

# Peatükk 2

## Sisejõud ja pinged

Käesolevas peatükis rakendatakse varrastes ja talades tekkiivate pingete analüüsimiseks tugevusõpetuses (ja tehnilises mehaanikas) kasutatavaid hüpoteese, printsiipe ja meetodeid. Teisisõnu, käesolevas peatükis on vaatluse all nn. elementaarteooriale vastavad lahendid.

---

### 2.1. Välisjõud

### 2 - 2

## 2.1 Välisjõud

Deformeeruvat keha võib vaadelda koosnevana punktmassidest ja seega on tegu punktmasside (mehaanikalise) süsteemiga<sup>1</sup>. Sise- ja välisjõudusid käsitleti ka *jäiga keha mehaanika* kursuses (tavaliselt dünaamika kursuses enne dünaamika tildteoreeme). Kõigepealt tuli määratleda vaadeldav keha (või punktmasside süsteem) ning seejärel defineeriti sise- ja välisjõud järgmiselt: *sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist ja *välisjõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi mittekuuluvad punktmassid mõjutavad vaadeldavasse süsteemi kuuluvaid punktmasse. Analooogiliselt defineeritakse sise- ja välisjõud ka pideva keskkonna mehaanikas (k.a. elastsusteoorias):

- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või keskkonnana) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.
- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja

---

<sup>1</sup>Vt. ka „Dünaamika“ kursusest.

punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

Välisjõud jagunevad pind- ja mahujõududeks.

- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punktmassile. Näiteks gravitatsioonijõud.

Pindjõud mõjub alati läbi mingi pinna ja seetõttu on tema dimensioon tavaliselt sama, mis pingel, s.t.  $N/m^2$ . Piirjuhul, kui pind millel koormus mõjub on väga väike, asendatakse pindjõud sellel pinnal mõjuva pindjõudude resultantiga, s.t. tihedusega, mida nimetatakse *punktjõuks ehk koondatud jõuks*. Koondatud jõu dimensioon on loomulikult  $N$ . Kaks võrdvastupidist koondatud jõudu, millel on erinevad mõjusirged, moodustavad *koondatud momendi*. *Mahujõudude* dimensioon on  $N/m^3$  ja *massijõududel*  $N/kg$ .

*Toereaktsioonid* kuuluvad välisjõudude hulka. Tugevusõpetuse (ja elastsusteooria) seisukohast olulisemad tugevde tüübid<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Vaata lisaks staatika kursusest.

### 2.1. Välisjõud

### 2 - 4

- 2D liikuv liigendtügi e. liigend — 1 jõud,
- 2D liikumatu liigendtügi e. liigend — 2 jõudu,
- 2D jäik kinnitus — 2 jõudu ja 1 moment,
- 3D jäik kinnitus — 3 jõudu ja 3 momenti.

### Staatikaga määratud ja staatikaga määramata konstruktsioonid.

- Staatikaga määratud konstruktsioonide toereaktsioonide leidmine toimub staatika tasakaaluvõrrandite, printsiipide ja aksioomide abil, s.t. täpselt samuti kui seda tehti staatika kursuses.

— Tasapinnalised ülesanded — kuni 3 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

— 3D (ruumilised ülesanded) — kuni 6 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

— Konstruktsioon loetakse jäigaks.

— Jaotatud koormused asendatajkse üksikjõududega.

- Jõudu võib käsitleda libiseva vektorina.
- Jne., vaata lisaks staatika kursusest.
- Staatikaga määramata konstruktsioonide toereaktsioonide leidmise meetodeid käsitletakse tugevusõpetuse ja ehitusmehaanika kursustes. Sel juhul tuleb arvesse võtta kuidas konstruktsioon deformeerub.

## 2.2 Sisejõud ja lõikemeetod

Vastavalt Newtoni III seadusele mõjutavad kaks punktmassi teineteist võrdvastupidiste jõududega. Välisjõudude puudumisel mõjuvad tahke keha punktmasside vahel molekulaarse päritoluga jõud, mis tagavad talle m. kujuja mahupüsivuse. Seda sorti jõud (mis oma olemuselt on samuti sisejõud) elastsusteooria ja tugevusõpetuse seisukohalt tildjuhul huvi ei paku ja neid arvesse ei võeta. Teisisõnu:

- kuna algolekus (välisjõudude puudumisel) loeme me kehad pingetest ja deformatsioonidest vabadeks, siis eeldatakse, et algolekus sisejõud puuduvad;

---

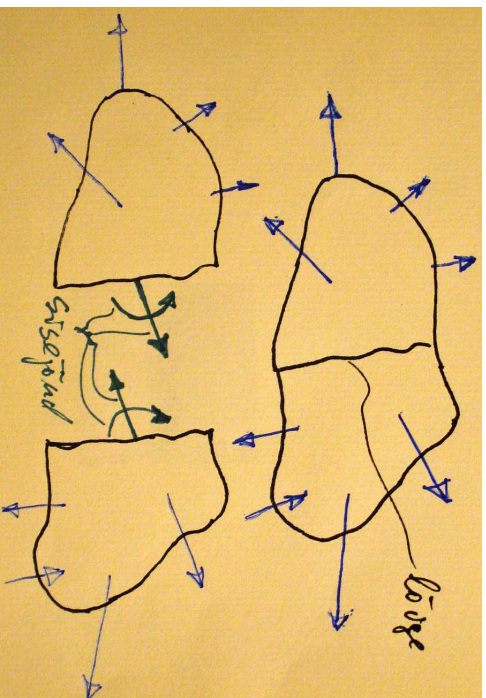
### 2.2. Sisejõud ja lõikemeetod

- meid huvitavad vaid sellised sisejõud, mis ilmnevad kehale rakendatud välisjõudude tulenusena.

Keha sisejõudude ja pingete määramise juures mängib tähtsat rolli lõikemeetod, mille idee on järgmine.

- Vaatleme tasakaalus olevat keha ja lõikame ta mõtteliselt kaheks osaks.
- Selleks, et mõlemad osad oleksid ka pärast (mõttelist) tükeldamist tasakaalus tuleb äralõigatud osa mõju asendada jõududega. Neid jõudusid nimetataksegi (vaadeldavas keha lõikes mõjuvateks) *sisejõududeks*.

Kuna enne (mõttelist) lõiget olid vaadeldava keha osad omavahel järgalt tihendatud, siis me toimime sisejõudude määramise juures analoogiliselt jäigale kinnitusele vastavate toereaktsioonide leidmisele staatika kursuses. Viimased peavad välistama nii lõikepinna punktide siirded kui pöörded. Staatika kursusest on teada, et tasapinnalise jõusüsteemi korral on sellisteks reaktsioonideks kaks jõudu ja üks moment ning 3D jõusüsteemi korral kolm jõudu ja kolm momenti.



Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

Rangemalt öeldes on jäiga kinnituse reaktsioonideks siiski üks jõud ja üks moment – reaktsioonjõudude peavektor ja peamoment. Toereaktsioonide leidmise korral määratakse tavaliselt nende kahe vektori projektsioonid koordinaattelgedel. Viimaste abil saab omakorda määrata toereaktsioonide koordinaattelgedel sihilised komponendid. Tasapinnalisel juhul on neist kuuest komponendist kolm samaselt nullid. Täpselt sama loogika kehtib sisejõudude määramise korral.

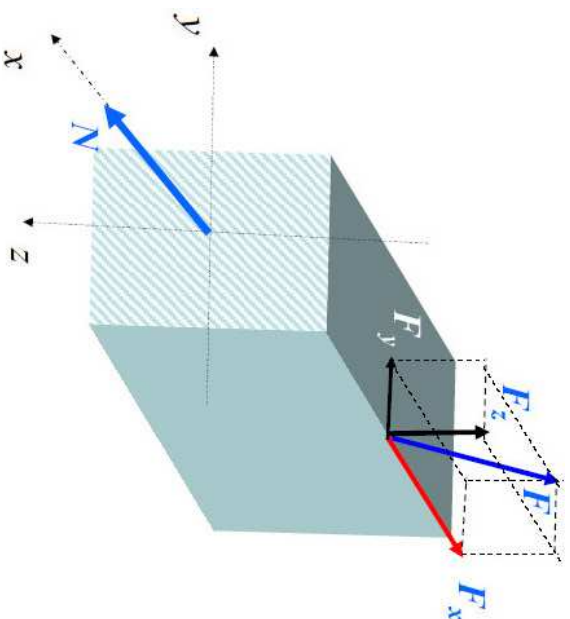
### 2.3. Sisejõudude liigid

Sisejõudude määramiseks tuleb vaadelda keha kumbagi poolt eraldi ning koostada staatikast tuntuud meetodeid kasutades tasakaaluvõrrandid, kust määratakse otsitavad sisejõud. Ettevaatlik tuleb siin olla juhtudel, kui lõige on tehtud jaotatud koormuse mõjumise piirkonnas. Sellisel juhul ei saa kogu jaotatud koormust asendada ühe jõuga nagu staatikas tehti. (Näide 2-1. Tala sisejõud. Lahendatakse loengus!)

## 2.3 Sisejõudude liigid

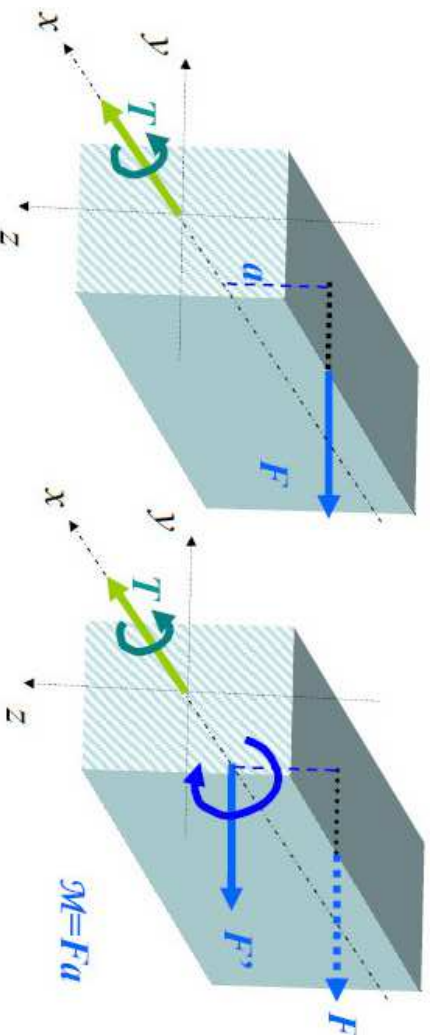
Varraste ja talade (ka plaatide) korral eristatakse sisejõududena *pikijõudu*, *väändmomenti*, *põkijõudu* ja *paindemomenti*. *Pikijõud* mõjub piki varda telge. Ta saab tekkida, kui välisjõududel on varda telje sihilisi komponente (joon. 2.2).

*Väändmoment* saab vardas tekkida siis, kui välisjõududel on komponente, mis annavad momente varda telje suhtes või talle on rakendatud pöördemoment, st. välismoment varda telje suhtes (joon. 2.3). Väändmoment pöörab varda ristlõikeid timber varda telje.



Joonis 2.2: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

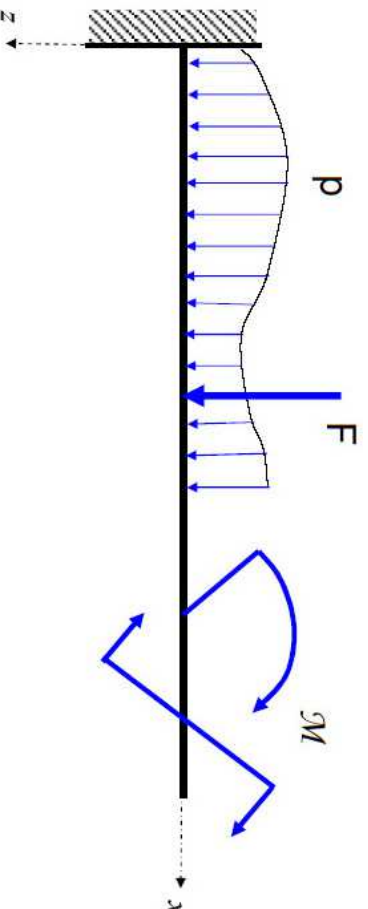


Taandades välisjõu  $F$  varda  $x$ -teljele saame välisjõu  $F'$  ja pöördemomendi  $\mathcal{M}$ .

Joonis 2.3: Vändemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

*Põikjõud* mõjub risti varda teljega ja ”üritab varrast läbi lõigata”. *Paindemomendi* toimel varras kõverdub. Need kaks sisejõudu saavad vardas tekkida siis kui talle mõjuvad välisjõud omavad varda teljega ristuvaid komponente. Lisaks võib *paindemoment* tekkida juhul kui vardale mõjub painet tekitav moment. Selliseid väliskoorumusi on kujutatud joonisel 2.4. Põikjõu sünonüümina kasutatakse ka terminit *lõikejõud*.

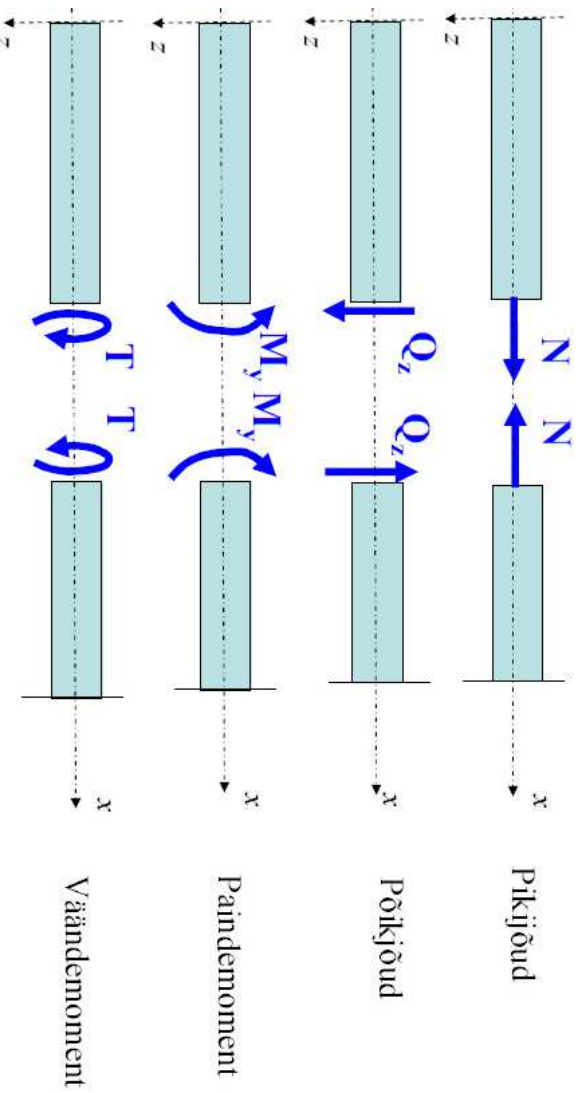


Joonis 2.4: Põikjõud ja paindemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

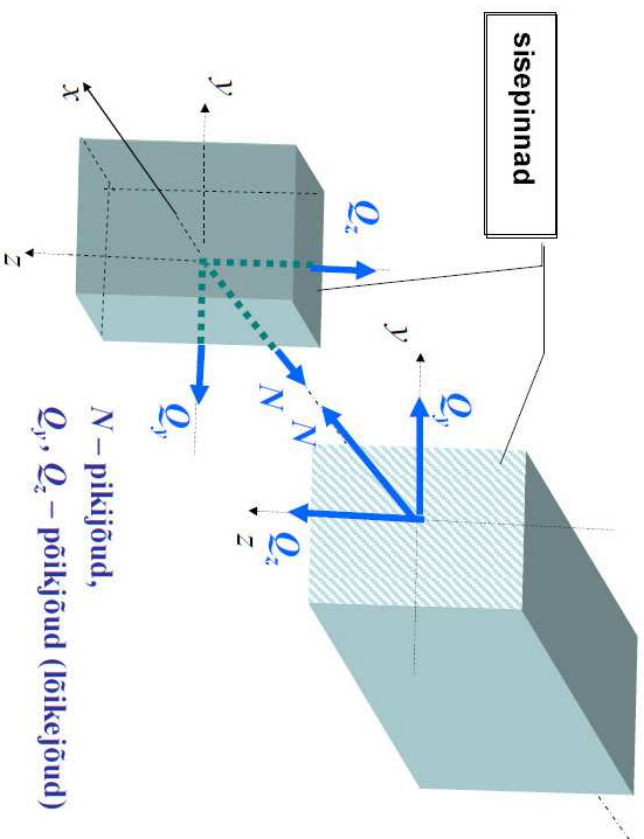
### 2.3. Sisejõudude liigid

Joonisel 2.5 on kujutatud käsitletud sisejõudusid tasapinnalisel (2D) juhul ja joonistel 2.6 ning 2.7 3D juhul. Neil joonistel on kasutatud sisejõudude tavapäraseid tähistusi: pikijõud –  $N$ , väändemoment –  $T$ , põikjõud –  $Q$  ja paindemoment –  $T$ .

