub ka põikjõu märk, on paindemomendil selles kohas ekstreemum.
6. Piirkonnas, kus väline lauskoormus on konstantne, on põiki- ja pikkiõud

lineaarsed funktsioonid koordinaadist x . Paindemoment on sellisel juhul aga ruutfunktsioon.

- Epiüüride joonistamisel on otstarbekas meeles pidada, et määratud integraal esitab integreeritava funktsiooni graafiku ja x -telje vahele jääva kujundi pindala (lõigul $[a, x]$).

Näide 2-10. Paindemomendi ekstreemumi määramine.



$$\Delta M = \frac{1}{2} Q(a) x_m,$$

kuna

$$x_m = Q(a)/p,$$

siis

$$\Delta M = Q^2(a)/2p$$

$$M_{max} = M(a) + Q^2(a)/2p$$

2.6. Pinge mõiste

2 - 26

2.6 Pinge mõiste

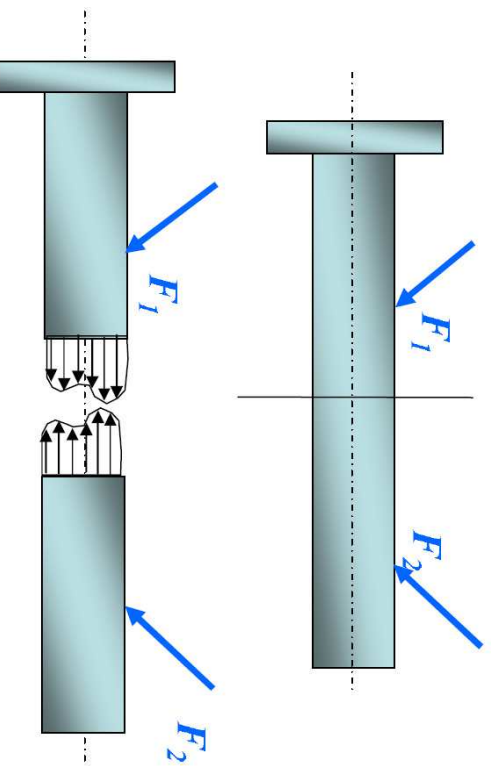
On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemetodi korral on sisejõud tegelikult jaotunud üle kogu lõikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud kuus sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi projekttsioone koordinaattelgedel.

Lõikepinnal mõjuva lauskoormuse intensiivsust nimetamegi *pingeks*. Tema mõõtühik $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$ langeb kokku rõhu ühikuga.

Kõige lihtsam on pinget arvutada juhul kui vardas mõjub vaid pikijõud. Siin eeldatakse, et pikijõud N on jaotunud ühtlaselt üle kogu lõikepinna A (joon. 2.11) ja seega pinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.3)$$

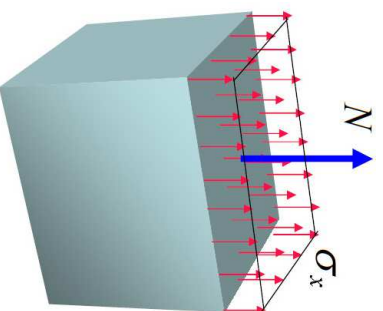
Oma olemuselt on vaadeldav pinge *normaalpinge*, sest ta mõjub risti vaadeldava pinnaga. Käesolevas kursuses tähistatakse normaalpingeid kreeka tähega σ ja vajadusel lisatakse indeks, mis osutab pinnanormaali sihile. Eestikeelsetes tugevusõpetuse ja tehnilise mehaanika õpikutes nimetatakse pikijõust põhjustatud normaalpingeid ka *pikikepingeteks*.



Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

Alajaotustes 2.2–2.6 kasutatud lähenemisiis, kus sisejõud jaotakse vastavalt sellele, kuidas nad on orienteeritud koordinaattelgde suhtes⁵ ja pinged saavad oma nime selle järgi, millise sisejõuga on neil põhjuslik seos, on iseloomulik just tugevusõpetusele (tehnilisele mehaanikale). Sama lähenemisiisi on aga otstar-

⁵Koordinaatteljed orienteeritakse omakorda uuritava keha geometriast lähtudes.

Joonis 2.11: Pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

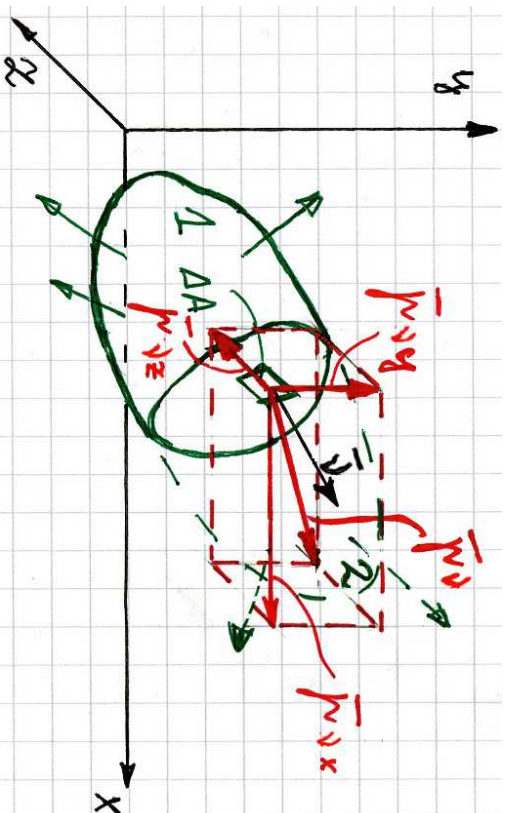
bekas rakendada ka elastusteooria tulesannete korral kui uuritavateks objektideks on vardad (talad), plaadid ja koorikud.

Järgmises alajaotuses selgitame pinge mõistet pisut tildisemalt ning tlejärgmises tuleme tagasi tugevusõpetuses kasutatava lähenemisiisi juurde ja hakkame uurima pingeid varda ristlõike punktis.

2.7 Pingvektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.12).



Joonis 2.12: Pingvektor \mathbf{p}_ν ja tema koordinaattelgedel xyz silhilised komponendid.

2.7. Pingvektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

2 - 30

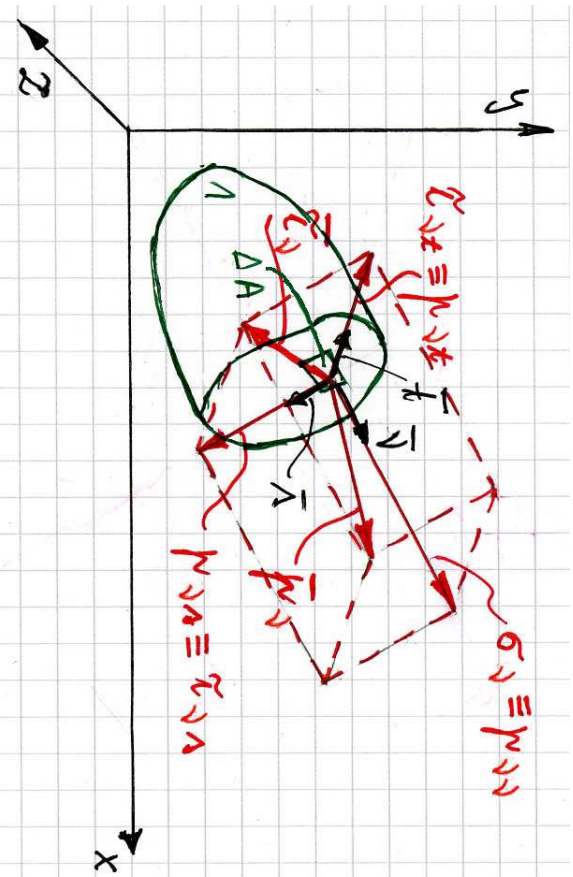
- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.

- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaliga $\boldsymbol{\nu}$. Mõjugu väikesel pinnal ΔA sisejõud $\Delta \mathbf{S}$. Suhet $\Delta \mathbf{S} / \Delta A$ võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal ΔA .

- Kui minna piirile $\Delta A \rightarrow 0$, saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga* $\boldsymbol{\nu}$

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (2.4)$$

- Üldjuhul vektorite $\boldsymbol{\nu}$ ja \mathbf{p}_ν suunad ei tihti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingvektori asemel tema projektsioone koordinaattelgedel $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$, mis omakorda määravad ära pingvektori \mathbf{p}_ν koordinaattelgedel xyz silhilised komponendid (vt. joon. 2.12). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormali sihti ja teine pinge-komponendi mõjumise sihti.

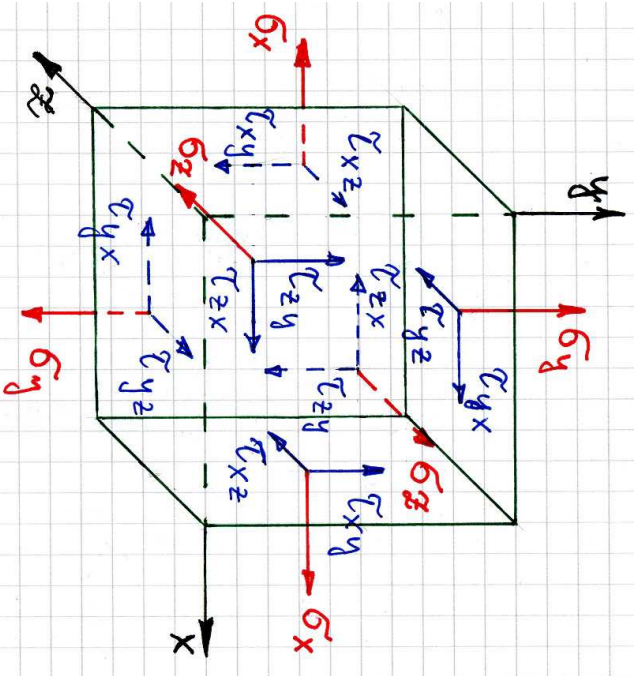


Joonis 2.13: Pingvektori \mathbf{p} , lahutamise normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga ν mõjuva pingvektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*: $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$. Nihkepinge $\boldsymbol{\tau}_\nu$ lahutatakse tavaliiselt veelkord kaheks komponendiks: $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ (vt. joon. 2.13, kus $\mathbf{p}_{\nu\nu} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$, $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$ ja $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$).

2.7. Pingvektor, tema projektioonid ja märgireglid

Kui lõike pind on paralleelne koordinaatasanditega, siis kasutatakse indeksi ν asemel lõikepinnale normaaliks oleva koordinaattelje nime, näiteks x .



Märgireglid: joonis 2.14.

- *Positiivne sisepind* on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.

