

Peatükk 3

Deformatsioon ja olekuvõrrandid

3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 2

3.1 Siire ja deformatsioon

3.1.1 Cauchy seosed

Vaatleme deformeeruva keha meelevaldset punkti A . Algolekus on tema koordinaadid x, y, z . Välisjõudude toimel liigub ta asendisse A' koordinaatidega x', y', z' . Vektorit $\overline{AA'}$ nimetatakse punkti A *siirdeks* ehk *siirdevektoriks*¹.

Eristame kahte liiki siirdeid:

- keha kui terviku siirded (toimuvad ilma deformatsioonideta) — selliste siiretega tegeleb jäiga keha mehaanika²;
- siirded, mis on seotud keha deformatsiooniga — käesolevas kursuses vaadeldakse just selliseid siirdeid.

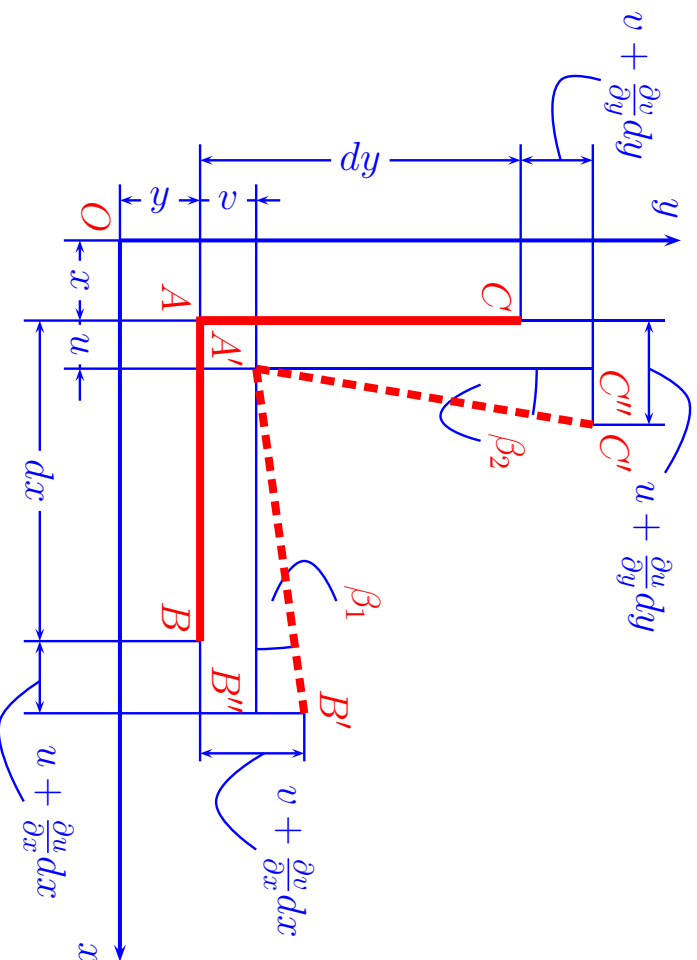
Siirdevektori koordinaattelgedele x, y, z sihilisi komponente tähistatakse u, v, w , st.,

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.1)$$

Tavaliselt nimetatakse neid lühidalt *siirdekompontentideks*.

¹Siirde sünonüüm (mehaanikas) on paigutus. Füüsilikud kasutavad samas tähenduses terminit nihke, mis on aga mehaanika seisukohast eksitav.

²Niimed pideva keskkonna mehaanika õpikud nimetavad selliseid siirdeid *jäigaks deformatsiooniks*.



Joonis 3.1: Normaal- ja nihkedeformatsioon

3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 4

Kui keha deformeerub, siis peavad erinevate punktide siirded olema erinevad, st.,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (3.2)$$

Vaatleme lõpmata väikese risttahuka kahe serva käitumist x, y tasandil (joon.

3.1). Enne deformatsiooni:

- $AB = dx \parallel x$ ja $AC = dy \parallel y$;
- Punktide koordinaadid: $A : (x, y)$; $B : (x + dx, y)$; $C : (x, y + dy)$.

