Peatükk 8

Sirgete varraste vääne

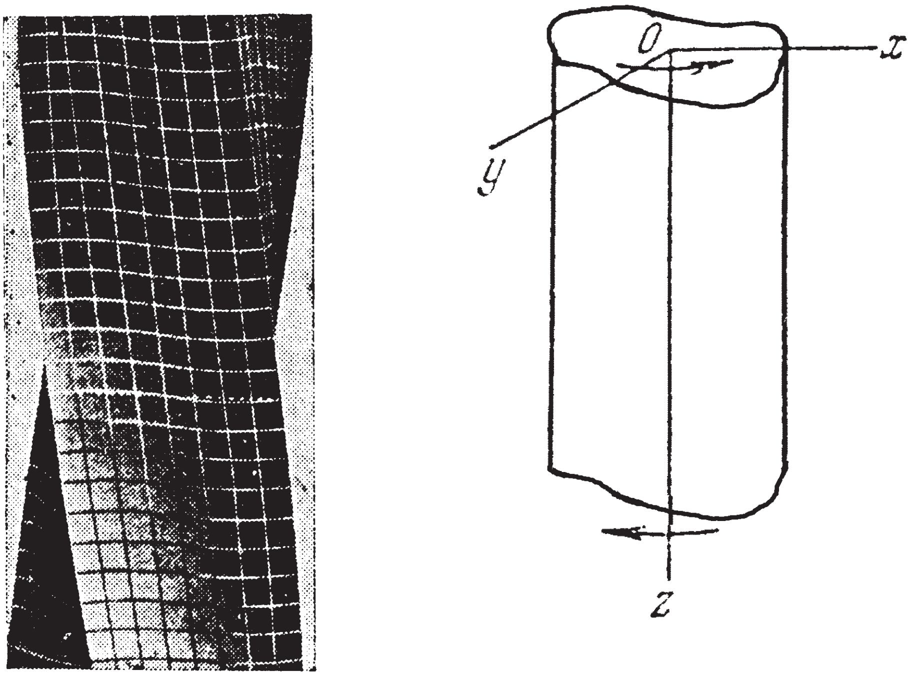
8.1 Sissejuhatus ja lahendusmeetod

Käesoleva loengukonspekti alajaotuses 2.10.2 käsitleti väändepingete leidmist ümarvarrastes ja alajaotuses 2.10.3 esitati valemid mitteümarvarraste jaoks ilma igasuguse tuletuskäiguta. Käesolevas peatükis vaatleme, kuidas toimub väändeülesande lahendamine mitteümarvarraste korral.

Ümarvarraste väändeülesande lahendamisel tehtud hüpotees, et varda ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks ei kehti mitteümarvarraste puhul. Seda näitavad ilmekalt eksperimentide tulemused (vt. joonis 8.1 a). Enim kõverduvad algsed sirged külgede keskosas. Korrektse lahenduse vaadeldavale ülesandele andis Saint-Venant (1855).

Vaatleme ühtlast varrast, mille otstesse on rakendatud momendid, kusjuures ristlõike kuju on meelevaldne (joonis 8.1 b). Saint Venaint lähtus eeldusest, et varda deformatsioon koosneb kahest osast: 1) ristlõike pöörded analoogiliselt ümarvardaga ja 2) ristlõike tasandite kõverdumine (deplanatsioon), mis on kõigi ristlõigete jaoks sama. Koordinaatide alguseks valime varda otspinna keskme. Sel juhul on ristlõigete pööretele vastavad siirded

$$u = -\vartheta z y \quad \text{ja} \quad v = \vartheta z x \tag{8.1}$$



a) b)

Joonis 8.1: Sirge varda vääne.

kus ϑ on väändenurga intensiivsus. Ristlõigete kõverdumist kirjeldadakse funktsiooniga ψ —

$$w = \vartheta\psi(x, y). \tag{8.2}$$

Seega deformatsioonikomponendid

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \vartheta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = \vartheta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \end{cases} \tag{8.3}$$

ning vastavad pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = G\vartheta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \qquad \tau_{yz} = G\vartheta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + x\right). \end{cases} \tag{8.4}$$

Märkused: (i) käesolevas peatükis võivad mõned võrrandid liikmete järjekorra poolest olla erineval kujul kui eelmistes; (ii) nihkepingete tähistuse korral on indeksite järjekorra juures vaja meenutada nihkepingete paarsuse seadust.