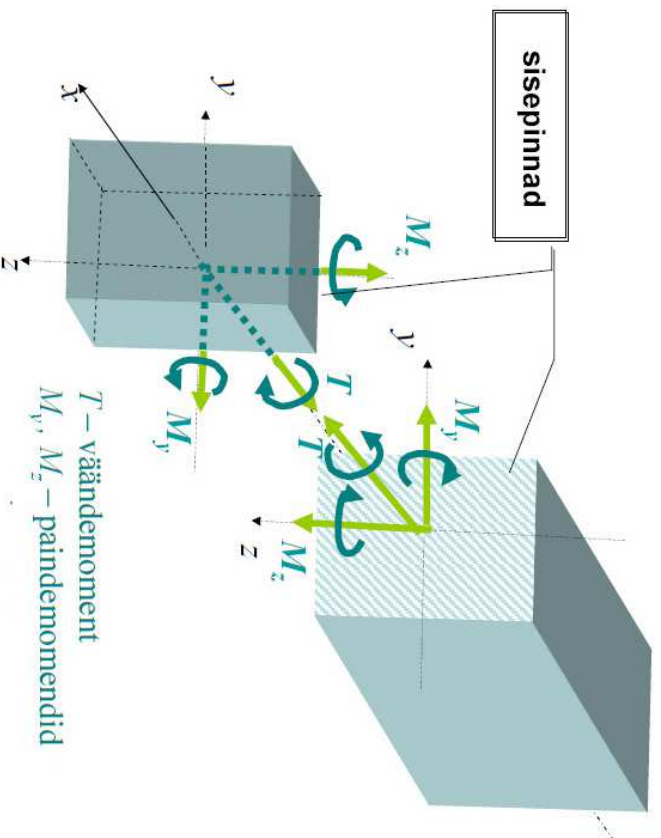


Joonis 2.5: Sisejõudude liigid – 2D juht.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)



Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — pikki- ja põikjõud 3D juhul.  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)



Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemomendid 3D juhul.  
NB!  $M_z$  on siin negatiivne, teised positiivsed.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetist.)

## 2.4 Sisejõudude märgireeglid

Sisejõudude positiivsetele ja negatiivsetele suundadele on kehtestatud suhteliselt ranged märgireeglid<sup>3</sup>. Enne nende juurde asumist tuleb aga täpsustada koordinaattelgede asend ja tuua sisse mõned mõisted.

Tugevusõpetuses, ehitusmehaanikas ja mõnes muus mehaanika osas, kus käsitletakse varraste, plaatide ja koorikute mehaanikalist käitumist, on tihhti kombeks suunata vertikaalne koordinaattele alla. Kuna pöörde positiivne suund on seotud telgede asendiga, siis loetakse nüüd positiivseks tavapärasega võrreldes vastupidist pööret (vt. 1. peatükk lk. 8). Selline telgede asend oli eelmises alajaotuses juba kasutusel.

Mõttelisel lõikel tekkivat pinda nimetatakse *sisepinnaks* (vt. joon. 2.6 ja 2.7). Tavaliselt tehakse lõiked risti telgedega. Sel juhul saab defineerida positiivsed ning negatiivsed sisepinnad. Sisepinda nimetatakse *positiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattele positiivses suunas ja *negatiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattele negatiivses suunas. Joonistel 2.6 ja 2.7 kujutatud juhtudel on lõikamise käigus tekkinud tagumisel

---

<sup>3</sup>Tõsi küll, erinevte autorite õpikutes ja teatmeteostes võib kohata väga erinevaid märgireegleid.

vardaosal positiivne sisepind ja eesmisel vardaosal negatiivne sisepind. Joonisel 2.5 kujutatud 2D juhul on positiivne sisepind tekkinud varda vasakpoolsel osal ja negatiivne parempoolsel osal.

Tala painde uurimisel osutuvad tähtsateks nn. *positiivsed ja negatiivsed kiud*. Varda mõttelisi kiudusid nimetatakse positiivseteks kui  $z$ -koordinaat on selles tala osas positiivne. Ja vastupidi, varda mõttelisi kiudusid nimetatakse negatiivseteks kui  $z$ -koordinaat on selles tala osas negatiivne. Selline määratlus kehtib juhul kui tala paindub  $x - z$  tasapinnas (joon. 2.4). Kui paine toimub aga  $x - y$  tasapinnas, siis on positiivsed ja negatiivsed kiud määratud  $y$ -telje abil.

Graafiliselt on *sisejõudude positiivsed suunad* 2D juhu jaoks kujutatud joonisel 2.8 ning 3D juhu jaoks joonistel 2.6 ja 2.7 (välja arvatud  $M_z$ , mis on joonisel 2.7 negatiivne). Sõnastatult on sisejõudude märgireeglid järgmised.

- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
  - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.

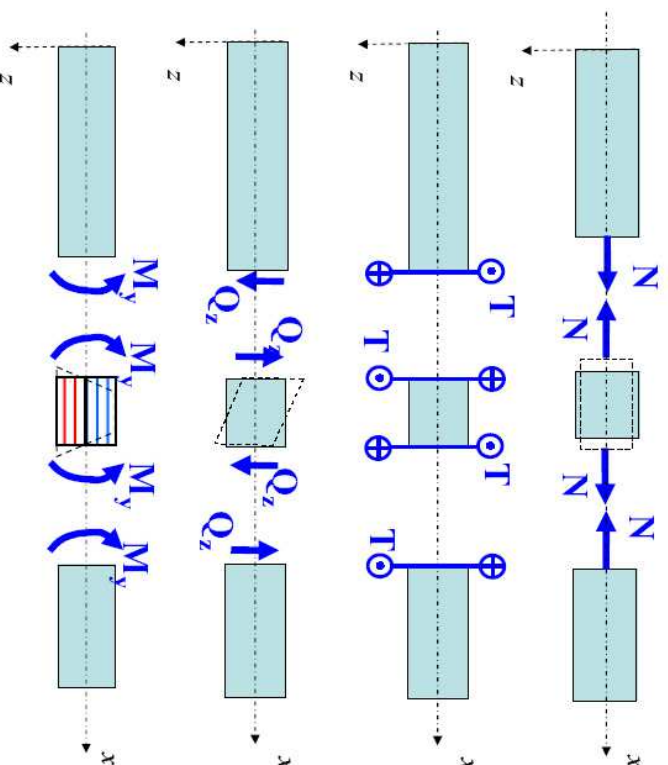


- **Väändemomendi positiivne suund** on määratud kruvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjuv väändemoment on positiivne kui väändemomendi suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
- **Positiivne põikjõud**  $Q_z$  mõjub positiivsel sisepinnal  $z$ -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal  $z$ -telje negatiivses suunas.
  - Analoogiline märgireegel kehtib ka põikjõu  $Q_y$  jaoks.
  - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne põikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
- **Positiivne paindemoment** tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
  - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

**Märkus:** Piki- ja põikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändemomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

#### 2.4. Sisejõudude märgireeglid

#### Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



2

Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

Sisejõudused on tavaliselt kasulik teada igas varda ristlõikes ning seetõttu on osutunud otstarbekaks esitada neid graafiliselt. Vastavaid graafikuid nimetatakse eesti keeles *epüürideks*<sup>4</sup>. Enam vähem analoogiliselt, st. epüüride abil, esitati staatika kursuses lauskoormusi ehk jaotatud koormusi. Epüüri kõrvale kirjutatakse tema nimi ja ühikud. Näiteks  $N$ -epüür kN, või lühidalt  $N$  kN.

Epüüride koostamist selgitame järgnevate näidete abil, millest näited 2.2 – 2.7 on eraldi failides:

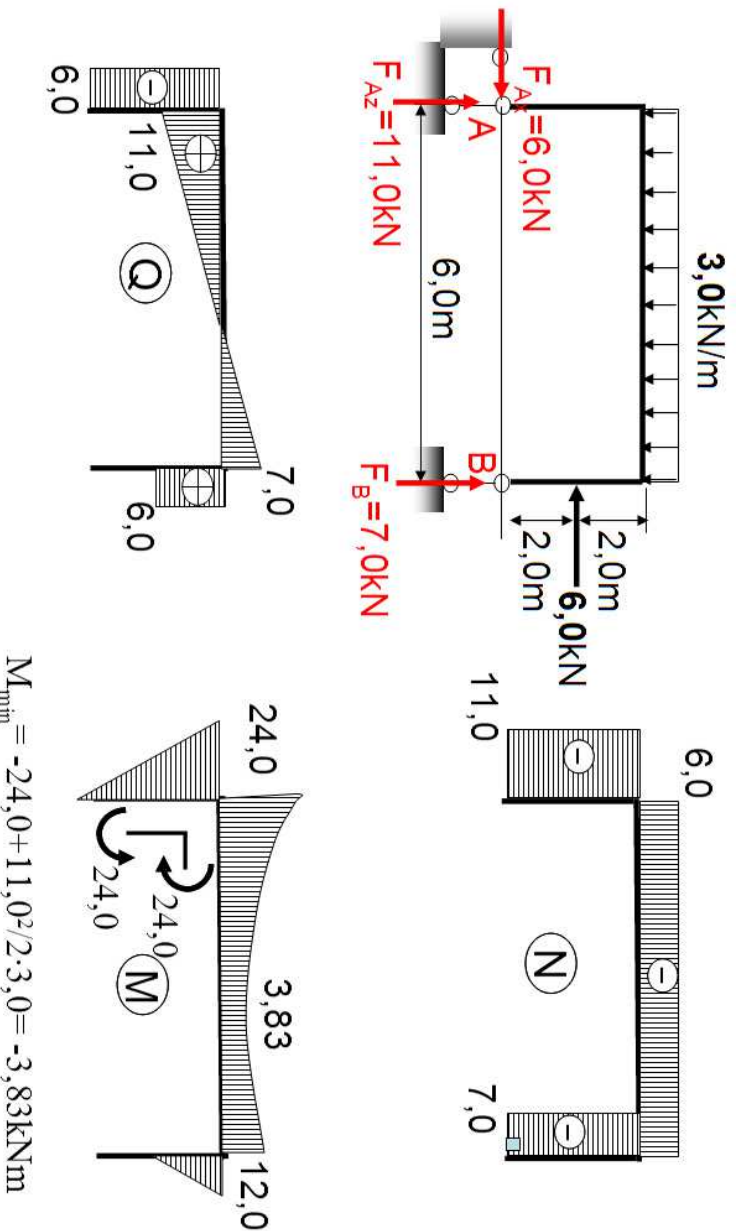
- pikijõud ja väändemoment – NAITTED 2.2-5.pdf
- põikjõud ja paindemoment – NAITTED 2.6-7.pdf

Näited 2.8 ja 2.9, mis pärinevad emeriitprofessor Jaan Metsaveere õppematerjalidest, on aga esitatud järgmisel kahel leheküljel.

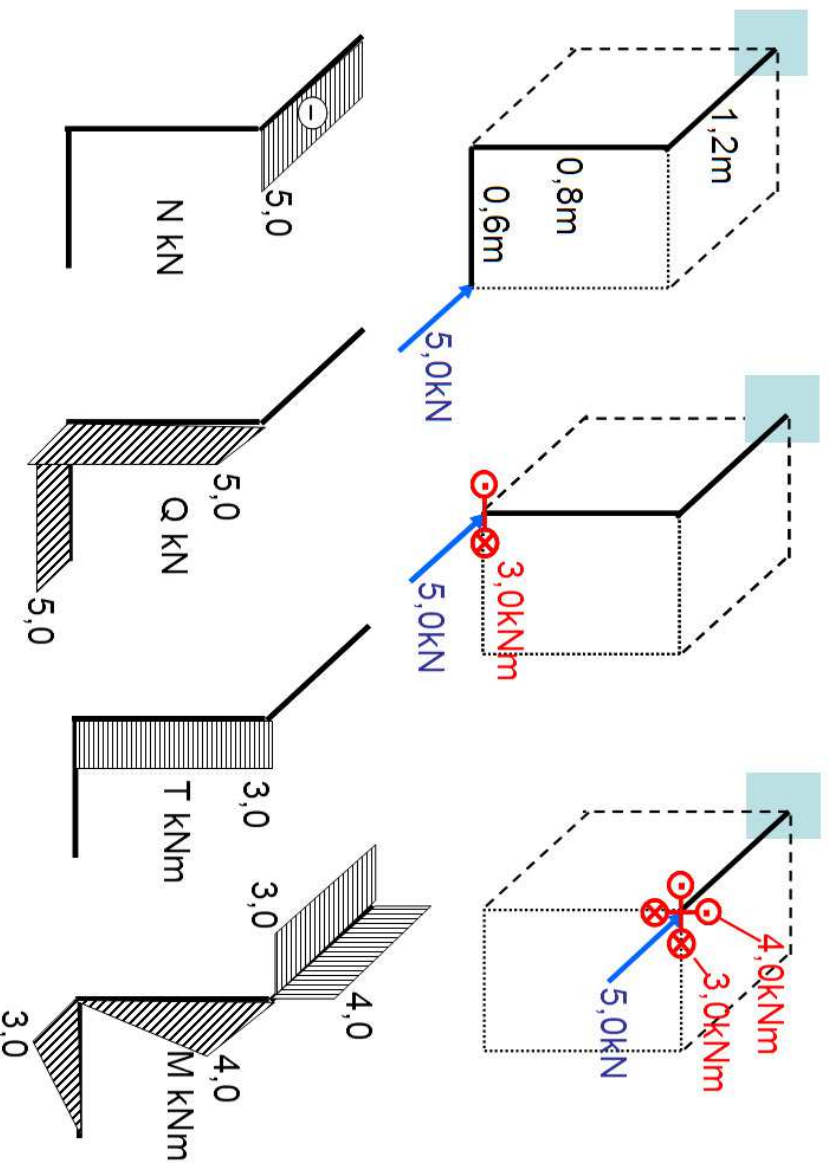
<sup>4</sup>Inglise keeles on epüüri vaste *diagram*, näiteks põikjõu epüür on inglise keeles *shear-force diagram*

#### 2.4. Sisejõudude märgireglid

Näide 2-8. Koostada tasandraami sisejõudude epüürid.



