

# Peatükk 2

## Sisejõud ja pinged

Käesolevas peatükis rakendatakse varrastes ja talades tekkiivate pingete analüüsimiseks tugevusõpetuses (ja tehnilises mehaanikas) kasutatavaid hüpoteese, printsiipe ja meetodeid. Teisisõnu, käesolevas peatükis on vaatluse all nn. elementaarteooriale vastavad lahendid.

---

### *2.1. Välisjõud*

*2 - 2*

## 2.1 Välisjõud

### 2.1.1 Välisjõu mõiste

Deformeeruvad keha võib vaadelda koosnevana punktmassidest ja seega on tegu punktmasside (mehaanikalise) süsteemiga<sup>1</sup>. Sise- ja välisjõudusid käsitleti ka *jäiga keha mehaanika* kursuses. Kõigepealt tuli määratleda vaadeldav keha (või punktmasside süsteem) ning seejärel defineeriti sise- ja välisjõud järgmiselt: *sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad üksteist ja *välisjõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi mittekuuluvad punktmassid mõjutavad vaadeldavasse süsteemi kuuluvaid punktmasse. Analooogiliselt defineeritakse sise- ja välisjõud ka pideva keskkonna mehaanikas (k.a. elastsusteoorias):

- *Sisejõududeks* nimetatakse jõudusid, millega vaadeldava keha (või keskkonna) punktid (vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid) mõjutavad üksteist.

---

<sup>1</sup>Vt. ka „Dünaamika” kursusest.

- *Välisjõududeks* nimetatakse jõudusid, millega teised kehad, keskkonnad ja punktmassid mõjutavad vaadeldavat keha (keskkonda).

## 2.1.2 Välisjõudude liigid

Välisjõud jagunevad pind- ja mahujõududeks.

- *Pind- ehk kontaktjõud* mõjuvad vaadeldavale kehale läbi välispinna. Näiteks hüdrostaatiline surve.
- *Mahu- ehk massjõud* mõjuvad igale vaadeldavat keha moodustavale punkt-massile. Näiteks gravitatsioonijõud.

Pindjõud mõjub alati läbi mingi pinna ja seetõttu on tema dimensioon tavaliselt sama, mis pingel, s.t.  $N/m^2$ . Piirjuhul, kui pind millel koormus mõjub on väga väike, asendatakse pindjõud sellega pinnal mõjuva pindjõudude resultandiga, s.t. tihedusega, mida nimetatakse *punktjõuks ehk koondatud jõuks*. Koondatud jõu dimensioon on loomulikult  $N$ . Kaks võrdvastupidist koondatud jõudu, millel on erinevad mõjusirged, moodustavad *koondatud momendi*. *Mahujõudude* dimensioon on  $N/m^3$  ja *massijõududel*  $N/kg$ .

✓

### 2.1. Välisjõud

### 2 - 4

*Toereaktsioonid* kuuluvad välisjõudude hulka. Tugevusõpetuse (ja elastsusteooria) seisukohast olulisemad tugevde tüübid<sup>2</sup>:

- 2D liikuv liigendtügi e. liigend — 1 jõud,
- 2D liikumatu liigendtügi e. liigend — 2 jõudu,
- 2D jäik kinnitus — 2 jõudu ja 1 moment,
- 3D jäik kinnitus — 3 jõudu ja 3 momenti.

*Staatikaga määratud ja staatikaga määramata konstruktsioonid.*

- Staatikaga määratud konstruktsioonide toereaktsioonide leidmine toimub staatika tasakaaluvõrrandite, printsiipide ja aksioomide abil, s.t. täpselt samuti kui seda tehti staatika kursuses.
  - Tasapinnalised tillesanded — kuni 3 tundmatut ja sama palju võrrandeid.

<sup>2</sup>Vaata lisaks staatika kursusest.

- 3D (ruumilised tilesanded) — kuni 6 tundmatut ja sama palju võrrandeid.
  - Konstruksioon loetakse jäigaks.
  - Jaotatud koormused asendatajks üksikjõududega.
  - Jõudu võib käsitleda libiseva vektorina.
  - Jne., vaata lisaks staatika kursusest.
- Staatikaga määramata konstruksioonide toereaktsioonide leidmise meetodeid käsitletakse tugevusõpetuse ja ehitusmehaanika kursustes. Sel juhul tuleb arvesse võtta kuidas konstruksioon deformeerub.

## 2.2 Sisejõud

### 2.2.1 Lõikemeetod

Vastavalt Newtoni III seadusele mõjutavad kaks punktmassi teineteist võrdvastupidiste jõududega. Välisjõudude puudumisel mõjuvad tahke keha punktmasside vahel molekulaarse päritoluga jõud, mis tagavad talle nn. kuju- ja mahupüsivuse. Seda sorti jõud (mis oma olemuselt on samuti sisejõud) elastsusteooria ja tugevusõpetuse seisukohalt tildjuhul huvi ei paku ja neid arvesse ei võeta. Teisisõnu:

- kuna algolekus (välisjõudude puudumisel) loeme me kehad pingetest ja deformatsioonidest vabadeks, siis eeldatakse, et algolekus sisejõud puuduvad;
- meid huvitavad vaid sellised sisejõud, mis ilmnevad kehale rakendatud välisjõudude tulemusena.

Keha sisejõudude ja pingete määramise juures mängib tähtsat rolli lõikemeetod, mille idee on järgmine.

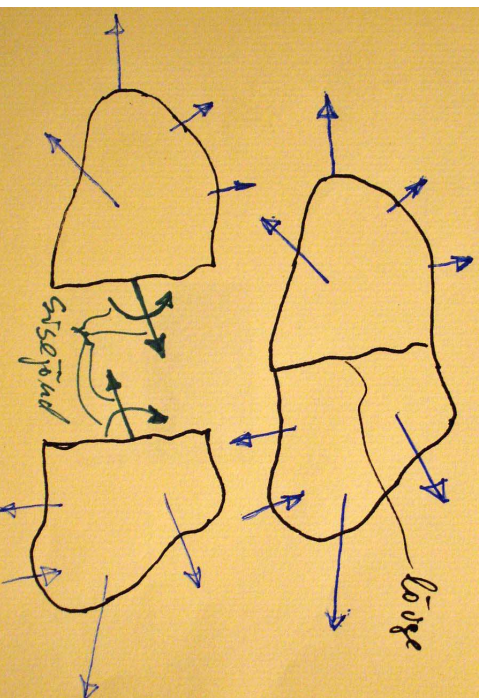
- Vaatleme tasakaalus olevat keha ja lõikame ta mõtteliselt kaheks osaks.
- Selleks, et mõlemad osad oleksid ka pärast (mõttelist) tükeldamist tasakaalus tuleb äralõigatud osa mõju asendada jõududega. Neid jõudusid nimetataksegi (vaadeldavas keha lõikes mõjuvateks) *sisejõududeks*.

