

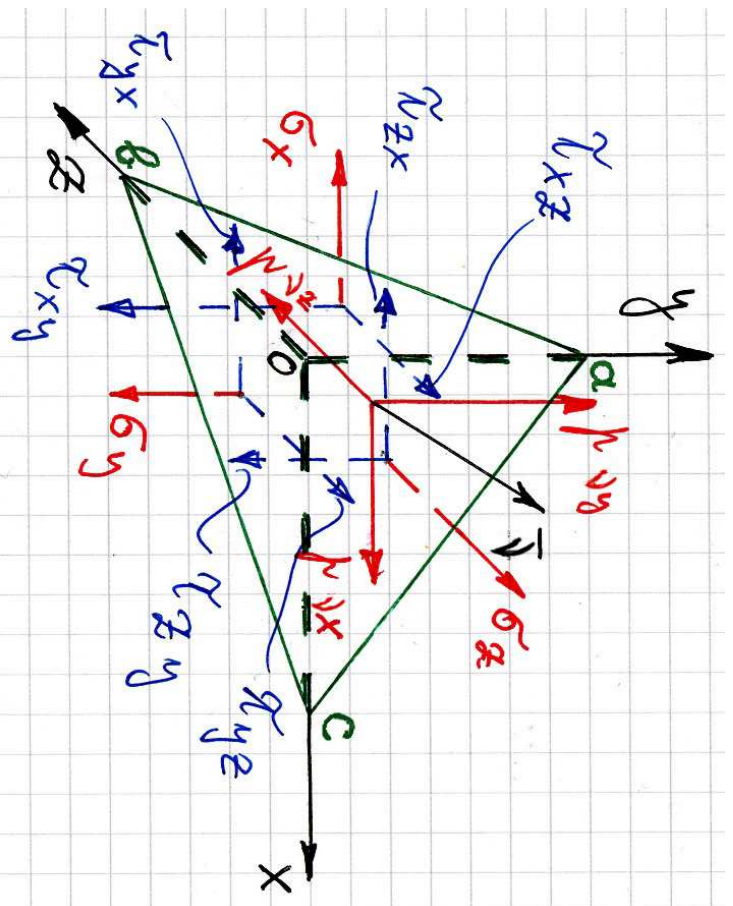
Peatükk 4

Peapinged ja peadeformatsioonid

4.1. Pinged kaldpinnal

4 - 2

4.1 Pinged kaldpinnal



Joonis 4.1: Pinged kaldpinnal. Kaldpinnal normaalgiga ν mõjuv pingevektor P_n on esitatud läbi tema projektsioonide P_{nx} , P_{ny} ja P_{nz} .

Selleks, et uurida pingeseisundit suvalises keha punktis on vaja osata leida pingeid meelevaldse orientatsiooniga kaldpinnal. Joonisel 4.1 kujutatud kaldpinna abc orientatsioon koordinaattelgede suhtes on määratud pinnanormaali $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinustega

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x), \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z). \quad (4.1)$$

Koos koordinaatpindadega moodustub *lõpmata väike tetraeeder* $Oabc$. Tähistame kaldpinna abc pindala dA . Tetraeedri teiste külgede pindalad avalduvad nüüd läbi vektori $\boldsymbol{\nu}$ suunakoosinuste¹:

$$A_{Oab} = dA \cdot l, \quad A_{Obc} = dA \cdot m, \quad A_{Oac} = dA \cdot n. \quad (4.2)$$

Koostame tetraeedri jaoks tasakaalu võrrandid. Peale joonisel 4.1 näidatud pingete mõjuvad tetraeedrile veel mahujõud X, Y, Z , mida pole joonisel näidatud. Projekteerime tetraeedrile mõjuvad jõud x -teljele:

$$\begin{aligned} p_{\nu x} dA - \sigma_x A_{Oab} - \tau_{yx} A_{Obc} - \tau_{zx} A_{Oac} + X dV = \\ p_{\nu x} dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{yx} dA \cdot m - \tau_{zx} dA \cdot n + X dV = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Nurgad tetraeedri tahkude ja vastavate normaalide vahel on võrdsed.