Näide 2-9. Koostada muritud varda sisejõudude epiüürid.

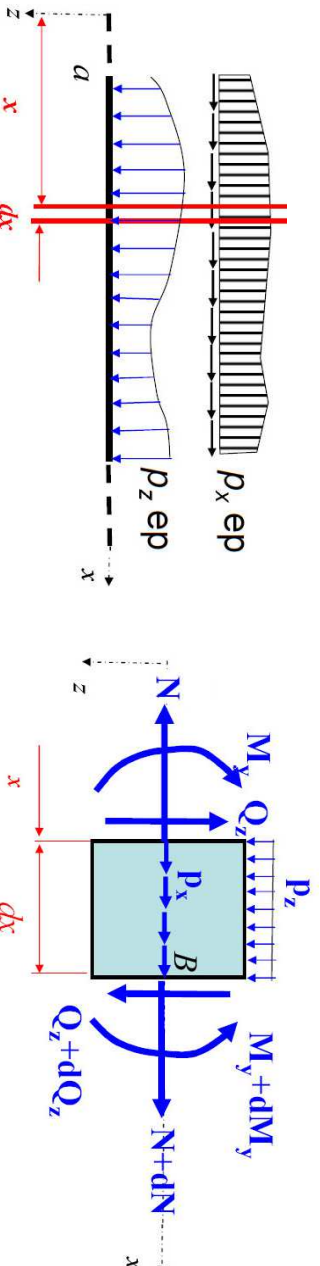


## 2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

2 - 22

### 2.5 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Vaatleme varda osa, kus piki telge mõjub lauskoormus intensiivsusega  $p_x$  ja risti teljega lauskoormus intensiivsusega  $p_z$ . Koordinaadil  $x$  on vardast ristlõigete abil eraldatud lõpmata lühike element pikkusega  $dx$  (joon. 2.9). Koostame selle elemendi jaoks tasakaaluvõrrandid, projekteerides kõik talle mõjuvad jõud  $x$ - ja  $z$ -teljele ning leides momentid punkti  $B$  suhtes.



Joonis 2.9: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsuse (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* leengukonspetsist.)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= N + dN - N + p_x \cdot dx = 0, \\ \sum_i F_{iz} &= Q_z + dQ_z - Q_z + p_z \cdot dx = 0, \\ \sum_i M_B(\mathbf{F}_i) &= -M_y - Q_z \cdot dx + M_y + dM_y + p_z \cdot dx \cdot (0, 5dx) = 0, \end{aligned}$$

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga  $dx$  läbijagamist, ning viimasest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalset:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga  $dx$  ning integreerime lõigul  $[a, x]$ :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

---

### 2.5. Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

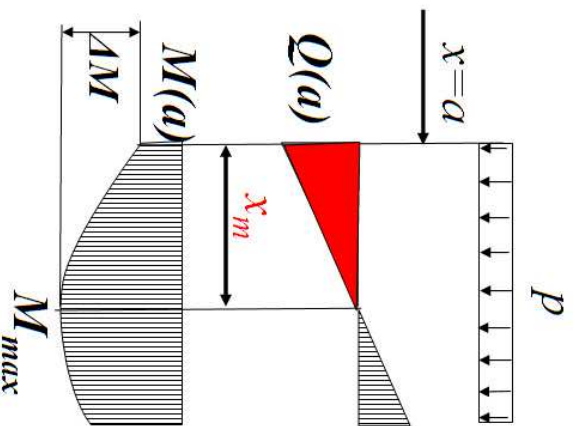
*Järeldused.* Äsjatuletatud seosed ning vaadeldud näited võimaldavad teha olulisi järeldusi sisejõudude epiüiride kuju (käitumise) kohta.

1. Piirkondades, kus lauskoormus puudub, on pikki- ja põikjõud konstantsed, paindemoment on aga sellises piirkonnas lineaarfunktsioon koordinaadist  $x$ .
2. Koondatud välisjõu rakenduspunkti toimub vastava sisejõu epiüüris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva välisjõu suurusega.
3. Koondatud välismomendi rakenduspunkti toimub painde- või väändemomendi epiüüris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva momendi suurusega.
4. Paindemomendi epiüüri tõus on võrdne põikjõuga. Kohas, kus põikjõud on null, on paindemomendil ekstremaalne väärtus.
5. Kohas, kus põikjõu epiüüris on hüpe, on paindemomendi epiüüris murdekohat (epiüüri tõus muutub hüppeliselt). Erijuhul, kui hüppe käigus muutub ka põikjõu märk, on paindemomendil selles kohas ekstreemum.
6. Piirkonnas, kus väline lauskoormus on konstantne, on põiki- ja pikijõud

lineaarsed funktsioonid koordinaadist  $x$ . Paindemoment on sellisel juhul aga ruutfunktsioon.

7. Epiüüride joonistamisel on otstarbekas meeles pidada, et määratud integraal esitab integreeritava funktsiooni graafiku ja  $x$ -telje vahele jääva kujundi pindala (lõigul  $[a, x]$ ).

Näide 2-10. Paindemomendi ekstreemumi määramine.



$$\Delta M = \frac{1}{2} Q(a) x_m,$$

kuna

$$x_m = Q(a)/p,$$

siis

$$\Delta M = Q^2(a)/2p$$

$$M_{max} = M(a) + Q^2(a)/2p$$

## 2.6. Pinge mõiste

2 - 26

## 2.6 Pinge mõiste

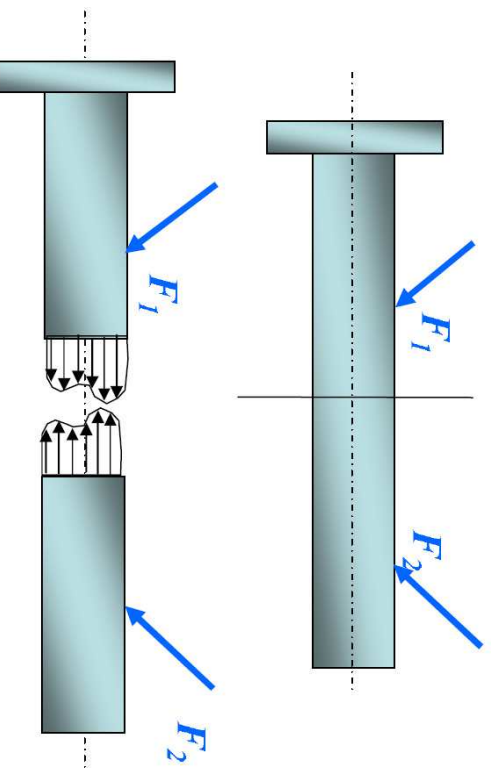
On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemetodi korral on sisejõud tegelikult jaotunud üle kogu lõikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud kuus sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedel.

Lõikepinnal mõjuva lauskoormuse intensiivsust nimetamegi *pingeks*. Tema mõõtühik  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$  langeb kokku rõhu ühikuga.

Kõige lihtsam on pinget arvutada juhul kui vardas mõjub vaid pikijõud. Siin eeldatakse, et pikijõud  $N$  on jaotunud ühtlaselt üle kogu lõikepinna  $A$  (joon. 2.11) ja seega pinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.3)$$

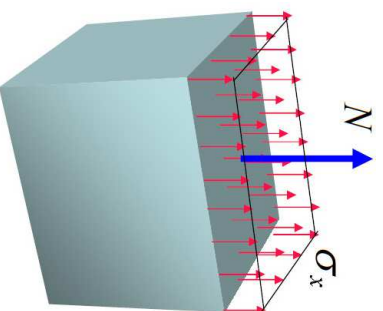
Oma olemuselt on vaadeldav pinge *normaalpinge*, sest ta mõjub risti vaadeldava pinnaga. Käesolevas kursuses tähistatakse normaalpingeid kreeka tähega  $\sigma$  ja vajadusel lisatakse indeks, mis osutab pinnanormaali sihile. Eestikeelsetes tugevusõpetuse ja tehnilise mehaanika õpikutes nimetatakse pikijõust põhjustatud normaalpingeid ka *pikikepingeteks*.



Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

Alajaotustes 2.2–2.6 kasutatud lähenemisiis, kus sisejõud jaotakse vastavalt sellele, kuidas nad on orienteeritud koordinaattelgde suhtes<sup>5</sup> ja pinged saavad oma nime selle järgi, millise sisejõuga on neil põhjuslik seos, on iseloomulik just tugevusõpetusele (tehnilisele mehaanikale). Sama lähenemisiisi on aga otstar-

<sup>5</sup>Koordinaatteljed orienteeritakse omakorda uuritava keha geometriast lähtudes.

Joonis 2.11: Pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

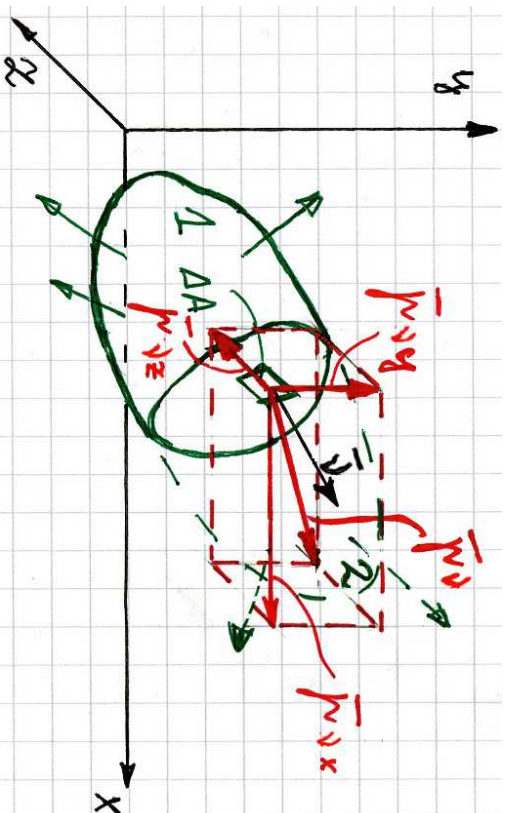
bekas rakendada ka elastusteooria tulesannete korral kui uuritavateks objektideks on vardad (talad), plaadid ja koorikud.

Järgmises alajaotuses selgitame pinge mõistet pisut tildisemalt ning tlejärgmises tuleme tagasi tugevusõpetuses kasutatava lähenemisiisi juurde ja hakkame uurima pingeid varda ristlõike punktis.

## 2.7 Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjuv pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.12).



Joonis 2.12: Pingevektor  $\mathbf{p}_\nu$  ja tema koordinaattelgedel  $xyz$  silhilised komponendid.

2.7. Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

2 - 30

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.

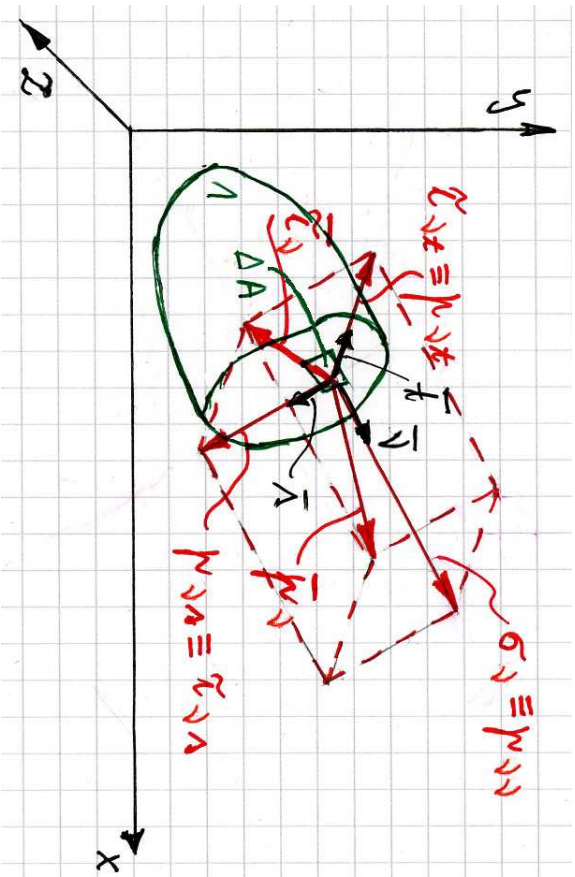
- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaliga  $\nu$ . Mõjugu väikesel pinnal  $\Delta A$  sisejõud  $\Delta \mathbf{S}$ . Suhet  $\Delta \mathbf{S} / \Delta A$  võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal  $\Delta A$ .

✓

- Kui minna piirile  $\Delta A \rightarrow 0$ , saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga*  $\nu$

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (2.4)$$

- Üldjuhul vektorite  $\nu$  ja  $\mathbf{p}_\nu$  suunad ei tihti.
- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingevektori asemel tema projektsioone koordinaattelgedel  $p_{\nu x}$ ,  $p_{\nu y}$ ,  $p_{\nu z}$ , mis omakorda määravad ära pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgedel  $xyz$  silhilised komponendid (vt. joon. 2.12). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormali sihti ja teine pinge-komponendi mõjumise sihti.

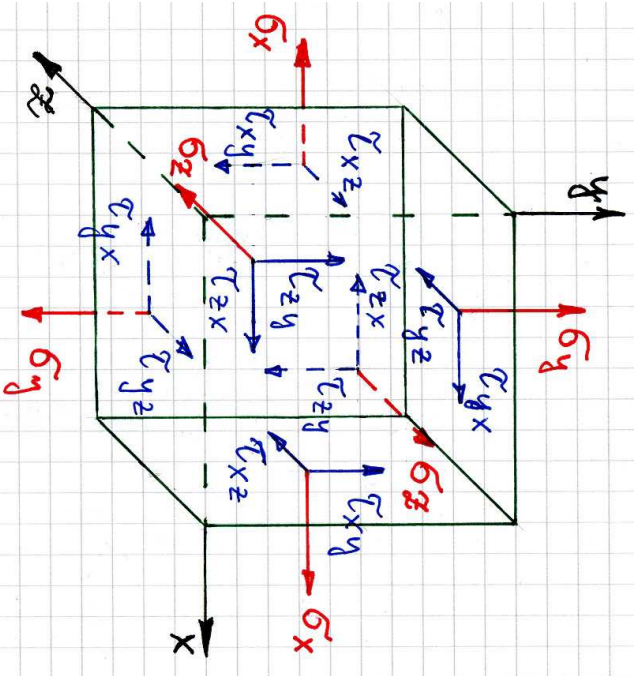


Joonis 2.13: Pingvektori  $p$ , lahutamise normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pingvektori lahutada **normaal- ja nihkepingeks**:  $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$ . Nihkepinge  $\boldsymbol{\tau}_\nu$  lahutatakse tavaliiselt veelkord kaheks komponendiks:  $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$  (vt. joon. 2.13, kus  $\mathbf{p}_{\nu\nu} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$ ,  $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$  ja  $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ ).

2.7. Pingvektor, tema projektioonid ja märgiregolid

Kui lõike pind on paralleelne koordinaatasanditega, siis kasutatakse indeksi  $\nu$  asemel lõikepinnale normaalks oleva koordinaattelje nime, näiteks  $x$ .



Märgiregolid: joonis 2.14.