Seega on meil igas varda puktis puhas nihe, mis on määratud komponentidega τ_{xz} ja τ_{yz}. Pannes avaldised (8.4) tasakaaluvõrrandeisse

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0, \end{cases} \tag{8.5}$$

ning hüljates mahujõud, saame funktsiooni ψ määramiseks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{8.6}$$

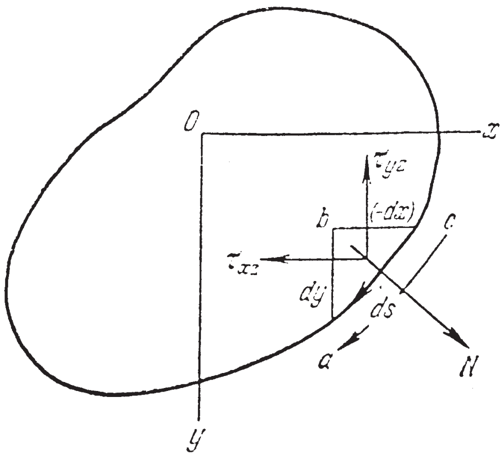
Vaatleme nüüd rajatingimusi

$$\begin{cases} t_x \equiv p_{\nu x} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ t_y \equiv p_{\nu y} = \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l, \\ t_z \equiv p_{\nu z} = \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m. \end{cases} \tag{8.7}$$

Külgpinnal on $t_x = t_y = t_z = 0$ ja $n = \cos(Nz) = 0$, seega $(8.7)_{1,2}$ on samaselt nullid, aga $(8.7)_3$ annab

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0. \tag{8.8}$$

Viimane tingimus tähendab, et summaarne nihkepinge peab olema suunatud piki varda külgpinna puutujat.



Joonis 8.2: Funktsiooni ψ määramine väänatud varda külgpinna lähedase lõpmata väikese elemendi *abc* abil. NB! $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

Vaatleme varda külgpinna lähedast lõpmata väikest elementi abc (joonis 8.2). Eeldame, et s positiivne suund on $c \to a$. Suunakoosinused

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}. \tag{8.9}$$

Kasutades valemeid (8.9) ja (8.4) saame rajatingimusele (8.8) kuju

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)\frac{\partial x}{\partial s} = 0. \tag{8.10}$$

Seega suvaline väändeülesanne taandub funktsiooni ψ määramisele diferentsiaalvõrrandist (8.6) rajatingimusel (8.10).

Rajatingimuste rahuldamiseks on ka teine võimalus, mis viib lihtsamale võrrandile. Kuna $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, siis tasakaaluvõrrandeist jääb järgi

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{8.11}$$

Kuna (8.4) põhjal τ_{xz} ja τ_{yz} ei sõltu koordinaadist z, siis esimesed kaks on samaselt rahuldatud, kolmas tähendab aga, et võime tuua sisse pingefunktsiooni $\varphi(x, y)$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{8.12}$$

Asendades (8.12) pingekomponentide avaldisse (8.4), saame

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = G\vartheta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \\ -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = G\vartheta\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + x\right). \end{array}\right. \tag{8.13}$$

Diferentseerime $(8.13)_1$ y järgi ja $(8.13)_2$ x järgi ning lahutame esimesest teise. Saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F, \quad F = -2\vartheta G \tag{8.14}$$

pingefunktsiooni φ määramiseks. Avaldiste (8.9) ja (8.12) abil saame nüüd rajatingimustele (8.8) kuju

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = 2\frac{d\varphi}{ds} = 0, \tag{8.15}$$

st., pingefunktsion φ peab olema konstantne piki väliskontuuri. Täisvarraste puhul võib selle konstandi vabalt valida, näiteks võtta $\varphi = 0$. Seega tuleb pingete määramiseks leida φ, mis rajal oleks null. Järgmistes alajaotustes vaatleme konkreetse kujuga ristlõikeid.

Varda otstes on $l = m = 0$ ja $n = \pm 1$, st. rajatingimused (8.7) saavad kuju

$$t_x = \pm\tau_{xz}, \quad t_y = \pm\tau_{yz}. \tag{8.16}$$

Seega on pingejaotus varda otstes identne pingejaotusega suvalises varda ristlõikes. Integreerimine üle kogu otspindade annab nullise peavektori ja väändemomendi (pöördemomendi)

$$M_t = 2\iint \varphi dxdy. \tag{8.17}$$

Saadud lahend on täpne Saint-Venant'i printsiibi mõistes.

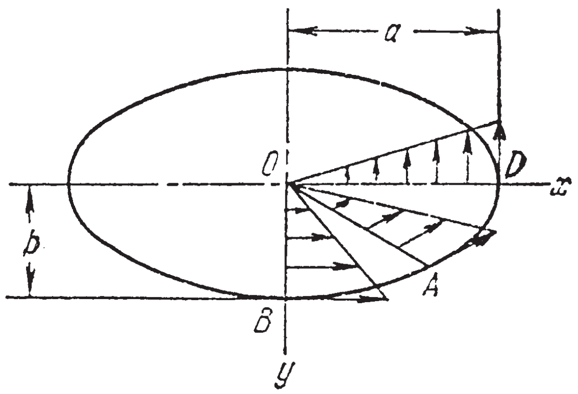
8.2 Elliptiline ristlõige

Vaatleme varrast, mille ristlõige on esitatav võrrandiga (vt. joonis 8.3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{8.18}$$

Kui valida nüüd pingefunktsioon kujul

$$\varphi = m\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right), \tag{8.19}$$



Joonis 8.3: Elliptilise ristlõikega varda vääne.