4.1. Pinged kaldpinnal

4 - 4

Jagame viimase avaldise pindalaga dA , hülgame viimase liikme kui kõrgemat järku väikese² ja saame avaldise

$$p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \quad (4.4)$$

Korrates sama protseduuri teiste telgedega saame avaldised pingevektori \mathbf{p}_ν tilejäänud kahe projektsiooni leidmiseks. Kokku saame

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (4.5)$$

Tegelikult oleme sellise protseduuriga lähendanud vaadeldava kaldpinna punktile O ja leitud valemid esitavad seega punkti O läbival kaldpinnal normaaliga $\boldsymbol{\nu}$ mõjuva pingevektori \mathbf{p}_ν projektsioone koordinaattelgedel. Suunakoosinuste kordajad viimases valemis on aga pingetensori komponendid punktis O .

Valemid (4.5) võimaldavad leida mistahes punkti läbival mistahes kaldpinnal mõjuva pingevektori \mathbf{p}_ν komponente kui on teada pinnanormaal $\boldsymbol{\nu}$ ja pingetensori komponendid $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ vaadeldavas punktis.

²Arvestades, et tegu on lõpmata väikese tetraeedriga piirväärtus $\lim_{dA \rightarrow 0} (dV/dA) = 0$

Kui pinnanormal $\nu = (l, m, n)$ on nn. reavektor ja pingetensor on tähistatud S , siis vaame valemid (4.5) esitada kujul

$$\mathbf{p}_\nu = \nu \cdot S. \quad (4.6)$$

Kui pind abc tihtib keha välispinnaga, siis esitavad võrrandid (4.5) *rajatingimusi ehk ääritingimusi keha pinnal*. Teisisõnu, sellisel juhul seovad avaldised (4.5) keha pinnal mõjuvad pindjõud pingetensori komponentidega.

4.2 Peapinged

Me näitaksime äsja, et valemid (4.5) võimaldavad määrata pingeid keha mistahes punkti läbival mistahes kaldpinnal kui on teada pinnanormal ν ja pingetensori komponendid $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ (pinged seda punkti läbivatel koordinaattasanditel).

Pinnal normaaliga ν mõjuva pinge saab omakorda jagada normaalpingeks σ_ν ja nihkepingeks τ_ν . Kui on teada pingevektori \mathbf{p}_ν komponendid ja normali ν suunakoosinused, siis saame leida pingevektori \mathbf{p}_ν projektsiooni normaalil ν :

$$\sigma_\nu = \mathbf{p}_\nu \cdot \nu = p_{\nu x}l + p_{\nu y}m + p_{\nu z}n. \quad (4.7)$$

4.9. Peapinged

4 - 6

On selge, et $\sigma_\nu = \sigma_\nu \nu$. Kasutades valemid (4.5) saab σ_ν omakorda avaldada koordinaattasandil mõjuvate pingete kaudu. Nihkepinge τ_ν kujutab endast pingevektori \mathbf{p}_ν projektsiooni vaadeldaval pinnal ja tema moodul

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2. \quad (4.8)$$

Nii \mathbf{p}_ν , kui σ_ν ja τ_ν sõltuvad pinna orientatsioonist. Saab näidata, et igas punktis leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat pinda, millel nihkepinge $\tau_\nu = 0$ ja normaalpinge $\sigma_\nu = p_\nu$. Selliseid pindasid nimetatakse *peapindadeks*, neil pindadel mõjuvaid normaalpingeid σ_1, σ_2 ja σ_3 *peapingeteks* ja neid pindu määravaid pinnanormale $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ ja \mathbf{N}_3 *peasuundadeks*. Peapinged järjestatakse nii, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Siinjuures on peapinge σ_1 suurim ja σ_3 vähim kõikvõimalikest normaalpingetest.

4.2.1 Peapingete ja peasuundede leidmise protseduur.

- Tähistame otsitava peapinge σ ja talle vastava pinnanormaali \mathbf{N} suuna-koosinused l, m, n . Seega on meil neli tundmatut.
- Nende nelja tundmatu määramiseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

koos lisatingimusega

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4.10)$$

*

- Meid huvitab selle VS-i mitte triviaalne lahend (l, m, n pole korruga nullid). See tingimus on täidetud kui *karakteristlik determinant*

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

4.2. Peapinged

- Viimastest saadakse omakorda *karakteristlik võrrand*

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0, \quad (4.12)$$

kus suurused

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, & I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{cases} \quad (4.13)$$

on *pinge invariantid* ehk *pingetensori invariantid*.