Kuna enne (mõttelist) lõiget olid vaadeldava keha osad omavahel järgalt ühendatud, siis me toimime sisejõudude määramise juures analoogiliselt jäigale kinnitusele vastavate toereaktsioonide leidmisele staatika kursuses. Viimased peavad välistama nii lõikepinna punktide siirded kui pöörded. Staatika kursusest on teada, et tasapinnalise jõusüsteemi korral on sellisteks reaktsioonideks kaks jõudu ja üks moment ning 3D jõusüsteemi korral kolm jõudu ja kolm momenti.

Rangemalt öeldes on jäiga kinnituse reaktsioonideks siiski üks jõud ja üks moment – reaktsioonjõudude peavektor ja peamoment. Toereaktsioonide leidmise korral määratakse tavaliselt nende kahe vektori projektsioonid koordinaattelgedel. Viimaste abil saab omakorda määrata toereaktsioonide koordinaattelgedel sihilised komponendid. Tasapinnalisel juhul on neist kuuest komponendist kolm samaselt nullid. Täpselt sama loogika kehtib sisejõudude määramise korral.

## 2.2. Sisejõud

## 2 - 8

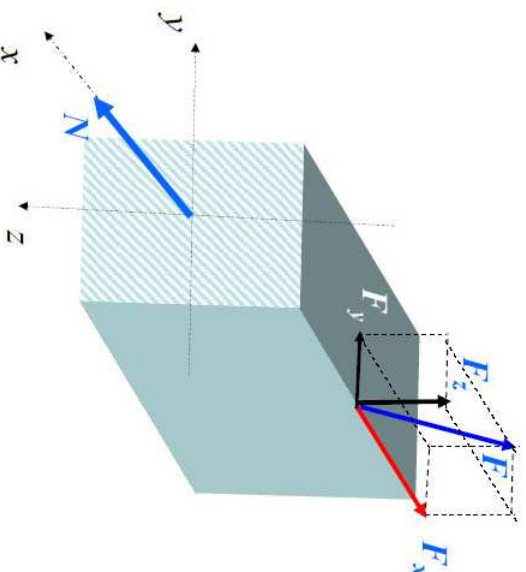


Joonis 2.1: Lõikemeetod ja sisejõud: lõikepinnal on kujutatud sisejõudude peavektor ja peamoment.

Sisejõudude määramiseks tuleb vaadelda keha kumbagi poolt eraldi ning koostada staatikast tuntuud meetodeid kasutades tasakaaluvõrrandid, kust määratakse otsitavad sisejõud. Ettevaatlik tuleb siin olla juhtudel, kui lõige on tehtud jaotatud koormuse mõjumise piirkonnas. Sellisel juhul ei saa kogu jaotatud koormust asendada tihed jõuga nagu staatikas tehti. (Näide 2-1. Tala sisejõud. Lahendatakse loengus, vt. ka fail NAIDE2-1.pdf)

## 2.2.2 Sisejõudude liigid

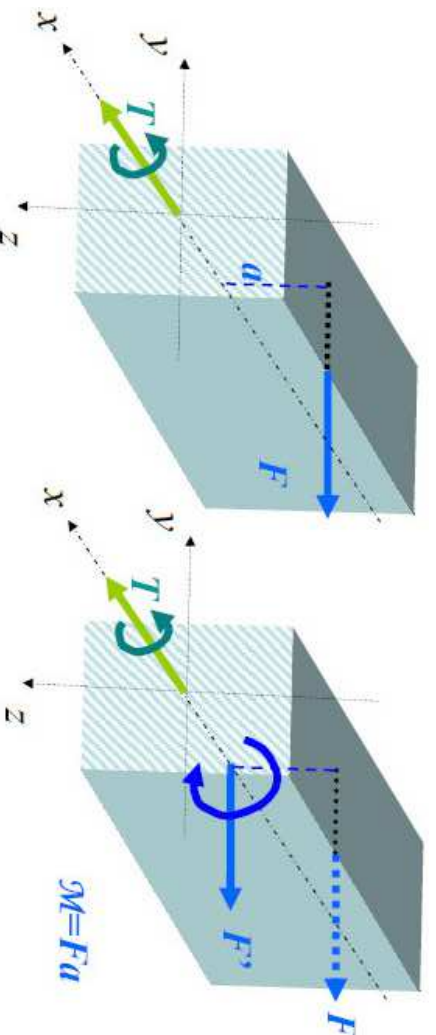
Varraste ja talade (ka plaatide) korral eristatakse sisejõududena *pikijõudu*, *väändmomenti*, *põkijõudu* ja *paindemomenti*. *Pikijõud* mõjub piki varda telje. Ta saab tekkida sellisel juhul, kui välisjõududel on varda telje sihilisi komponente (joon. 2.2).



Joonis 2.2: Pikijõud

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

*Väändmoment* saab vardas tekkida siis, kui välisjõududel on komponente, mis annavad momente varda telje suhtes või talle on rakendatud pöördmoment, st. välismoment varda telje suhtes (joon. 2.3). Väändmoment pöörab varda ristlõikeid ümber varda telje.

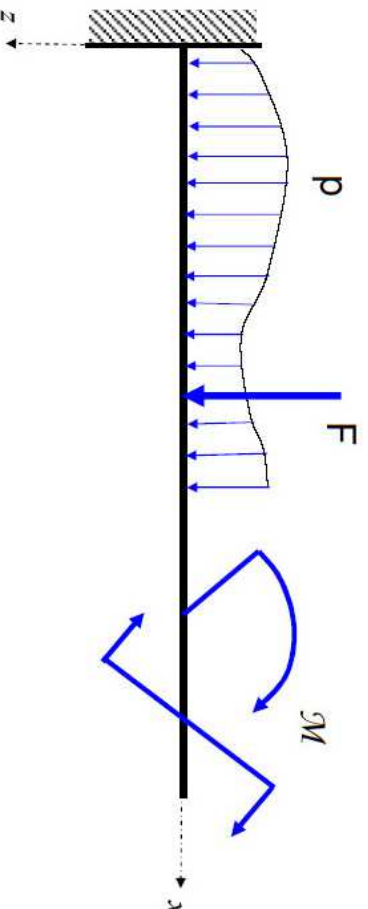


Taandades välisjõu  $F$  varda  $x$ -teljele saame välisjõu  $F'$  ja pöördmomenti  $\mathcal{M}$ .