kus m on konstant, siis on diferentsiaalvõrrand (8.14) ja rajatingimused (8.15) rahuldatud tingimusel, et

$$m = \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}F. \tag{8.20}$$

Seega kokku

$$\varphi = \frac{a^2b^2F}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{8.21}$$

Konstandi F määramiseks asendame (8.21) momendi avaldisse (8.17) —

$$F = -\frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \tag{8.22}$$

Kahe viimase põhjal

$$\varphi = -\frac{M_t}{\pi a b^3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{8.23}$$

ning pingekomponendid (8.12)

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}. \tag{8.24}$$

Järelikult suhe

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}, \tag{8.25}$$

st., pingekomponentide suhe on proportsionaalne suhtega y/x. Järelikult on see suhe konstantne piki igat punktist O väljuvat kiirt („ellipsi raadiust”), näiteks OA joonisel 8.3. Seega summarse nihkepinge suund (lõigu OA igas punktis) ühtib nihkepinge suunaga punktis A. Vertikaalse telje OB punktide puhul on nihkepinge $\tau_{yz} = 0$ ja summaarne pinge on võrdne nihkepingega τ_{xz}.

Horisontaalküljel on olukord vastupidine. On selge, et $\max|\tau_{xz}| > \max|\tau_{yz}|$ ja et

$$\max|\tau_{xz}| = \tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}. \tag{8.26}$$

Kui $a = b$, siis saame valemi ümarvarda maksimaale nihkepinge määramiseks väändel.

Avaldiste (8.22) ja $(8.14)_2$ põhjal saame määrata väändenurga

$$\vartheta = M_t \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}. \tag{8.27}$$

Valemis (8.27) esineva väändemomendi kordaja pöördväärtust

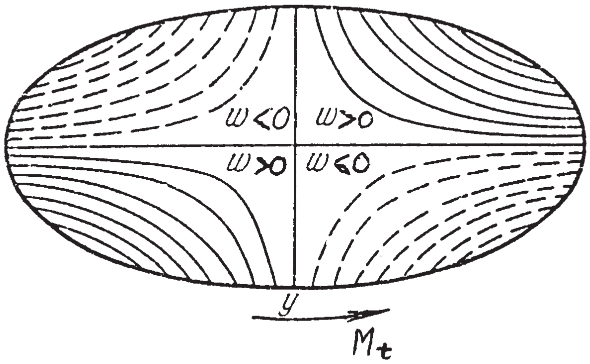
$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G A^4}{4\pi^2 I_\rho} \tag{8.28}$$

nimetatakse varda väändejäikuseks. Siin $A = \pi a b$ on ristlõike pindala ja $I_\rho = \frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2)$ ristlõike polaarinertsimoment.

Siirdekomponentide u ja v leidmiseks tuleb vaid asendada (8.27) avaldistesse (8.1). Kolmanda komponendi w leidmiseks tuleb pingekomponendid (8.24) ja väändenurk (8.27) asendada avaldistesse (8.4), integreerida, avaldada ψ ning (8.2) abil avaldada

$$w = M_t \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G}. \tag{8.29}$$

Seega on deformeerunud ristlõike samasiirdejooned $w = const.$ (w isojooned) hüperboolid, mille asümptootideks on ellpsi poolteljed (vt. joonis 8.4).