Peale deformatsiooni: $A \rightarrow A'$; $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$. Vastavad siirded:

- Punkt A : u ja v ;
- Punkt B : $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$;
- Punkt C : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ ja $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$;

Kuna lineaarses elastsusteoorias on kõik muutused väikesed, siis on väikesed ka servade AB ja AC pöördenurgad, st., $\cos \beta \sim 1$, $\sin \beta \sim \beta$ ja $\tan \beta \sim \beta$.

Seetõttu lõikude AB ja AC suhtelised pikenenemised ehk koordinaatide x ja y sihilised *normaaldeformatsioonid*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{A'B'' - AB}{AB} = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{A'C'' - AC}{AC} = \frac{(dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v) - dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

ja pöörded

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \approx \tan \beta_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\varepsilon_x \ll 1}) dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta_2 \approx \tan \beta_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy} = \dots = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Nihke ehk nihkedeformatsioon on defineeritud kui algse täisnurga muutus, st. nihke xy tasandil

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Analoogiliselt saab leida normaaldeformatsioonid (suhtelised pikennemised) ja nihkedeformatsioonid (ehk nihked) teistel koordinaattasanditel. Kokku saame kuus seost deformatsioonikomponentide $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ja siirdekomponeentide u, v, w vahel:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Saadud seoseid nimetatakse tihti *Cauchy võrranditeks* või *Cauchy seosteks*.

Märgireeglid:

- piknemisele vastav normaaldeformatsioon on positiivne;
- koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisele täisnurga vähenemisele vastav nihe on positiivne.

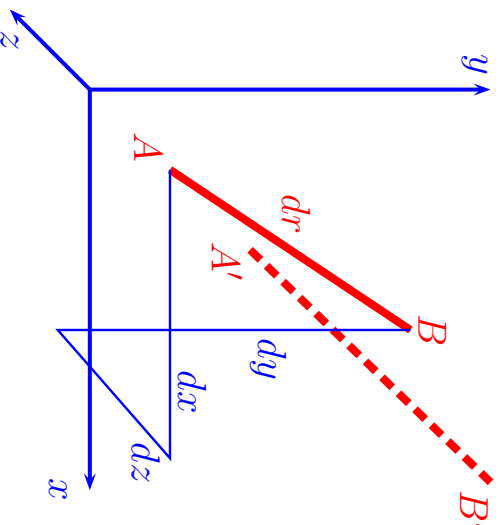
Järeldus: Positiivsed pinged põhjustavad positiivseid deformatsioone.

3.1. Siire ja deformatsioon

3.1.2 Orienteeritud lõigu pikennemine

Vaatleme kahte lõpmata lähedast punkti A ja B , kusjuures vektor $\overline{AB} = d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Siinjüures on vektori $d\mathbf{r}$ suunakoosinused

$$l = \frac{dx}{dr}, \quad m = \frac{dy}{dr}, \quad n = \frac{dz}{dr}.$$



Joonis 3.2: Lõigu AB deformatsioon

Vastava joonelemendi AB normaaldeformatsioon (ehk suhteline pikenemine)

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (3.7)$$

Siin

$$\begin{cases} AB = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dr, \\ A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial r} dr\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right)^2} = \dots \\ \approx dr \sqrt{1 + 2 \left(l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}\right)}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Kombineerides kahte viimast avaldist ning hinnates liikmete suurusjärke saame †

$$\varepsilon_r = l \frac{\partial u}{\partial r} + m \frac{\partial v}{\partial r} + n \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Teisendades osatuletised r järgi osatuletisteks koordinaatide x, y, z järgi, saame‡ †

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm\gamma_{xy} + mm\gamma_{yz} + ln\gamma_{xz}. \quad (3.10)$$

³Detailset tuletuskäiku vt. R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, Valgus, 1967 lk. 279–282.