Joonis 2.3: Väändmoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

*Põikjõud* mõjub risti varda teljega ja ”üritab varrast läbi lõigata”. *Paindemomendi* toimel varras kõverdub. Need kaks sisejõudu saavad vardas tekkida siis kui talle mõjuvad välisjõud omavad varda teljega ristuvaid komponente. Lisaks võib *paindemoment* tekkida juhul kui vardale mõjub painet tekitav moment. Selliseid väliskoorumisi on kujutatud joonisel 2.4. Põikjõu sünonüümina kasutatakse ka terminit *lõikejõud*.

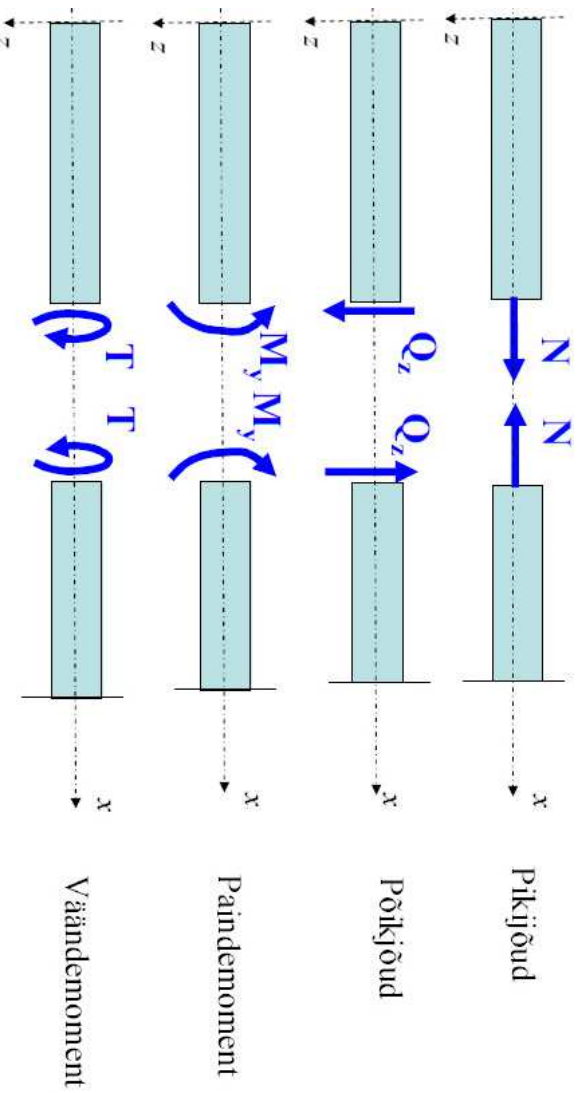


Joonis 2.4: Põikjõud ja paindemoment

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

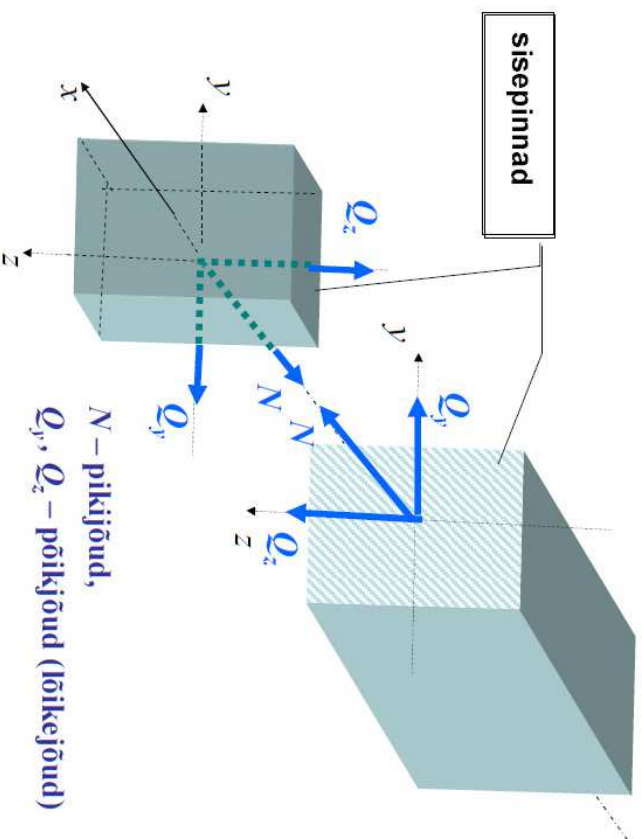
## 2.2. Sisejõud

Joonisel 2.5 on kujutatud käsitletud sisejõudusid tasapinnalises (2D) juhul ja joonistel 2.6 ning 2.7 3D juhul. Neil joonistel on kasutatud sisejõudude tavapäraseid tähistusi: pikijõud –  $N$ , väändemoment –  $T$ , põikjõud –  $Q$  ja paindemoment –  $T$ .

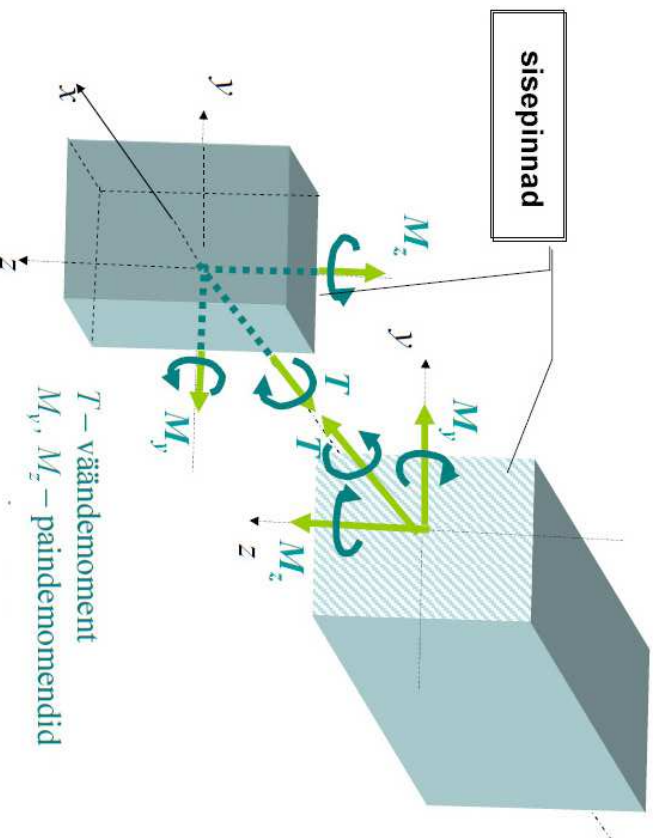


Joonis 2.5: Sisejõudude liigid – 2D juht.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)