- **Positiivne sisepind** on lõike pind, mille välisnormaal on suunatud koordinaadi positiivses suunas.
- **Positiivne normaalpinge** mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- **Positiivne nihkepinge** mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.



## 2.8 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja kuus nihkepinget  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada  $3 \times 3$  (tasandilisesannete korral  $2 \times 2$ ) tabelina nagu matrikseid.

Pingetensor iseloomustab täielikult *pingust* (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Selle juurde tuleme tagasi 4. peatükis, kui hakkame käsitlema pingeid kaldpindadel, peapingeid jms.

### 2.8.1 Skalaar, vektor, tensor

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tensoreid.

*Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus.

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

*Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund.

- 3D juhul esitatav arvukolmikuna —  $3 \times 1$  või  $1 \times 3$  matriksina.
  - Arvud arvukolmikus sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
  - Vektori moodul ja suund on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Vektori iga komponent (projektsioon) on samuti seotud tihed suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihete indekseid.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.

*Teist järku tensor* on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

- 3D juhul on teist järku tensor esitatav  $3 \times 3$  matriksina, st. 9 arvu abil.
  - Arvud matriksis sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
  - Tensor ise on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- Teist järku tensori komponentide tähistamisel kasutatakse kahte indeksit, sest iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda.
  - Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.

## 2.8. Pingetensor

## 2 - 36

- Teisest küljest (“matemaatiliselt”) on teist järku tensor  $\mathbf{T}$  defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori  $\mathbf{u}$  vektoriks  $\mathbf{v}$ , i.e.

$$\mathbf{T} : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

kus punkt  $\cdot$  tähistab tensori  $\mathbf{T}$  sisekorrutist<sup>7</sup> vektoriga  $\mathbf{u}$ .

### Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada  $3 \times 3$  maatriksina ja iga vektori arvukolmnikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga  $3 \times 3$  maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.
  - Pärast koordinaatiseisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.

<sup>7</sup>Punktkorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product*, *dot product*, *scalar product*.

- \* Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
- \* Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
- \* Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi  $xy$  ja  $x'y'$ , mille vaheiline nurk on  $\theta$ .

### Märkused:

- Vektoreid võib nimetada esimest järku tenseireiks ja skalaare nullindat järku tenseireiks.
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga).
  - Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

### 2.8.2 Pingetensori invariantid

#### Suuruseid

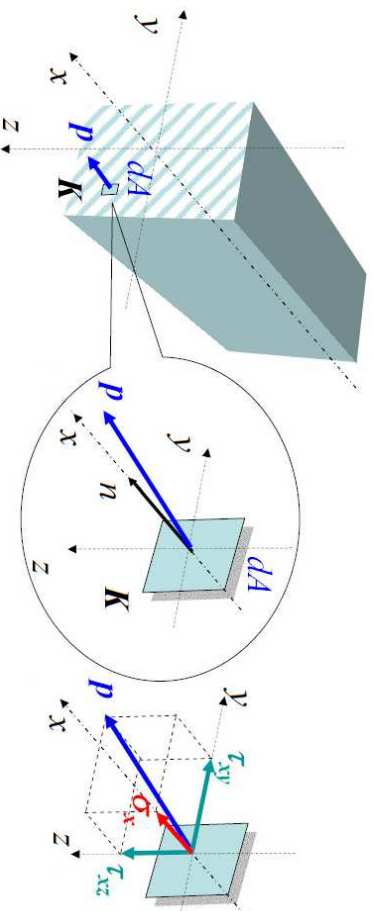
$$\begin{cases} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (2.6)$$

nimetatakse *pingetensori invariantideks* ehk lühidalt *pinge invariantideks*. Invariantis tähendab siin seda, et need kolm suurust ei sõltu koordinaatide valikust (vaatamata sellele, et pingetensori komponendid omavad erinevates koordinaatsüsteemides illdjuhul erinevaid väärtusi). On märkimisväärne, et see invariantis ei piirdu vaid erinevalt orienteeritud Descartes'i ristkoordinaatidega vaid kehtib suvaliste koordinaatsüsteemide, k.a. silindrilised, sfäärilised, elliptilised, hüperboolsed jne. vahel.

**Märkus:** Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

## 2.9 Pinged varda ristlõike punktis.

Varda korral on Descartes'i ristikordinaadid valitud tavaliselt nii, et  $x$ -telg on varda teljeks. Seetõttu on  $x$ -telg ristlõike normaaliks ja teised 2 koordinaattelge on suunatud mööda lõikepinda. Vaatleme varda ristlõike punkti  $K$ , mida läbib pind normaaliga  $\mathbf{n} \parallel x$ . Seal mõjub pingektor<sup>8</sup>  $\mathbf{p}$  mille normalkomponentideks on  $\sigma_x$  ning tangentsiaalkomponentideks  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .

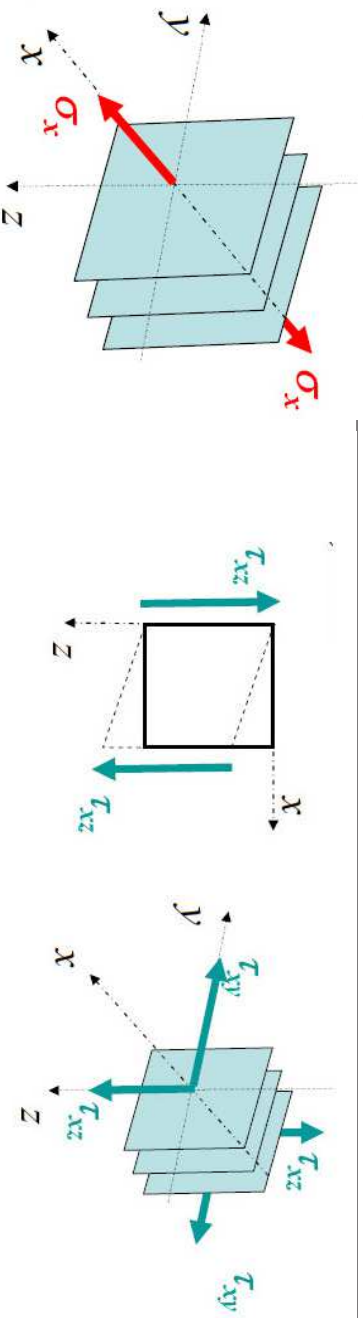


Joonis 2.15: Pinge varda punktis

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

<sup>8</sup>Siin oleme lihtiduse pärast loobunud indeksist  $\mathbf{n}$  pingektori juures.

### 2.9. Pinged varda ristloike punktis.



Joonis 2.16: Normaalpinge  $\sigma_x$  ning nihkepinged  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

- Normaalpinged  $\sigma_x$  iseloomustavad varda telje silhis mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad muudavad varda ristlõigete vahelist kaugust.
- Normaalpinge  $\sigma_x$  määrgireegel on analoogiline pikijõu määrgireeglga.
- Nihkepinged iseloomustavad varda teljega risti mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad nihutavad (või pööravad) erinevaid varda lõikeid (materjalikihte) üksteise suhtes.
- Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  määrgireegel on analoogiline põikjõu määrgireeglga.

## 2.10 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Pinge mõiste selgitamisega tegime algust alajaotuses 2.6, käesolevas alajaotuses tuletame seosed varda ristlõikes mõjuvate sisejõudude ja pingete vahel. Siinjuures peame silmas, et ristlõikes mõjuvad sisejõud ei kujuta endast mitte midagi muud kui samas ristlõikes mõjuvate pingete peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedele. Pikemalt seletades:

1. ristlõikes mõjuvad pinged moodustavad jõuvälja, mille saab vastavalt staatika põhiteoreemile taandada ristlõike pinnakeskmesse,
  - selle tulemusena on pinged asendatud ühe jõu ja ühe momendiga;
2. projekteerides saadud jõu ja momendi koordinaattelgedele saame peavektori ja peamomendi lahutada kolmeks koordinaattelgede sihiliseks komponendiks,
  - saadud kuus komponenti kannavad meile juba tuntud nimetusi – pikijõud ( $N$ ), põikjõud ( $Q_y$  ja  $Q_z$ ), väändmoment ( $T$ ) ning paindemoment ( $M_y$  ja  $M_z$ ).

---

### 2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

On selge, et rääkides seostest pingete ja varda sisejõudude vahel on võimalikud nn. kaks erinevat ülesande püstitust:

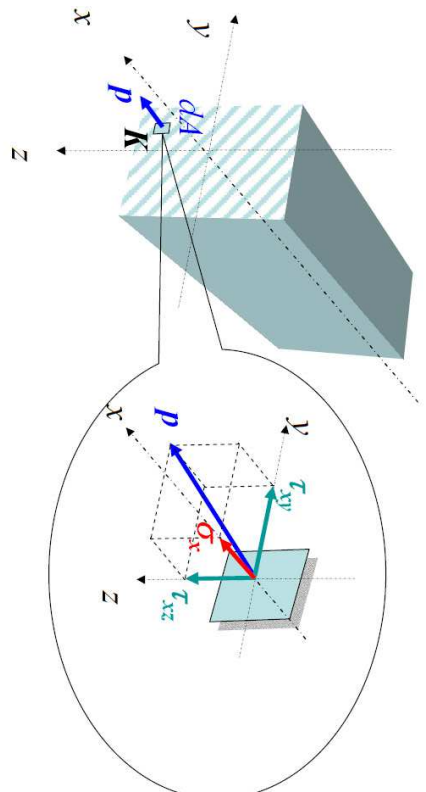
1. Teades pingeid, leida sisejõud.
2. Teades sisejõudusid, leida pinged.

Esimene neist on tunduvalt lihtsam, kuid teine suurema praktilise tähtsusega (vähemalt tugevusõpetuse seisukohalt).

#### 2.10.1 Sisejõudude avaldamine pingete kaudu

*Pikijõud.* Vaatleme ristlõike elementaarpinda  $dA$ , kus mõjub keskmine pinge  $\mathbf{p}$ , millele vastav normaalpinge on  $\sigma_x$  (joon. 2.17). Vaadeldaval elementaarpinnal pingest  $\sigma_x$  põhjustatud summaarne jõud  $\sigma_x dA$  mõjub samuti pinnanormaali  $\mathbf{n}$  sihis. Ristlõikes mõjuvate normaalpingete peavektori saame integreerides:

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.7)$$

Joonis 2.17: Pinged varrda ristlõike elementaarpinnal  $dA$ .(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

**Põikjõud.** Ristlõikes mõjuvate põikjõudude  $Q_y$  ja  $Q_z$  arvutamine käib analoogiliselt pikijõuga. Nüüd vaadeldakse ristlõike elementaarpinnal  $dA$  mõjuvaid nihkepingeid  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  (pingevektori  $\mathbf{p}$  projektsioone  $y$ - ja  $z$ -telgedel, vt. joon. 2.17) ja saadakse põikjõudude leidmiseks valemid

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.8)$$

### 2.10. Seosed pingete ja varrda sisejõudude vahel

2 - 44

**Paindemomendid**  $M_y$  ja  $M_z$  on seotud normaalpingega  $\sigma_x$ . Kui paine toimub  $x - z$  tasandis, siis iseloomustab painet paindemoment  $M_y$  ning kui  $x - y$  tasandis, siis  $M_z$ . Eksperimentide põhjal on leitud, et momendid  $M_y$  ja  $M_z$  tuleb arvutada ristlõike kesktelgede<sup>9</sup> suhtes. Vastavalt paindemomendi määrgireeglile põhjustab elementaarpinnal  $dA$  mõjuv summaarne jõud  $\sigma_x dA$  elementaarpaindemomendid  $z\sigma_x dA$  ja  $y\sigma_x dA$  vastavalt  $y$ - ja  $x$ -telje suhtes (vt. joon. 2.17). Vastavad peamomendid saadakse integreerimise teel:

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \quad \text{ja} \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA. \quad (2.9)$$

**Väändmoment.** Ristlõikes mõjuva väändmomendi arvutamise juures tuleb silmas pidada, et vastavalt sisejõudude ja pingete määrgireeglitele põhjustab elementaarpinnal  $dA$  mõjuv positiivne nihkepinge  $\tau_{xz}$  positiivse väändmomendi ja positiivne nihkepinge  $\tau_{xy}$  negatiivse väändmomendi (vt. joon. 2.17). Integreerides üle kogu ristlõike, saame

$$T = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA. \quad (2.10)$$

<sup>9</sup>Ristlõike keskteljed läbivad ristlõike pinnakeset.

## 2.10.2 Pingete avaldamine sisejõudude kaudu

Elmises alajaotuses (st. 2.10.1) tuletatud valemite korral pole tähtis, kas kasutusel on tugevusõpetuse (ehk nn. elementaartheooria) eeldused ja hüpoteesid või lineaarse elastsusteooria omad. Käesolevas alajaotuses osutub aga ülitähtsaks täpsustada, et praegust rakendametugevusõpetusele ehk nn. elementaartheooriale vastavaid lihtsustusi. Universaalsena<sup>10</sup> kuulub nende hulka *ristlõigete tasandilisuse hüpotees*, ehk *Bernoulli hüpotees*: ristlõiked, mis enne deformatsiooni olid tasapinnalised, jäävad ka peale deformatsiooni tasapinnalisteks.

*Pikkepinged*. Pingeid, mis on põhjustatud pikijõust, nimetatakse *pikkepingedeks*. Siin eeldatakse, et

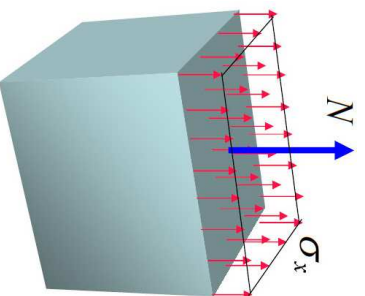
- vardale mõjub vaid piki tema telge mõjuv väliskooormus,
  - seega mõjub varda ristlõigetel vaid üks sisejõud — pikijõud,
- pikijõust põhjustatud normaalpinge on jaotunud ühtlaselt üle kogu ristlõike (vrd. Bernoulli hüpotees ja vt. joon. 2.18).

<sup>10</sup>See hüpotees kehtib elementaartheooria raames tõmbel-survel, paindel, lõikel ja väändel.