3.1. Siire ja deformatsioon

3 - 10

*Rakendus tensomeetrias*⁴. Olgu vaja määrata xy tasandi meelevaldses punktis normaaldeformatsioonid (suhtelised pikenemised) ε_x ja ε_y ning nihe γ_{xy} . Kuna antud juhul on $n = 0$, siis saame valemile (3.10) kujul

$$\varepsilon_r = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm\gamma_{xy}. \quad (3.11)$$

Kaks lahendust:

1. Vaadeldava punkti ümbrusse asetatakse kolm suvaliselt orienteeritud *tensomeetrit*⁵ (joon. 3.3). Tensomeetrite lugemid esitavad valemil (3.11) vaksut poolt kolme erineva orientatsiooniga lõigu jaoks. Kuna tensomeetrite orientatsioon on teada (s.o. määratud sihikoosinustega l, m, n) saadakse kolmest lugemist kolm võrrandit otsitavate suuruste $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ja γ_{xy} määramiseks.

2. Kui orienteerida kaks tensomeetrit telgedele x ja y sihhis, siis saame deformatsioonid ε_x ja ε_y otse tensomeetrite lugemitest, γ_{xy} aga avaldame võrrandist (3.11)

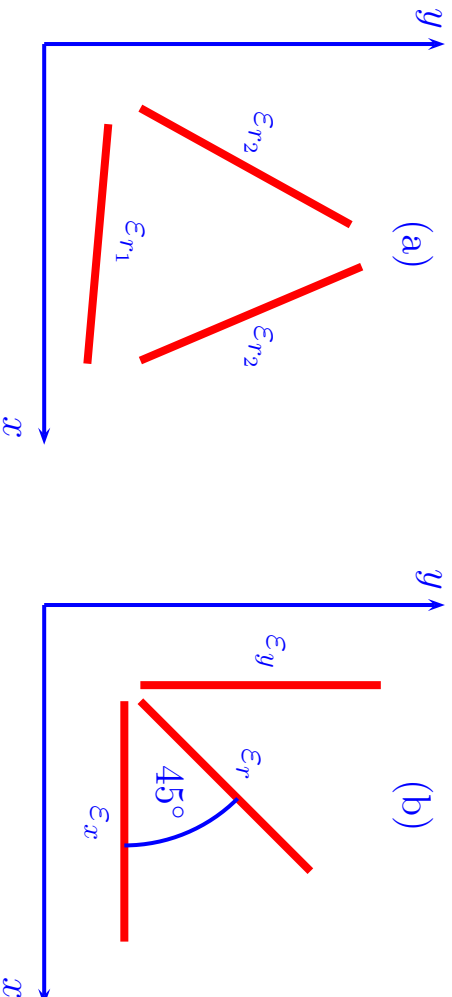
⁴Tensomeetria on kehades (tarindites) koormamisel tekkinnud deformatsioonide (ja pingete) katseline määramine.

⁵Tensomeeter on seade deformatsioonide määramiseks. Tänapäeval on enamkasutatav elektriline tensomeeter.

$$\gamma_{xy} = \frac{\epsilon_r - l^2 \epsilon_x - m^2 \epsilon_y}{lm}. \quad (3.12)$$

Üldjuhul on kolmas tensomeeter koordinaattelgede suhtes 45° nurga all. Seega $l = m = \sqrt{2}/2$ ja

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_r - \epsilon_x - \epsilon_y. \quad (3.13)$$



Joonis 3.3: Tensomeetria näide.

3.2. Deformatsioonitensor

3.2 Deformatsioonitensor

Normaal- ja nihkedeformatsioonidest (ehk nihetest) saab moodustada deformatsioonitensori

$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Erinevalt pingetensorist on siin nihete kordajaks 0,5. Ilma selliste kordajateta ei alluks deformatsioonitensor tensorarvutuste reeglitele. Analoogiliselt pingetensoriga saab leida ka deformatsioonitensori invariantidid:

$$\begin{cases} I_1^\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z, \\ I_2^\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \epsilon_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3 Ruumdeformatsioon ehk suhteline mahumuutus

Üldjuhul muutub keha ruumala ehk maht deformatsiooni käigus⁶. Vaatleme lõpmata väikest risttahukat, mille ruumala enne deformatsiooni oli $dV = dx dy dz$. Serva AB pikkus enne deformatsiooni (vt. joon. 3.1) on dx ja peale deformatsiooni $dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$. Analoogiliselt $dy \rightarrow dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$ ja $dz \rightarrow dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$.