2.8 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja kuus nihkepinget $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada 3×3 (tasandilisesannete korral 2×2) tabelina nagu maatrikseid. Pingetensor iseloomustab täielikult pingust (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal⁶.

⁶Selle juurde tuleme tagasi pisut hiljem, kui hakkame käsitlema pingeid kaldpindadel, peapingeid jms.

2.8.1 Skalaar, vektor, tensor

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tensoreid.

Skalaar pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus.

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

Vektorit iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund.

- 3D juhul esitatav arvukolmikuna — 3×1 või 1×3 maatriksina.
 - Arvud arvukolmikus sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
 - Vektori moodul ja suund on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Vektori iga komponent (projektsioon) on samuti seotud tiheduse suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihete indekseid.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.

Teist järku tensor on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

- 3D juhul on teist järku tensor esitatav 3×3 matriksina, st. 9 arvu abil.
 - Arvud matriksis sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
 - Tensor ise on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- Teist järku tensori komponentide tähistamisel kasutatakse kahte indeksit, sest iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda.
 - Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.

2.8. Pingetensor

2 - 36

- Teisest küljest (“matemaatiliselt”) on teist järku tensor \mathbf{T} defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori \mathbf{u} vektoriks \mathbf{v} , i.e.

$$\mathbf{T} : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

kus punkt \cdot tähistab tensori \mathbf{T} sisekorrutist⁷ vektoriga \mathbf{u} .

Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada 3×3 matriksina ja iga vektori arvukolmnikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga 3×3 matriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.
 - Pärast koordinaatiseisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.

⁷Punktkorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product*, *dot product*, *scalar product*.

- * Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
- * Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
- * Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi xy ja $x'y'$, mille vaheiline nurk on θ .

Märkused:

- Vektoreid võib nimetada esimest järku tensoreiks ja skalaare nullindat järku tensoreiks.
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga).
 - Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

2.8.2 Pingetensori invariantid

Suuruseid

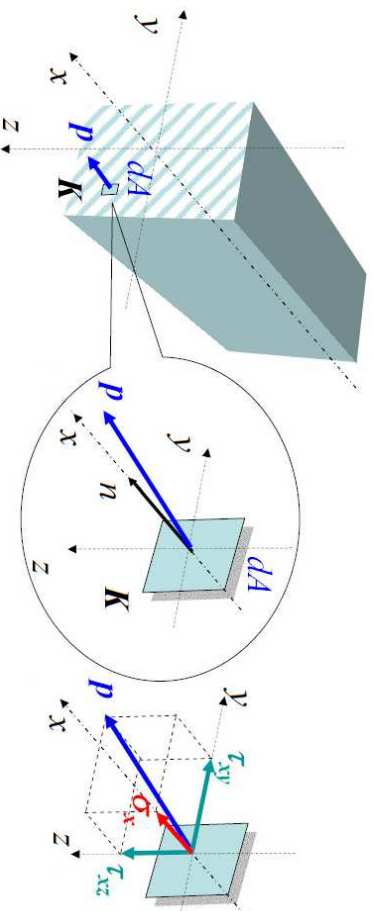
$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (2.6)$$

nimetatakse *pingetensori invariantideks* ehk lühidalt *pinge invariantideks*. Invariantis tähendab siin seda, et need kolm suurust ei sõltu koordinaatide valikust (vaatamata sellele, et pingetensori komponendid omavad erinevates koordinaatsüsteemides illdjuhul erinevaid väärtusi). On märkimisväärne, et see invariantis ei piirdu vaid erinevalt orienteeritud Descartes'i ristkoordinaatidega vaid kehtib suvaliste koordinaatsüsteemide, k.a. silindrilised, sfäärilised, elliptilised, hüperboolsed jne. vahel.

Märkus: Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

2.9 Pinged varda ristlõike punktis.

Varda korral on Descartes'i ristikordinaadid valitud tavaliselt nii, et x -telg on varda teljeks. Seetõttu on x -telg ristlõike normaaliks ja teised 2 koordinaattelge on suunatud mööda lõikepinda. Vaatleme varda ristlõike punkti K , mida läbib pind normaaliga $\mathbf{n} \parallel x$. Seal mõjub pingektor⁸ \mathbf{p} mille normalkomponentideks on σ_x ning tangentsiaalkomponentideks τ_{xy} ja τ_{xz} .

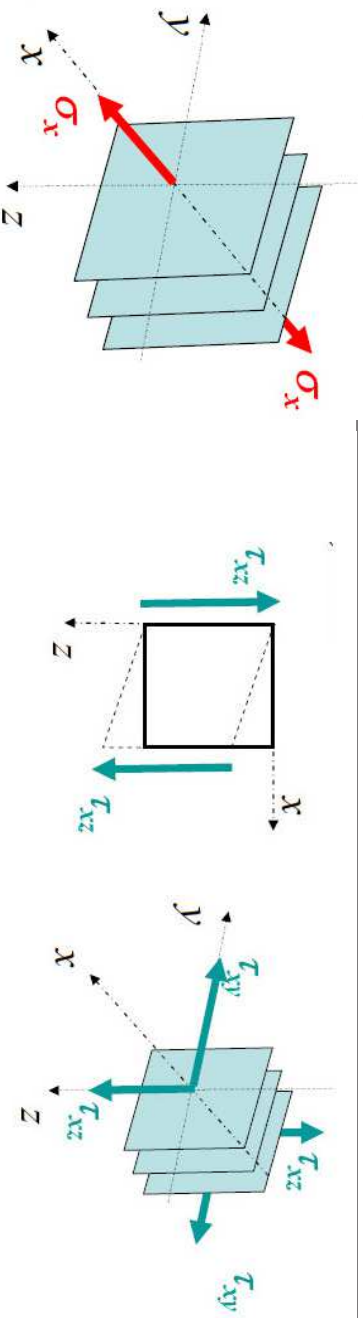


Joonis 2.15: Pinge varda punktis

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

⁸Siin oleme lihtiduse pärast loobunud indeksist \mathbf{n} pingektorri juures.

2.9. Pinged varda ristloike punktis.



Joonis 2.16: Normaalpinge σ_x ning nihkepinged τ_{xy} ja τ_{xz} .
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

- Normaalpinged σ_x iseloomustavad varda telje sihis mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad muudavad varda ristlõigete vahelist kaugust.
- Normaalpinge σ_x määrgireegel on analoogiline pikijõu määrgireegliga.
- Nihkepinged iseloomustavad varda teljega risti mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad nihutavad (või pööravad) erinevaid varda lõikeid (materjalikihte) üksteise suhtes.
- Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge τ_{xy} ja τ_{xz} määrgireegel on analoogiline põikjõu määrgireegliga.

2.10 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Pinge mõiste selgitamisega tegime algust alajaotuses 2.6, käesolevas alajaotuses tuletame seosed varda ristlõikes mõjuvate sisejõudude ja pingete vahel. Siinjuures peame silmas, et ristlõikes mõjuvad sisejõud ei kujuta endast mitte midagi muud kui samas ristlõikes mõjuvate pingete peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedele. Pikemalt seletades:

1. ristlõikes mõjuvad pinged moodustavad jõuvälja, mille saab vastavalt staatika põhiteoreemile taandada ristlõike pinnakeskmesse,
 - selle tulemusena on pinged asendatud ühe jõu ja ühe momendiga;
2. projekteerides saadud jõu ja momendi koordinaattelgedele saame peavektori ja peamomendi lahutada kolmeks koordinaattelgede sihiliseks komponendiks,
 - saadud kuus komponenti kannavad meile juba tuntud nimetusi – pikijõud (N), põikjõud (Q_y ja Q_z), väändemoment (T) ning paindemoment (M_y ja M_z).

2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

On selge, et rääkides seostest pingete ja varda sisejõudude vahel on võimalikud nn. kaks erinevat ülesande püstitust:

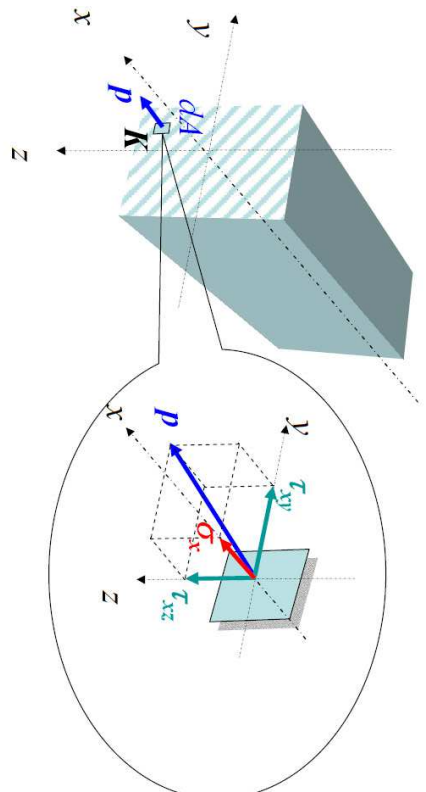
1. Teades pingeid, leida sisejõud.
2. Teades sisejõudusid, leida pinged.

Esimene neist on tunduvalt lihtsam, kuid teine suurema praktilise tähtsusega (vähemalt tugevusõpetuse seisukohalt).

2.10.1 Sisejõudude avaldamine pingete kaudu

Pikijõud. Vaatleme ristlõike elementaarpinda dA , kus mõjub keskmine pinge \mathbf{p} , millele vastav normaalpinge on σ_x (joon. 2.17). Vaadeldaval elementaarpinnal pingest σ_x põhjustatud summaarne jõud $\sigma_x dA$ mõjub samuti pinnanormaali \mathbf{n} sihis. Ristlõikes mõjuvate normaalpingete peavektori saame integreerides:

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.7)$$

Joonis 2.17: Pinged varda ristlõike elementaarpinnal dA .(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

Põikjõud. Ristlõikes mõjuvate põikjõudude Q_y ja Q_z arvutamine käib analoogiliselt pikijõuga. Nüüd vaadeldakse ristlõike elementaarpinnal dA mõjuvaid nihkepungeid τ_{xy} ja τ_{xz} (pingevektori \mathbf{p} projektsioone y - ja z -telgedel, vt. joon. 2.17) ja saadakse põikjõudude leidmiseks valemid

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.8)$$

2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Paindemomendid M_y ja M_z on seotud normaalpingega σ_x . Kui paine toimub $x - z$ tasandis, siis iseloomustab painet paindemoment M_y ning kui $x - y$ tasandis, siis M_z . Eksperimentide põhjal on leitud, et momendid M_y ja M_z tuleb arvutada ristlõike kesktelgede⁹ suhtes. Vastavalt paindemomendi määrgireeglile põhjustab elementaarpinnal dA mõjuv summaarne jõud $\sigma_x dA$ elementaarpaindemomendid $z\sigma_x dA$ ja $y\sigma_x dA$ vastavalt y - ja x -telje suhtes (vt. joon. 2.17). Vastavad peamomendid saadakse integreerimise teel:

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \quad \text{ja} \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA. \quad (2.9)$$

Väändemoment. Ristlõikes mõjuva väändemomendi arvutamise juures tuleb silmas pidada, et vastavalt sisejõudude ja pingete määrgireeglitele põhjustab elementaarpinnal dA mõjuv positiivne nihkepunge τ_{xz} positiivse väändemomendi ja positiivne nihkepunge τ_{xy} negatiivse väändemomendi (vt. joon. 2.17). Integreerides üle kogu ristlõike, saame

$$T = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA. \quad (2.10)$$

⁹Ristlõike keskteljed läbivad ristlõike pinnakeset.