Joonis 8.4: Samasiirdejooned $w = const.$

8.3 Membraananaloogia

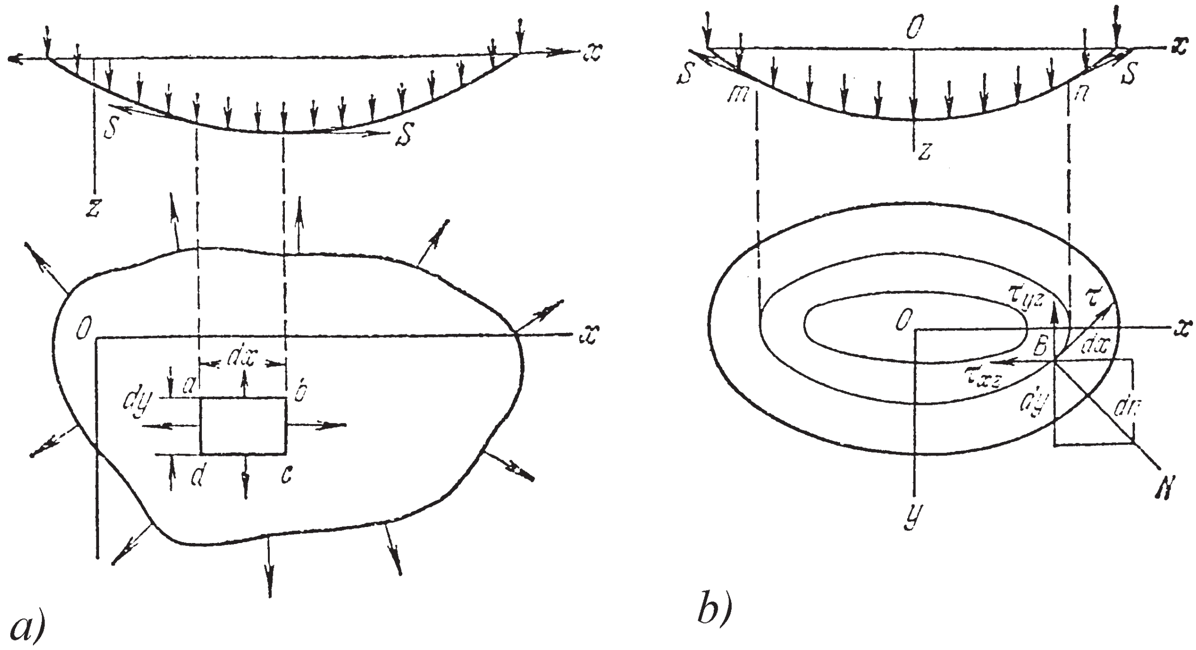
Väändeülesannete lahendamise puhul on osutunud väga kasulikuks Prantli poolt (1903) sisse toodud membraananaloogia. Vaatleme väänatava varda ristlõike kujulist servast toetatatud membraani. Membraani servale on rakendatud ühtlane tõmme ja pinnale ühtlaselt jaotatud rõhk (põikkoormus). Tähistame membraani ühikpinnale mõjuva rõhu q ja serva ühikpikkusele mõjuva tõmbejõu S, vt. joonis 8.5 a). Vaatleme membraani väikest elementi $abcd$, täpsemalt öeldes, tema tasakaalu. Väikeste läbipainete korral on külgedel ad ja bc mõjuva summaarse tõmbejõu projektsioon z-teljel $S(\partial^2 w/\partial x^2)dxdy$ ja ülejäänud kahel küljel $S(\partial^2 w/\partial y^2)dxdy$. Tasakaaluvõrrand omab seega kuju

$$qdxdy + S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy + S\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy = 0$$

kust saame

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S}. \tag{8.30}$$

Võrreldes võrrandit (8.30) ja membraani läbipainde rajatingimusi (membraani läbipaine servas on null) võrrandiga (8.14) ja rajatingimustega (8.15) funktsiooni φ jaoks, jõuame järeldusele, et need kaks ülesanet on langevad kokku.



Joonis 8.5: Põikkoormusega koormatud ühtlaselt tõmmatud membraan — a); deformeerunud membraani samaläbipainde jooned — b). NB! $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

Teisisõnu, selleks et leida diferentsiaalvõrrandi (8.30) abil funktsiooni φ, tuleb (8.30)-s asendada $-q/S$ suurusega $F = -2G\vartheta$ võrrandist (8.14).

Joonisel 8.5 b) on membraani deformeerunud pind kujutatud samaläbipaindejoonte (isojoonte) abil. Vaatleme suvalist punkti B. Kuna teda läbival isojoonel on läbipaine konstantne, siis

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0, \tag{8.31}$$

kus s kujutab endast loomulikku koordinaati vaadeldaval isojoonel. Analoogiline võrrand pingefunktsiooni φ jaoks omab kuju (vt. valem (8.15))

$$2\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) = -\tau_{yz}\frac{dx}{ds} + \tau_{xz}\frac{dy}{ds} = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0. \tag{8.32}$$

Viimane väljendab asjaolu, et summaarse nihkepinge projektsioon isojoone normaalile on null. Järelikult mõjub summaarne nihkepinge vaadeldavas punktis isojoone puutuja sihis. Selliselt konstrueeritud isojooni (kõveraid) vaadeldaval ristlõikel nimetatakse seetõttu nihkepingete trajektoorideks (analoogia punkti kiiruse ja trajektooriga).

Summaarne nihkepinge τ vaadeldavas punktis B saadakse kui projekteeritakse nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} puutuja sihile —

$$\tau = \tau_{xz} m + \tau_{yz} l. \tag{8.33}$$

Arvestades, et

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ l = \cos(Nx) = \frac{dx}{dn} \text{ ja } m = \cos(Ny) = \frac{dy}{dn} \tag{8.34}$$

saame avaldisele (8.33) kuju

$$\tau = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn}\right) = -\frac{d\varphi}{dn}. \tag{8.35}$$

Seega on nihkepinge punktis B määratud membraani läbipainde tõusuga punkti B läbiva samaläbipaindejoone normaali suunas (võetuna miinusmärgiga). Seega vastab suurimale väändepingele membraani läbipainde suurim tõus. Teisisõnu, maksimaaalsed nihkepinged mõjuvad punktides, kus isojooned paiknevad üksteisele kõige lähemal.

Väändemomendi avaldisest (8.17) saab järeldada, et kahekordne paindunud membraaniga piiratud ruumala on võrdne väänedemomendiga (loomulikult eeldusel, et membraani puhul on tehtud asendus $2G\vartheta \to q/S$).