Joonis 2.6: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad — pikki- ja põikjõud 3D juhul.  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)



Joonis 2.7: Sisejõudude liigid ja positiivsed suunad – väände- ja paindemomendid 3D juhul.  
NB!  $M_z$  on siin negatiivne, teised positiivsed.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

### 2.2.3 Sisejõudude märgireeglid

Sisejõudude positiivsetele ja negatiivsetele suundadele on kehtestatud suhteliselt ranged märgireeglid<sup>3</sup>. Enne nende juurde asumist tuleb aga täpsustada koordinaattelgede asend ja tuua sisse mõned mõisted.

Tugevusõpetuses, ehitusmehaanikas ja mõnes muus mehaanika osas, kus käsitletakse varraste, plaatide ja koorikute mehaanikalist käitumist, on tihhti kombeks suunata vertikaalne koordinaattelg alla. Kuna pöörde positiivne suund on seotud telgede asendiga, siis loetakse nüüd positiivseks tavapärasega võrreldes vastupidist pööret (vt. 1. peatükk lk. 8). Selline telgede asend oli eelmises alajaotuses juba kasutusel.

Mõttelisel lõikel tekkivat pinda nimetatakse *sisepinnaks* (vt. joon. 2.6 ja 2.7). Tavaliselt tehakse lõiked risti telgedega. Sel juhul saab defineerida positiivsed ning negatiivsed sisepinnad. Sisepinda nimetatakse *positiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattelje positiivses suunas ja *negatiivseks sisepinnaks* kui tema normaal on suunatud koordinaattelje negatiivses suunas.

---

<sup>3</sup>Tõsi kill, erinevte autorite õpikutes ja teatmeteostes võib kohata väga erinevaid märgireegleid.

Joonistel 2.6 ja 2.7 kujutatud juhtudel on lõikamise käigus tekkinud tagumisel vardaosal positiivne sisepind ja eesmisel vardaosal negatiivne sisepind. Joonisel 2.5 kujutatud 2D juhul on positiivne sisepind tekkinud varda vasakpoolsel osal ja negatiivne parempoolsel osal.

Tala painde uurimisel osutuvad tähtsateks nn. *positiivsed ja negatiivsed kiud*. Varda mõttelisi kiudusid nimetatakse positiivseteks kui  $z$ -koordinaat on selles tala osas positiivne. Ja vastupidi, varda mõttelisi kiudusid nimetatakse negatiivseteks kui  $z$ -koordinaat on selles tala osas negatiivne. Selline määratlus kehtib juhul kui tala paindub  $x - z$  tasapinnas (joon. 2.4). Kui paine toimub aga  $x - y$  tasapinnas, siis on positiivsed ja negatiivsed kiud määratud  $y$ -telje abil.

Graafiliselt on *sisejõudude positiivsed suunad* 2D juhu jaoks kujutatud joonisel 2.8 ning 3D juhu jaoks joonistel 2.6 ja 2.7 (välja arvatud  $M_z$ , mis on joonisel 2.7 negatiivne). Sõnastatult on sisejõudude märgireeglid järgmised.

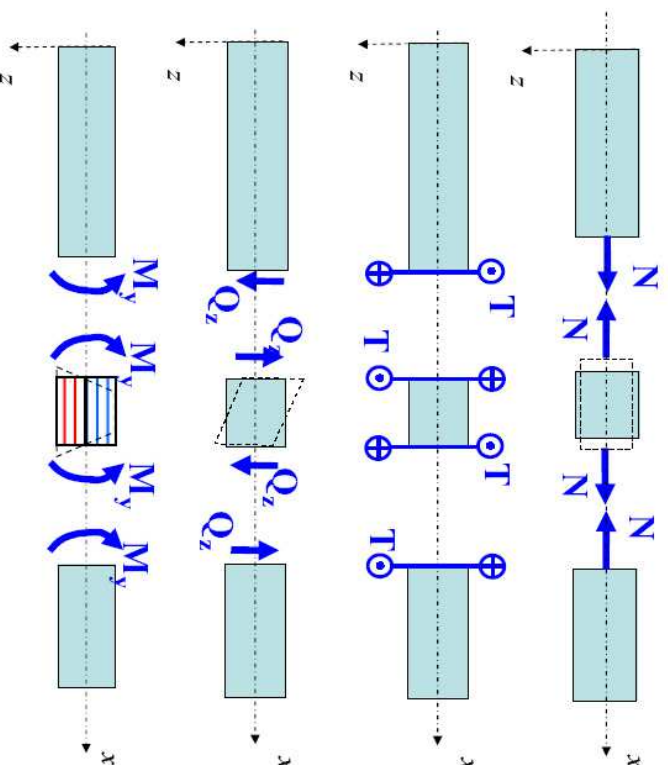
- *Positiivne pikijõud* vastab varda tõmbele ja negatiivne pikijõud survele.
  - Positiivne pikijõud mõjub positiivsel sisepinnal telje positiivses suunas.



- **Väändmomenti positiivne suund** on määratud kruvireeglga: positiivsel sisepinnal mõjuv väändmoment on positiivne kui väändmomenti suunas pöörates, hakkab kruvi liikuma telje positiivses suunas ning negatiivsel sisepinnal telje negatiivses suunas.
- **Positiivne põikjõud**  $Q_z$  mõjub positiivsel sisepinnal  $z$ -telje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal  $z$ -telje negatiivses suunas.
  - Analoogiline märgireegel kehtib ka põikjõu  $Q_y$  jaoks.
  - Tasapinnalise juhu jaoks on kasutusel ka nn. tööreegel: Positiivne põikjõud pöörab talaosa päripäeva (vt. joon. 2.8).
- **Positiivne paindemoment** tekitab tõmbe tala positiivsetes kiududes.
  - Käesolevas kursuses kasutatava telgede orientatsiooni korral pole paindemomendi märgireeglil mitte midagi ühist jõu momendi juures kasutatava märgireeglga.