2.10.2 Pingete avaldamine sisejõudude kaudu

Elmises alajaotuses (st. 2.10.1) tuletatud valemite korral pole tähtis, kas kasutusel on tugevusõpetuse (ehk nn. elementaar-teooria) eeldused ja hüpoteesid või lineaarse elastsusteooria omad. Käesolevas alajaotuses osutub aga tilitähtsaks täpsustada, et praegust rakendametugevusõpetusele ehk nn. elementaar-teooriale vastavaid lihtsustusi. Universaalsena¹⁰ kuulub nende hulka *ristlõigete tasandiltsuse hüpotees*, ehk *Bernoulli hüpotees*: ristlõiked, mis enne deformatsiooni olid tasapinnalised, jäävad ka peale deformatsiooni tasapinnalisteks.

Pikkepinned. Pingeid, mis on põhjustatud pikijõust, nimetatakse *pikkepinnedeks*. Siin eeldatakse, et

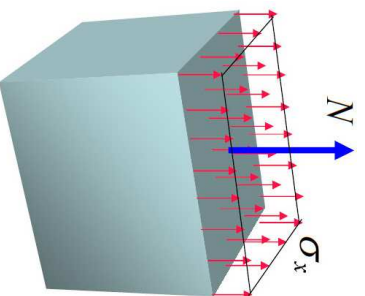
- vardale mõjub vaid piki tema telge mõjuv väliskoorumus,
 - seega mõjub varda ristlõigetel vaid üks sisejõud — pikijõud,
- pikijõust põhjustatud normaalpinge on jaotunud ühtlaselt üle kogu ristlõike (vrd. Bernoulli hüpotees ja vt. joon. 2.18).

¹⁰See hüpotees kehtib elementaar-teooria raames tõmbel-survel, paindel, lõikel ja väändel.

2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Seega saame seose

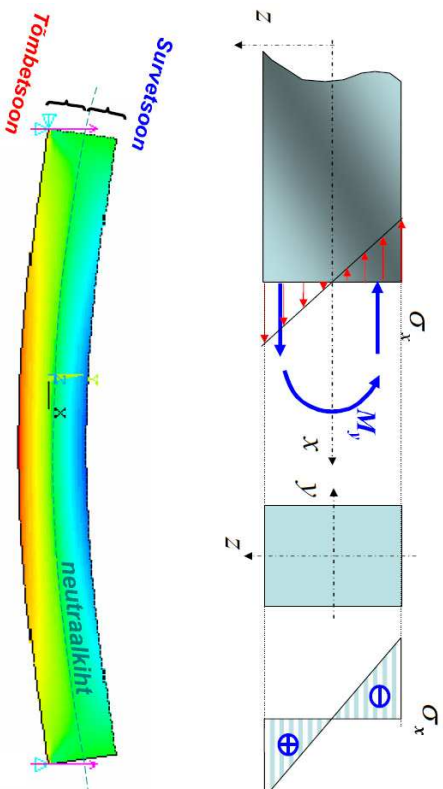
$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.11)$$



Joonis 2.18: Pikijõud ja pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

Paindepinge. Paindemomendist põhjustatud pingeid nimetatakse *paindepingedeks*. Oma olemuselt on paindepinged normaalpinged. Mõjuu talale selline väliskoorumus, mille toimel tekib vaid üks sisejõud – paindemoment M_y (joon. 2.19). Eksperimentaalsete ja teoreetiliste tulemuste põhjal ning kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga eeldatakse elementaar-teoorias, et tekkinud paindepinge



Joonis 2.19: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

sõltub koordinaadist z lineaarselt, st,

$$\sigma_x = kz, \quad (2.12)$$

kus k on konstant, mille määramiseks kasutame seoseid (2.9):

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA = \int_A k z^2 dA = k I_y, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_y}{I_y}. \quad (2.13)$$

2.10. Seosed pingete ja varnda sisejõudude vahel

Avaldiste (2.12) ja (2.13) põhjal

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.14)$$

Tugevusarvutuste seisukohalt omavad tähtsust just maksimaalsed paindepinged, mis tekivad neis ristlõike punktides, kus koordinaat z omab ekstreemalseid väärtusi (z_{\max} ja z_{\min}). Kui ristlõige on sümmeetriline y -telje suhtes, siis on $z_{\max} = -z_{\min}$ ja arvutuste lihtsustamiseks võib tuua sisse *ristlõike tugevusmomenti*

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (2.15)$$

Viimase abil saame maksimaalse paindepinge arvutamiseks valem

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}. \quad (2.16)$$

Kui talale mõjuva väliskroomuse toimel tekib vaid paindemoment M_z , siis saame eelnevatega analoogilised valemid

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (2.17)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad \max \sigma_x = \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.18)$$

Märkused:

- Tugevusmomentide W_y ja W_z arvutamise juures tuleb silmas pidada, et kui ristlõikeks on lihtkuju, st. ta on jaotatav n lihtsaks osakujuandiks, siis tuleb kõigepealt leida lihtkujuandi inertsimomendid $I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)}$ ja/või $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)}$. Seejärel arvutatakse tugevusmomentid W_y ja W_z valemite (2.15) ja (2.18)₁ põhjal¹¹.
- Kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga on paindepingete arvutamise juures eeldatud, et paindemomendist M_z põhjustatud paindepinged on z järgi konstantsed ja M_y põhjustatud paindepinged on y järgi konstantsed, vt. valemid (2.14) ja (2.17). Viimaste valemitega esitatud lineaarsed seosed on samuti kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga.
- Varda paindel jääb surutud ja tõmmatud kihtide vahele kiht, milles nn. kiindude pikkus ei muutu ja kus paindepinge on null (vt. joon. 2.19). Vastavat varda kihti nimetatakse *neutraalkihiks*. Neutraalkihi ja ristlõike lõikejoont nimetatakse *nulljooneks*.

¹¹ NB! $W_y \neq W_y^{(1)} + W_y^{(2)} + \dots + W_y^{(n)}$ ja $W_z \neq W_z^{(1)} + W_z^{(2)} + \dots + W_z^{(n)}$

- On selge, et $x - z$ tasapinnas toimuva painde korral on $z = 0$ korral paindepinge $\sigma_x = 0$.
- Elementaariteooria korral eeldatakse, et nulljooned on määratud keskpunktidega.

Näide 2-11. Pikkepinged vardas. Lahendatakse loengus.

Näide 2-12. Paindepinged talas. Lahendatakse loengus.

Väände- ja lõikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändemomendist ja lõikepinge põikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomendist põhjustatud normaalpingete leidmine, siis pühendame neile omaette jaotise.

2.11 Nihkepinged varda ristlõikes¹²

2.11.1 Üldised seaduspärasused

Nihkepingete paarsuse seadus.

Elementaartheooria kasutatakse nn. nihkepingete paarsuse seadust, mis tule-
tatakse järjenselt¹³. Eeldame, et vardas on homogeenne pingeseisund ehk ho-
mogeenne pingus¹⁴. Sellisel juhul peavad elementaarriistahuka vastastahkudel
mõjuma võrdvastupidised pinged. See tingimus kehtib nii normaal- kui nihke-
pingete kohta ning ta on tuletatud tasakaalutingimustest $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$
ja $\sum F_{iz} = 0$ (vt. joon. 2.20 a) ja b)). Teatavasti on aga tasakaaluks vajalik veel
kolme võrrandi kehtimine, st. $\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0$, $\sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0$ ja $\sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$.
Nende põhjal saadaksegi nihkepingete paarsuse seadus (vt. joon. 2.20 c)):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.19)$$

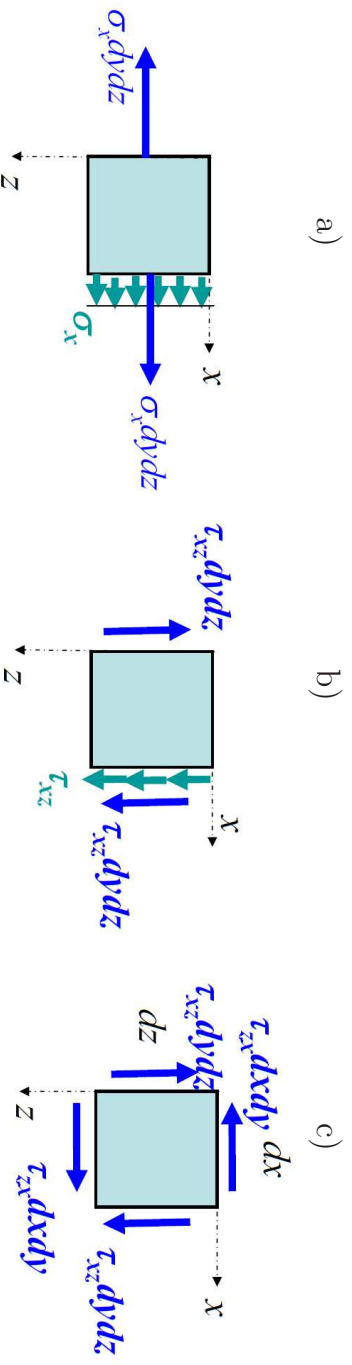
¹²Joonised on pärit prof. A. Klansoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.

¹³Hiljem esitame sama seaduspärasuse jaoks rangema tuletuskäigu.

¹⁴Pinguse ehk pingeseisundi all mõistetakse keha punkti lähivatel kõlkvõimalikel pindadel mõjuvate pingete hulka. Pinguse mõiste juurde tuleme tagasi.

Homogeenne pinguse korral on keha kõigis punktides ühesugune pingus.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

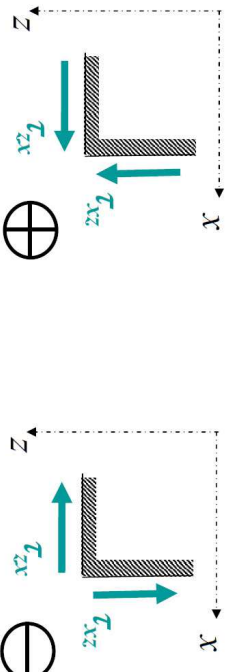


Joonis 2.20: Elementaarriistahuka tahkudel mõjuvad pinged.