Eksperimentaalsete uuringute korral kasutatakse membraanina seebikilet. „Katsekehaks” on (tasapinnaline) plaat, kuhu on lõigatud uuritava ristlõike kujuline ava. Kui eesmärgiks on pingete otsene määramine eksperimendist, siis tehakse samasse plaati võrdluseks ka ringikujuline ava. Allutades nüüd mõlemat ava katvad membraanid võrdsele survele[1] saame vajalikud väärtused suhtele q/S, mis vastab suurusele $2G\vartheta$. Viimane on sama mõlema väänatava varda jaoks. Seega, tingimusel, et väändenurk varda pikkusühiku kohta ja nihkeelastsusmoodul G on mõlemal vardal võrdne, saame võrrelda pingeid uuritava ristlõikega vardas pingetega ümarvardas mõõtes kahe seebikile kalded. Tõsi küll, pingekontsentaatorite lähedal võib seebikile meetod anda ebatäpseid tulemusi. Aljaotuses 8.6 refereeritav elektriline analoogia annab siin täpsemaid tulemusi.

[1] Katsed näitavad, et mõlemas kiles tekkivad tõmbejõud võib sel juhul lugeda praktiliselt võrdseks.

8.4 Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne

Vaatleme varrast, mille ristlõike laius c on väike võrraldes kõrgusega h (jooonis 8.6). Antud juhul saame lahendi kasutades membraananaloogiat järgmisel kujul: hülgame ristküliku lühikeste külgede mõju ja eeldame, et membraani pind on silindriline (läbipainded on seejuures väikesed).

Sellisel juhul saab membraani läbipainded määrata niidi mehaanikast tuntud valemi

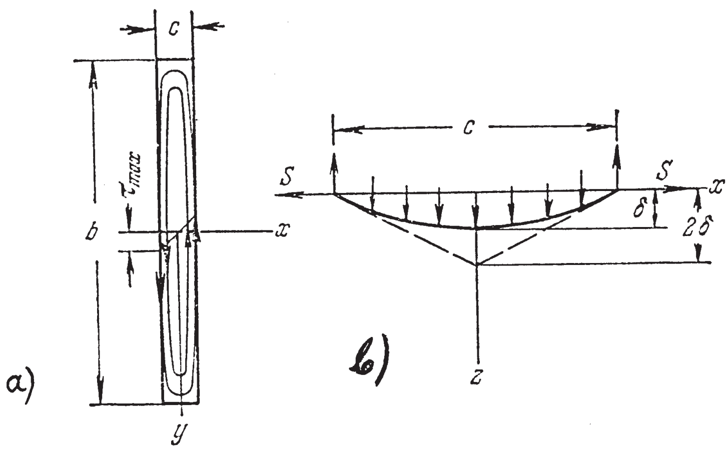
$$w = \frac{4\delta}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - x^2\right), \tag{8.36}$$

abil (vt. joonis 8.6 b)). Viimases valemis esinev suurus

$$\delta = \frac{qc^2}{8S} \tag{8.37}$$

määrab läbipainde maksimaalse väärtuse (st. läbipainde kohal $x = 0$). Valem (8.36) on tuntud kui painduva niidi (paraboolsete) läbipainete valem. Vastavalt läbipainde valemile (8.36) on membraani kalle (parabooli tõus)

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{q}{S}x. \tag{8.38}$$



Joonis 8.6: Varda ristlõige ja maksimaalsed nihkepinged — a) ja vastava membraanani läbipaine — b).

Parabooli maksimaalne tõus vastab servapunktile ja on

$$\left|\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\pm c/2}\right| = \frac{qc}{2S}. \tag{8.39}$$

Membraani ja x, y tasandiga piiratud „keha” ruumala

$$V = \frac{2}{3}c\delta b = \frac{qbc^3}{12S}. \tag{8.40}$$

Kasutades membraananaloogiat ja asendades valemites (8.39) ja (8.40) suuruse q/S suurusega $2G\vartheta$, saame

$$\tau_{\max} = cG\vartheta \quad \text{ja} \quad M_t = \frac{1}{3}bc^3G\vartheta. \tag{8.41}$$

Viimasest omakorda

$$\vartheta = \frac{3M_t}{bc^3G} \quad \text{ja} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{bc^2}. \tag{8.42}$$

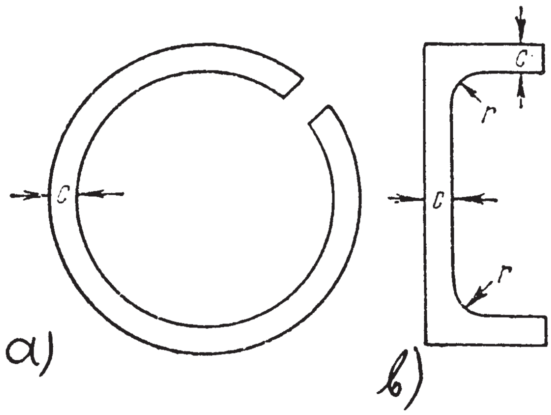
Rakendades membraananaloogiat valemile (8.38) saame leida nihkepinged väänatud vardas