**Märkus:** Piki- ja põikjõu märgireeglite osas on erinevad autorid väga üksmeelsed, kuid painde- ja eriti väändmomentide puhul on võimalikud vägagi erinevad lähenemisviisid.

### Varda sisejõu märgireeglid (sisejõudude positiivsed suunad).



2

Joonis 2.8: Sisejõudude märgireeglid.

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

Sisejõudusid on tavaliselt kasulik teada igas varda ristlõikes ning seetõttu on osutunud otstarbekaks esitada neid graafiliselt. Vastavaid graafikuid nimetatakse eesti keeles *epüürideks*<sup>4</sup>. Enam vähem analoogiliselt, st. epüüride abil, esitati staatika kursuses lauskoormusi ehk jaotatud koormusi. Epüüri kõrvale kirjutatakse tema nimi ja ühikud. Näiteks  $N$ -epüür kN, või lühidalt  $N$  kN.

Epüüride koostamist selgitame järgnevate näidete abil, millest näited 2.2 – 2.7 on eraldi failides:

- pikijõud ja väändemoment – NAITTED 2.2-5.pdf
- põikjõud ja paindemoment – NAITTED 2.6-7.pdf

Kolm näidet, mis pärinevad emeriitprofessor Jaan Metsaveere õppematerjalidest, on esitatud järgmise alajaotuse lõpus.

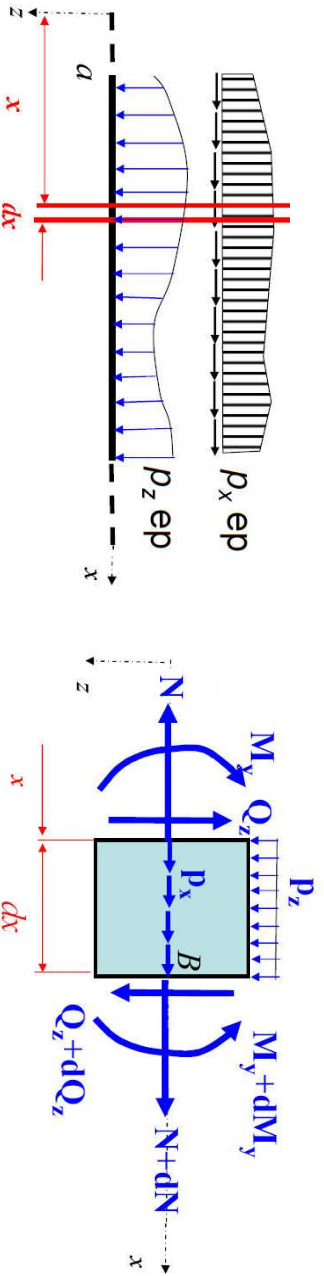
<sup>4</sup>Inglise keeles on epüüri vaste *diagram*, näiteks põikjõu epüür on inglise keeles *shear-force diagram*

## 2.2. Sisejõud

## 2 - 20

### 2.2.4 Diferentsiaal- ja integraalseosed lauskoormuse intensiivsuse ja sisejõudude vahel

Vaatleme varda osa, kus piki telge mõjub lauskoormus intensiivsusega  $p_x$  ja risti teljega lauskoormus intensiivsusega  $p_z$ . Koordinaadil  $x$  on vardast ristlõigete abil eraldatud lõpmata lühike element pikkusega  $dx$  (joon. 2.9). Koostame selle elemendi jaoks tasakaaluvõrrandid, projekteerides kõik talle mõjuvad jõud  $x$ - ja  $z$ -teljele ning leides momendid punkti  $B$  suhtes.



Joonis 2.9: Diferentsiaal- ja integraalseosed — lauskoormuse intensiivsuse (Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= N + dN - N + p_x \cdot dx = 0, \\ \sum_i F_{iz} &= Q_z + dQ_z - Q_z + p_z \cdot dx = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_i M_B(\mathbf{F}_i) = -M_y - Q_z \cdot dx + M_y + dM_y + p_z \cdot dx \cdot (0, 5dx) = 0,$$

Pärast lihtsustamist, diferentsiaaliga  $dx$  läbijagamist, ning viimasest võrrandist kõrgemat järku vaikese liikme hülgamist, saame kolm diferentsiaalset:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1)$$

Integraalseoste saamiseks korrutame viimaseid diferentsiaaliga  $dx$  ning integreerime lõigul  $[a, x]$ :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a) - \int_a^x p_x(x) dx, \\ Q_z(x) &= Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \\ M_y(x) &= M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

### 2.2. Sisejõud

### 2 - 22

Äsjatuletatud seosed võimaldavad teha olulisi *järeldusi* sisejõudude epiüiride kuju (käitumise) kohta.

1. Piirkondades, kus lauskoormus puudub, on piki- ja põikjõud konstantsed, aga paindemoment on lineaarfunktsioon koordinaadist  $x$ .
2. Piirkonnas, kus väline lauskoormus on konstantne, on põik- ja pikijõud lineaarsed funktsioonid koordinaadist  $x$ . Paindemoment on sellisel juhul aga ruutfunktsioon.
3. Koondatud välisjõu rakenduspunktis toimub vastava sisejõu epiüiris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva välisjõu suurusega.
4. Koondatud välismomendi rakenduspunktis toimub painde- või väändemomendi epiüiris hüpe, mis on arvuliselt võrdne mõjuva momendi suurusega.
5. Paindemomendi epiüiri tõus on võrdne põikjõuga. Kohas, kus põikjõud on null, on paindemomendil ekstremaalne väärtus.
6. Kohas, kus põikjõu epiüiris on hüpe, on paindemomendi epiüiris murdekoht (epiüiri tõus muutub hüppeliselt). Erijuhul, kui hüppe käigus muutub ka põikjõu märk, on paindemomendil selles kohas ekstreemum.

7. Epüüride joonistamisel on otstarbekas meeles pidada, et määratud integraal esitab integreeritava funktsiooni graafiku ja  $x$ -telje vahele jääva kujundi pindala (lõigul  $[a, x]$ ).

**Näide 2-8.** Olgu teada, et kohal  $x = a$  on põikjõul väärtus  $Q(a)$  ja paindemomendil  $M(a)$ . Lõigul  $[a, b]$  mõjub vertikaalne lauskoormus intensiivsusega  $p$ . Leida põikjõu ja paindemomendi väärtused kohal  $x = b$  ning paindemomendi maksimaalne väärtus lõigul  $[a, b]$  kasutades diferentsiaal- ja integraalseid.