Keha ruumala peale deformatsiooni leiame lähtudes eeldusest, et normaaldeformatsioonid ja nihked on väikesed. Pärast mõningaid teisendusi, mille käigus hiljatakse teist ja kolmandat järku väikesed liikmed, saame deformeerunud elementaaristikuliku mahuks $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$. *Ruumdeformatsioon* ehk *suhteline mahumuutus*⁷ avaldub seega kujul

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.16)$$

Seega on ruumdeformatsioon võrdne deformatsioonitensori esimese invarianti-
ga.

⁶Mittmetel ainetel on see mahumuutus hiljaltavalt väike, väiteks vesi või kummi.

⁷I. k. *dilatation*, *volumetric change*

3.4. Pidevustingimused

3 - 14

Teisest küljest, arvestades deformatsioonide ε_x , ε_y ja ε_z definitsioone (3.4) on ruumdeformatsioon siirde divergents:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

3.4 Pidevustingimused

Cauchy võrrandid (3.4) seovad kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ ja γ_{xz} kolme siirdekomponendiga u, v, w järgmisel viisil:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases}$$

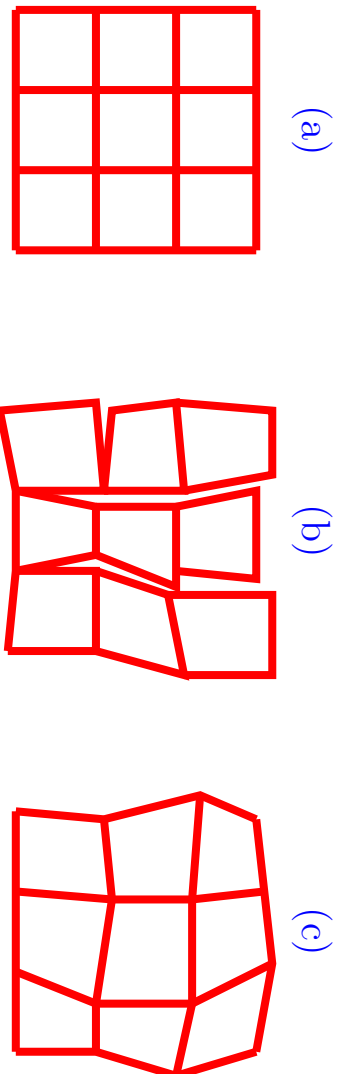
- Kui on antud kolm siirdekomponenti u, v, w , siis võrrandite (3.4) abil on võimalik üheselt määrata kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

- Kui on antud kuus deformatsioonikomponenti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$, siis pole võrrandite (3.4) abil võimalik kolme siirdekomponenti u, v, w üheselt määrata. Ühese lahendi saamiseks tuleb sisse tuua kuut deformatsiooni-komponenti siduvad lisatingimused (lisavõrrandid). Neid lisatingimusi nimetatakse eestikeelses kirjanduses tavaliselt *pidevustingimusteks*⁸.

⁸Ingl. k. *compatibility conditions*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid pidevusvõrrandid või sobivustingimused.

3.4. Pidevustingimused

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks.



Joonis 3.4: Pidevustingimused

Oletame, et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.4 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende nuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.4 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.4 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama *pidevustingimusi* ehk *pidevusvõrrandeid*.

Pidevusvõrrandite tuletamine. Diferentseerime võrrandit (3.4)₁ kaks korda koordinaadi y järgi ja võrrandit (3.4)₂ kaks korda koordinaadi x järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\gamma_{xy}} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.17)$$

Kombineerides võrrandeid (3.4)₁₋₃ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.4)₄₋₆ osatuletised «puuduva koordinaadi» järgi, liidame (3.4)₄₋₅ ja lahutame saadud summast (3.4)₆. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \quad (3.18)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.