$$\tau_{yz} = 2G\vartheta x. \tag{8.43}$$

Leides sellele pingejaotusele vastava väändemomendi

$$M_t^* = 2b\int_0^{c/2} \tau_{yz}x dx = \ldots = \frac{bc^2\tau_{\max}}{6}, \tag{8.44}$$

näeme, et see on 2 korda väiksem kui valemiga (8.41) määratud M_t. Teise poole momendist M_t annavad pinged τ_{xz}, mis on väikesed võrraldes pingetega τ_{yz} ja omavad maksimaalset väärtust ristõike lühemal küljel. Kuna aga jõu õlg on nende jaoks suur, siis summaarselt annavad nad ikkagi poole väändemomendist M_t.



Joonis 8.7: Õhukeseseinalised avatud ristlõiked.

Valemeid (8.41) ja (8.42) võib kasutada ka näiteks joonisel 8.7 kujutatud õhukeseseinaliste avatud ristlõigete korral. Siin tuleb vaid võtta b võrdseks ristlõike keskjoone pikkusega. Teisisõnu, ristlõige tuleb mõtteliselt sirgestada.

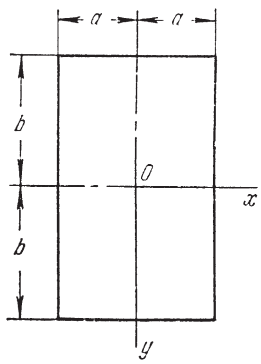
Sellist lähenemist saab kasutada väga erineva kujuga torude (õõnsate varraste) puhul, eeldades, et seina paksus c on väike võrreldes ristlõike diameetriga (kõrgusega, laiusega) ning ristlõige on avatud. Sellisel juhul membraani kalle ja ruumala, mille ta määrab erineb vähe ristkülikulise varda vastavatest suurustest. Tuleb märkida, et joonisel 8.7 b) kujutatud juhul leiab ristlõike nurkades aset märgatav pingete kontsentratsioon.

8.5 Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne

Vaatleme ristkülikulise ristlõikega varrast (kõrgus $2b$ ja laius $2a$, joon. 8.8). Kasutame mebraananaloogiat, st. plaadi ristlõike kujulise membraani läbipainded peavad rahuldama võrrandit (8.30):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \tag{8.45}$$

ja olema plaaadi servades $x = \pm a$ ja $y = \pm b$ võrdsed nulliga.



Joonis 8.8: Ristkülikuline ristlõige

Kuna läbipainded on antud juhul sümmeetrilised nii x kui y telje suhtes, siis on nii (8.45) kui rajatingimused rahuldatud kui anda läbipainded ette kujul

$$W = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} b_n \left(\cos\frac{n\pi x}{2a}\right) Y_n, \tag{8.46}$$

kus $b_1, b_3, \ldots$ on konstandid ja $Y_1, Y_3, \ldots$ funktsioonid, mis sõltuvad vaid muutujast y.

Funktsioonide Y_n määramiseks väljendatakse (8.45) parem pool Fourier' reana, st., esitatakse kujul

$$-\frac{q}{S} = -\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{q}{S}\frac{4}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{n\pi x}{2a}. \tag{8.47}$$

Seejärel rahuldadakse rajatingimused ja sümmetriatingimused ning saadakse

$$Y_n = \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3 b_n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right). \tag{8.48}$$

Asendades saadud funktsioonid (8.48) läbipainde avaldisse (8.46) saame

$$W = \frac{16qa^2}{S\pi^3}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right)\cos\frac{n\pi x}{2a} \tag{8.49}$$

Asendades nüüd suuruse q/S suurusega $2G\vartheta$ saame esitada pingefunktsiooni kujul

$$\varphi = \frac{32G\vartheta a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right)\cos\frac{n\pi x}{2a}. \tag{8.50}$$

Pingekomponentide τ_{xz} ja τ_{yz} määramiseks tuleb nüüd differntseerida avaldist (8.50)

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{16G\vartheta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{2a}. \tag{8.51}$$

Eeldades, et $b > a$ saame, et maksimaalne nihkepinge mõjub pikemate külgede $x = \pm a$ keskpunktides (see vastab membraani läbipainde maksimaalsele kaldele). Pannes $x = a$ ja $y = 0$ ja arvestades, et $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$, saame

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta a - \frac{16G\vartheta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2\cosh\frac{n\pi b}{2a}}. \tag{8.52}$$

Kui $b > a$, siis koondub (8.52) paremal pool olev lõpmatu rida väga kiiresti ja $\tau_{\max}$ määramine fikseeritud suhte b/a puhul ei valmista raskusi. Näiteks väga kitsa ristlõike puhul on suhe b/a väga suur ja lõpmatu rea avaldise (8.52) paremal poolel võib hüljata. Tulemuseks saame

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta a, \tag{8.53}$$

mis on kooskõlas alajaotuses 8.4 esitatud valemiga (8.43) või (8.41) ($c = 2a$).

