Peatükk 5

Elastsusteooria põhivõrrandid, nende lahendusmeetodid ja lihtsamad ruumilised ülesanded

5.1 Tasakaalu diferentsiaalvõrrandid

Välisjõudude toimel tahkes kehas tekkivad pinged pole üldjuhul konstantsed, vaid võivad omada igas keha punktis erinevaid väärtusi:

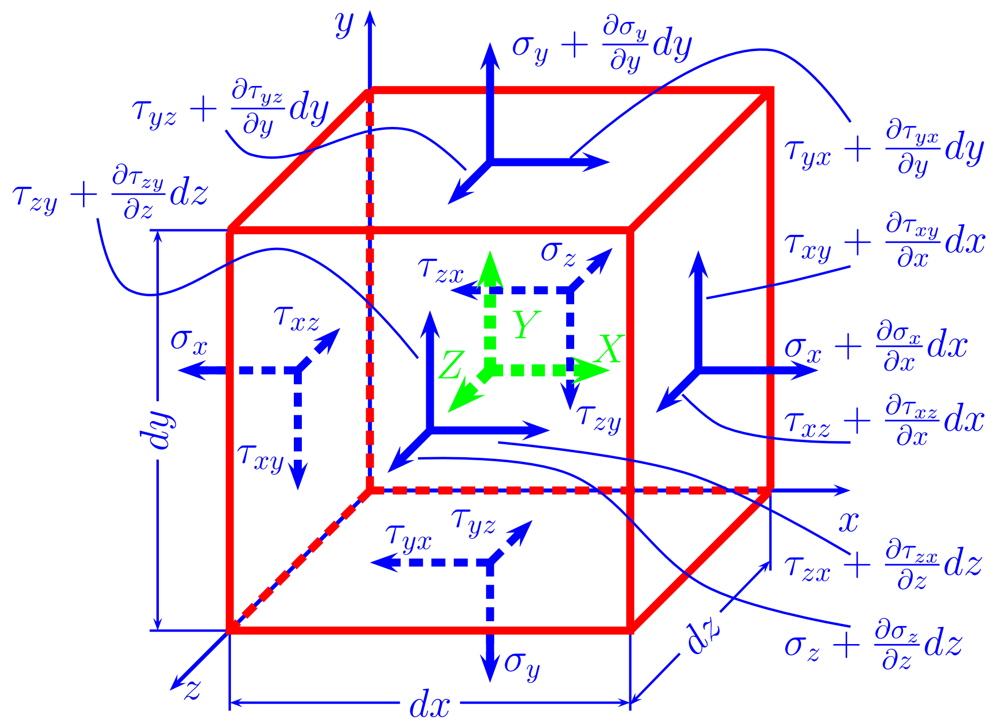
$$\sigma_x = \sigma_x(x,y,z),\ \sigma_y = \sigma_y(x,y,z),\ \sigma_z = \sigma_z(x,y,z),\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z), \dots \tag{5.1}$$

Vaatleme välisjõudude mõju all tasakaalus olevast kehast välja lõigatud elementaarristtahukat (joon. 5.1). Igal risttahuka tahul mõjub 3 pingekomponenti, kokku seega 18 pingekomponenti. Olgu punktis koordinaatidega x, y, z normaalpinge väärtus $\sigma_x(x,y,z)$. Kasutades Taylori rittaarendust[1] (säilitades seejuures vaid esimest järku väikesed suurused) võime kirjutada

$$\begin{aligned}\sigma_x(x+dx,&y+dy,z+dz) = \\ &\sigma_x(x,y,z) + \frac{\partial\sigma_x(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_x(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_x(x,y,z)}{\partial z}dz.\end{aligned} \tag{5.2}$$

- Avaldise (5.2) põhjal $\sigma_x(x+dx,y,z) = \sigma_x(x,y,z) + \frac{\partial\sigma_x(x,y,z)}{\partial x}dx$.
- Teiste pingekomponentide jaoks saab tuletada analoogilised valemid.

[1] Ühe muutuja funktsiooni korral $f(x+dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) dx^k$



Joonis 5.1: Elementaarristtahukas

- Kehale mõjuvate mahujõudude projektsioonid tähistame X, Y, Z (NB! mahujõu dimensioon on 1 N/m^3).