- Uuritaval juhul (st. sümmeetrilise pingetensori korral) on kuupvõrrandil (4.12) kolm reaalarvulist lahendit, mis järjestatakse kahanevas järjekorras $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Siinjuures on σ_1 suurim võimalik normaalpinge kõikvõimalikel vaadeldavat punkti läbivatel pindadel mõjuvate normaalpingete hulgas ja σ_3 vähim võimalik normaalpinge selles hulgas.

- Neile vastava kolme peasuuna määramiseks asendatakse saadud kolm peapinget kordamööda võrrandisüsteemi (4.9), (4.10). Tulenusena saame igale peapingele σ_i vastava peasuuna suunakoosinused l_i, m_i, n_i , $i = 1, 2, 3$.
 - *Märkus.* Kuna võrrandisüsteemis (4.9) osutuvad vaid 2 võrrandit kolmest lineaarselt sõltumatuteks, siis erineb saadud võrrandisüsteemi lahendamise tavapärasest. Nimelt saame ühe suunakoosinuse vabalt ette anda.
- Kui koordinaadid on valitud peasuundades, siis on pingetensoris nullist erinevad vaid normaalpinged $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, st.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

- Peasuundade praktilise leidmise juurde tuleme tagasi näites 4.2.

Sõltuvalt kuupvõrrandi lahendite väärtustest, saab eristada kolme juhtu:

1. Kui *kõik kolm peapinget on erinevad*, siis saadakse võrrandisüsteemi (4.9), (4.10) lahendamisel kolm ristuvat ühikvektorit.

4.9. Peapinged

4 - 10

2. Kui *kõik kolm peapinget on võrdsed*, siis sobib peapinnaks iga vaadeldavat punkti läbiv pind. Praktilistel kaalutustel valitakse tavaliselt ristuvate pindade kolmik, mis omakorda määrab omavahel ristuvate peasuundade kolmiku.
3. Kui *kaks peapinget on võrdsed ja kolmas neist erinev*, siis saame määrata sellele kolmandale peapingele vastava peasuuna, mis omakorda määrab peapinna. Ülejäänud kaheks peasuunaks sobib mistahes ristuvate suunade paar, mis on omakorda risti kolmanda peasuunaga.

Kasutades peapingeid saame pinge invariantid kujul

$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2^\sigma = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \\ I_3^\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (4.15)$$

- Kuna invariantid on sõltumatud koordinaatide valikust, tuleb neid vaadelda kui põhilisi suurusi, mis iseloomustavad pingust ehk pingeseisundit vaadeldavas punktis — kõik pingekomponendid on määratavad läbi invariantide.

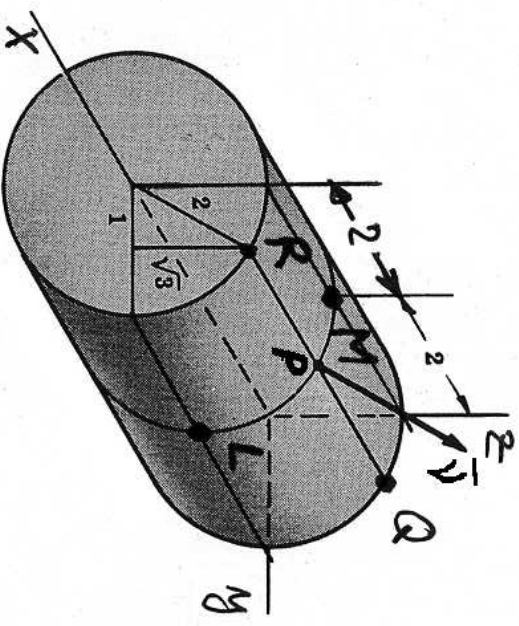
Pinguste liigid. Sõltuvalt sellest, mitu peapinget on nullist erinevad, eristatakse kolme pinguse liiki:

- *ruumpingus* – kõik kolm peapinget on nullist erinevad;
- *tasandpingus* – üks peapinge on null, kaks nullist erinevad;
- *joonpingus* – kaks peapinget on nullid, üks nullist erinev.