Näiteks,

$$\sum M_y(\mathbf{F}_i) = -(\tau_{xz} dy dz) dx + (\tau_{zx} dx dy) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.20)$$

Avaldiste (2.19) põhjal on selge ka see, et kui mingis keha punktis on nihkepinge $\tau_{xy} > 0$, siis ka $\tau_{yx} > 0$ ja vastupidi (vt. joonis 2.21). Analoogilised seosed kehtivad ka tilejäanud kahe nihkepingete paari jaoks.



Joonis 2.21: Nihkepingete paarsus.

Nihkepinged ristlõike serval

- Ristlõike serval mõjub nihkepinge puutuja sisihis.
- Kuna ristlõike nurgapunktis on lõpmata palju puutuajaid, siis seal on nihkepinge null.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

2 - 54

2.11.2 Väändepinged ümarvarda ristlõikes

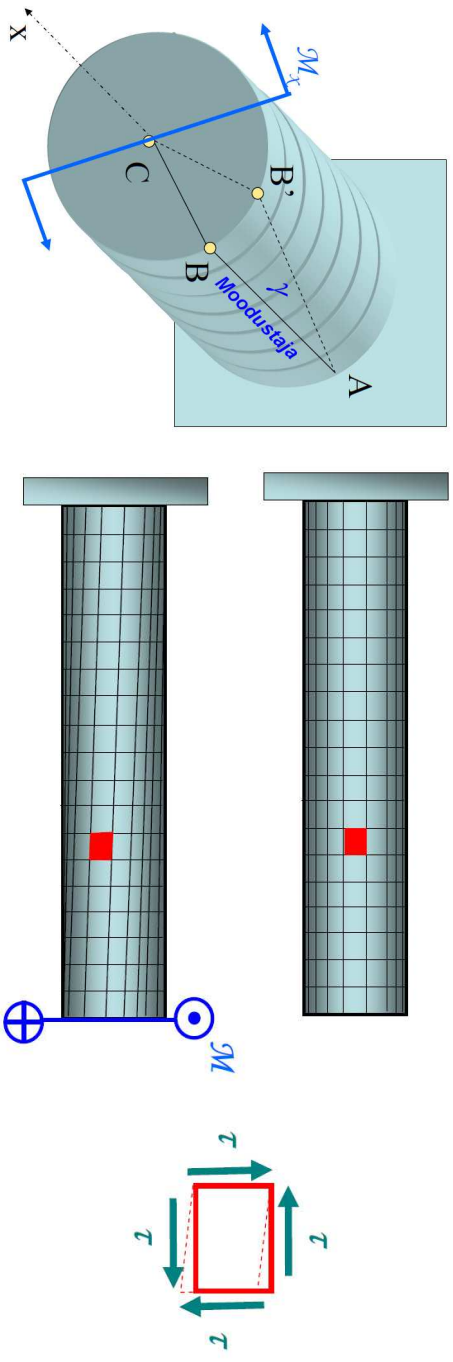
Olgu ümarvarda otstesse rakendatud momendid \mathbf{T} ja \mathbf{T}' (joonis 2.22). Selle tulemusena tekkitab vardas deformatsioon, mida nimetatakse *väändeks*. Väändel tekkivate pingete ja teformatsioonide uurimisel on elementaarteoorias kasutusel järgmised eeldused:

- Kehtib Bernoulli hüpotees.
- Varda telg jääb sirgjooneliseks.
- Ristlõike raadiused jäävad sirgjooneliseks.



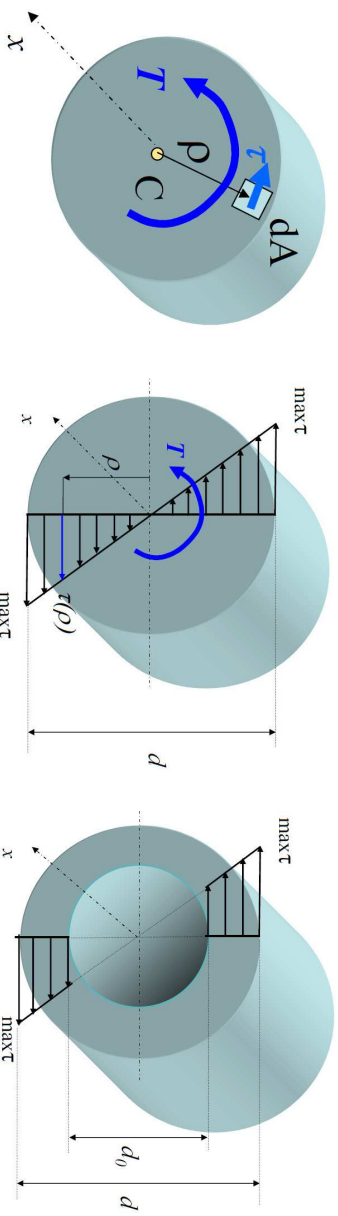
allikas: www.clarkson.edu/class/es22201/3_torsion.ppt

Joonis 2.22: Ümarvarda väände.



Joonis 2.23: Väändedeformatsioon.

Tehtud eelduste põhjal pöörduvad ristlõiked väändel timber varda telje. Selle tulemusena pöörduvad varda moodustajad nurga γ võrra. Seega on väändedeformatsioon oma olemuselt nihkedeformatsioon ja algsed ristkülikulised pinnaelendid muutuvad rööpkülikulisteks. Nurka γ nimetatakse *vääändenurgaks*, ta on üks oluline väännet iseloomustav suurus ja tema juurde tuleme hiljem tagasi.



Joonis 2.24: Väändepinged timbarvardas ja paksuseinallis torus.

Tehtud eeldustest ja Hooke'i seadusest (pingete ja deformatsioonide vahel on lineaarne sõltuvus) lähtudes peab väändepinge olema lineaarfunktsioon varda raadiusest ρ , s.t. $\tau = k\rho$ (joon. 2.24). Konstandi k määrame väändemomendi ja väändepinge vahelisest seosest kasutades polaarinertsimomenti I_ρ :

$$T = \int_A \rho \tau dA = k \int_A \rho^2 dA = k I_\rho \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T}{I_\rho}. \quad (2.21)$$

Nüüd saame väändepinge jaoks valemi

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_\rho 2}. \quad (2.22)$$

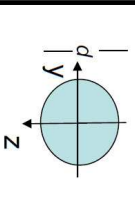
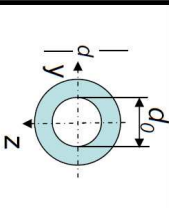
Valenid (2.22) kehtivad ka rõngasristlõike korral (vt. joon. 2.24).

Väändepingete arvutamise valem on paljuski analoogiline paindepingete arvutamise valeniga: maksimaalsed pinged on ristlõike servas. Seega on ka siin võimalik sisse tuua ristlõike tugevusmoment – aritud juhul nimetatakse seda polaar-tugevusmomentiks – mille abil saab määrata maksimaalseid väändepingeid:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{2I_\rho}{d} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho}. \quad (2.23)$$

Tihti kasutatakse polaarineretsimomendi ja polaar-tugevusmomenti tähistena vastavalt I_ρ ja W_ρ , st. kasutatakse indeksi ρ asemel indeksit p .

Näide 2-13. Väändepinged ümar- ja rõngasristlõikes. Lahendatakse loengus.

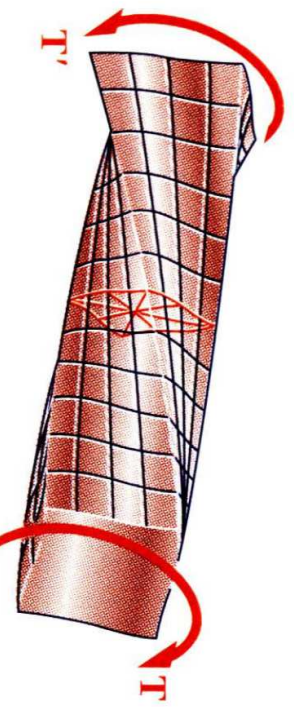
Ristlõige	I_ρ	W_ρ
	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$ $c = \frac{d_0}{d}$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4)$

Joonis 2.25: Polaarineretsimendid ja polaar-tugevusmomentid.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

2.11.3 Väändepinged mitteümaristlõigetes

Ümar- ja rõngasristlõigete korral on väändepingete arvutamine suhteliselt lihtne, kuid muude ristlõigete, st. mitteümaristlõigete, korral on see tunduvalt komplitseeritud. Bernoulli hüpootees taoliste ristlõigete korral tavaliselt enam ei kehti (joon. 2.26). Selliseid



allikas: www.clarkson.edu/class/es22201/3_torsion.ppt

väändelüesandeid käsitletakse lineaarses elastsusteoorias. Elementaar-teooria (tugevusõpetuse) kursustes refereeritakse vaid lineaarse elastsusteooria raames saadud tulemusi, piirdudes tavaliselt maksimaalsete väändepingete valemitega kujul

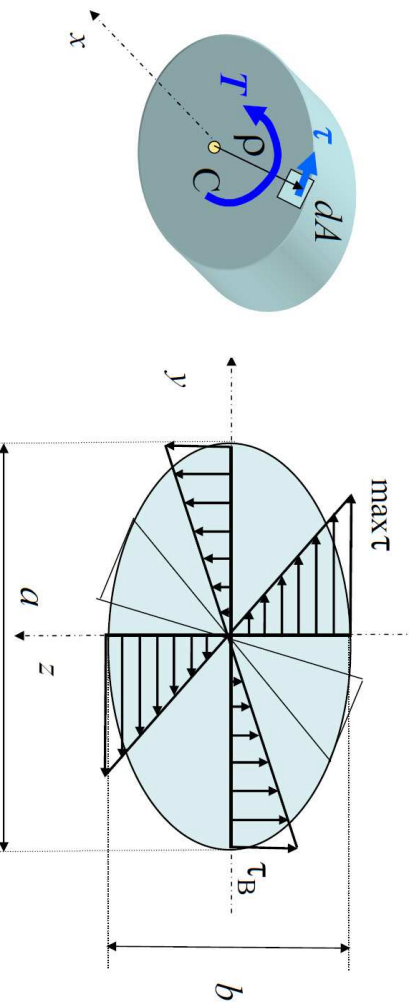
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}, \quad (2.24)$$

kus W_t on ristlõike tugevusmoment.