Keha on tasakaalus, järelikult peab ka elementaarristtahukas olema tasakaalus ja talle mõjuvate jõudude peavektor ja peamoment olema võrdsed nulliga. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks liidame esiteks risttahukale mõjuvate jõudude projektsioonid x-teljele ja võrrutame saadu nulliga:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz - \tau_{yx} dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + X dxdydz = 0 \tag{5.3}$$

Avame sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga $dV = dxdydz$:

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ühe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \tag{5.4}$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude projektsioone y- ja z-teljel:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid.*Kui mahujõudude projektsioonid sisaldavad inertsjõudusid, saab viimste abil lahendada ka dünaamika ülesandeid. √

Järgnevalt leiame momendid ristahuka keskpunkti läbiva x-telje suhtes ja võrrutame tulemuse nulliga:

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dxdz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dxdz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dxdy \frac{dz}{2} = 0. \tag{5.6}$$

Avame sulud:

$$\tau_{yz} dxdydz - \tau_{zy} dxdydz + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dxdz \frac{dy^2}{2} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dxdy \frac{dz^2}{2}}_{\text{kõrgemat järku väikesed liikmed } \to 0} = 0. \tag{5.7}$$

Pärast kõrgemat järku väikeste liikmete hülgamist saame $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Leides analoogiliselt momendid y- ja z-telje suhtes saame kokkuvõttes

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \tag{5.8}$$

mis on tuntud *nihkepingete paarsuse seadusena.*[2] Tänu nihkepingete paarsusele väheneb tundmatute pingekomponentide arv üheksalt kuuele.

[2]Sama seadus oli homogeense pinguse jaoks tuletatud 2. peatükis.

5.2 Elastsusteooria põhivõrrandid

1. *Tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid* (5.5) *(3 võrrandit):*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

2. *Cauchy seosed (3.6) (6 võrrandit):*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \tag{5.10}$$

3. *Üldistatud Hooke'i seadus (6 võrrandit) nn. otsesel kujul (3.23):*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right], & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right], & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right], & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} \end{cases} \tag{5.11}$$

või nn. pöördkujul (3.31)

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Võrrandeid kokku 15.

Tundmatud kokku 15: 6 pingetensori komponenti + 6 deformatsioonitensori komponenti + 3 siirdevektori komponenti.

Rajatingimused ehk ääretingimused ehk servatingimused võivad olla kolme põhitüüpi.

1. *Keha välispinnal on antud pindjõud.* Sel juhul esitatakse rajatingimused valemitega (4.5).

$$\begin{cases} p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{\nu y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{\nu z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \tag{5.13}$$

2. *Keha välispinnal on antud siirded.* Põhimõtteliselt tähendab see seda, et on antud keha välispinna liikumisseadus, näiteks kujul

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{5.14}$$

3. *Osal keha pinnast on antud siirded ja osal pindjõud.* See kujutab endast kahe eelmise kombinatsiooni.

Võib esineda veelgi komplitseeritumaid juhte, kus mingil osal keha pinnast on antud näiteks üks kolmest siirdekomponendist ja kaks pindjõu komponenti.

Pidevustingimused. Kui põhimuutujateks on valitud deformatsioonid või pinged, siis on tarvis arvestada ka pidevustingimusi (3.19):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases} \tag{5.15}$$

5.3 Elastsusteooria ülesannete lahendusmeetodid

Elastsusteooria põhivõrrandeid võib lahendada mitmel erineval moel, sõltuvalt sellest millised suurused on valitud põhimuutujateks.

1. *Lahendamine siiretes* — tundmatuteks on valitud siirdevektori komponenedid $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$.
2. *Lahendamine pingetes* — tundmatuteks on valitud pingetensori komponendid $\sigma_x(x, y, z), \ldots, \tau_{xy}(x, y, z), \ldots$.
3. *Lahendamine deformatsioonides* — tundmatuteks on valitud deformatsioonitensori komponendid $\varepsilon_x(x, y, z), \ldots, \gamma_{xy}(x, y, z), \ldots$.
4. *Nn. segalahendi leidmine* — eelmise kolme kombinatsioonid.

Järgmises alajaotuses vaatleme kahte esimest juhtu.

Teoreem: Kui keha olek on üheselt määratud ja kehtib jõudude mõju sõltumatuse printsiip (ehk superpositsiooni printsiip), siis omab elastsusteooria ülesanne ühest lahendit.

5.3.1 Elastsusteooria ülesannete lahendamine siiretes

Otsitavad: siirdekomponendid $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$.