3.4. Pidevustingimused

Kokku olemes saanud kuus pidevusvõrrandit (pidevustingimust), mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Saadud kuuel pidevusvõrrandil ehk pidevustingimusel on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikene-
mised) kolmes ristavas sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei
saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud
avaldistega (3.19)_{1–3}.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristavas tasa-
pinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad
on määratud avaldistega (3.19)_{4–6}

3.5. Olekuvõrrandid

3 - 20

3.5 Olekuvõrrandid

Välisjõudude toimel kehad (keskkonnad) deformeeruvad. On selge, et ühe ja sama välisjõu toimel võivad erinevad materjalid deformeeruda väga erinevalt — järelkult on vaja võrrandeid, mis määraksid kuidas üks või teine materjal koormamisel käitub.

- *Võrrandeid, mis seovad omavahel deformatsioonid ja pinged, nimetatakse olekuvõrranditeks.*
- Lineaarses e. klassikalises elastsusteoorias on olekuvõrrandid esitatud *üldistatud Hooke'i seadusena*, mis esitab lineaarse seose pinge- ja deformatsioonitensori vahel.
- Kui on vaja arvestada ka temperatuuri mõju kehade deformatsioonidele, siis tuuakse sisse termoelastsus tegurid ning lisatakse võrranditesse vastavad lisaliikmed. Sel juhul öeldakse tihti, et tegu on *termoelastsusteooriaga*.

3.5.1 Üldistatud Hooke'i seadus

Klassikalises (ehk lineaarses) elastsusteoorias (k.a. elementaartheoria) kehtib *üldistatud Hooke'i seadus*: deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige üldisemal juhul saab vastavad seosed esitada järgmisel kujul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju), homogeenne ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti (Youngi moodul E ja Poissoni koefitsent ν), mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil.

3.5. Olekuvõrrandid

3 - 22

- Tõmme–surve (x -telje sihis).
 - Elastsuskonstant ehk Youngi moodul E : $\varepsilon_x = \sigma_x/E$
 - Poissoni koefitsent (Poissoni tegur) ν : $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$
- Nihe (xy tasandis).
 - Niikeelastusmoodul G : $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, kus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.21)$$

Kuna niikeelastusmoodul G on avaldatav E ja ν kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Pinge $\sigma_x > 0$ põhjustab pikennemist x -telje sihis ja lühenemist y - ja z -telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel $\sigma_y > 0$ ja $\sigma_z > 0$. Seega on summaarne suhteline pikennemine x -telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (3.22)$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s.t., τ_{xy} põhjustab vaid nihet γ_{xy} , jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (3.23)$$

3.5. Olekuvõrrandid

3 - 24

Paljudes õpikutes⁹ esitatakse valemitega (3.20) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \quad (3.24)$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \quad (3.25)$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

⁹Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Elastuskoeffitsentidest moodustatud maatriksit $[C_{ij}]$ nimetatakse *jäikusmaatriksiks*¹⁰. Maatriksit $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$ võib eesti keeles seega nimetada *pöördjäikusmaatriksiks*¹¹ või *paimdäkkusmaatriksiks* või *vetruvusmaatriksiks*.

¹⁰I. k. *stiffness matrix*

¹¹I. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka vetruvus.

Kasutades nüüd tähistusi (3.24) ja (3.25) saavad valemid (3.23) kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.5.2 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt tildistatud Hooke'i seadusele (3.23)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1-2\nu)}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma}. \quad (3.29)$$

Seega

$$\theta = \frac{(1-2\nu)I_1^\sigma}{E}. \quad (3.30)$$

Suurust $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* (vt. ka (3.16)) ja ta on tihtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse *ruumpaissumismooduli* K ja keskmise pinge σ_0 ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \quad (3.31)$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.32)$$

3.5. Olekuuõrrandid

3.5.3 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise (3.23)₁ paremale poolele ja lahutame avaldise (3.23)₁ paremast poolst suuruse $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma]. \quad (3.33)$$

Avaldades (3.30)-st invarianti $I_1^\sigma = E\theta/(1-2\nu)$, saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1-2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1+\nu} \quad (3.34)$$

Tuues sisse *Lamé koeffitsiendid*¹²

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (3.35)$$

saame valemist (3.34)₂ $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$.