Elliptiline varras

Elliptilise ristlõikega vardas arvutatakse pingeid pooltelgede otstes järgmiste valemitega (joon. 2.27):

$$W_t = \frac{\pi ab^2}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi ab^2}, \quad \tau_B = \frac{16T}{\pi a^2 b}. \quad (2.25)$$

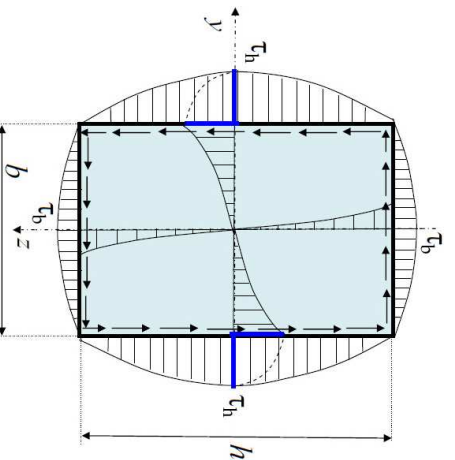


Joonis 2.27: Elliptilise ristlõikega varda vääne.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes**Ristkülikuline varras**

Ristkülikulise ristlõikega vardas on väändepinged pikli servi jaotunud paraboolselt ja omavad maksimaalseid väärtusi servade keskpunktides. Ristlõike nurkades on väändepinged nullid (joon. 2.28). Iseloomulikud pinged leitakse valemitega

$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.26)$$

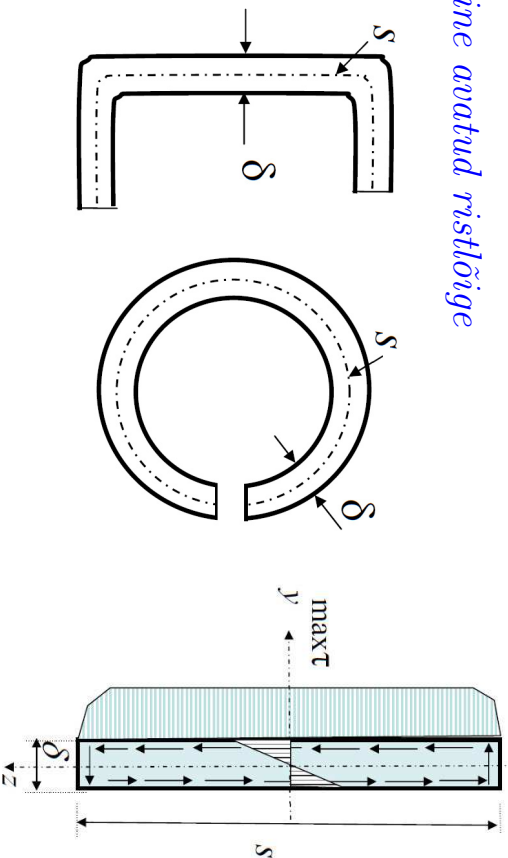


Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vardas.

h/b	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
k_h	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
k_b	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

Näide 2-14. Väändepinged ristkülikulises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

Õhukeseseinaine avatud ristlõige



Joonis 2.29: Väändepinged õhukeseseinaines avatud ristlõikes.

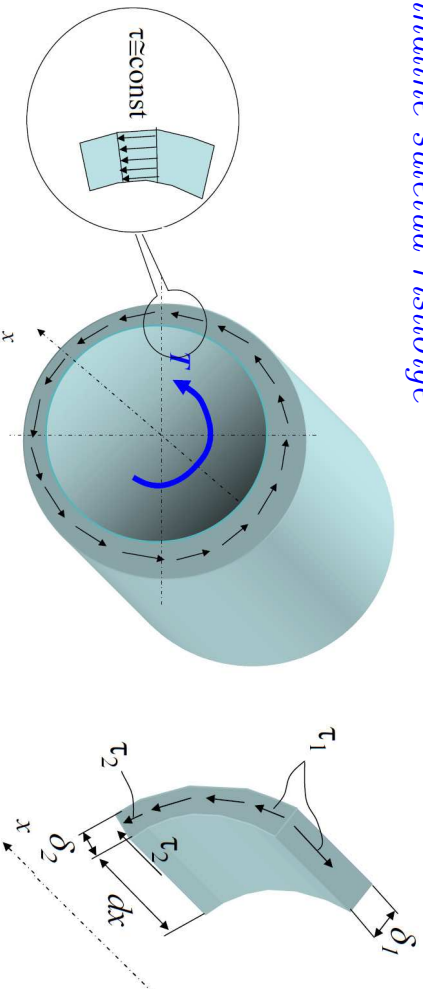
Väga mitmed konstruktsioonielemendid on valmistatud metall-lehtedest, mille ristlõike paksus δ on väike võrreldes kõrgusega s (joon. 2.29). Vastavalt tabelile joonisel 2.28 on sellise ristlõike korral $k_h = 0.333 = 1/3$ ja ristlõike tugevusmoment ja maksimaalne väändepinge

$$W_t = \frac{s\delta^2}{3}, \quad \tau_{\max} = \frac{3T}{s\delta^2}. \quad (2.27)$$

Valemid (2.27) kehtivad ka metall-lehest tehtud avatud ristlõikega varraste jaoks.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

Õhukeseseinaine suletud ristlõige



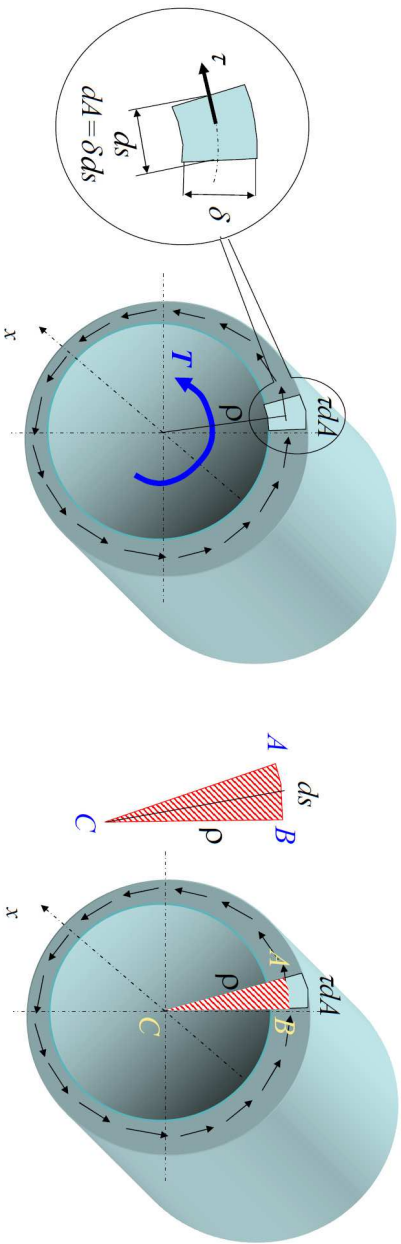
Joonis 2.30: Väändepinged õhukeseseinaines suletud ristlõikes.

Vaatleme muutuva seinapaksusega suletud ristlõiget (joon. 2.30). Kuna seinapaksus on väike, siis loeme pinge seinapaksuse järgi konstantseks. Samas on lihtne näidata, et paksemas osas on pinge väiksem ja õhemas osas suurem. Projekteerime joonise 2.30 parempoolisel osal kujutatud jõud x -teljele:

$$\sum F_{ix} = -\tau_1 \delta_1 dx + \tau_2 \delta_2 dx = 0. \quad (2.28)$$

kust saamegi, et

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 \quad \text{ehk} \quad \tau \delta = \text{const}. \quad (2.29)$$



Joonis 2.31: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

Järgnevalt tuletame valemid maksimaalse väändepinge arvutamiseks. Alustame nagu tavaliselt väändemomendi ja väändepingete vahelisest seosest¹⁵ (joon. 2.31):

$$T = \int_A \rho \tau dA = \oint_s \rho \tau \delta ds. \quad (2.30)$$

Kuna $\tau \delta = const$ ja $\rho ds = 2d\omega$ on kolmnurga ABC kahekordne pindala, siis

$$T = \tau \delta \oint_s \rho ds = 2\tau \delta \oint_s d\omega = 2\tau \delta \omega, \quad (2.31)$$

¹⁵Vasakpoolisel joonisel on ds asemel s

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

kus ω on ristlõike keskjoonega piiratud kujundi (antud juhul ringi) pindala (vt. joon. 2.32).

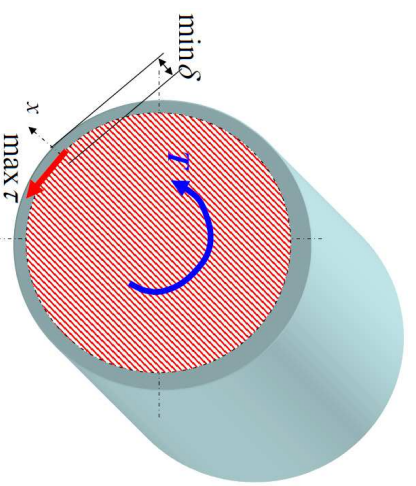
Kuna $\tau \delta = const$, siis vastab maksimaalsele väändepingele minimaalne seinapaksus ning tuues sisse õhukeseseinalises suletud ristlõike tugevusemomendi väändel

$$W_t = 2\omega \delta_{min} \quad (2.32)$$

saame maksimaalse väändepinge leidmiseks valemid

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{2\omega \delta_{min}}. \quad (2.33)$$

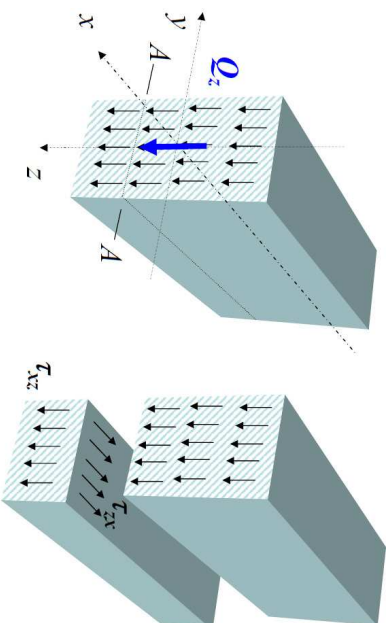
Joonis 2.32: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.



Näide 2-15. Väändepinged avatud ja suletud õhukeseseinalises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

2.11.4 Lõikepinge

Vaatleme tala, kus mõjub põikjõud Q_z (joon. 2.33). Teatavasti on põikjõud Q_z lõikepingete τ_{xz} peavektoriiks. Põikjõud Q_z esineb alati koos paindemomendiga M_y ja seega mõjuvad vadeldaval ristlõikel ka normaalpinged σ_x , mida sel joonisel ei ole kujutatud. Lisaks eeldame, et tala on koormatud nii tema pealmine ja alumine pind on nihkepingest vabad.