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z, \quad Q_z(x) = Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx$$

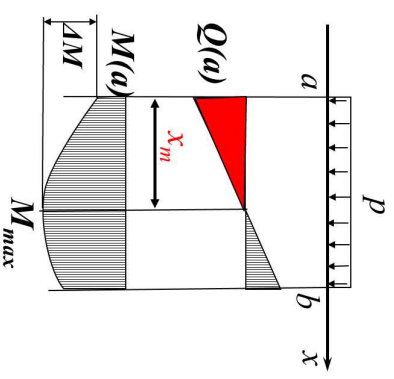
$$M_y(x) = M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx$$

$$Q_z(x) = Q_z(a) - p(x - a), \quad Q_z(b) = Q_z(a) - p(b - a)$$

$$x_m = Q_z(a)/p$$

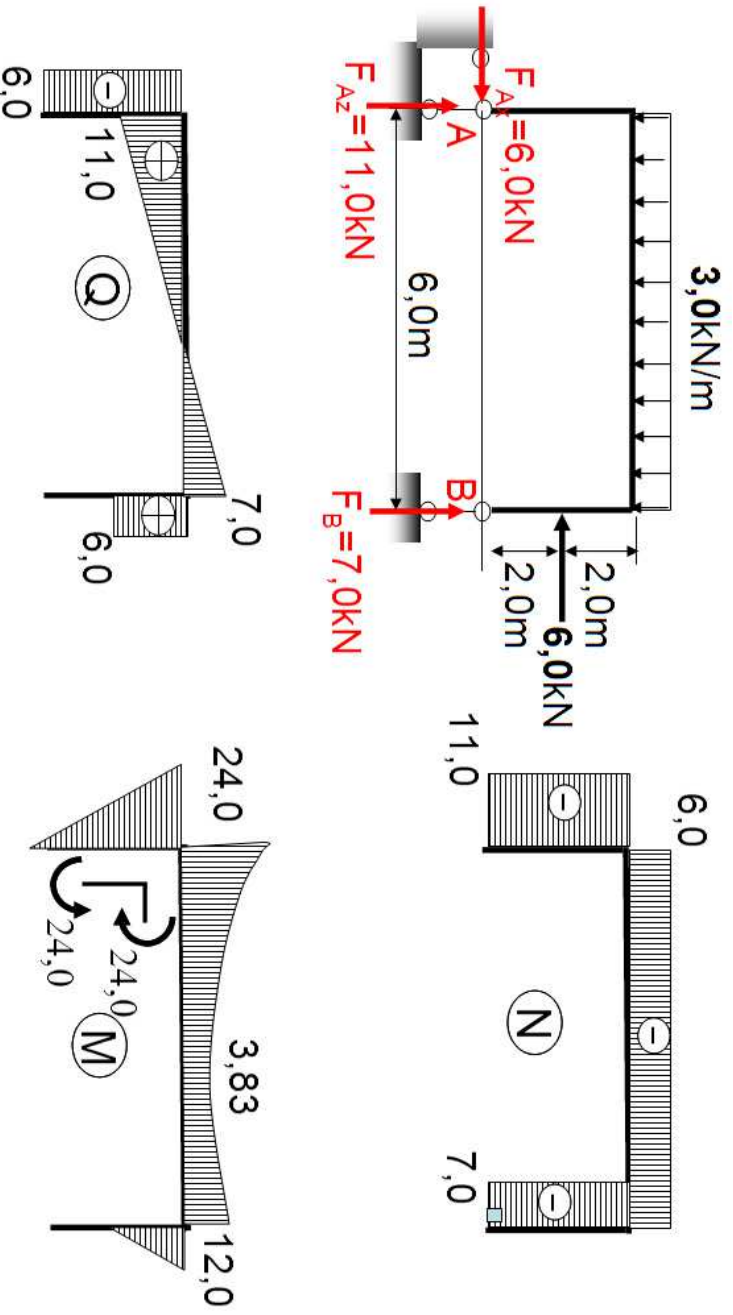
$$M_{max} = M_y(a) + 0,5x_m Q_z(a) = M_y(a) + 0,5[Q_z(a)]^2 / p$$