¹²Alternatiivne lineaarse teooria elastsuskonstantide paar.

Leides analoogilised avaldised σ_y ja σ_z jaoks ning avaldades seostest (3.23) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Kasutades viimaseid valemmeid leiame seose pingetensori ja deformatsiooniten-
sori esimese invariandi vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^p} = 3\lambda\theta + 2\mu(\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{\theta}), \quad \text{kust} \quad I_1^p = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.37)$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (3.38)$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (3.39)$$

3.5. Olekuvõrrandid

3.5.4 Anisotroopsed kehad

Elmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoeffitsenti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotroopsed materjalid, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasunnada), mille sihis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotroopse materjali elastsed omadused ei muutu telgede pööramisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotroopse materjali iseloomustamiseks on vaja üheksat elastsuskonstanti. Valemid (3.27) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

kus

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Konstandid $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$ ja G_{23} on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkeelastsusmoodulid peatelgedega 1, 2, 3 määratud sihtides¹³.

¹³Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 §1.4.6

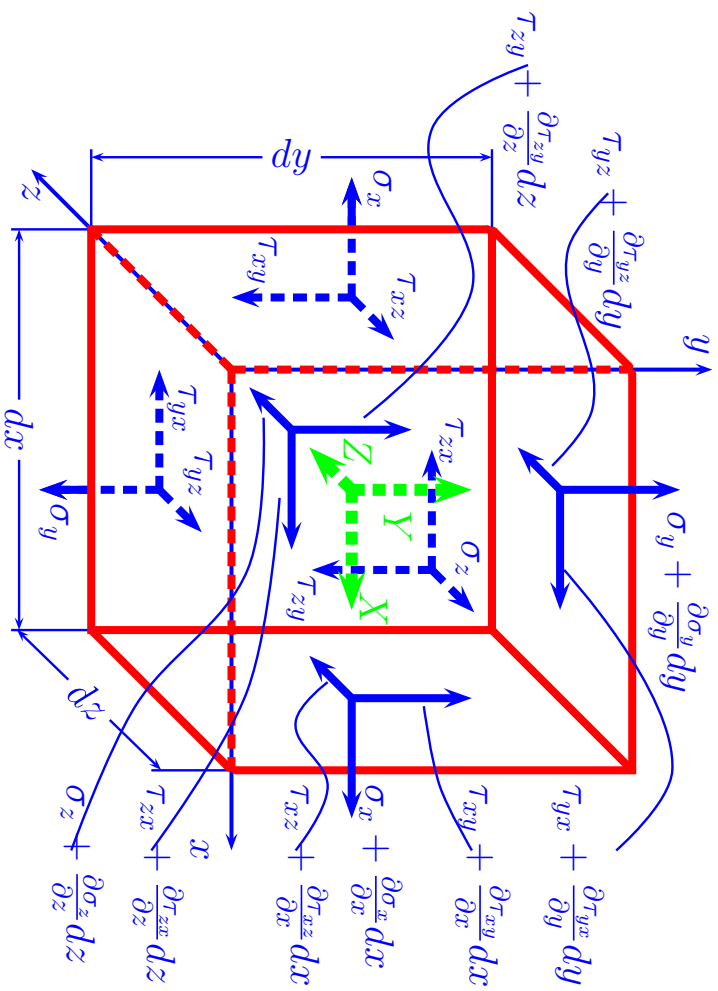
3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

3 - 32

3.6 Deformatsiooni potentsiaalne energia

Vaatleme lõpmata väikest risttahukat (joon. 3.5). Nagu on jooniselt näha, ei eelda me antud juhul enam homogenset pingust. Arvestame aga klassikalise elastsusteooria eeldusi ja hüpoteese, mille kohasel on materjal ideaalselt elastne, deformatsioonid on väikesed ja kehtib superpositsiooni printsiip. Esmärkiks on leida *deformatsiooni potentsiaalne energia*, mis kehas on salvestunud. Selleks tuleb kõigepealt leida töö, mida tehakse deformatsiooni muutumisel (suurenemisel) elementaarriisttahukas.