### 2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Seega saame seose

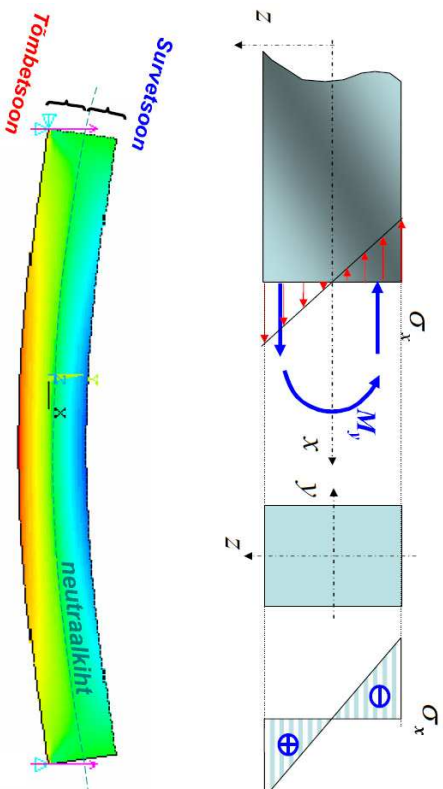
$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.11)$$



Joonis 2.18: Pikijõud ja pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

*Paindepinge*. Paindemomendist põhjustatud pingeid nimetatakse *paindepingedeks*. Oma olemuselt on paindepinged normaalpinged. Mõjuva talale selline väliskooormus, mille toimel tekib vaid üks sisejõud – paindemoment  $M_y$  (joon. 2.19). Eksperimentaalsete ja teoreetiliste tulemuste põhjal ning kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga eeldatakse elementaartheoorias, et tekkinud paindepinge



Joonis 2.19: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

sõltub koordinaadist  $z$  lineaarselt, st,

$$\sigma_x = kz, \quad (2.12)$$

kus  $k$  on konstant, mille määramiseks kasutame seoseid (2.9):

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA = \int_A k z^2 dA = k I_y, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_y}{I_y}. \quad (2.13)$$

### 2.10. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Avaldiste (2.12) ja (2.13) põhjal

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.14)$$

Tugevusarvutuste seisukohalt omavad tähtsust just maksimaalsed paindepinged, mis tekkiavad neis ristlõike punktides, kus koordinaat  $z$  omab ekstreemalseid väärtusi ( $z_{\max}$  ja  $z_{\min}$ ). Kui ristlõige on sümmeetriline  $y$ -telje suhtes, siis on  $z_{\max} = -z_{\min}$  ja arvutuste lihtsustamiseks võib tuua sisse *ristlõike tugevusmomenti*

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (2.15)$$

Viimase abil saame maksimaalse paindepinge arvutamiseks valem

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}. \quad (2.16)$$

Kui talale mõjuva väliskoorumuse toimel tekib vaid paindemoment  $M_z$ , siis saame eelnevatega analoogilised valemid

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (2.17)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad \max \sigma_x = \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.18)$$



**Märkused:**

- Tugevusmomentide  $W_y$  ja  $W_z$  arvutamise juures tuleb silmas pidada, et kui ristlõikeks on lihtkuju, st. ta on jaotatav  $n$  lihtsaks osakujuandiks, siis tuleb kõigepealt leida lihtkujuandi inertsimomendid  $I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)}$  ja/või  $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)}$ . Seejärel arvutatakse tugevusmomentid  $W_y$  ja  $W_z$  valemite (2.15) ja (2.18)<sub>1</sub> põhjal<sup>11</sup>.
- Kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga on paindepingete arvutamise juures eeldatud, et paindemomendist  $M_z$  põhjustatud paindepinged on  $z$  järgi konstantsed ja  $M_y$  põhjustatud paindepinged on  $y$  järgi konstantsed, vt. valemid (2.14) ja (2.17). Viimaste valemitega esitatud lineaarsed seosed on samuti kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga.
- Varda paindel jääb surutud ja tõmmatud kihtide vahele kiht, milles nn. kiindude pikkus ei muutu ja kus paindepinge on null (vt. joon. 2.19). Vastavat varda kihti nimetatakse *neutraalkihiks*. Neutraalkihi ja ristlõike lõikejoont nimetatakse *nulljooneks*.

<sup>11</sup> NB!  $W_y \neq W_y^{(1)} + W_y^{(2)} + \dots + W_y^{(n)}$  ja  $W_z \neq W_z^{(1)} + W_z^{(2)} + \dots + W_z^{(n)}$

- On selge, et  $x - z$  tasapinnas toimuva painde korral on  $z = 0$  korral paindepinge  $\sigma_x = 0$ .
- Elementaariteooria korral eeldatakse, et nulljooned on määratud kesk-peatelgedega.

**Näide 2-11.** Pikkepinged vardas. Lahendatakse loengus.

**Näide 2-12.** Paindepinged talas. Lahendatakse loengus.

### Väände- ja lõikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändemomendist ja lõikepinge põikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomendist põhjustatud normaalpingete leidmine, siis pühendame neile omaette jaotise.

## 2.11 Nihkepinged varda ristlõikes<sup>12</sup>

### 2.11.1 Üldised seaduspärasused

#### Nihkepingete paarsuse seadus.

Elementaartheooria kasutatakse nn. nihkepingete paarsuse seadust, mis tule-  
tatakse järjenselt<sup>13</sup>. Eeldame, et vardas on homogeenne pingeseisund ehk ho-  
mogeenne pingus<sup>14</sup>. Sellisel juhul peavad elementaarriistahuka vastastahkudel  
mõjuma võrdvastupidised pinged. See tingimus kehtib nii normaal- kui nihke-  
pingete kohta ning ta on tuletatud tasakaalutingimustest  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$   
ja  $\sum F_{iz} = 0$  (vt. joon. 2.20 a) ja b)). Teatavasti on aga tasakaaluks vajalik veel  
kolme võrrandi kehtimine, st.  $\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0$ ,  $\sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0$  ja  $\sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$ .  
Nende põhjal saadaksegi nihkepingete paarsuse seadus (vt. joon. 2.20 c)):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.19)$$

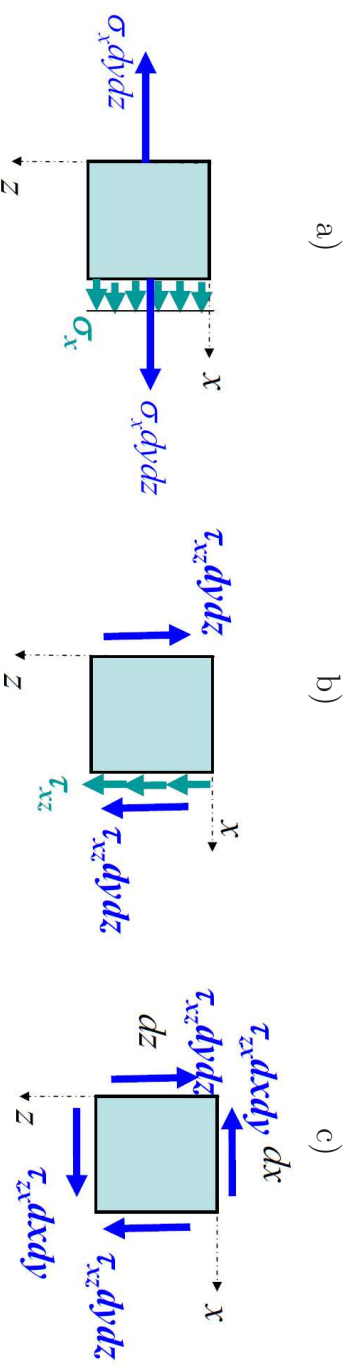
<sup>12</sup>Joonised on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.

<sup>13</sup>Hiljem esitame sama seaduspärasuse jaoks rangema tuletuskäigu.

<sup>14</sup>Pinguse ehk pingeseisundi all mõistetakse keha punkti lähivatel kõlkvõimalikel pindadel mõjuvate pingete hulka. Pinguse mõiste juurde tuleme tagasi.

Homogeenne pinguse korral on keha kõigis punktides ühesugune pingus.

#### 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

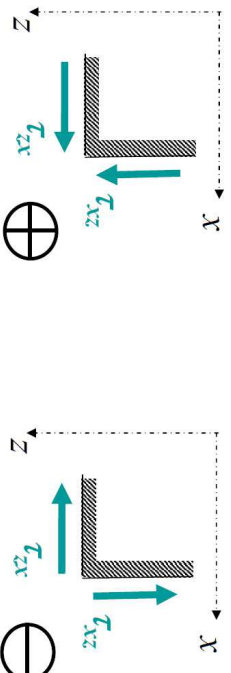


Joonis 2.20: Elementaarriistahuka tahkudel mõjuvad pinged.

Näiteks,

$$\sum M_y(\mathbf{F}_i) = -(\tau_{xz} dydz) dx + (\tau_{zx} dx dy) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.20)$$

Avaldiste (2.19) põhjal on selge ka see, et kui mingis keha punktis on nihkepinge  $\tau_{xy} > 0$ , siis ka  $\tau_{yx} > 0$  ja vastupidi (vt. joonis 2.21). Analoogilised seosed kehtivad ka tilejäanud kahe nihkepingete paari jaoks.



Joonis 2.21: Nihkepingete paarsus.

### Nihkepinged ristlõike serval

- Ristlõike serval mõjub nihkepinge puutuja sihis.
- Kuna ristlõike nurgapunktis on lõpmata palju puutuajaid, siis seal on nihkepinge null.

### 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

#### 2.11.2 Väändepinged ümarvarda ristlõikes

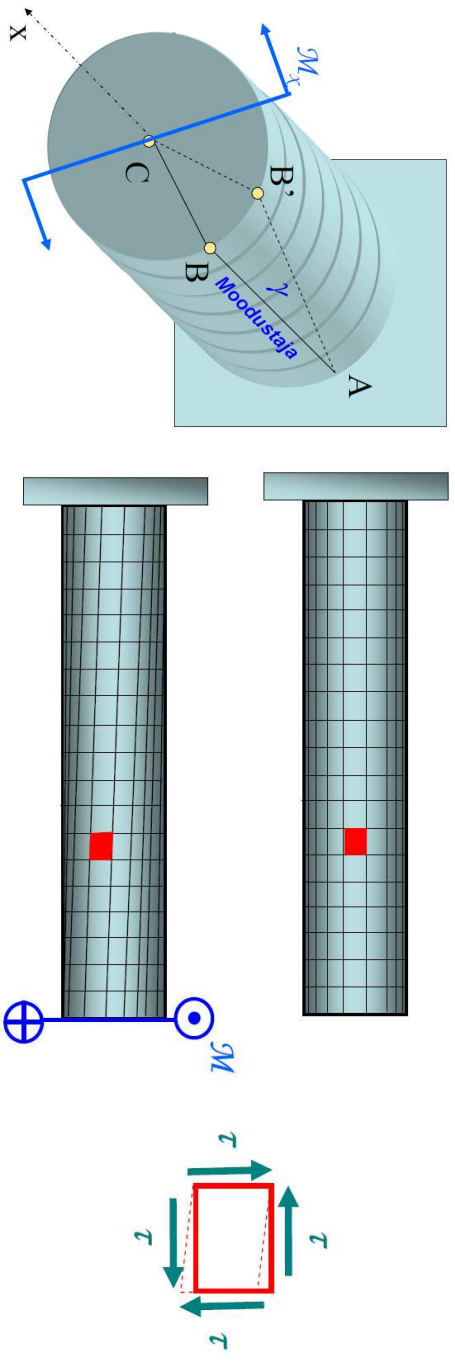
Olgu ümarvarda otstes rakendatud momendid  $\mathbf{T}$  ja  $\mathbf{T}'$  (joonis 2.22). Selle tulemusena tekib vardas deformatsioon, mida nimetatakse *väändeks*. Väändel tekkivate pingete ja deformatsioonide uurimisel on elementaarteoorias kasutusel järgmised eeldused:

- Kehtib Bernoulli hüpotees.
- Varda telg jääb sirgjooneliseks.
- Ristlõike raadiused jäävad sirgjooneliseks.



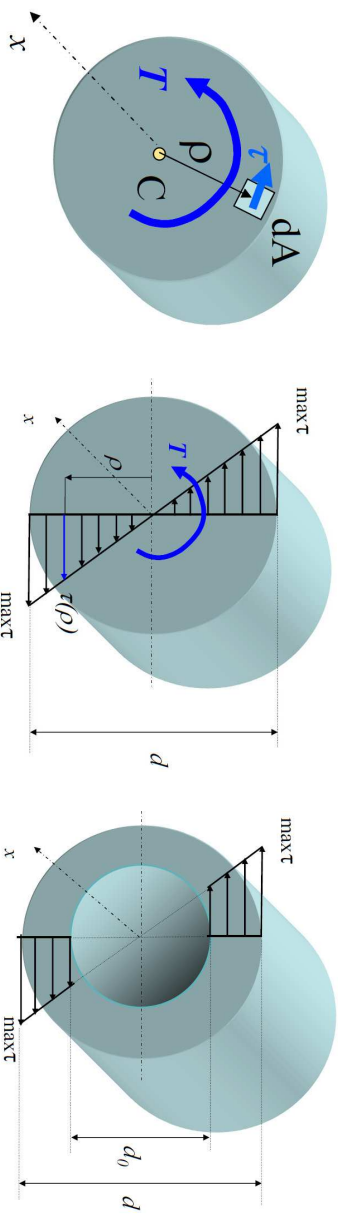
allikas: [www.clarkson.edu/class/es22201/3\\_torsion.ppt](http://www.clarkson.edu/class/es22201/3_torsion.ppt)

Joonis 2.22: Ümarvarda väände.



Joonis 2.23: Väändedeformatsioon.

Tehtud eelduste põhjal pöörduvad ristlõiked väändel timber varda telje. Selle tulemusena pöörduvad varda moodustajad nurga  $\gamma$  võrra. Seega on väändedeformatsioon oma olemuselt niikedeformatsioon ja algsed ristkülikulised pinnaelemendid muutuvad rööpkülikulisteks. Nurka  $\gamma$  nimetatakse *väändenurgaks*, ta on üks oluline väännet iseloomustav suurus ja tema juurde tuleme hiljem tagasi.



Joonis 2.24: Väändepinged timbarvargas ja paksuseinalises torrus.

Tehtud eeldustest ja Hooke'i seadusest (pingete ja deformatsioonide vahel on lineaarne sõltuvus) lähtudes peab väändepinge olema lineaarfunktsioon varda raadiusest  $\rho$ , s.t.  $\tau = k\rho$  (joon. 2.24). Konstandi  $k$  määrame väändemomendi ja väändepinge vahelisest seosest kasutades *polaarinersimomenti*  $I_\rho$ :

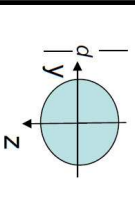
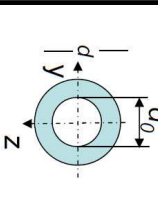
$$T = \int_A \rho \tau dA = k \int_A \rho^2 dA = k I_\rho \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T}{I_\rho}. \quad (2.21)$$

Nüüd saame väändepinge jaoks valemi

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_\rho 2}. \quad (2.22)$$

Valemid (2.22) kehtivad ka rõngasristlõike korral (vt. joon. 2.24).

Väändepingete arvutamise valem on paljuski analoogiline paindepingete arvutamise valemiga: maksimaalsed pinged on ristlõike servas. Seega on ka siin võimalik sisse tuua ristlõike tugevusmoment – antud juhul nimetatakse seda *polaar-tugevusmomentiks* –

Ristlõige	$I_p$	$W_p$
	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$ $c = \frac{d_0}{d}$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4)$

Joonis 2.25: Polaarineretsimendid ja polaar-tugevusmomentid.

mille abil saab määrata maksimaalseid väändepingeid:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{2I_p}{d} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (2.23)$$

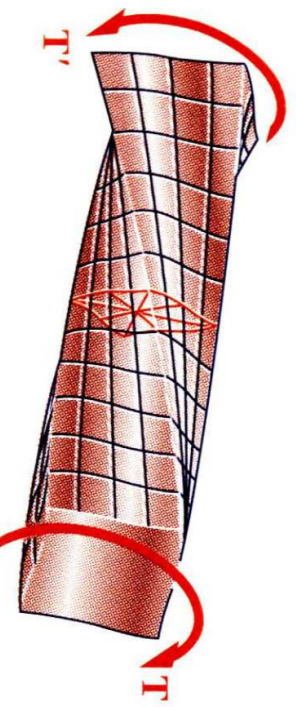
Tihti kasutatakse polaarineretsimendi ja polaar-tugevusmomenti tähistena vastavalt  $I_p$  ja  $W_p$ , st. kasutatakse indeksi  $\rho$  asemel indeksit  $p$ .