Tabel 8.1: Suhte b/a ja konstantide k, k_1 ja k_2 vaheline seos.

b/a	1	1.2	1.5	2	2.5	3	4	5	10	100	∞
k	0.675	0.759	0.848	0.930	0.968	0.985	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000
k_1	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.331	0.333
k_2	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.292	0.312	0.331	0.333

Ruudukujulise ristlõike puhul $a = b$ ja

$$\tau_{\max} = 1,351G\vartheta a. \tag{8.54}$$

Üldjuhul esitatakse maksimaalne nihkepinge kujul

$$\tau_{\max} = 2Gk\vartheta a, \tag{8.55}$$

kus kordaja k väärtus sõltub suhtest b/a (vt. tabel 8.1).

Et leida väändemomendi M_t ja väändenurga ϑ vahelist seost, tuleb leida integraal (vt. (8.17))

$$M_t = 2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\varphi dxdy. \tag{8.56}$$

On ilmne, et ka see integraal avaldub lõpmatu rea kujul. Analoogiliselt nihkepingega, koondub ka see rida $b > a$ puhul ning tuues sisse suhtest b/a sõltuvad

kordajad k_1 ja k_2 (vt. tabel 8.1) saame väändemomendi M_t ja väändenurga ϑ vahelise sõltuvuse kujul

$$M_t = k_1 G\vartheta(2a)^3 2b \tag{8.57}$$

ja maksimaalse nihkepinge ning väändemomendi vahelise seose

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2(2a)^2 2b}. \tag{8.58}$$

Teisest peatükist (või tugevusõpetuse kursusest) on tuttavad valemid

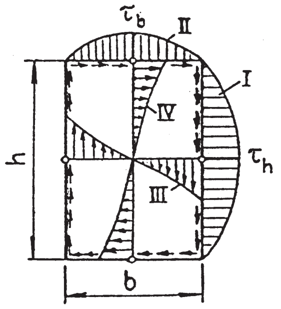
$$\tau_h = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = k_h hb^2, \quad \tau_b = k_b\tau_h$$

ja tabel 8.2 koos vastava joonisega, mis on kooskõlas siin esitatud lahendusega. Teises peatüki vastavas alajaotuses („Väändepinged mitteümarristlõigetes") esitatud konstantide tabel koos joonisega on pärit prof. Aleksander Klausoni tehnilise mehaanika loengukonspektist ning on praktiliselt samal kujul esitatud uues tugevusõpetuse õpikus[2]. Tabel 8.2 pärineb aga prof. Jaan Metsaveere ja dots. Uusi Raukase koostatud õppevahendi „Varda sisejõud ja pinged" ühest

[2]Klauson, J. Metsaveer, P. Põdra, U. Raukas, Tugevusõpetus, Tallinn, TTÜ Kirjastus, 2012.

varasemast trükist. Siin on lisaks esitatud veel tabel 8.3, kus on toodud vastavate konstantide väärtused pisut suurema täpsusega. On selge, et tabelis 8.1 toodud konstandi k_2 ja tabelites 8.2 ning 8.3 esitatud konstandi k_h väärtused langevad kokku.

Tabel 8.2: Suhte h/b ja konstantide k_h ja k_b vaheline seos ning maksimaalsed nihkepinged (Metsaveere ja Raukase põhjal).

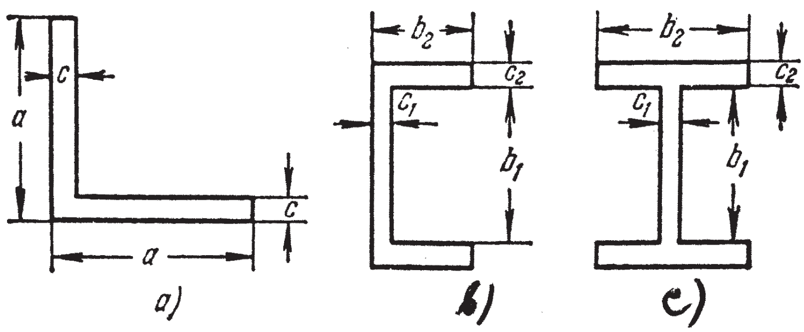


h/b	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
k_h	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
k_b	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

Tabel 8.3: Suhte h/b ja konstantide k_h ja k_b vaheline seos.

h/b	1	1.2	1.5	2	2.5	3	4	5	10	100	∞
k_h	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.292	0.312	0.331	0.333
k_b	1.000	0.931	0.859	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

8.6 Valtsmetallist varraste (talade) vääne



Joonis 8.9: Kolm erinevat valtsmetallist tala ristlõiget: a) — „nurkraud"; b) — „karpraud"; c) „I-raud".

Vaatleme nn. nurkprofiilist, karpprofiilist ja I-profiilist talade väänet (joonis 8.9). Rakendame alajaotuses 8.4 saadud tulemusi kitsa ristkülikulise tala jaoks, st. valemeid

$$\vartheta = \frac{3M_t}{bc^3G} \quad \text{ja} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{bc^2}, \tag{8.59}$$

kus b tähistab ristküliku kõrgust ja c laiust.