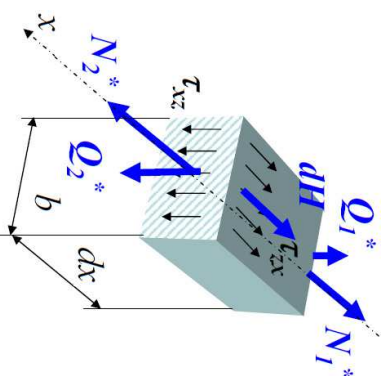
Joonis 2.33: Põikjõud ja lõikepinged (1)

Põikjõust põhjustatud pingete ristlõikes jaotumise seaduspärasuste selgitamiseks teeme talas täiendava lõike ja vaatleme parempoolsel joonisel 2.33 kujutatud alumise osa tasakaalu. Nihkepingete paarsuse seaduse põhjal mõjuvad vadeldava vardaosa pealmisel pinnal nihkepinged τ_{zx} .

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Eraldame nüüd tala alumisest osast väikese rsittahuka pikku-sega dx , lausega b ja "muutuva" kõrgusega $h/2 - z$. Risttahuha ots-tahkudel mõjuvad pikijõud $N_1^* \neq N_2^*$ ja põikjõud $Q_1^* \neq Q_2^*$; Pealmisel tahul mõjub pingete τ_{zx} peavektor dH . Eeldades, et $N_2^* > N_1^*$ saame tasakaalutingimusest $\sum F_{ix} = 0$

Joonis 2.34: Põikjõud ja lõikepinged (2)



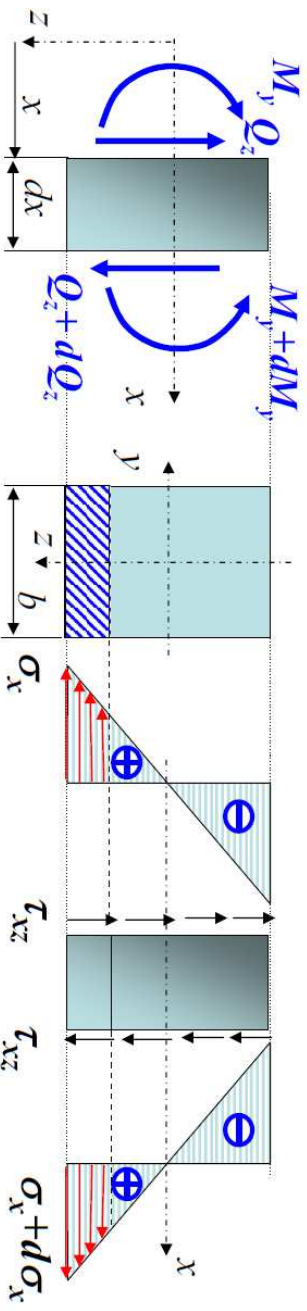
$$dH = N_2^* - N_1^* \quad (2.34)$$

Edaspidises rakendame Žuravski¹⁶ hüpoteesi, mille kohaselt on lõikepinged talas jaotunud tihtlaselt y -koordinaadi järgi. Seega saame valemi

$$\tau_{zx} = \frac{dH}{b dx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx} \quad (2.35)$$

Nüüd on õige aeg sisse tuua ka põikjõuga Q_z koos käiv paindemoment M_y (joon. 2.35).

¹⁶Inglisekeelses kirjanduses Jourawski.



Joonis 2.35: Põikjõud ja lõikepinged (3)

Tähistame vaadeldava risttahuka otspinna (joon. 2.34) pindala A^* . Joonisel 2.35 on see pind viirutatud. Nüüd saame esitada risttahuka otspindadel mõjuvad pikijõud paindemomendi kaudu:

$$\begin{aligned} N_1^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y}{I_y} S_y^*, \\ N_2^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} S_y^*, \end{aligned} \quad (2.36)$$

kus S_y^* on viirutatud pinna staatliline moment y -telje suhtes.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

Arvestades lõikepingete paarsuse seadust ja valemeid (2.35) ning (2.36) saame

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y^*}{I_y b}. \quad (2.37)$$

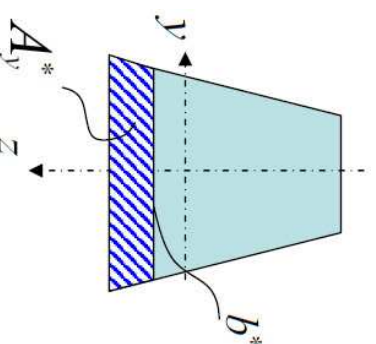
Rakendades diferentsiaalseoseid oleme kokkuvõttes saanud valemi, mis on rakendatav meelevaldse kujuga ristlõike jaoks:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}. \quad (2.38)$$

Siin Q_z on vaadeldavas ristlõikes mõjuv põikjõud, b^* on viirutatud pinna "ülemine joommõõde" (joon. 2.36), S_y^* viirutatud pinna staatliline moment

Joonis 2.36: Põikjõud ja lõikepinged (4)

y -telje suhtes ja I_y ristlõike painertsimoment. Järgnevalt vaatleme lõikepingete leidmist mõnes mõnes spetsiifilise kujuga ristlõikes.



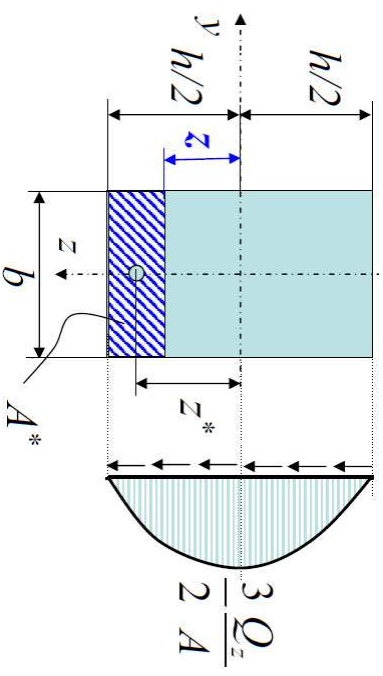
Ristkülik

Kasutame valemite (2.38) ja leiame seal kasutatavad geomeetrised suurused ristküliku korral:

$$I_y = \frac{bh^3}{12},$$

$$S_y^* = z^* A^* = \dots = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*} = \dots = \frac{6Q_z}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$



Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

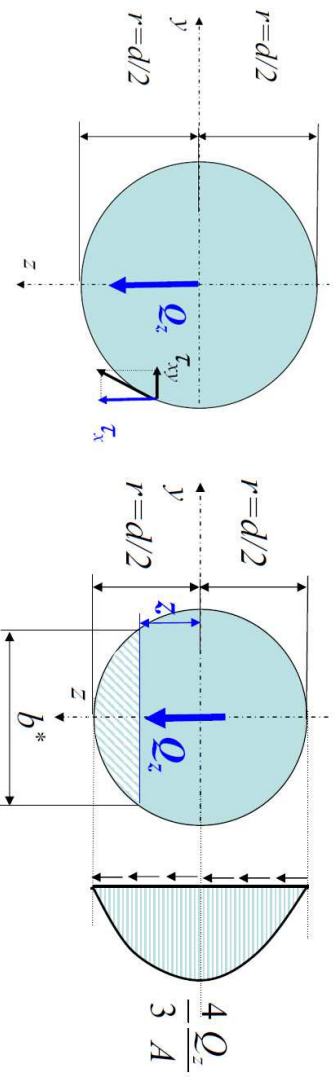
Arvestades, et ristküliku pindala $A = bh$, saame lõpuks valemid

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A}. \quad (2.39)$$

Seega on tegu ruutparabooliga ja $\tau_{xz} = 0$ kui $z = \pm 0, 5h$ ning mille maksimum on kohal $z = 0$.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Ring



Joonis 2.38: Lõikepinged ümaristlõikes

Kuna ristlõike serval on nihkepinged puutuja sihilised, siis lahutame selle kaheks komponendiks ja tuletame valemid lõikepinge τ_{xz} leidmiseks. Kasutame jällegi valemite (2.38) ja leiame vajalikud geomeetrised suurused ringi korral:

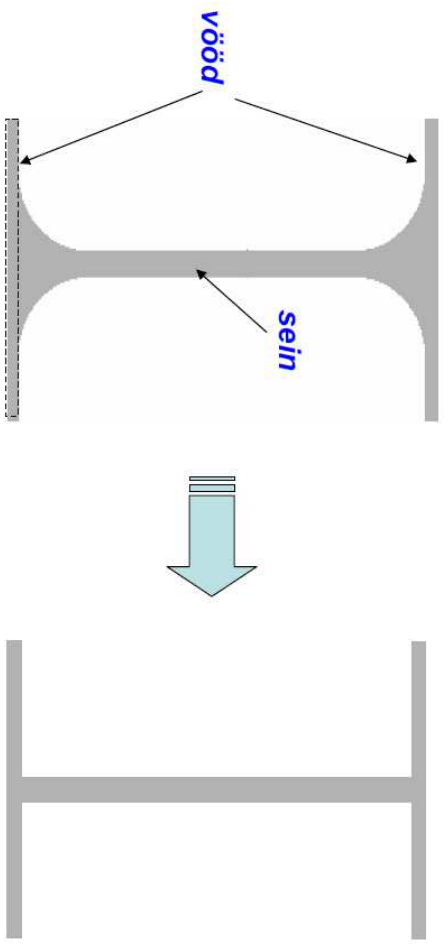
$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad b^* = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad S_y^* = \frac{3}{2} (r^2 - z^2)^{3/2}.$$

Kokku saame jällegi ruutparabooli, mille maksimum on kohal $z = 0$ ja mis on null kui $z = \pm r$:

$$\tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A}. \quad (2.40)$$

I-tala.

Vaatleme valtsmetallist profiili, mille ristlõige on I tähe kujuline. Tävaliselt nimetatakse sellist tala I-talaks (joon. 2.39). Eesmärgiks on leida nihkepingete jaotus sellises ristlõikes. Lihtsuse mõttes vaatleme sellist profiili koosnevana riskülikutest.