**Näide 2-13.** Väändepinged ümar- ja rõngasristlõikes. Lahendatakse loengus.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

### 2.11.3 Väändepinged mitteümaristlõigetes

Ümar- ja rõngasristlõigete korral on väändepingete arvutamine suhteliselt lihtne, kuid muude ristlõigete, st. mitteümaristlõigete, korral on see tunduvalt komplitseeritud. Bernoulli hüpotees taoliste ristlõigete korral tavaliselt enam ei kehti (joon. 2.26). Selliseid



allikas: www.clarkson.edu/class/es22201/3\_torsion.ppt

väändelüesandeid käsitletakse lineaarses elastsusteoorias. Elementaar-teooria (tugevusõpetuse) kursustes refereeritakse vaid lineaarse elastsusteooria raames

Joonis 2.26: Ristkülikvarda vääne.

saadud tulemusi, piirdudes tavaliselt maksimaalsete väändepingete valemitega kujul

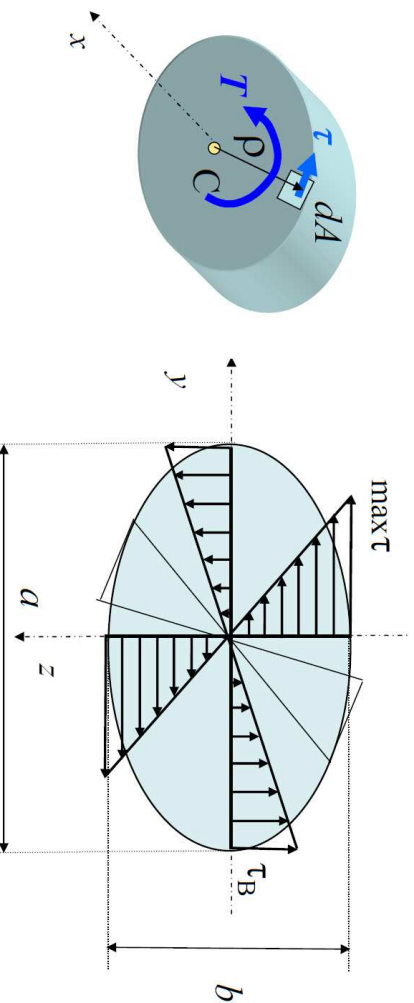
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}, \quad (2.24)$$

kus  $W_t$  on ristlõike tugevusmoment.

**Elliptiline varras**

Elliptilise ristlõikega vardas arvutatakse pingeid pooltelgede otstes järgmiste valemitega (joon. 2.27):

$$W_t = \frac{\pi ab^2}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi ab^2}, \quad \tau_B = \frac{16T}{\pi a^2 b}. \quad (2.25)$$

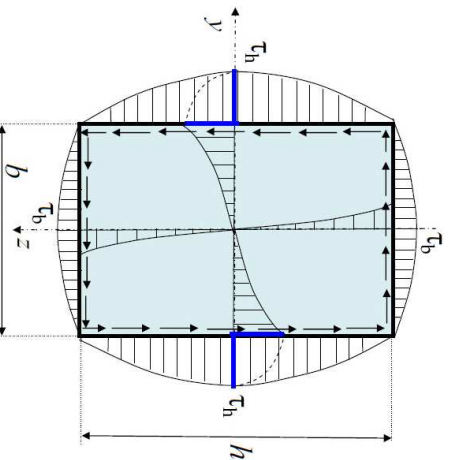


Joonis 2.27: Elliptilise ristlõikega varda vääne.

**2.11. Niikepinged varda ristlõikes****Ristkülikuline varras**

Ristkülikulise ristlõikega vardas on väändepinged pikki servi jaotunud parabool-selt ja omavad maksimaalseid väärtusi servade keskpunktides. Ristlõike nurkades on väändepinged nullid (joon. 2.28). Iseloomulikud pinged leitakse valemitega

$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.26)$$

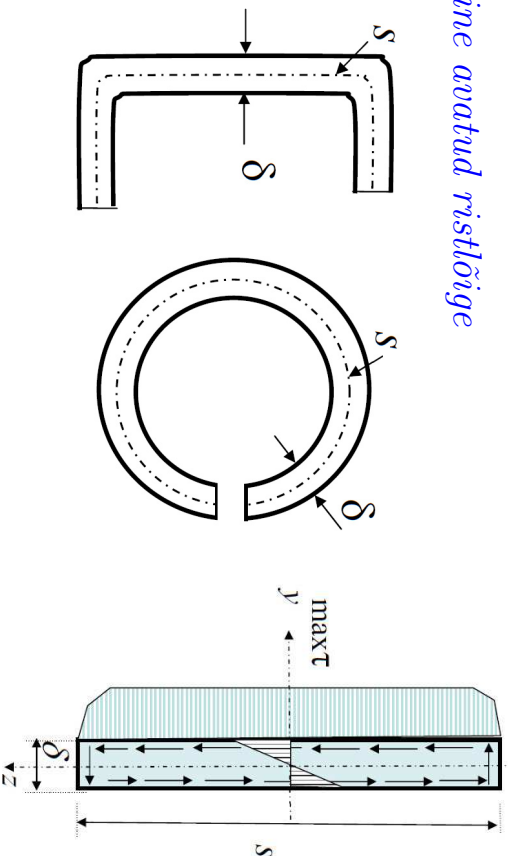


Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vardas.

$h/b$	1	1,2	1,5	2	3	5	10	$\infty$
$k_h$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
$k_b$	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

**Näide 2-14.** Väändepinged ristkülikulises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

### Õhukeseseinaine avatud ristlõige



Joonis 2.29: Väändepinged õhukeseseinaines avatud ristlõikes.

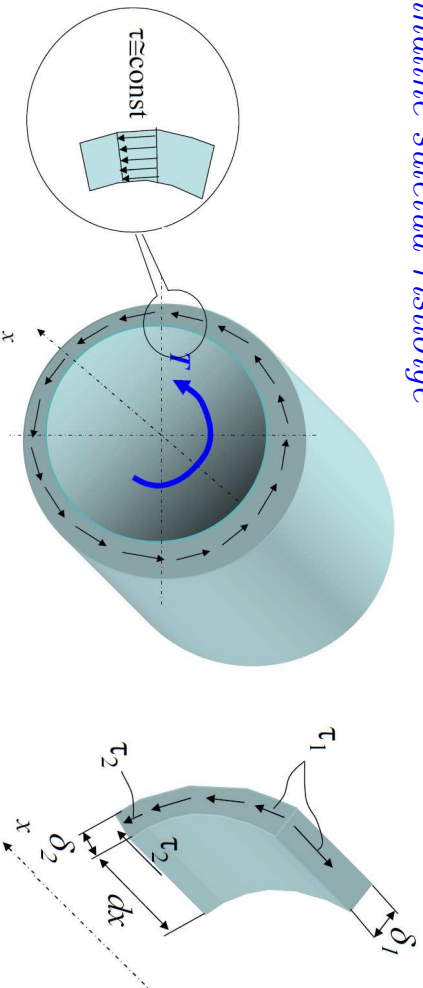
Väga mitmed konstruktsioonielemendid on valmistatud metall-lehtedest, mille ristlõike paksus  $\delta$  on väike võrreldes kõrgusega  $s$  (joon. 2.29). Vastavalt tabelile joonisel 2.28 on sellise ristlõike korral  $k_h = 0.333 = 1/3$  ja ristlõike tugevusmoment ja maksimaalne väändepinge

$$W_t = \frac{s\delta^2}{3}, \quad \tau_{\max} = \frac{3T}{s\delta^2}. \quad (2.27)$$

Valemid (2.27) kehtivad ka metall-lehest tehtud avatud ristlõikega varraste jaoks.

### 2.11. Niikepinged varda ristlõikes

### Õhukeseseinaine suletud ristlõige



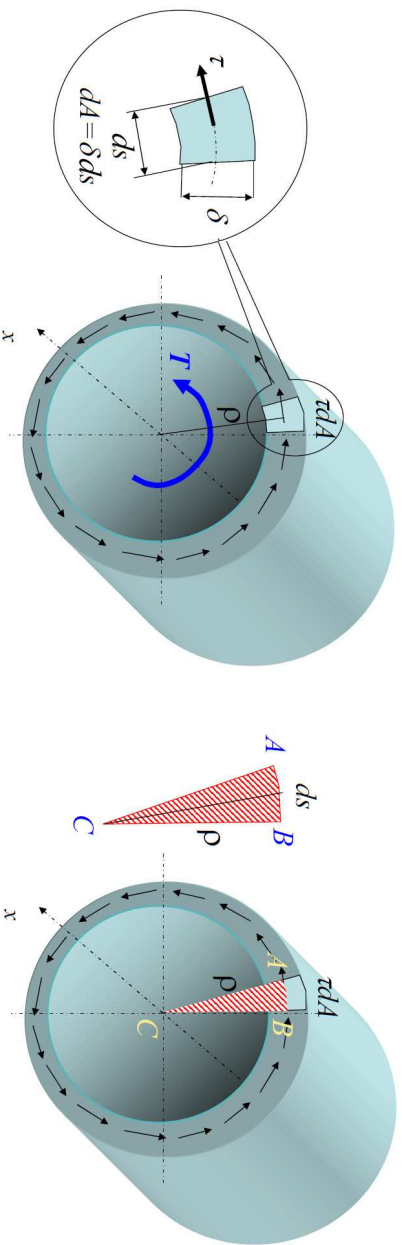
Joonis 2.30: Väändepinged õhukeseseinaines suletud ristlõikes.

Vaatleme muutuva seinapaksusega suletud ristlõiget (joon. 2.30). Kuna seinapaksus on väike, siis loeme pinge seinapaksuse järgi konstantseks. Samas on lihtne näidata, et paksemas osas on pinge väiksem ja õhemas osas suurem. Projekteerime joonise 2.30 parempoolisel osal kujutatud jõud  $x$ -teljele:

$$\sum F_{ix} = -\tau_1 \delta_1 dx + \tau_2 \delta_2 dx = 0. \quad (2.28)$$

kust saamegi, et

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 \quad \text{ehk} \quad \tau \delta = \text{const}. \quad (2.29)$$



Joonis 2.31: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

Järgnevalt tuletame valemid maksimaalse väändepinge arvutamiseks. Alustame nagu tavaliselt väändemomendi ja väändepingete vahelisest seosest<sup>15</sup> (joon. 2.31):

$$T = \int_A \rho \tau dA = \oint_s \rho \tau \delta ds. \quad (2.30)$$

Kuna  $\tau \delta = \text{const}$  ja  $\rho ds = 2d\omega$  on kolmnurga  $ABC$  kahekordne pindala, siis

$$T = \tau \delta \oint_s \rho ds = 2\tau \delta \oint_s d\omega = 2\tau \delta \omega, \quad (2.31)$$

<sup>15</sup>Vasakpoolisel joonisel on  $ds$  asemel  $s$

### 2.11. Niikepinged varda ristlõikes

kus  $\omega$  on ristlõike keskjoonega piiratud kujundi (antud juhul ringi) pindala (vt. joon. 2.32).

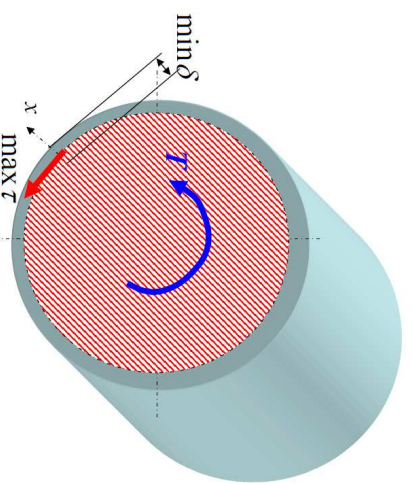
Kuna  $\tau \delta = \text{const}$ , siis vastab maksimaalsele väändepingele minimaalne seinapaksus ning tuues sisse õhukeseseinalises suletud ristlõike tugevumomendi väändel

$$W_t = 2\omega \delta_{min} \quad (2.32)$$

saame maksimaalse väändepinge leidmiseks valemid

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{2\omega \delta_{min}}. \quad (2.33)$$

Joonis 2.32: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

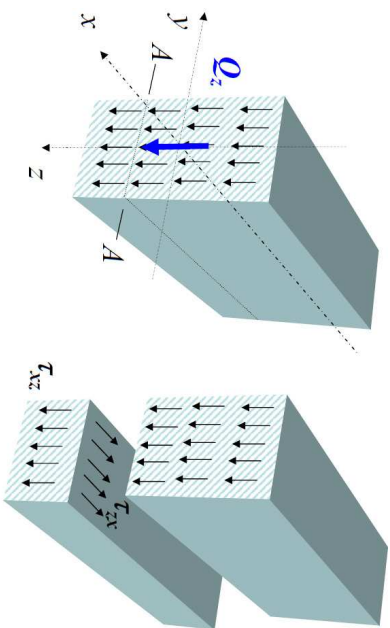


**Näide 2-15.** Väändepinged avatud ja suletud õhukeseseinalises ristlõikes. Lahendatakse loengus.



### 2.11.4 Lõikepinge

Vaatleme tala, kus mõjub põikjõud  $Q_z$  (joon. 2.33). Teatavasti on põikjõud  $Q_z$  lõikepingete  $\tau_{xz}$  peavektoriks. Põikjõud  $Q_z$  esineb alati koos paindemomendiga  $M_y$  ja seega mõjuvad vadeldavalt ristlõikel ka normaalpinged  $\sigma_x$ , mida sel joonisel ei ole kujutatud. Lisaks eeldame, et tala on koormatud nii tema pealmine ja alumine pind on nihkepingest vabad.



Joonis 2.33: Põikjõud ja lõikepinged (1)

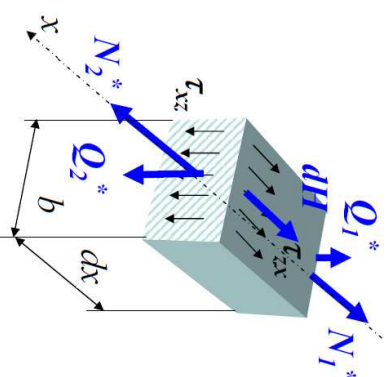
Põikjõust põhjustatud pingete ristlõikes jaotumise seaduspärasuste selgitamiseks teeme talas täiendava lõike ja vaatleme parempoolsel joonisel 2.33 kujutatud alumise osa tasakaalu. Nihkepingete paarsuse seaduse põhjal mõjuvad vadeldava vardaosa pealmisel pinnal nihkepinged  $\tau_{zx}$ .