1. Tasakaaluvõrrandites (5.9) olevad pingetensori komponendid asendatakse üldistatud Hooke'i seduse (5.12) abil deformatsioonitensori komponentidega. Võrrandist $(5.9)_1$ saame:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0. \tag{5.16}$$

2. Kasutades Cauchy seoseid (5.10) saame

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{=\nabla^2 u} + \mu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)}_{=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}} + X = 0, \tag{5.17}$$

kus ∇^2 on *Laplace'i operaator.* Kokku saime võrrandi

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0. \tag{5.18}$$

3. Korrates sama protseduuri viimasele kahele võrranditest (5.9) saame *Lamé võrrandid:*

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+X=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+Y=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+Z=0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Saadud võrrandid ühendavad endas kõik eelpool vaadeldud seosed ja võrrandid, st. nad sisaldavad endas tasakaaluvõrrandeid, Cauchy seoseid ning üldistatud Hooke'i seadust.

4. Kui rajatingimused juba on esitatud siiretes kujul (5.14), siis pole lisaks vaja teha mitte midagi. Kui aga rajatingimused on esitatud läbi pindjõudude kujul (5.13) siis tuleb nad teisendada siiretesse kasutades valemeid (5.12) ja (5.10) (nagu Lamé võrrandite tuletamisel):

$$\begin{cases} p_{\nu x}=\lambda\theta l+\mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}l+\dfrac{\partial v}{\partial x}m+\dfrac{\partial w}{\partial x}n\right), \\ p_{\nu y}=\lambda\theta m+\mu\dfrac{\partial v}{\partial\nu}+\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}l+\dfrac{\partial v}{\partial y}m+\dfrac{\partial w}{\partial y}n\right), \\ p_{\nu z}=\lambda\theta n+\mu\dfrac{\partial w}{\partial\nu}+\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}l+\dfrac{\partial v}{\partial z}m+\dfrac{\partial w}{\partial z}n\right), \end{cases} \tag{5.20}$$

kus

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial u}{\partial x}l+\frac{\partial u}{\partial y}m+\frac{\partial u}{\partial z}n, \qquad \frac{\partial v}{\partial\nu}=\ldots, \qquad \frac{\partial w}{\partial\nu}=\ldots \tag{5.21}$$

5. Ülesande edasine lahendamine käib järgmiselt:
   (i) Lamé võrrandid (5.19) integreeritakse rajatingimustel (5.20);
   (ii) Cauchy seostest (5.10) määratakse deformatsioonitensori komponendid;
   (iii) Üldistatud Hooke'i seadusest (5.12) määratakse pingetensori komponenedid.

Märkus: kahte viimast leitakse muidugi vaid juhul kui küsitakse.

5.3.2 Elastsusteooria ülesande lahendamine pingetes konstantsete mahujõudude korral

Otsitavad: 6 pingetensori komponenti.

- Eeldame, et kõik mahujõud on konstantsed igas keha punktis $\Rightarrow \frac{\partial X}{\partial x} = \ldots = 0$.
- Alustame ruumdeformatsiooni θ ja pingetensori esimese invariandi I_1^σ omaduste uurimisega. Selleks teisendame Lamé võrrandeid (5.19) järgmiselt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(5.19)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(5.19)_2 + \frac{\partial}{\partial z}(5.19)_3,$$

$$\ldots,$$

$$(\lambda+\mu)\underbrace{\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)}_{\nabla^2\theta}+\mu\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v+\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 w\right)}_{\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\nabla^2\theta}=0,$$

$$\ldots,$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\theta = 0. \tag{5.22}$$

Viimane on samaväärne võrrandiga

$$\nabla^2\theta = 0. \tag{5.23}$$

- Funktsiooni, mis rahuldab *Laplace'i võrrandit* (5.23) nimetatakse *harmooniliseks funktsiooniks.*
- Kui rakendada Hooke'i seadust ruumdeformatsioonil (3.25), mille põhjal $\theta = \frac{(1-2\nu)I_1^\sigma}{E}$, siis saame võrrandile (5.23) kuju

$$\nabla^2 I_1^\sigma = 0. \tag{5.24}$$

- Kuue tundmatu määramiseks peame antud juhul kasutama tasakaaluvõrrandeid koos pidevustingimustega (5.15). Need kuus pidevusvõrrandit tuleb aga väljendada pingetes.
  - Asendame Hooke'i seadusest (5.11) deformatsioonitensori komponendid esimesse pidevusvõrrandisse $(5.15)_1$:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)-2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=0. \tag{5.25}$$