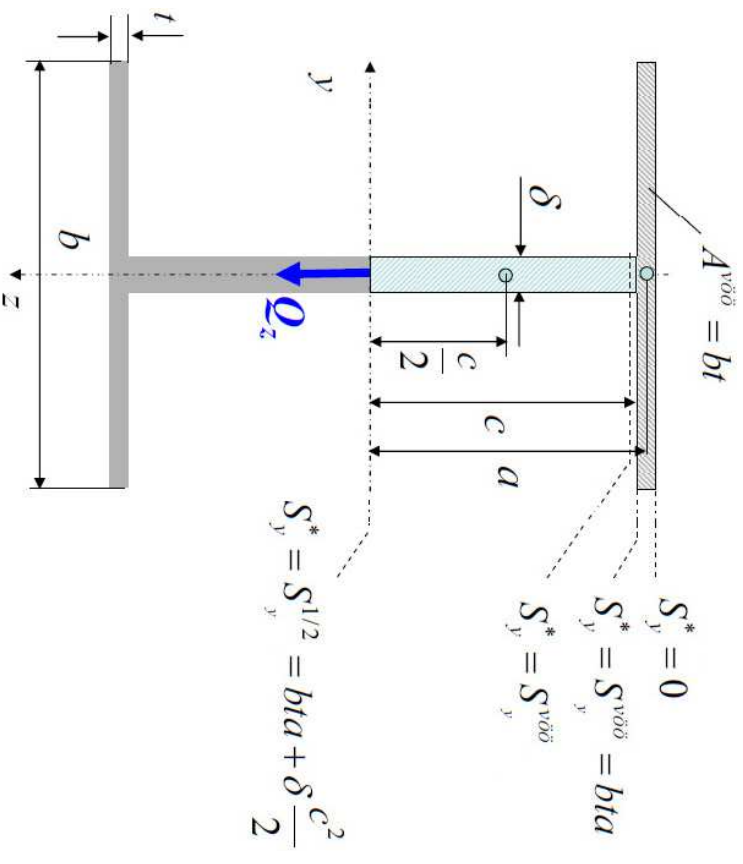
Joonis 2.39: I-tala.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Lõikepinge arvutamiseks kasutame endiselt valemite (2.38):

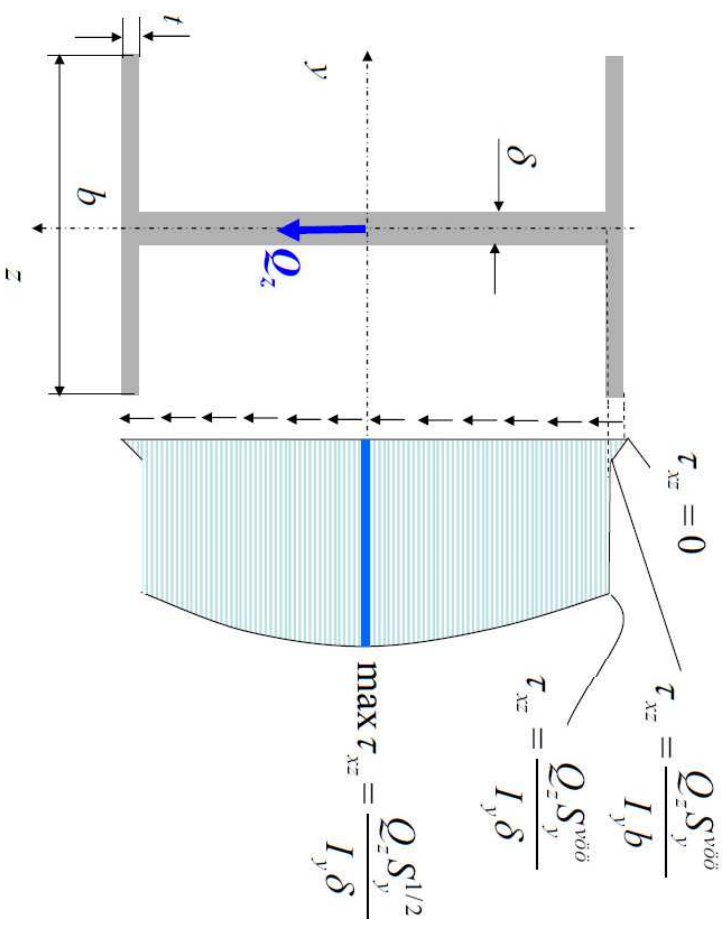
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}.$$

Seega on nihkepingete epiüüride koostamiseks teada tervet rida staatilisi momente, mis on esitatud joonisel 2.40



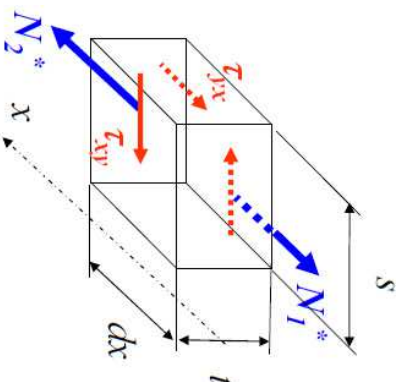
Joonis 2.40: I-tala iseloomulikud staatilised momendid.

Joonisel 2.41 on kujutatud lõikepinge τ_{xz} epiür I-tala jaoks. Nihkepinge valemite abil. Ülemineks seinalt võile on tegelikkuses sujuv (vt. joon 2.39) ja seetõttu ei esine tegelikkuses ka sellist järsku hüpet nagu on joonisel 2.41. On selge, et võrreldes seinaga on lõikepingete τ_{xz} väärtused võos väikesed.



Joonis 2.41: Lõikepinge τ_{xz} epiür I-tala korral.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes



Joonis 2.42: Lõikepinge τ_{xy} põhjused.

Tala võos esinevad lisaks lõikepingetele τ_{xz} veel lõikepinged τ_{xy} . Üks nende olemasolu põhjendus¹⁷ on esitatud joonisel 2.42. Feldades, et $N_2^* > N_1^*$, tasakaalustab pikijõu juurdekasvu dN nihkepingest τ_{yx} põhjustatud jõud $\tau_{yx} t dx$. Nihkepingete paarsusseaduse põhjal peab nihkepingega τ_{yx} koos eksisteerima nihkepinge τ_{xy} , mille arvutamiseks kasutame valemiga (2.38) analoogilist valemite

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t} \quad (2.41)$$

¹⁷Eksisteerib veel teisigi põhjendusi. Näiteks, et võos mõjuv pinge τ_{yx} tasakaalustab seinas mõjuvat pinget τ_{xz} .

Joonise 2.43 põhjal saame viimasest valemist

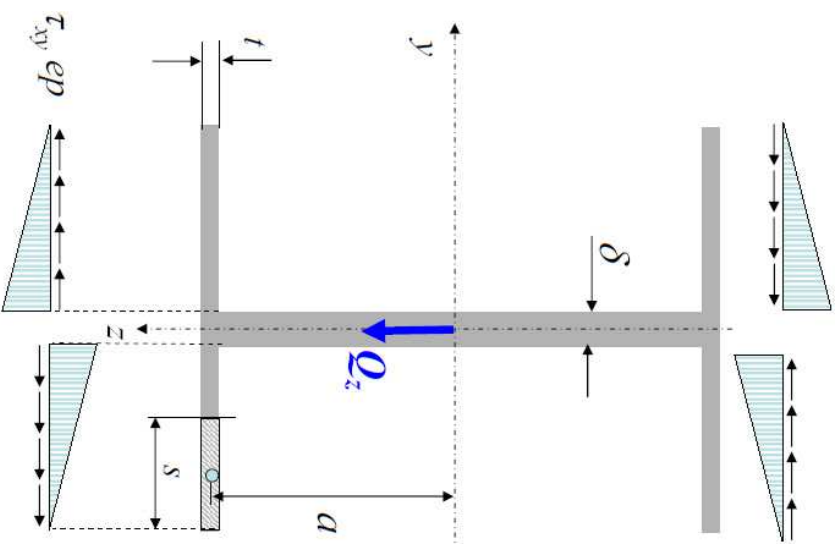
$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t} = \frac{Q_z s a t}{I_y t} = \frac{Q_z s a}{I_y}. \quad (2.42)$$

S_y^* tähistab siin viirutatud pinnastaatilist momenti y -teljesuhtes. Arvestades, et tala vöö laius on b ja seinapaksus δ , saame nihkepingete τ_{xy} ekstreemaalsed väärtused

$$\max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a (b - \delta)}{2 I_y}. \quad (2.43)$$

On selge, et vöö „sobivate“ mõõtmete korral võivad nihkepinged τ_{xy} omada märkimisväärsed väärtusi.

Tala vöös mõjuvate nihkepingete summeerimisel saame peavektorid $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}'_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}'_3$ (vt. joon. 2.44).



Joonis 2.43: Lõikepinge τ_{xy} epiitüri I-tala vöös.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Valemi (2.42) põhjal

$$Q_2 = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^l \frac{Q_z s a}{I_y} t ds \quad (2.44)$$

Arvestades, et $a = h/2 - t/2 \approx h/2$ ja $l = b/2 - \delta/2 \approx b/2$ saame

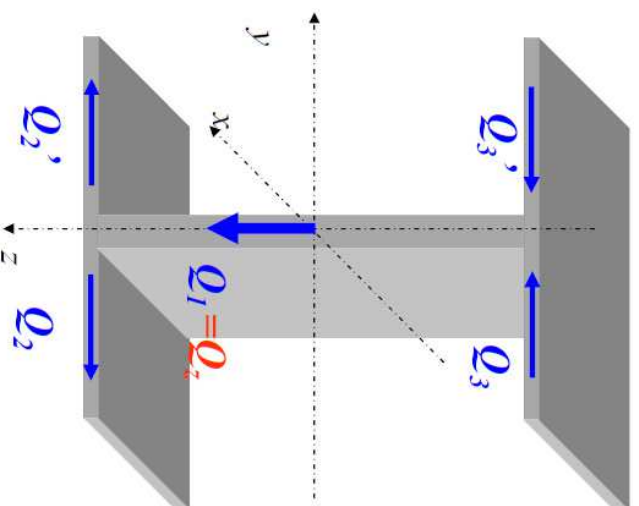
$$Q_2 = \frac{Q_z a t}{I_y} \int_0^l s ds = \frac{Q_z a t l^2}{2 I_y} \approx \frac{Q_z h t b^2}{16 I_y}. \quad (2.45)$$

On selge, et jooniste 2.43 ja

2.44 põhjal vektorid $\mathbf{Q}_2 = -\mathbf{Q}'_2$,

$\mathbf{Q}_3 = -\mathbf{Q}'_3$ ja $\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_1$ (\mathbf{Q}_1 on sisse

toodud vöö ja seinavahelise analoogia mõttes) ning moodulid $Q_2 = Q_3$



Joonis 2.44: Põikjõud I-talas.

Näide 2-16. Painde- ja lõikepinged I-talal (nn. keevisristlõige).