#### 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Eraldame nüüd tala alumisest osast väikese risttahuka pikkusega  $dx$ , laiusega  $b$  ja "muutuva" kõrgusega  $h/2 - z$ . Risttahuka otstahkudel mõjuvad pikijõud  $N_1^* \neq N_2^*$  ja põikjõud  $Q_1^* \neq Q_2^*$ ; Pealmisel tahul mõjub pingete  $\tau_{zx}$  peavektor  $dH$ . Eeldades, et  $N_2^* > N_1^*$  saame tasakaalutingimusest  $\sum F_{ix} = 0$  avaldada

$$dH = N_2^* - N_1^*. \quad (2.34)$$

Joonis 2.34: Põikjõud ja lõikepinged (2)



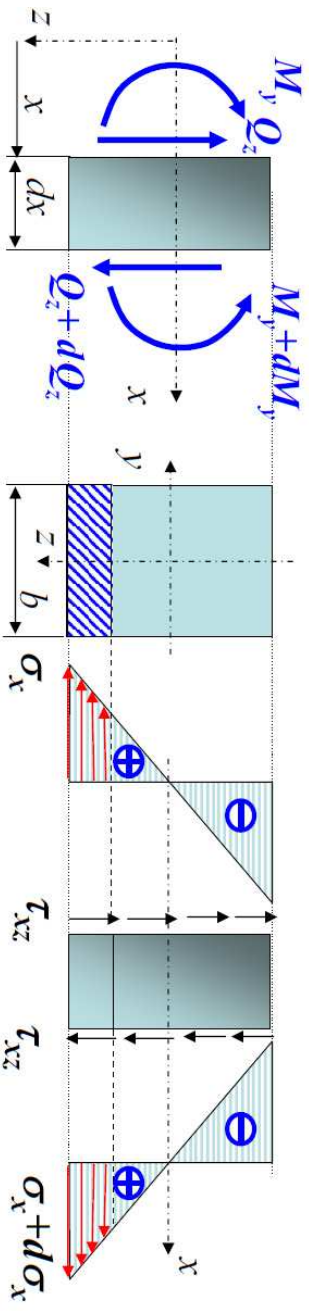
$\sqrt{z}$

Edaspildises rakendame Žuravski<sup>16</sup> hüpoteesi, mille kohaselt on lõikepinged talas jaotunud tühtlaselt  $y$ -koordinaadi järgi. Seega saame valemi

$$\tau_{zx} = \frac{dH}{b dx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx}. \quad (2.35)$$

Nüüd on õige aeg sisse tuua ka põikjõuga  $Q_z$  koos käiv paindemoment  $M_y$  (joon. 2.35).

<sup>16</sup>Inglisekeelses kirjanduses Jourawski.



Joonis 2.35: Põikjõud ja lõikepinged (3)

Tähistame vaadeldava risttahuka otspinna (joon. 2.34) pindala  $A^*$ . Joonisel 2.35 on see pind viirutatud. Nüüd saame esitada risttahuka otspindadel mõjuvad pikijõud paindemomendi kaudu:

$\sqrt{z}$

$$\begin{aligned}
 N_1^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y}{I_y} S_y^*, \\
 N_2^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} S_y^*,
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

kus  $S_y^*$  on viirutatud pinna staatliline moment  $y$ -telje suhtes.

2.11. Niikepinged varda ristlõikes

Arvestades lõikepingete paarsuse seadust ja valemeid (2.35) ning (2.36) saame

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y^*}{I_y b}. \tag{2.37}$$

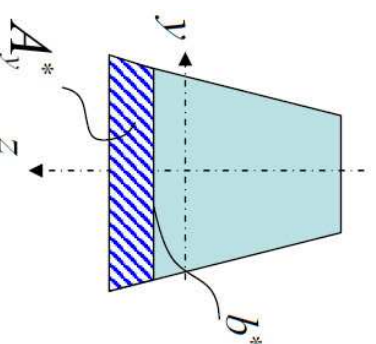
Rakendades diferentsiaalseteid oleme kokkuvõttes saanud valemi, mis on rakendatav meelevaldse kujuga ristlõike jaoks:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}. \tag{2.38}$$

Siin  $Q_z$  on vaadeldavas ristlõikes mõjuv põikjõud,  $b^*$  on viirutatud pinna "ülemine joommõõde" (joon. 2.36),  $S_y^*$  viirutatud pinna staatliline moment

Joonis 2.36: Põikjõud ja lõikepinged (4)

$y$ -telje suhtes ja  $I_y$  ristlõike painnertsimoment. Järgnevalt vaatleme lõikepingete leidmist mõnes mõnes spetsiifilise kujuga ristlõikes.



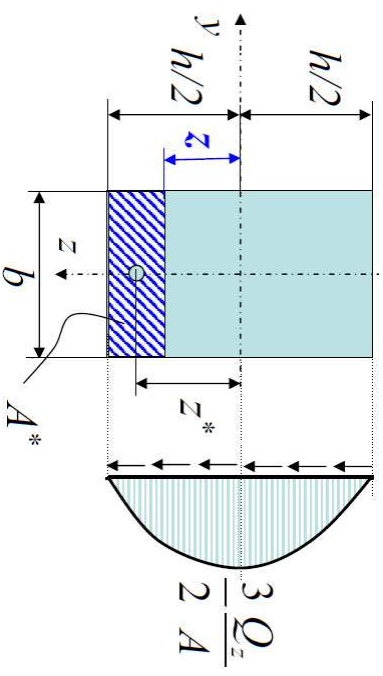
### Ristkülik

Kasutame valemite (2.38) ja leiame seal kasutatavad geomeetrised suurused ristküliku korral:

$$I_y = \frac{bh^3}{12},$$

$$S_y^* = z^* A^* = \dots = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*} = \dots = \frac{6Q_z}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$



Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

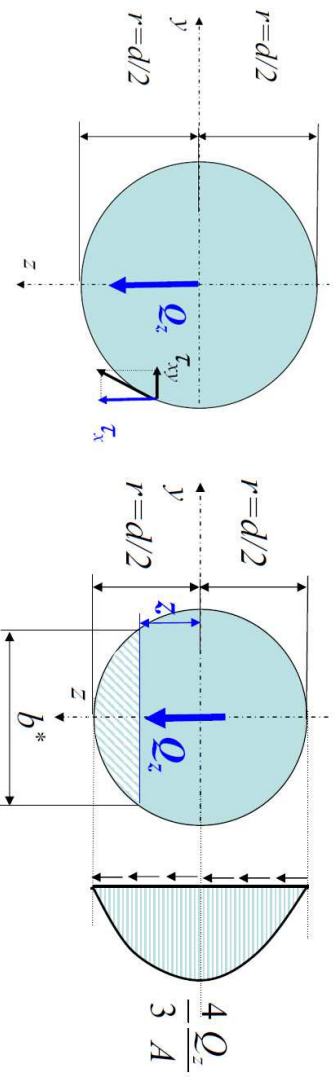
Arvestades, et ristküliku pindala  $A = bh$ , saame lõpuks valemid

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A}. \quad (2.39)$$

Seega on tegu ruutparabooliga ja  $\tau_{xz} = 0$  kui  $z = \pm 0, 5h$  ning mille maksimum on kohal  $z = 0$ .

### 2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

#### Ring



Joonis 2.38: Lõikepinged ümaristlõikes

Kuna ristlõike serval on nihkepinged puutuja sihilised, siis lahutame selle kaheks komponendiks ja tuletame valemid lõikepinge  $\tau_{xz}$  leidmiseks. Kasutame jällegi valemite (2.38) ja leiame vajalikud geomeetrised suurused ringi korral:

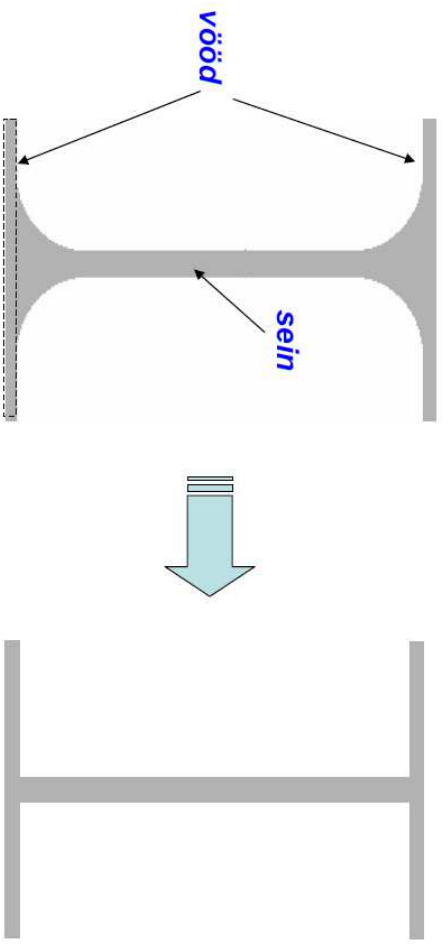
$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad b^* = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad S_y^* = \frac{3}{2} (r^2 - z^2)^{3/2}.$$

Kokku saame jällegi ruutparabooli, mille maksimum on kohal  $z = 0$  ja mis on null kui  $z = \pm r$ :

$$\tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A}. \quad (2.40)$$

*I-tala.*

Vaatleme valtsmetallist profiili, mille ristlõige on I tähe kujuline. Tävaliselt nimetatakse sellist tala I-talaks (joon. 2.39). Eesmärgiks on leida nihkepingete jaotus sellises ristlõikes. Lihtsuse mõttes vaatleme selist profiili koosnevana riskülikutest.



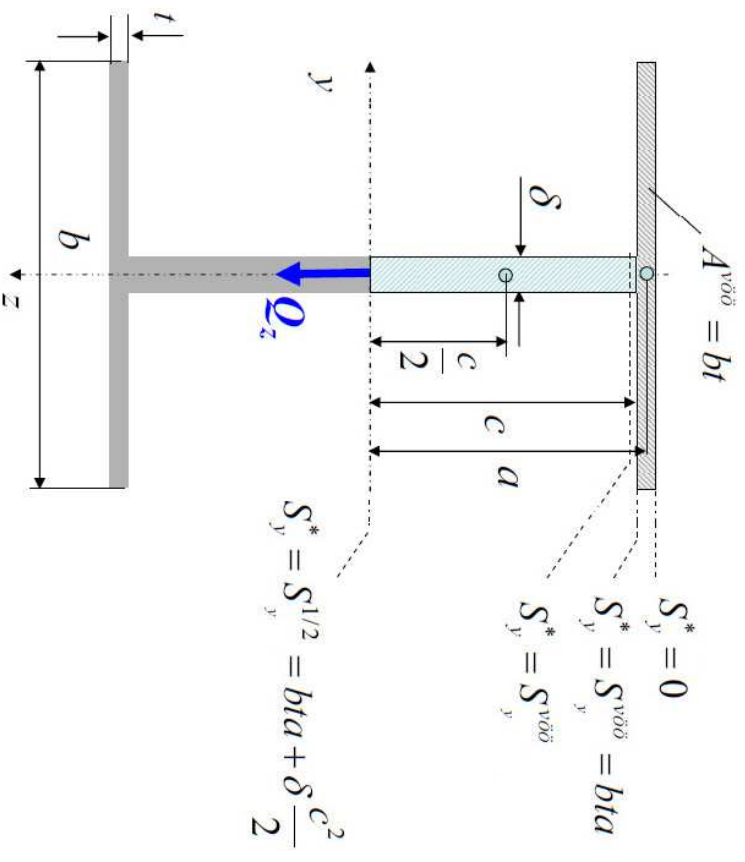
Joonis 2.39: I-tala.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Lõikepinge arvutamiseks kasutame endiselt valemite (2.38):

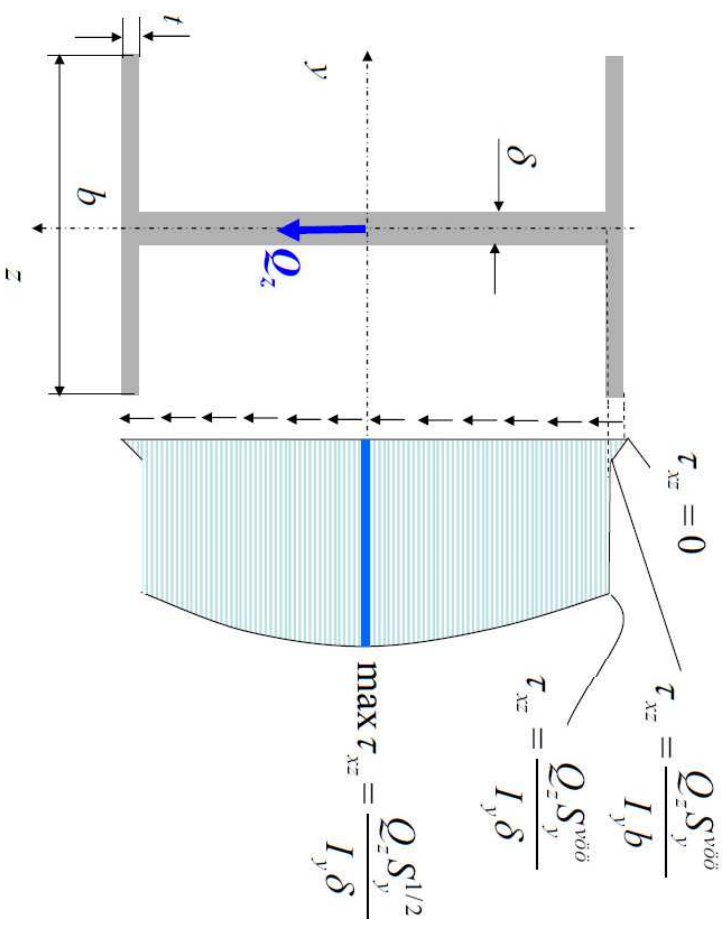
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}.$$

Seega on nihkepingete epüüride koostamiseks vaja teada tervet rida staatilisi momente, mis on esitatud joonisel 2.40



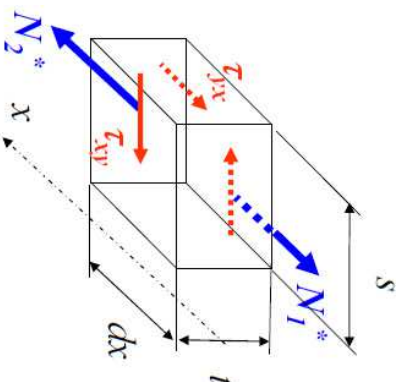
Joonis 2.40: I-tala iseloomulikud staatilised momendid.

Joonisel 2.41 on kujutatud lõikepinge  $\tau_{xz}$  epiür I-tala jaoks. Nihkepinge valemite abil. Ülemineks seinalt vööle on tegelikkuses sujuv (vt. joon 2.39) ja seetõttu ei esine tegelikkuses ka sellist järsku hüpet nagu on joonisel 2.41. On selge, et võrreldes seinaga on lõikepingete  $\tau_{xz}$  väärtused vöös väikesed.



Joonis 2.41: Lõikepinge  $\tau_{xz}$  epiür I-tala korral.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes



Joonis 2.42: Lõikepinge  $\tau_{xy}$  põhjused.

Tala vöös esinevad lisaks lõikepingetele  $\tau_{xz}$  veel lõikepinged  $\tau_{xy}$ . Üks nende olemasolu põhjendus<sup>17</sup> on esitatud joonisel 2.42. Feldades, et  $N_2^* > N_1^*$ , tasakaalustab pikijõu juurdekasvu  $dN$  nihkepingest  $\tau_{yx}$  põhjustatud jõud  $\tau_{yx} t dx$ . Nihkepingete paarsusseaduse põhjal peab nihkepingega  $\tau_{yx}$  koos eksisteerima nihkepinge  $\tau_{xy}$ , mille arvutamiseks kasutame valemiga (2.38) analoogilist valemit

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}. \quad (2.41)$$

<sup>17</sup>Eksisteerib veel teisigi põhjendusi. Näiteks, et vöös mõjuv pinge  $\tau_{yx}$  tasakaalustab seinas mõjuvat pinget  $\tau_{xz}$ .