$$M_z(b) = M_{max} - 0,5(b - a - x_m) |Q_z(b)|$$



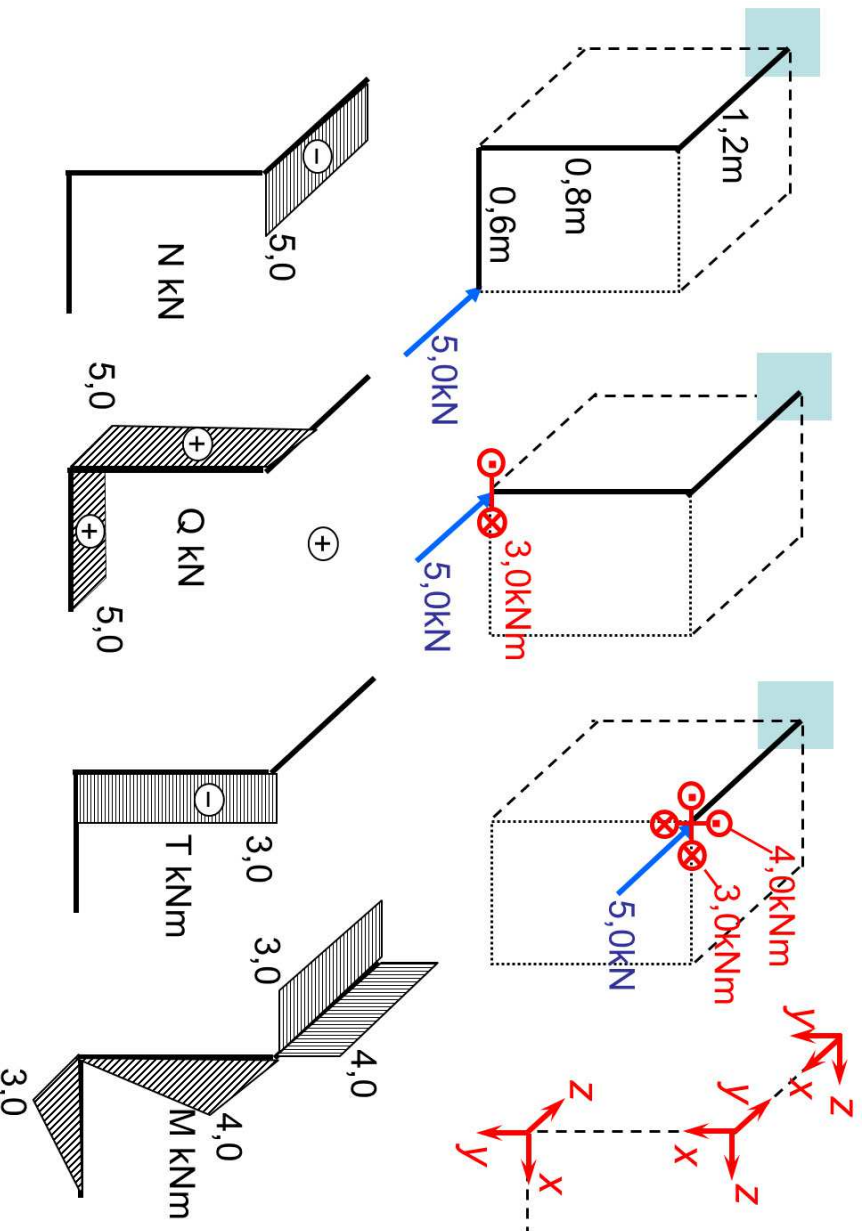
## 2.2. Sisejõud

**Näide 2-9.** Koostada tasandraami sisejõudude epüürid.



$$M_{\min} = -24,0 + 11,0^2 / 2 \cdot 3,0 = -3,83 \text{ kNm}$$

Näide 2-10. Koostada murtud varda sisejõudude epiüürid.



### 2.3. Pinge mõiste

### 2 - 26

## 2.3 Pinge mõiste

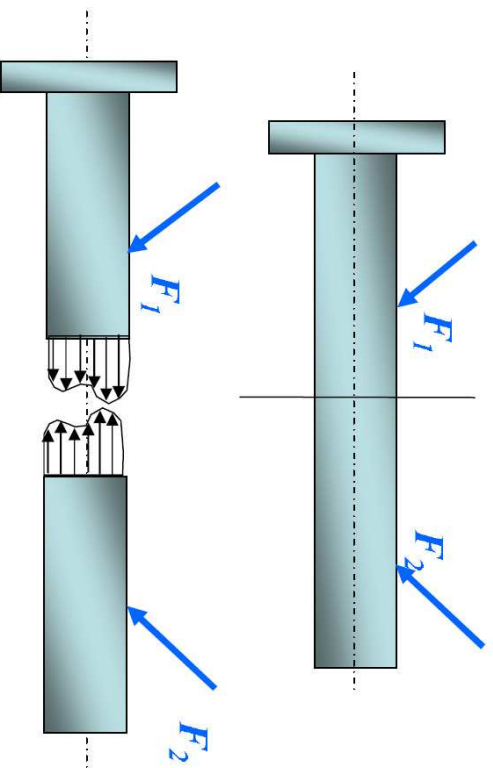
On lihtne taibata, et eelmistes alajaotustes käsitletud lõikemeetodi korral on sisejõud tegelikult jaotunud üle kogu lõikepinna (joon. 2.10) ja vaadeldud kuus sisejõudu kujutavad endast selle lauskoormuse peavektori ja peamomendi projekttsioone koordinaattelgedel.

Lõikepinna mõjuva lauskoormuse intensiivsust nimetamegi *pingeks*. Tema mõõtühik  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$  langeb kokku rõhu tihikuga.

Kõige lihtsam on pinget arvutada juhul kui vardas mõjub vaid pikijõud. Siin eeldatakse, et pikijõud  $N$  on jaotunud tihlaselt üle kogu lõikepinna  $A$  (joon. 2.11) ja seega pinge

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.3)$$

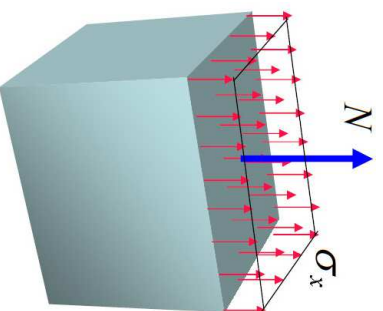
Oma olemuselt on vaadeldav pinge *normaalpinge*, sest ta mõjub risti vaadeldava pinnaga. Käesolevas kursuses tähistatakse normaalpingeid kreeka tähnega  $\sigma$  ja vajadusel lisatakse indeks, mis osutab pinnanormaali sihile. Eestikeelsetes tugevusõpetuse ja tehnilise mehaanika õpikutes nimetatakse pikijõust põhjustatud normaalpingeid ka *pikkepingeteks*.



Joonis 2.10: Lõikemeetod ja pinged varda ristlõikes

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

Alajaotustes 2.2–2.6 kasutatud lähenemisviis, kus sisejõud jaotakse vastavalt sellele, kuidas nad on orienteeritud koordinaattelgde suhtes<sup>5</sup> ja pinged saavad oma nime selle järgi, millise sisejõuga on neil põhjuslik seos, on iseloomulik just tugevusõpetusele (tehnilisele mehaanikale). Sama lähenemisviisi on aga otstar-

<sup>5</sup>Koordinaatteljed orienteeritakse omakorda uuritava keha geometriast lähtudes.

Joonis 2.11: Pikkepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

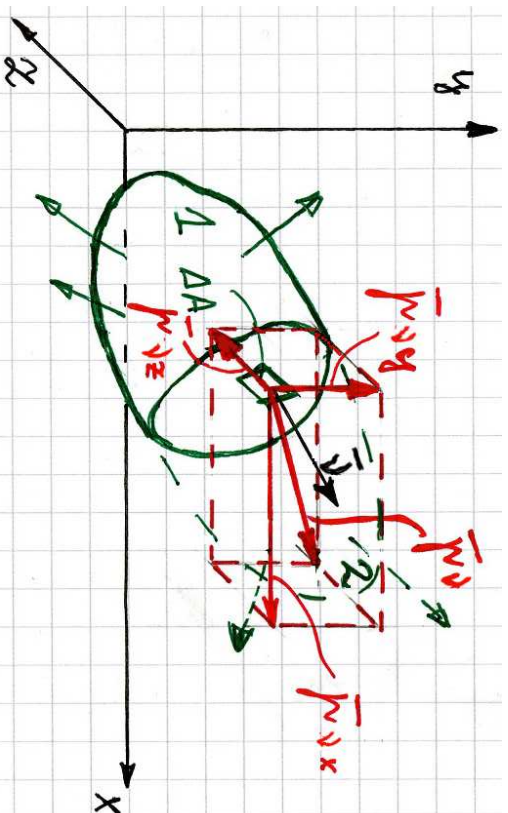
bekas rakendada ka elastusteooria tulesannete korral kui uuritavateks objektideks on vardad (talad), plaadid ja koorikud.