– Viimasest ellimineerime nihkepinge τ_{xy}. Selleks

$$\frac{\partial}{\partial x}(5.9)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(5.9)_2 - \frac{\partial}{\partial z}(5.9)_3$$

$$\ldots$$

$$-2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \ldots \to (5.25) \pm \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}, \pm \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}, \pm \nabla^2 \sigma_z \ldots \overset{(5.24)}{\Rightarrow}$$

$$(1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z^2} = 0.$$

- Kokku saame analoogiliselt toimides kuus võrrandit, mis on tuntud *Beltrami–Michelli võrranditena* ning mis väljendavad pidevustingimusi pingetes (juhul kui mahujõud on konstantsed) —

$$\begin{cases} (1+\nu)\nabla^2 \sigma_x + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x^2} = 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x \partial y} = 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_y + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y^2} = 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial z^2} = 0, & (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xz} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x \partial z} = 0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Kokkuvõte.

Antud juhul, st., elastsusteooria ülesande lahendamisel pingetes tuleb:

(i) lahendada tasakaaluvõrrandid (5.9) koos pingetes esitatud pidevustingimustega (5.26) ja rajatingimustega (5.13);

(ii) määrata üldistatud Hooke'i seadusest (5.11) deformatsioonitensori komponendid;

(iii) määrata Cauchy seostest (5.10) siirdevektori komponendid.

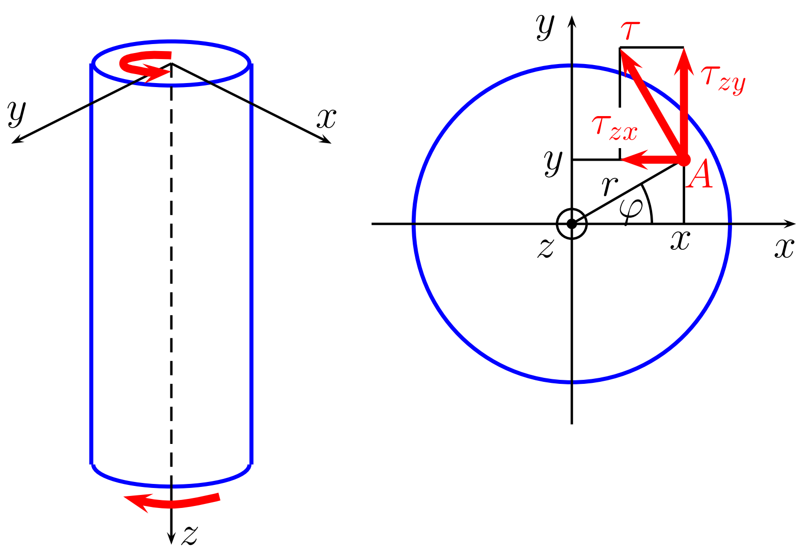
Märkus: Kahte viimast leitakse jällegi vaid juhul kui küsitakse.

5.4 Lihtsamad ruumilised ülesanded

Käesolevas alajaotuses *vaatleme mõningate lihtsamate elastsusteooria ülesannete lahendamist pingetes.*

- Vaadeldavate ülesannete *lihtsus* seisneb eeskätt selles, et *pingekomponendid on konstantsed või lineaarfunktsioonid koordinaatidest* (x, y, z).
  - Sellisel juhul on Beltrami-Michelli võrrandid (5.26), st. pidevusvõrrandid pingetes, automaatselt rahuldatud.
- *Vaatleme elementaarteooriast*, st. tugevusõpetusest (tehnilisest mehaanikast), *tuntud lahendeid ja näitame, et nad rahuldavad elastsusteooria tasakaaluvõrrandeid* (5.9) *ja rajatingimusi* (5.13).
- Leiame keha punktide siirded läbi üldistatud Hooke'i seaduse (5.11) ja Cauchy seoste (5.10). Elementaarteoorias piirdutakse peaasjalikult vaid varda telje siirete määramisega.

5.4.1 Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne



Joonis 5.2: Ümarvarda vääne.