Näide 4.1. Pingus keha punktides on antud pingetensoriga (Descartes'i ristkoordinaatides)

$$S = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$

Leida pinge(vektor), mis mõjub silindri külgpinnal $y^2 + z^2 = 4$ punktides P, Q, R, L ja M ning silindri otspindade punktides Q ja R . Lahutage pingevektor normaal- ja nihkepingeks.



Joonis 4.2: Silinder raadiussega $r = 2$.

4.2. Peapinged

4 - 12

Lahendus. Lahendamisel tuleb kasutada valemeid (4.5), (4.6), (4.7) ja (4.8).

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

Silindri $y^2 + z^2 = 4$ alla $\Phi = y^2 + z^2 - 4 = 0$

Silindri normaal: $\bar{J}^* = \text{grad } \Phi = \dots = (0, 2y, 2z)$

üldnormaal $\bar{J} = \bar{J}^* / |\bar{J}^*|$; $|\bar{J}^*| = 2\sqrt{y^2 + z^2}$

Pinge miinimal normaalsega \bar{J} : $\bar{r}_N = \bar{J} \cdot \bar{S}$ Nõrde valem (2.5)

* Punkt $P = (2, 1, \sqrt{3}) \rightarrow \bar{J}^* = (0, 2, 2\sqrt{3}) \rightarrow |\bar{J}^*| = 4 \Rightarrow \bar{J} = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{r}_N = (2, 5; 3, \sqrt{3})$; $|\bar{r}_N| = 4, 2\sqrt{2}$

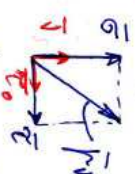
$\sigma_N = \bar{r}_N \cdot \bar{J} = 3$ a.o. \bar{r}_N progektseerim normaali \bar{J} suks

Normaalpinge $\bar{\sigma} = \sigma_N \bar{J}$, vastav maadul $\sigma = |\bar{\sigma}| = |\sigma_N|$

Vk. jätkul $\bar{\sigma} = 3 \cdot (0; 1/2; \sqrt{3}/2)$ $\bar{\sigma}_0$ $\sigma = 3$

Nihkepinge $\bar{\tau} = \bar{r}_N - \bar{\sigma} = (2, 5; 3; \sqrt{3}) - 3 \cdot (0; 1/2; \sqrt{3}/2) = \dots = (2, 5; 1, 5; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Vastav maadul $|\bar{\tau}| = \sqrt{r_N^2 - \sigma^2} = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2} = 5, 04$



*) punkt $Q = (0, 1, \sqrt{3})$ $\bar{s} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ NB! Kõikpinnane punkt
 Kõik vana on sama, mis punktis P

*) punkt $R = (4, 1, \sqrt{3})$ / kõikpinnane punkt /

Kõik vana on sama, mis p.-des P ja Q
 $\bar{s} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$

*) punkt $L = (2, 2, 0) \Rightarrow \bar{v} = (0, 1, 0)$ $\bar{s} = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{r}_V = \bar{v} \cdot \bar{s} = (20; 0; 0) \Rightarrow r_V = 20$ $\bar{\tau} = \bar{r}_V$ & $\sigma = 0$ Vt. joonis+!

*) punkt $M = (2; 0; 2) \Rightarrow \bar{v} = (0; 0; 1)$

$\bar{s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{r}_V = \bar{v} \cdot \bar{s} = (0; 4; 0)$ $r_V = 4$