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega. Eeldame, et normaalpingete toimel suureneb deformatsioon $d\varepsilon_x$ ja tahkude vaheline kaugus $d\varepsilon_x dx$ võrra.
 - Vastav elastsusjõu elementaartöö (hüljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\sigma_x dydz d\varepsilon_x dx$.



Joonis 3.5: Elementaaristtahukas

3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

- Vaatleme tahke, mis on risti x teljega ja tahke, mis on risti y teljega. Eeldame, et nihkepingete toimel muutub nurk x ja y telje vahel väikese suuruse $d\gamma_{xy}$ võrra.

- Vastav elastsusjõu elementaartöö (hiljates kõrgemat järku väikesed suurused): $\tau_{xy}dydzd\gamma_{xy}dx$.

★

- Analooiliselt saab leida pingetele σ_y , σ_z , τ_{yz} ja τ_{xz} vastavad tööd.

Rakendame superpositsiooni printsiipi ja saame summaarse elementaartöö

$$dA^* = (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}) dx dy dz. \quad (3.42)$$

Jagades viimase elementaarruumalaga $dV = dx dy dz$, saame *elementaartöö tiheduse* $dA = dA^*/dV$. Kuna eelduse põhjal on materjal ideaalselt elastne, siis on tehtud töö tõttu suurendatud elementaaristahuka potentsiaalset energiat $dW^* = dA^*$ võrra ning potentsiaalse energia tihedus suureneb $dW = dW^*/dV$ võrra.

†

Edaspidi vaatleme seega suurust dW , st. potentsiaalse energia juurdekasvu tihikruumala kohta:

$$dW = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}. \quad (3.43)$$

Asendame saadud avaldise pinged σ_x, \dots tildistatud Hooke'i seadusest (3.36) ja saame

$$\begin{aligned} dW &= (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x) d\varepsilon_x + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y) d\varepsilon_y + (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z) d\varepsilon_z + \\ &+ \mu\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \mu\gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \mu\gamma_{zx} d\gamma_{zx} = \\ &= \lambda\theta d\theta + 2\mu(\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z) + \\ &+ \mu(\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Viimast avaldist integreerides leiame potentsiaalse energia tiheduse sõltuvana deformatsioonidest

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.45)$$

Kuna Lamé koefitsiendid (3.35) on positiivsed, siis peab ka potentsiaalne energia olema positiivne (või null) igas ideaalselt elastse keha punktis.

3.6. Deformatsiooni potentsiaalne energia

Kasutades taas Hooke'i seadust kujul (3.36) saame viimastest *Clapeyroni valem* †

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.46)$$

Viimastest saab omakorda avaldada W läbi pingete ja elastsuskonstantide E ja ν kui kasutada Hooke'i seadust kujul (3.23)

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.47)$$

Kuna W on potentsiaalne energia, siis peab avaldis (3.43) olema funktsiooni W täisdiferentsiaal, mis omakorda tähendab, et

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{cases} \quad (3.48)$$

Viimased avaldised on tuntud *Castigliano valem*itena.

Eeltoodu kontrolliks leiame avaldistest (3.45) osatuletised

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x = \sigma_x, \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \mu \gamma_{xy} = \tau_{xy}, \dots \end{cases} \quad (3.49)$$

Et leida kehas salvestunud summaarne potentsiaalne energia \mathcal{W} tuleb potentsiaalse energia tihedust integreerida üle kogu keha ruumala V , st.

$$\mathcal{W} = \int_V W dV = \iiint_V W dx dy dz. \quad (3.50)$$

Rakendes Clapeyroni valemilt avaldub summaarne potentsiaalne energia kujul

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.51)$$