Vaatleme konstantse ristlõikega ümarvarrast, mille otstesse on rakendatud pöördemomendid. Vastavalt elementaarteooriale, st. tugevusõpetusest tuntud valemitele, avaldub nihkepinge varda väändel kujul

$$\tau = G\vartheta r, \tag{5.27}$$

kus G on nihkeelastsusmoodul, r – polaarraadius ja ϑ – väändenurk varda pikkusühiku kohta. Pingevektor $\boldsymbol{\tau}$ on seejuures risti varda raadiusega r. Tuletame meelde, et väändenurk $\vartheta \ll 1$ ja et on tehtud terve rida katseandmetel põhinevaid lihtsustavaid eeldusi: (i) ristlõiked jäävad tasapinnalisteks; (ii) ristlõigete vahekaugus ei muutu; (iii) ristlõige $z = const.$ pöördub nurga $\vartheta_z = \vartheta z$ võrra; (iv) raadiused jäävad sirgeteks; (v) varda läbimõõt ei muutu; (vi) mahujõud on hüljatud.

Lahutame nüüd pingevektori $\boldsymbol{\tau}$ x- ja y-telje sihiliseks komponendiks:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \underbrace{G\vartheta r}_{=\tau}\frac{x}{r} = G\vartheta x, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\underbrace{G\vartheta r}_{=\tau}\frac{y}{r} = -G\vartheta y. \tag{5.28}$$

Viimases avaldises on arvestatud, et $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ ja $\sin\varphi = \frac{y}{r}$. Ülejäänud pinged on vastavalt tehtud eeldustele nullid, st.,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \tag{5.29}$$

Allpool näitame, et vaadeldav lahend rahuldab lineaarse elastsusteooria põhivõrrandeid.

Kuna pingekomponendid on kas nullid või lineaarfunktsioonid koordinaatidest x ja y, siis on pidevustingimused pingetes (Beltrami–Michelli võrrandid) (5.26) automaatselt rahuldatud:

$$\begin{cases} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x^2} = 0, \qquad (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \dfrac{\partial^2 I_1^\sigma}{\partial x \partial y} = 0, \\ \ldots, \qquad \ldots, \\ \ldots, \qquad \ldots. \end{cases}$$

Tasakaaluvõrrandid (5.9) on rahuldatud kuna mahujõudud on hüljatud:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Silindri külgpind on pingevaba. Seega, saavad rajatingimused (5.13) kuju

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = 0. \end{cases}$$

Külgpinna normaali suunakoosinused

$$l = \cos(\boldsymbol{\nu}, x) = \frac{x}{r}, \quad m = \cos(\boldsymbol{\nu}, y) = \frac{y}{r}, \quad n = \cos(\boldsymbol{\nu}, z) = 0. \tag{5.30}$$

Arvestades viimast, st. $n = 0$ ja avaldisi (5.29), jääb jääb rajatingimustest alles vaid üks võrrand

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0, \tag{5.31}$$

mis on rahuldatud ringsilindri puhul, st. tingimustel $(5.30)_{1,2}$.

Siirete leidmine toimub üldistatud Hooke'i seaduse (5.11) ja Cauchy seoste (5.10) abil. Arvestades pingekomponentide väärtusi:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0, & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} = 0, \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] = 0, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} = \vartheta x, \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = 0, & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} = -\vartheta y. \end{cases}$$

Rajatingimused antakse punktis $x = y = z = 0$ kujul $u = v = w = 0$ ja $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial v/\partial x = 0$, st. keelatud on nii pöörded kui siirded. Sellistel rajatingimustel saame

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = 0. \tag{5.32}$$

Seega osutub ümarvarda puhul elementaarteooria eeldus, et ristlõiked jäävad tasapinnaliseks ja raadiused sirgeteks, õigeks.

Märkused:

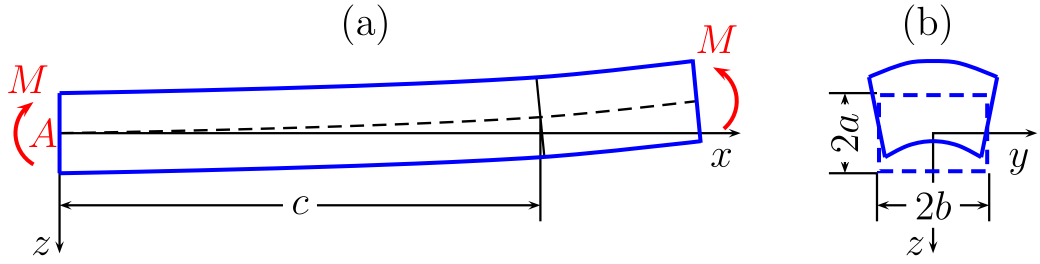
1. Kui väliskoormus on varda otsale antud tangentsiaalpingetega kujul (5.27) siis on leitud lahend kehtiv varda suvalise ristlõike jaoks. Kui väliskoormus on aga antud mingil teisel kujul, siis tuleb otspindade lähedal rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

2. Valemite (5.32) tuletamine on üksikasjalikult esitatud õpikus S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1970. Venekeelne tõlge: Teoria uprugosti, Mir, Moskva, 1975..