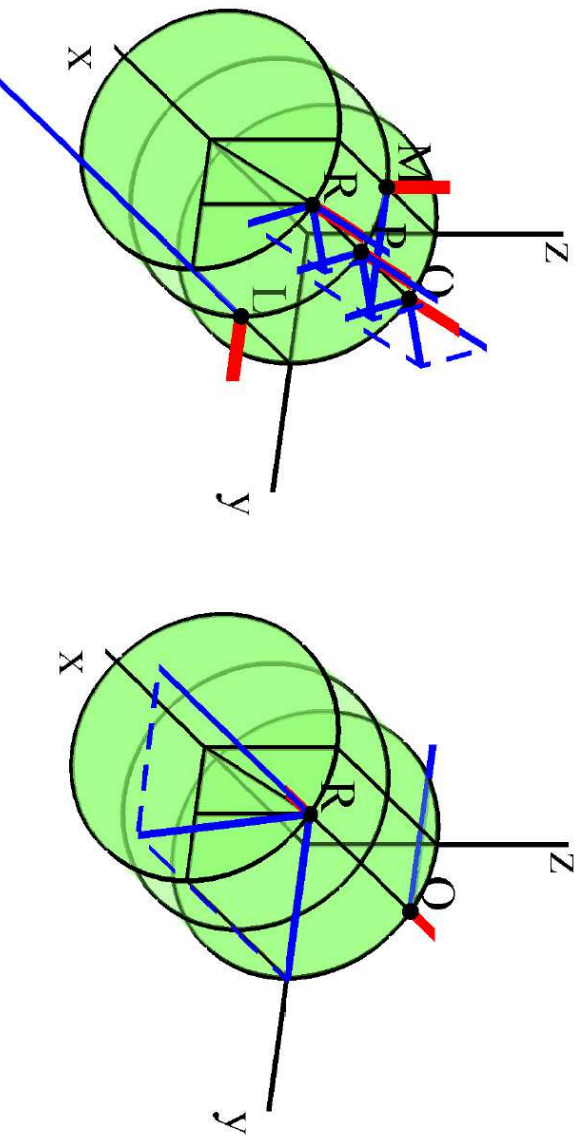
$\bar{\tau} = \bar{r}_V$ $\sigma = 0$ Vt. joonis+!

*) Punkt $Q = (0, 1, \sqrt{3})$ otspinnal $\Rightarrow \bar{v} = (-1; 0; 0)$

\bar{s} on juuba lastud $\bar{r}_V = (0; -5; 0) \Rightarrow \bar{\tau} = \bar{r}_V$ & $\sigma = 0$

*) Punkt $R = (4, 1, \sqrt{3})$ otspinnal. \bar{s} on lastud, $\bar{v} = (1, 0, 0)$
 $\bar{r}_V = (12, 5, 0) \Rightarrow \bar{\tau} = (0, 5, 0)$

4.2. Peepinged



Joonis 4.3: Pingevektorid silindri pinnal. Vasakpoolsel joonisel on kujutatud silindri külgpinnal ja parempoolsel joonisel silindri otspinnal mõjuvad pinged. Punased jooned näitavad pinnamõõtmale ja sinised pingeid.

Näide 4.2. Leida peapinged ja peasuunad pingetensorile

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Lahendus. Antud tulesannet on võimalik lahendada kahel põhimõtteliselt erineval viisil — „käsitsi” ja „arvutiga”.

A. „Käsitsi”.

1. Tuleb koostada võrrandisüsteem (4.9).

$$\begin{cases} (-1-\sigma)l - 16m - 2n = 0 \\ -16l + 5m - 14n = 0 \\ -2l - 14m + (14-\sigma)n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

2. Vastava karakteristliku determinantide abil tuleb moodustada karakteristlik võrrand ja leida selle lahendid.

4.2. Peapinged

Karakteristlik determinant

Karakteristlik funktsioon

$$\begin{vmatrix} -1-\sigma & -16 & -2 \\ -16 & 5-\sigma & -14 \\ -2 & -14 & 14-\sigma \end{vmatrix} = 0 \dots \Rightarrow \sigma^3 - 18\sigma^2 - 405\sigma + 4374 = 0 \quad (**)$$

$$(**) \rightarrow \text{kolm lahendit } \sigma = [-18; 27; 9] \rightarrow$$

Viimased ongi peapinged, mis tuleb järjestada kahanevas järjekorras ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

$$\text{kolm peapinget } \sigma_1 = 27, \sigma_2 = 9, \sigma_3 = -18; \underline{\underline{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}} \quad \checkmark$$