Nurkprofiili puhul tuleb valemis (8.59) võtta $b = 2a - c$. Karpprofiili ja I-profiili puhul tuleb ristlõige lahutada kolmeks ristkülikuks ning eeldada, et vaadeldava ristlõike väändejäikus võrdub ristkülikute väändejäikuste summaga, st. $(8.59)_1$ tuleb suurus bc^3 asendada suurusega $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$. Seega antud juhul väändenurk

$$\vartheta = \frac{3M_t}{(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)G}. \tag{8.60}$$

Ristlõike servas mõjuvate maksimaalsete nihkepingete määramiseks (hindamiseks) kasutatakse valemit $(8.41)_1$, st. valemit $\tau = c\vartheta G$. Seega näiteks I-tala vöös mõjuva nihkepinge hindamiseks saab kasutada valemit[3]

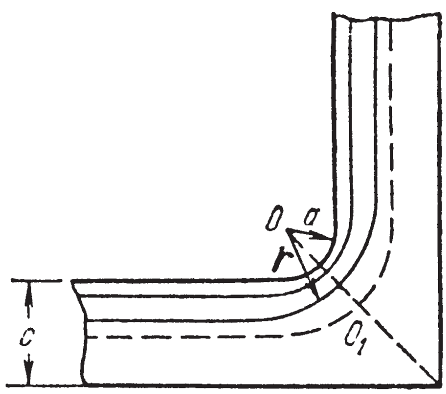
$$\tau_{\max} = \frac{3M_tc_2}{b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3}. \tag{8.61}$$

Vaadeldavate ristlõigete nurkades ilmneb oluline pingete kontsentratsioon. Vaatleme näitena nurkprofiili seinapaksusega c (joonis 8.10). Tähistame ümardatud sisenurga raadiuse a. Kasutades membraananaloogiat saame nurgas mõjuva maksimaalse nihkepinge jaoks hinnangu

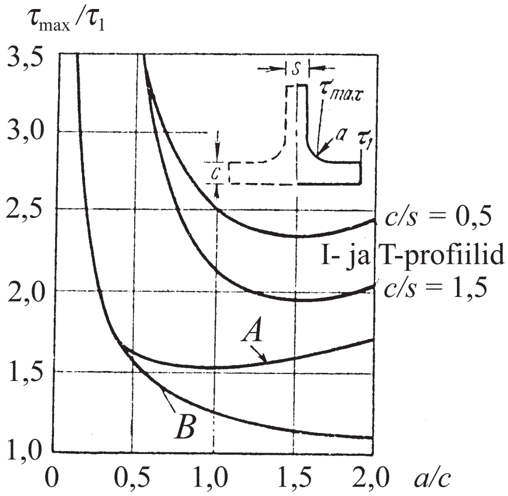
[3]Meenutame, et valemid kitsa ristkülikulise ristlõike jaoks saadi eeldusel, et membraan oli kitsamast otsast lahti, järelikult $\tau = const$ piki pikemat külge.

$$\tau_{\max} = \tau_1 \left(\frac{c}{4a}\right), \tag{8.62}$$

kus τ_1 tähistab seinas mõjuvat nihkepinget. Näiteks $a = 0,5c$ puhul $\tau_{\max} = 1,5\tau_1$ ja $a = 0,1c$ puhul $\tau_{\max} = 3,5\tau_1$.



Joonis 8.10: Pingete kontsentratsioon nurkprofiili korral.



Joonis 8.11: Suhe $\tau_{\max}/\tau_1$ sõltuvana suhtest a/c.

Joonis 8.11 esitab pingete kontsentratsiooni iseloomustava suhte $\tau_{\max}/\tau_1$ sõltuvana kõverusraadiuse ja seina paksuse suhtest a/c. Siin vastavad alumised kõverad nurkprofiilile. Kõver A on saadud numbriliselt kasutades lõplike vahede meetodit ja esitab täpsemaid tulemusi kui kõver B, mis vastab valemile (8.62). Samal ajal on selge, et $a/c < 0,3$ korral annab valem (8.62) täpse tulemuse.

Ülemised kaks kõverat iseloomustavad pingete kontsentratsiooni I- ja T-profiilides kahe erineva seina ja vöö paksuste suhte c/s jaoks. Viimased tulemused on saadud eksperimentidest, kus pingefunktsiooni φ analoogiks on elektriline potentsiaal V konstantse voolutiheduse i puhul. Vastav võrrand omab kuju

$$\nabla^2 V = -\rho i, \tag{8.63}$$

kus ρ on plaadi takistus (konstantne). Katse käigus hoitakse plaadi servas konstantset potentsiaali. Sellisel juhul on meil jällegi täielik analoogia võrranditega (8.14) ja rajatingimustega (8.15). Rakendades viimati käsitletud analoogiat nurkprofiilile, saadakse joonise 8.11 kõver A.