3. Õpikus «R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika II, Tallinn, 1967» on vaadeldav ülesanne lahendatud siiretes. Lõpuks näidatakse, saadud lahend sisaldab elementaarteooriast pärit valemit (5.27).

4. On selge, et mitteümarvarda puhul elementaarteooria lahend ei sobi, sest normaal pole enam antud avaldistega (5.30). Järelikult sel juhul (5.31) ei kehti varda külgpinnal.

5.4.2 Prismaatiliste varraste puhas paine



Joonis 5.3: Prismaatilise varda paine.

Vaatleme prismaatilist varrast, mis paindub peatasandis xz varda otstesse rakendatud vastassuunaliste ja suuruselt võrdsete momentide M toimel, mahujõud on hüljatud (vt. joonis 5.3 (a)). Koordinaatide alguse paneme varda vasakusse otsa ristlõike pinnakeskmesse. Elementaarteooria põhjal

$$\sigma_x = \frac{Ez}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \tag{5.33}$$

kus R on painutatud varda kõverusraadius. Lahend (5.33) rahuldab mahujõudude puudumisel tasakaaluvõrrandeid (5.9) ja rajatingimusi (5.13) varda külgpinnal. †

Otspindadel on lahend täpne kui väliskoormus jaotub vastavalt avaldisele (5.33). Paindemoment määratakse valemiga

$$M = \int_A \sigma_x z dA = \int_A \frac{Ez^2 dA}{R} = \frac{EI_y}{R}. \tag{5.34}$$

Viimasest avaldisest saame leida varda telje kõveruse

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}. \tag{5.35}$$

Siirete leidmiseks kasutame Hooke'i seadust (5.11) ja Cauchy seoseid (5.10) (antud juhul on tala teljeks x-telg!)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{z}{R}, & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\nu z}{R}, & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{\nu z}{R}, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{5.36}$$

Lahendame diferentsiaalvõrrandite süsteem (5.36) samadel rajatingimustel, mis alajaotuses 5.4.1, st. punktis A on keelatud nii siirded kui pöörded ehk $u = v = w = 0$ ja $\partial w/\partial x = \partial v/\partial x = \partial v/\partial z = 0$ kui $x = y = z = 0$. Pärast mõningaid teisendusi saame[3]

$$u = \frac{xz}{R}, \quad v = -\frac{\nu yz}{R}, \quad w = -\frac{1}{2R}[x^2 + \nu(z^2 - y^2)]. \tag{5.37}$$

Võttes viimases avaldises $y = z = 0$ saame varda kõverdunud telje võrrandi:

$$w = -\frac{x^2}{2R} = -\frac{Mx^2}{2EI_y}, \quad u = w = 0. \tag{5.38}$$

See avaldis langeb kokku elementaarteooria läbipainde avaldisega.

Vaatleme nüüd varda suvalist ristlõiget $x = c$ (enne deformatsiooni). Peale deformatsiooni asuvad selle ristlõike punktid tasandil

$$x = c + u = c + \frac{cz}{R}, \tag{5.39}$$

st. *puhtal paindel jäävad ristlõiked tasapinnalisteks.*

[3] Täielikku tuletuskäiku vt. näit. Timoshenko & Goodier'i õpikust. Tõsi küll, seal on teljed pisut teisiti orienteeritud.