3. Peapinged σ_i ($i = 1, 2, 3$) tuleb asendada üksikhaaval võrrandisüsteemi (4.9).

(a) Iga peapinge σ_i jaoks saate kolm võrrandit, millest peab välja valima suvalised kaks. Neisse tuleb asendada näiteks $n_i = 1$ ja leida vastavad l_i ja m_i . Tulemusena saate vektori $\mathbf{N}_i^* = (l_i^*, m_i^*, n_i^*)$, mis määrab peapingele σ_i vastava peasuuna.

$$\bullet \sigma_1 = 27 \rightarrow (4.9) \rightarrow$$

$$\begin{cases} -28l_1 - 16m_1 - 2n_1 = 0 \\ -16l_1 - 22m_1 - 14n_1 = 0 \\ -2l_1 - 14m_1 - 13n_1 = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

– Neist on vaid kaks lineaarselt sõltumatud:
 $0,5 * 1.$ võrrand + $3.$ võrrand = $2.$ võrrand.

$$\bullet n_1 = 1 \rightarrow (4.16) \text{ ja hilganne } 3. \text{ võrrandi}$$

$$\begin{cases} -14l_1 - 8m_1 = 1, \\ -8l_1 - 11m_1 = 7, \end{cases} \quad (4.17)$$

kust saame $l_1 = 0,5$ ja $m_1 = -1$, st. $\mathbf{N}_1^* = (0,5; -1; 1)$

(b) Järgmise sammuna tuleb saadud vektor \mathbf{N}_i^* normeerida, s.t. leida vastav ühikvektor $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i^* / |\mathbf{N}_i^*|$.

$$\bullet |\mathbf{N}_1^*| = 1,5 \text{ ja seega}$$

$$\mathbf{N}_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}; -1; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

4.2. Peepinged

Kokku saame

$$\sigma_1 = 27 \rightarrow (\infty) \rightarrow \bar{\mathbf{N}}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\sigma_2 \rightarrow (\infty) \rightarrow \bar{\mathbf{N}}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\sigma_3 \rightarrow (\infty) \rightarrow \bar{\mathbf{N}}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

4. Peale peasuundade leidmist tuleb kontrollida, kas nad moodustavad paarima käe kolmiku, s.t. kas $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

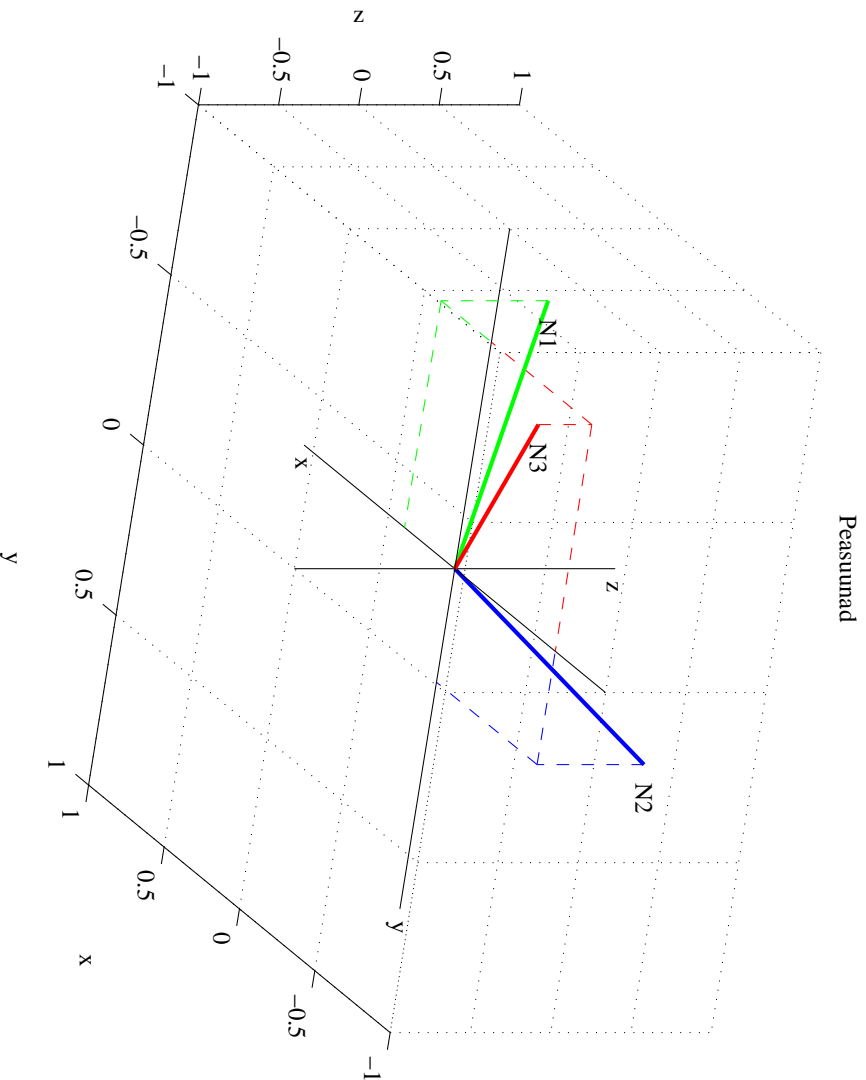
$$\bullet \text{ Kui } \mathbf{N}_1 = (l_1, m_1, n_1) \text{ ja } \mathbf{N}_2 = (l_2, m_2, n_2), \text{ siis}$$