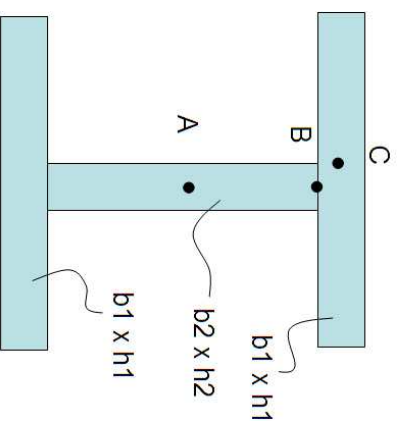
Tala ristlõikes mõjub paindemoment $M = 20 \text{ kNm}$ ja põikjõud $Q = 100 \text{ kN}$. Koostada paindepinge σ_x ja lõikepingete τ_{xz} ning τ_{xy} epiüürid. Ristlõike mõõtmed: $b1 = 6 \text{ cm}$, $h1 = 2 \text{ cm}$, $b2 = 2 \text{ cm}$, $h2 = 10 \text{ cm}$. Kuidas mõjutab mõõtmete suurendamine ja/või vähendamine pingeid?

Lahendus.

Paindepinged arvutatakse valemite (2.15) ja (2.16) põhjal:

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}},$$

Joonis 2.45: I-tala ristlõige



Nihkepingete arvutamiseks kasutame valemeid (2.38) ja (2.43):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}, \quad \max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a(b - \delta)}{2I_y}.$$

$$I_y, \quad W_y, \quad S_y^{*A}, \quad S_y^{*B}$$

Viimaste jaoks on vaja leida mitmed inertsii-, tugevus- ja staatilised momendid

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Epiüüride joonistamiseks vajalikud arvud on järgnevas tabelis. Epiüürid joonistatakse ja täiendavaid seletusi antakse loengus.

M	Q	h1	b1	h2	b2	Iy	Wy	Sat	Sbt	sx	taxz	tbxzz2	tbxz1	txy
kNm	kN	cm	cm	cm	cm	cm4	cm3	cm3	cm3	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa
20	100	2	6	10	2	1038,7	148,4	97	72	134,79	46,69	34,66	11,55	11,55
20	100	1	6	10	2	530,7	88,4	58	33	226,13	54,65	31,09	10,36	20,73
20	100	3	6	10	2	1714,7	214,3	142	117	93,31	41,41	34,12	11,37	7,58
20	100	2	6	10	1	955,3	136,5	84,5	72	146,55	88,45	75,37	12,56	15,70
20	100	2	6	10	3	1122,0	160,3	110	72	124,78	32,53	21,39	10,70	8,02
20	100	2	5	10	2	893,3	127,6	85	60	156,72	47,57	33,58	13,43	10,07
20	100	2	8	10	2	1329,3	189,9	121	96	105,32	45,51	36,11	9,03	13,54
20	100	2	6	9	2	855,5	131,6	86,3	66	151,96	50,41	38,57	12,86	12,86
20	100	2	6	11	2	1243,8	165,8	108	78	120,59	43,51	31,35	10,45	10,45

2.12 Ristlõigete geometriliste karakteristikute tabelid

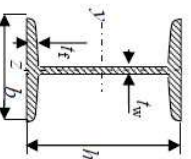
Tugevusõpetuses esitatakse sellised tabelid tavaliselt valtsmetallide kohta ja kuna tihti on tegu terasega siis kutsutakse neid tabelleid sel juhul terasprofiilide tabeliteks. Kuna erinevatel tootjatel ja erinevatel riikidel on erinevad standard-
sed ristlõiked, siis eksisteerib ka palju erinevaid terasprofiilide tabelleid. Loomulikult pole konstruktsioonieleemendid ainult valtsterasest ja leidub väga erinevate kujudega ristlõikeid ning neile vastavaid tabelleid.

Siin vaatleme ühte komplekti, mis on ka käesoleva peatiki lisas ja mida võib vaja minna ülesannete lahendamise juures. Tabelid pärinevad kolleegidelt mehhaanika instituudist ja profiilid vastavad autorile teadaoleva info kohaselt Euroopa standardile.

Järgnevalt on esitatud tabelite algused kahte liiki I-profiilile, nn. karprauale ning võrd- ja erikülgssele nurkrauale. Pikemad tabelid on esitatud Lisas 2-A.

2.12. Ristlõigete geometriliste karakteristikute tabelid

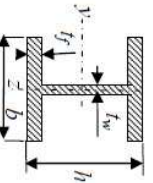
IPN



A - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral, $W_{pl,y}$, $W_{pl,z}$ - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoomusmeetodi korral, I_{y_0} , I_{z_0} - inertsiaraadused vastavalt y ja z-telje suhtes, I_x - väändemoment, A_{xz} - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtis.

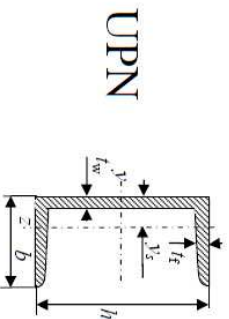
Profiili nr.	h	b	t _w	t _f	A	I _y	W _y	W _{pl,y}	I _y	A _{xz}	I _z	W _z	W _{pl,z}	I _z	I _x
mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ⁴
IPN 80	80	42	3,9	5,9	7,58	77,8	19,5	22,8	3,20	3,41	6,29	3,00	5,0	0,91	0,87
IPN 100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	39,8	4,01	4,85	12,2	4,88	8,1	1,07	1,60

IPE



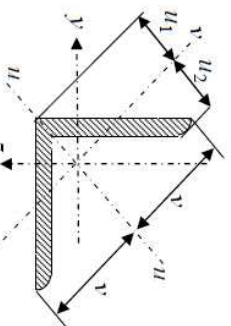
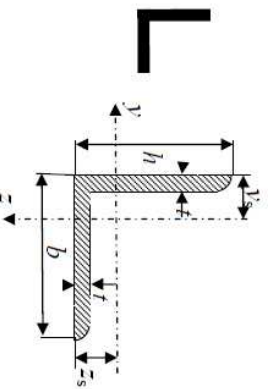
A - ristlõike pindala, I_y , I_z - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes, W_y , W_z - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral, $W_{pl,y}$, $W_{pl,z}$ - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoomusmeetodi korral, I_{y_0} , I_{z_0} - inertsiaraadused vastavalt y ja z-telje suhtes, I_x - väändemoment, A_{xz} - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtis.

Profiili nr.	h	b	t _w	t _f	A	I _y	W _y	W _{pl,y}	I _y	A _{xz}	I _z	W _z	W _{pl,z}	I _z	I _x
mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ⁴	cm ⁴
IPE 80	80	46	3,8	5,2	7,64	80,1	20,0	23,2	3,24	3,58	8,49	3,69	5,82	1,05	0,70
IPE 100	100	55	4,1	5,7	10,3	171	34,2	39,4	4,07	5,08	15,9	5,79	9,15	1,24	1,20



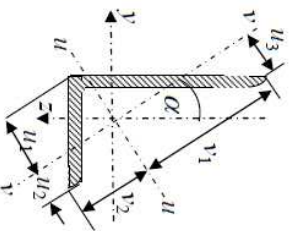
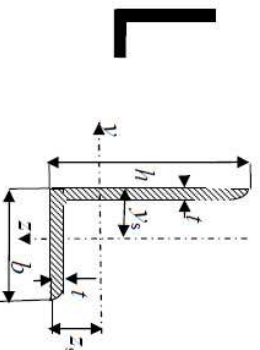
A - ristliigke pindala, I_y , I_z -inertsimomendid vastavalt y ja z -telje suhtes, W_y , W_z -tingevusmomendid vastavalt y ja z -telje suhtes piirpingemeetodi korral, $W_{pl,y}$, $W_{pl,z}$ -tingevusmomendid vastavalt y ja z -telje suhtes pinikoormuseetodi korral, i_y , i_z -inertsiraadused vastavalt y ja z -telje suhtes, I_x - väändinertsimoment, A_{yz} , A_{xy} - taandatud ristliigkepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks z ja y -telje suhis.

Profiili nr	h mm	b mm	t_w mm	t_f mm	t_s mm	A cm ²	I_y cm ⁴	W_y cm ³	$W_{pl,y}$ cm ³	i_y cm	A_{yz} cm ²	I_z cm ⁴	W_z cm ³	$W_{pl,z}$ cm ³	i_z cm	A_{xy} cm ²	I_x cm ⁴	i_x cm	I_{yz} cm ⁴
UPN 80	80	45	6.0	8.0	4.00	106	26.5	31.8	3.10	5.10	19.4	6.36	12.1	1.33	7.14	2.16	1.45	1.45	-78.5
UPN 100	100	50	6.0	8.5	4.50	206	41.2	49.0	3.91	6.46	29.3	8.49	16.2	1.47	8.43	2.81	1.55	1.55	-95.3



A - ristliigke pindala, I_y , I_z -inertsimomendid y , z -telje suhtes, I_u , I_v - inertsimomendid u , v -telje suhtes, W_y , W_z - tingevusmomendid y , z -telje suhtes, i_u , i_v - inertsiraadused u , v -telje suhtes, I_{yz} - tsentrifugaalmoment y , z -telje suhtes.

Profiili nr.	$h = b$ mm	t mm	A cm ²	$z_s = y_s$ cm	v cm	u_1 cm	u_2 cm	$I_y = I_z$ cm ⁴	$W_y = W_z$ cm ³	$i_y = i_z$ cm	I_u cm ⁴	i_u cm	I_v cm ⁴	i_v cm	I_{yz} cm ⁴
L 90 x 90 x 7	90	7	12.2	2.45	6.36	3.47	3.16	92.5	14.1	2.75	14.7	3.47	38.0	1.76	-54.5
L 90 x 90 x 8	90	8	13.9	2.50	6.36	3.53	3.17	104	16.1	2.74	16.6	3.46	42.9	1.76	-61.5



B - ristliigke pindala, I_y , I_z -inertsimomendid y , z -telje suhtes, I_u , I_v - inertsimomendid u , v -telje suhtes, W_y , W_z - tingevusmomendid y , z -telje suhtes, i_y , i_z - inertsiraadused y ja z -telje suhtes, i_u , i_v - inertsiraadused u , v -telje suhtes, I_{yz} - tsentrifugaalmoment y , z -telje suhtes.

Profiili nr.	h mm	b mm	t mm	A cm ²	z_s cm	y_s cm	v_1 cm	v_2 cm	u_1 cm	u_2 cm	u_3 cm	α °
L 120 x 80 x 8	120	80	8	15.5	3.83	1.87	8.23	5.97	3.25	4.19	2.09	23,6
L 120 x 80 x 10	120	80	10	19,1	3,92	1,95	8,19	6,01	3,35	4,17	2,15	23,5

Profiili nr.	I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_z cm ⁴	W_z cm ³	i_z cm	I_u cm ⁴	i_u cm	I_v cm ⁴	i_v cm	I_{yz} cm ⁴
L 120 x 80 x 8	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,4	1,73	-78,5
L 120 x 80 x 10	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,6	1,72	-95,3