Joonise 2.43 põhjal saame viimasest valemist

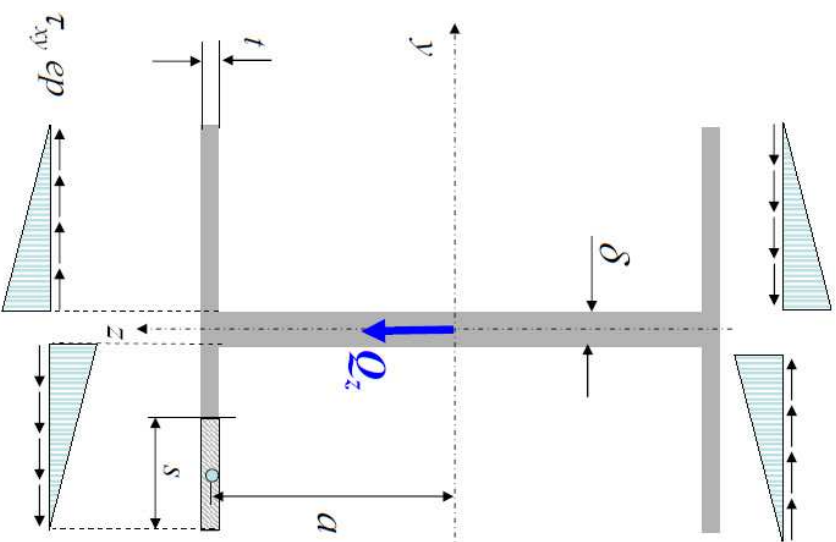
$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t} = \frac{Q_z s a t}{I_y t} = \frac{Q_z s a}{I_y}. \quad (2.42)$$

$S_y^*$  tähistab siin viirutatud pinnastaatilist momenti  $y$ -teljesuhtes. Arvestades, et tala vöö laius on  $b$  ja seinapaksus  $\delta$ , saame nihkepingete  $\tau_{xy}$  ekstreemaalsed väärtused

$$\max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a (b - \delta)}{2 I_y}. \quad (2.43)$$

On selge, et vöö „sobivate“ mõõtmete korral võivad nihkepinged  $\tau_{xy}$  omada märkimisväärsed väärtusi.

Tala vöös mõjuvate nihkepingete summeerimisel saame peavektorid  $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}'_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}'_3$  (vt. joon. 2.44).



Joonis 2.43: Lõikepinge  $\tau_{xy}$  epiüür I-tala vöös.

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Valemi (2.42) põhjal

$$Q_2 = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^l \frac{Q_z s a}{I_y} t ds \quad (2.44)$$

Arvestades, et  $a = h/2 - t/2 \approx h/2$  ja  $l = b/2 - \delta/2 \approx b/2$  saame

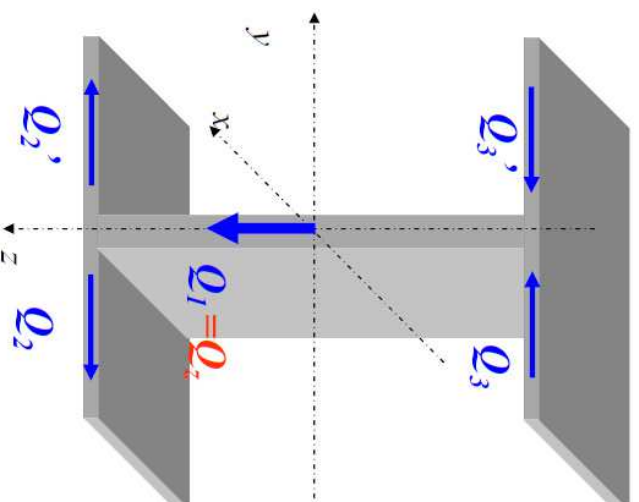
$$Q_2 = \frac{Q_z a t}{I_y} \int_0^l s ds = \frac{Q_z a t l^2}{2 I_y} \approx \frac{Q_z h t b^2}{16 I_y}. \quad (2.45)$$

On selge, et jooniste 2.43 ja

2.44 põhjal vektorid  $\mathbf{Q}_2 = -\mathbf{Q}'_2$ ,

$\mathbf{Q}_3 = -\mathbf{Q}'_3$  ja  $\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_1$  ( $\mathbf{Q}_1$  on sisse

toodud vöö ja seinavahelise analoogia mõttes) ning moodulid  $Q_2 = Q_3$



Joonis 2.44: Põikjõud I-talas.

**Näide 2-16. Painde- ja lõikepinged I-talal (nn. keevisristlõige).**

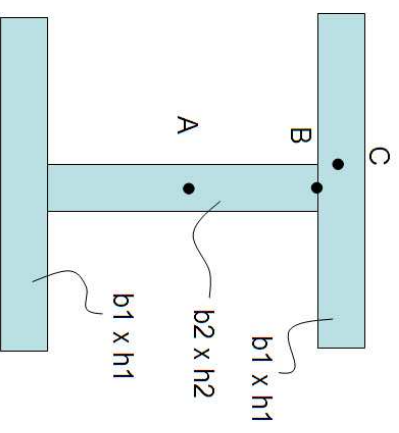
Tala ristlõikes mõjub paindemoment  $M = 20 \text{ kNm}$  ja põikjõud  $Q = 100 \text{ kN}$ . Koostada paindepinge  $\sigma_x$  ja lõikepingete  $\tau_{xz}$  ning  $\tau_{xy}$  epiüürid. Ristlõike mõõtmed:  $b1 = 6 \text{ cm}$ ,  $h1 = 2 \text{ cm}$ ,  $b2 = 2 \text{ cm}$ ,  $h2 = 10 \text{ cm}$ . Kuidas mõjutab mõõtmete suurendamine ja/või vähendamine pingeid?

*Lahendus.*

Paindepinged arvutatakse valemite (2.15) ja (2.16) põhjal:

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}},$$

Joonis 2.45: I-tala ristlõige



Nihkepingete arvutamiseks kasutame valemeid (2.38) ja (2.43):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}, \quad \max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a(b - \delta)}{2I_y}.$$

$$I_y, \quad W_y, \quad S_y^{*A}, \quad S_y^{*B}$$

Viimaste jaoks on vaja leida mitmed inertsii- ja staatilised momendid

2.11. Nihkepinged varda ristlõikes

Epiüüride joonistamiseks vajalikud arvud on järgnevas tabelis. Epiüürid joonistatakse ja täiendavaid seletusi antakse loengus.

M	Q	h1	b1	h2	b2	Iy	Wy	Sat	Sbt	sx	taxz	tbxzz2	tbxz1	txy
kNm	kN	cm	cm	cm	cm	cm4	cm3	cm3	cm3	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa	Mpa
20	100	2	6	10	2	1038,7	148,4	97	72	134,79	46,69	34,66	11,55	11,55
20	100	1	6	10	2	530,7	88,4	58	33	226,13	54,65	31,09	10,36	20,73
20	100	3	6	10	2	1714,7	214,3	142	117	93,31	41,41	34,12	11,37	7,58
20	100	2	6	10	1	955,3	136,5	84,5	72	146,55	88,45	75,37	12,56	15,70
20	100	2	6	10	3	1122,0	160,3	110	72	124,78	32,53	21,39	10,70	8,02
20	100	2	5	10	2	893,3	127,6	85	60	156,72	47,57	33,58	13,43	10,07
20	100	2	8	10	2	1329,3	189,9	121	96	105,32	45,51	36,11	9,03	13,54
20	100	2	6	9	2	855,5	131,6	86,3	66	151,96	50,41	38,57	12,86	12,86
20	100	2	6	11	2	1243,8	165,8	108	78	120,59	43,51	31,35	10,45	10,45

## 2.12 Ristlõigete geometriliste karakteristikute tabelid

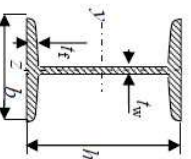
Tugevusõpetuses esitatakse sellised tabelid tavaliselt valtsmetallide kohta ja kuna tihti on tegu terasega siis kutsutakse neid tabelleid sel juhul terasprofiilide tabeliteks. Kuna erinevatel tootjatel ja erinevatel riikidel on erinevad standard-  
sed ristlõiked, siis eksisteerib ka palju erinevaid terasprofiilide tabelleid. Loomulikult pole konstruktsioonieleemendid ainult valtsterasest ja leidub väga erinevate kujudega ristlõikeid ning neile vastavaid tabelleid.

Siin vaatleme ühte komplekti, mis on ka käesoleva peatiki lisas ja mida võib vaja minna ülesannete lahendamise juures. Tabelid pärinevad kolleegidelt mehhaanika instituudist ja profiilid vastavad autorile teadaoleva info kohaselt Euroopa standardile.

Järgnevalt on esitatud tabelite algused kahte liiki I-profiilile, nn. karprauale ning võrd- ja erikülgssele nurkrauale. Pikemad tabelid on esitatud Lisas 2-A.

### 2.12. Ristlõigete geometriliste karakteristikute tabelid

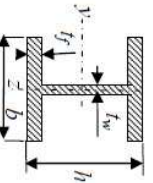
#### IPN



A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$  - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoomusmeetodi korral,  $I_{y_0}$ ,  $I_{z_0}$  - inertsiiraadused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  - väändemoment,  $A_{xz}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtes.

Profiili nr.	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	A	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	W <sub>pl,y</sub>	I <sub>y</sub>	A <sub>xz</sub>	I <sub>z</sub>	W <sub>z</sub>	W <sub>pl,z</sub>	I <sub>z</sub>	I <sub>x</sub>
mm	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
IPN 80	80	42	3,9	5,9	7,58	77,8	19,5	22,8	3,20	3,41	6,29	3,00	5,0	0,91	0,87
IPN 100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	39,8	4,01	4,85	12,2	4,88	8,1	1,07	1,60

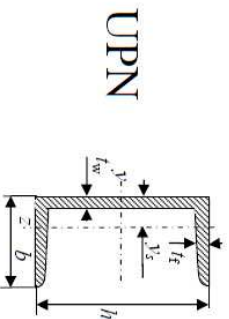
#### IPE



A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$  - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoomusmeetodi korral,  $I_{y_0}$ ,  $I_{z_0}$  - inertsiiraadused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  - väändemoment,  $A_{xz}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtes.

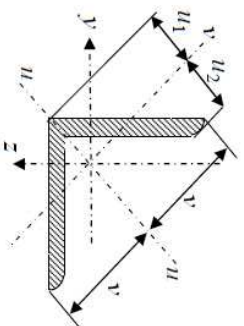
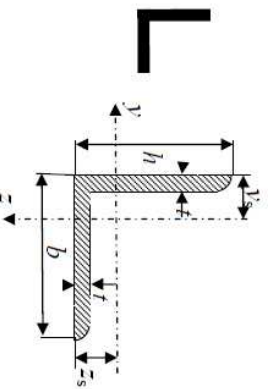
Profiili nr.	h	b	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	A	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	W <sub>pl,y</sub>	I <sub>y</sub>	A <sub>xz</sub>	I <sub>z</sub>	W <sub>z</sub>	W <sub>pl,z</sub>	I <sub>z</sub>	I <sub>x</sub>
mm	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
IPE 80	80	46	3,8	5,2	7,64	80,1	20,0	23,2	3,24	3,58	8,49	3,69	5,82	1,05	0,70
IPE 100	100	55	4,1	5,7	10,3	171	34,2	39,4	4,07	5,08	15,9	5,79	9,15	1,24	1,20





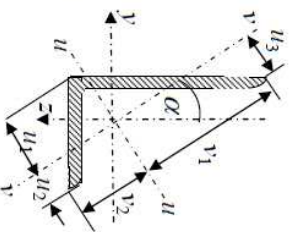
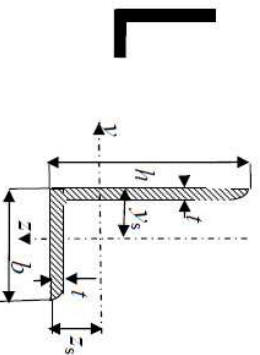
A - ristliigete pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$ -tingevusmomendid vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes piirpingemeetodi korral,  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ -tingevusmomendid vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes pinikoormuseetodi korral,  $i_y$ ,  $i_z$ -inertsiraadiused vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  $I_x$  - väändinertsimoment,  $A_{wy}$ ,  $A_{wz}$  - taandatud ristliigepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks  $z$  ja  $y$ -telje suhis.

Profiili nr	$h$ mm	$b$ mm	$t_w$ mm	$t_f$ mm	$t_s$ mm	$A$ cm <sup>2</sup>	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$W_{pl,y}$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$A_{wz}$ cm <sup>2</sup>	$I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_z$ cm <sup>3</sup>	$W_{pl,z}$ cm <sup>3</sup>	$i_z$ cm	$A_{wy}$ cm <sup>2</sup>	$I_x$ cm <sup>4</sup>	$i_x$ cm	$I_{yz}$ cm <sup>4</sup>
UPN 80	80	45	6.0	8.0	4.00	106	26.5	31.8	3.10	5.10	19.4	6.36	12.1	1.33	7.14	2.16	1.45	1.45	-78.5
UPN 100	100	50	6.0	8.5	4.50	206	41.2	49.0	3.91	6.46	29.3	8.49	16.2	1.47	8.43	2.81	1.55	1.55	-95.3



A - ristliigete pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $I_u$ ,  $I_v$  - inertsimomendid  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tingevusmomendid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $i_u$ ,  $i_v$  - inertsiraadiused  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $I_{yz}$  - tsentrifugaalmoment  $y$ ,  $z$ -telje suhtes.

Profiili nr.	$h = b$ mm	$t$ mm	$A$ cm <sup>2</sup>	$z_s=y_s$ cm	$v'$ cm	$u_1$ cm	$u_2$ cm	$I_y=I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_y=W_z$ cm <sup>3</sup>	$i_y=i_z$ cm	$I_u$ cm <sup>4</sup>	$i_u$ cm	$I_v$ cm <sup>4</sup>	$i_v$ cm	$I_{yz}$ cm <sup>4</sup>
L 90 x 90 x 7	90	7	12.2	2.45	6.36	3.47	3.16	92.5	14.1	2.75	14.7	3.47	38.0	1.76	-54.5
L 90 x 90 x 8	90	8	13.9	2.50	6.36	3.53	3.17	104	16.1	2.74	16.6	3.46	42.9	1.76	-61.5



B - ristliigete pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsimomendid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $I_u$ ,  $I_v$  - inertsimomendid  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tingevusmomendid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $i_y$ ,  $i_z$  - inertsiraadiused  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  $i_u$ ,  $i_v$  - inertsiraadiused  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $I_{yz}$  - tsentrifugaalmoment  $y$ ,  $z$ -telje suhtes.

Profiili nr.	$h$ mm	$b$ mm	$t$ mm	$A$ cm <sup>2</sup>	$z_s$ cm	$y_s$ cm	$v_1$ cm	$v_2$ cm	$u_1$ cm	$u_2$ cm	$u_3$ cm	$\alpha$ °
L 120 x 80 x 8	120	80	8	15.5	3.83	1.87	8.23	5.97	3.25	4.19	2.09	23,6
L 120 x 80 x 10	120	80	10	19,1	3,92	1,95	8,19	6,01	3,35	4,17	2,15	23,5

Profiili nr.	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_z$ cm <sup>3</sup>	$i_z$ cm	$I_u$ cm <sup>4</sup>	$i_u$ cm	$I_v$ cm <sup>4</sup>	$i_v$ cm	$I_{yz}$ cm <sup>4</sup>
L 120 x 80 x 8	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,4	1,73	-78,5
L 120 x 80 x 10	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,6	1,72	-95,3