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{Bmatrix} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

$$\text{Parema käe kolmiku kontroll: } \bar{\mathbf{N}}_3 = \bar{\mathbf{N}}_1 \times \bar{\mathbf{N}}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

Seega tuleb peasuundadeks valida

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$



Joonis 4.4: Peasuunad

B. „Arvutiga”

1. Sisestada pingetensori maatriks.
2. Leida peaväärtused ja peasuunad.
 - Harilikult on selleks käsk `eig` (*eigenvalues*).
3. Järjestada peaväärtused ja peasuunad ümber nii, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
 - Kuna peaväärtustega koos tuleb ümberjärjestada ka peavektorid, siis tuleb tihti muuta arvutist saadud peavektori \mathbf{N}_3 orientatsioon selliseks, et $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.

Järgnevalt vaatleme, kuidas käib peaväärtuste ja peasuundade leidmine Matlabi abil.

```
>> % Pingetensor S
S = [-1 -16 -2; -16 5 -14; -2 -14 14]
S =
    -1    -16    -2
   -16     5   -14
    -2   -14    14
```

Pea- ehk omaväärtusi saab leida nii ilma kui koos peasuundadega

```
>> % omaväärtused
eig(S)
ans =
   -18
     9
    27

>> % omaväärtused ja omavektorid
[V,D]=eig(S)
V =
   -2/3    -2/3    1/3
   -2/3    1/3   -2/3
   -1/3    2/3    2/3

D =
   -18     0     0
     0     9     0
     0     0    27
```

Maatriksis V on peavektorid esitatud veergudes.

Peaväärtused peavad olema järjestatud kahanevalt:

```
>> % omaväärtuste ja omavektorite ümberjärestamine, antud juhul 3<->1
D(1,1)=27;   D(3,3)=-18;
NN=V(:,1);  V(:,1)=V(:,3);  V(:,3)=NN;
D,V
D =
    27     0     0
     0     9     0
     0    -18    0

V =
    1/3   -2/3   -2/3
   -2/3    1/3   -2/3
    2/3    2/3   -1/3
```

Peasunud peavad moodustama parema käe kolmiku:

```
>> % Kontroll: N3=N1xN2
cross(V(:,1),V(:,2))
ans =
   -2/3
   -2/3
   -1/3
```

Antud juhul oli see tingimus automaatselt täidetud.

4.3 Peadeformatsioonid

Peasuundi ja peaväärtusi saab leida mistahes teist järku tensoritele. Kuna deformatsioonitensor ja pingetensor on sümmeetrilised tensorid, siis on *peadeformatsioonide* leidmise protseduur analoogiline peapingete omaga. Antud juhul saame seega deformatsioonitensorile

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{anda kuju} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

misjäreel deformatsioonitensori invariantid

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad I_2^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3, \quad I_3^\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (4.22)$$

Peadeformatsioonid järjestatakse analoogiliselt peapingetele: $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Analoogiliselt pingusega saab ka siin eristada *ruum-*, *tasand-* ja *joomdeformatsiooni*.