Et uurida ristlõike deformatsioone tema tasandis, vaatleme külgi $y = \pm b$ (vt. joonis 5.3 (b)). Pärast deformatsiooni

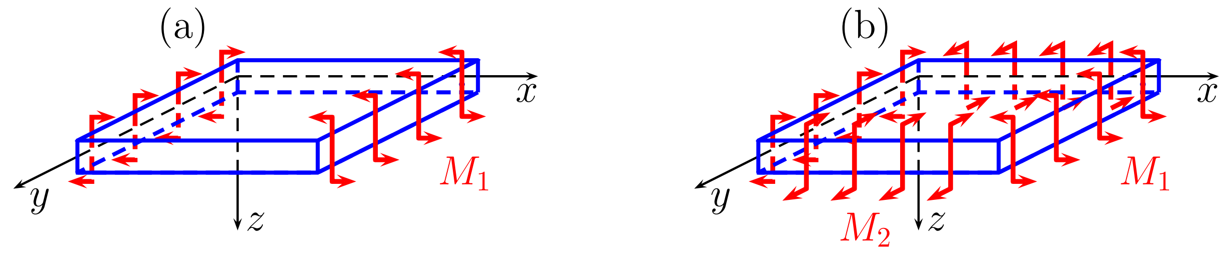
$$y = \pm b + v = \pm b\left(1 - \frac{\nu z}{R}\right), \tag{5.40}$$

st., *peale deformatsiooni on küljed $y = \pm b$ kaldu.* Kaks ülejäänud külge $z = \pm a$ omavad peale deformatsiooni kuju

$$z = \pm a + w = \pm a - \frac{1}{2R}[c^2 + \nu(a^2 - y^2)], \tag{5.41}$$

st. nende kujuks peale deformatsiooni on parabool. *Seega on tala pealmine ja alumine pind pikisuunas nõgus ja ristsuunas kumer, st. moodustab sadulpinna.*

5.4.3 Plaadi puhas paine



Joonis 5.4: Ristkülikulise plaadi paine

Eelmises alajaotuses saadud tulemusi saab rakendada konstantse paksusega plaatide paindeülesannete puhul. Kui pinged $\sigma_x = Ez/R$ on rakendatud piki y-teljega paralleelseid plaadi külgi (vt. joonis 5.4 (a)), siis omab plaadi pind peale deformatsiooni sadulpinna kuju, kusjuures tema kõverus xz tasapinnas on $1/R$ ning ristuvas tasapinnas ν/R. Siinjuures eeldatakse, et läbipainded on võrreldes plaadi paksusega väikesed. Tähistame plaadi paksuse h, paindemomendi plaadi y-telje sihilise serva pikkusühiku kohta M_1 ja inertsimomendi pikkusühiku kohta $I_y = h^3/12$. Nüüd valemi (5.35) põhjal

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3}. \tag{5.42}$$

Kui paindemomendid M_1 ja M_2 mõjuvad kahes ristuvas suunas (vt. joonis 5.4 (b)), siis saadakse elastse plaadi pinna kõverus paindemomentidest M_1 ja M_2 põhjustatud kõveruste superpositsioonina.

Tähistame $1/R_1$ ja $1/R_2$ plaadi kõverused xz ja yz tasandites. Momendid M_1 ja M_2 on endiselt mõõdetud serva pikkusühiku kohta. Kasutades nüüd avaldist (5.42) ja superpositsiooniprintsiipi saame

$$\frac{1}{R_1} = \frac{12}{Eh^3}(M_1 - \nu M_2), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{12}{Eh^3}(M_2 - \nu M_1). \tag{5.43}$$

M_1 ja M_2 loetakse positiivseteks kui nad põhjustavad positiivsete kiudude tõmmet. (5.43) põhjal

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right), \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right). \tag{5.44}$$

Väikeste läbipainete puhul võib kasutada aproksimatsiooni

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{5.45}$$

Tähistades

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{5.46}$$

ja arvestades (5.45) saame avaldistele (5.44) kuju

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \tag{5.47}$$

Konstanti D nimetatakse *plaadi paindejäikuseks*.

Juhul kui plaat paindub silindriliselt (moodustaja on paralleelne y-teljega), siis $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$ ja (5.47) saab kuju

$$M_1 = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_2 = -D\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{5.48}$$

Kui $M_1 = M_2 = M$, siis ka $1/R_1 = 1/R_2 = 1/R$ ja plaat paindub sfääriliseks pinnaks, nii et (5.44) saab kuju

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R}. \tag{5.49}$$

5.4.4 Näide talade ja plaatide puhta painde kohta

Tala (plaadi) dimensioonid (joon. 5.3): $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ ja $0 \leq z \leq l$. Otstesse (servadesse) $z = 0$ ja $z = l$ on rakendatud momendid M. Leida (alajaotuste 5.3.5 ja 5.3.4 põhjal) tala (plaadi) peatasandi xz ja lõike $z = l$ deformeerunud kuju järgmistel juhtudel:

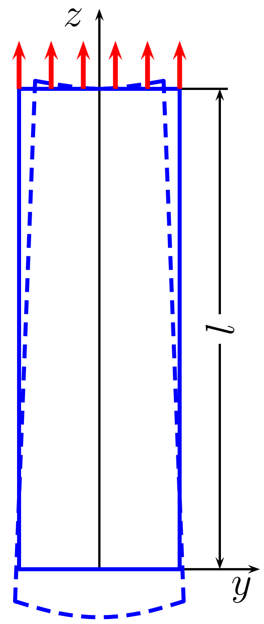
1. $M = 2$kNm; $l = 0,2$m; $a = 0,015$m; $b = 0,025$m;
2. $M = 10$kNm; $l = 1$m; $a = 0,03$m; $b = 0,05$m;
3. $M = 10$kNm; $l = 1$m; $a = 0,015$m; $b = 0,5$m;
4. $M = 10$kNm; $l = 0,5$m; $a = 0,015$m; $b = 0,5$m.

Vaadelda kolmest materjalist talasid (plaate):

1. teras: $E = 210$GPa; $\nu = 0,3$;
2. alumiinium: $E = 70$GPa; $\nu = 0,35$;
3. vask: $E = 110$GPa; $\nu = 0,32$.

Hinnata maksimaalse vertikaalsiirde ja tala paksuse suhet, st. seda kas läbipainded on väikesed või ei. Lahendused vt. `http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html` .

5.4.5 Varda tõmme omakaalu mõjul



Joonis 5.5: Varda deformatsioon omakaalu mõjul.

Vaatleme ülemisest otsast jäigalt kinnitatud ristkülikulise ristlõikega varrast. *Mahujõud:*

$$X = Y = 0, \quad Z = -\rho g, \tag{5.50}$$

kus ρg on varda erikaal. *Pinge:* varda igas ristlõikes on nullist erinev vaid temast allpool asuva osa kaalust põhjustatud normaalpinge:

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \tag{5.51}$$

Rajatingimused: Nullist erinevad pinged vaid varda ülemisel välispinnal — seal $\sigma_z = \rho g l$. *Tasakaaluvõrrandid* (5.9) on sellise pingejaotuse korral rahuldatud. Kuna *pidevustingimused* pingetes (vt. näiteks Beltrami-Michelli võrrandid (5.26)) sisaldavad vaid teist järku osatuletisi pingekomponentidest, siis on nad antud juhul automaatselt rahuldatud.

Siirded ja deformatsioonid määrame Hooke'i seaduse abil

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{\rho g z}{E}, \\ \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\nu \dfrac{\rho g z}{E}, \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{5.52}$$

Siirdekomponendid u, v ja w leitakse avaldistest (5.57) integreerimise teel. Integreerimiskonstandid määratakse rajatingimustest punktis A. Jäiga kinnituse tõttu on seal keelatud nii siirded kui pöörded, st., punktis $x = y = 0, \ z = l$ on $u = v = w = 0$ ja $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial v/\partial x = 0$. Tulemus on järgmine (tuletuskäiku vt. näit. Timoshenko & Goodier):

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\nu \rho g x z}{E}, \quad v = -\dfrac{\nu \rho g y z}{E}, \\ w = \dfrac{\rho g}{2E}\left[z^2 - l^2 + \nu(x^2 + y^2)\right] \end{cases} \tag{5.53}$$

On selge, et *z-telje punktid omavad vaid vertikaalseid siirdeid:*

$$w|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{\rho g}{2E}(z^2 - l^2) \tag{5.54}$$

Teised punktid, st. kus $x \neq 0$ või $y \neq 0$, omavad ka horisontaaseid siirdeid. Seega *sirged, mis olid enne deformatsiooni paralleelsed z-teljega on peale deformatsiooni z suhtes kaldu. Tala lõiked, mis olid enne deformatsiooni risti z-teljega, moodustavad pärast deformatsiooni paraboolse pinna.* Näiteks punktid, mis olid enne deformatsiooni tasandil $z = c$ asuvad peale deformatsiooni pinnal $z = c + w|_{z=c}$. See pind on risti kõigi nende varda kiududega, mis enne deformatsiooni olid vertikaalsed.