Järgmises alajaotuses selgitame pinge mõistet pisut tildisemalt ning tlejärgmises tuleme tagasi tugevusõpetuses kasutatava lähenemisviisi juurde ja hakkame uurima pingeid varda ristlõike punktis.

## 2.4 Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

Vaatleme meelevaldse kujuga keha, millele mõjub pind- ja mahujõududest koosnev (välis)jõudude süsteem on tasakaalus.

Rakendame lõikemeetodit: jagame keha mõtteliselt osadeks 1 ja 2; hülgame osa 2 ja vaatleme osa 1 (joon. 2.12).



Joonis 2.12: Pingevektor  $\mathbf{p}_\nu$  ja tema koordinaattelgedel  $xyz$  silhilised komponendid.

### 2.4. Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireeglid

- Selleks, et osa 1 oleks ka peale osa 2 eraldamist tasakaalus tuleb lõikepinnale rakendada osa 2 asendavad jõud, st. sisejõud, mis on jaotunud üle kogu lõikepinna.

- Lõikepind osal 1 on määratud välisnormaliga  $\nu$ . Mõjugu väikesel pinnal  $\Delta A$  sisejõud  $\Delta \mathbf{S}$ . Suhet  $\Delta \mathbf{S} / \Delta A$  võib nimetada keskmiseks pingeks pinnal  $\Delta A$ .

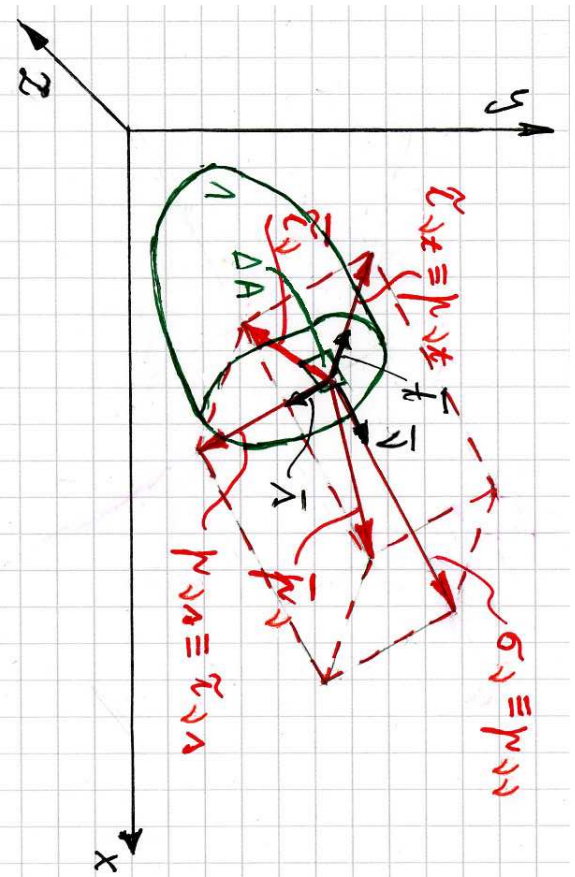
✓

- Kui minna piirile  $\Delta A \rightarrow 0$ , saame (tegeliku) *pinge pinnal normaaliga*  $\nu$

$$\mathbf{p}_\nu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta A}. \quad (2.4)$$

- Üldjuhul vektorite  $\nu$  ja  $\mathbf{p}_\nu$  suunad ei tihti.

- Edaspidi on tihti otstarbekas kasutada pingevektori asemel tema projektsioone koordinaattelgedel  $p_{\nu x}$ ,  $p_{\nu y}$ ,  $p_{\nu z}$ , mis omakorda määravad ära pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  koordinaattelgedel  $xyz$  silhilised komponendid (vt. joon. 2.12). Siin ja edaspidi märgib esimene indeks pinnanormaali sihti ja teine pinge-komponendi mõjumise sihti.

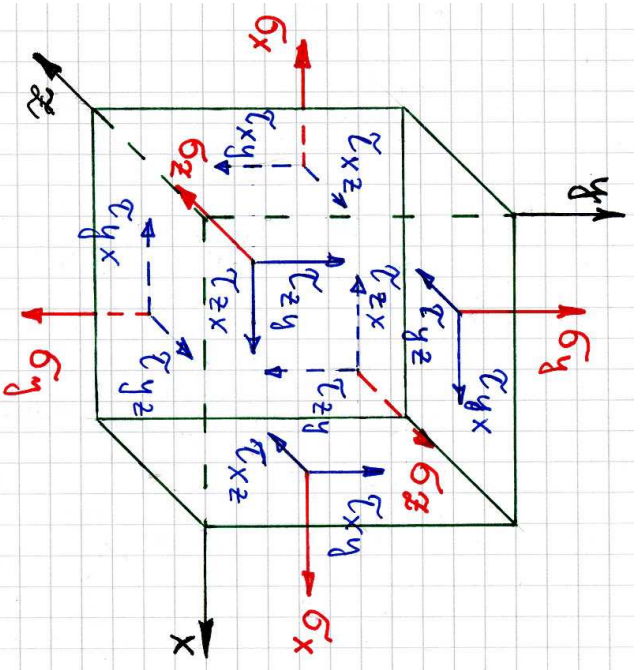


Joonis 2.13: Pingevektori  $\mathbf{p}_\nu$  lahutamise normaal- ja nihkepingeks.

- Teisest küljest saab pinnal normaaliga  $\nu$  mõjuva pingevektori lahutada *normaal- ja nihkepingeks*:  $\mathbf{p}_\nu = \boldsymbol{\sigma}_\nu + \boldsymbol{\tau}_\nu$ . Nihkepinge  $\boldsymbol{\tau}_\nu$  lahutatakse tavaliiselt veelkord kaheks komponendiks:  $\boldsymbol{\tau}_\nu = \boldsymbol{\tau}_{\nu s} + \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$  (vt. joon. 2.13, kus  $\mathbf{p}_{\nu\nu} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\nu$ ,  $\mathbf{p}_{\nu s} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu s}$  ja  $\mathbf{p}_{\nu t} \equiv \boldsymbol{\tau}_{\nu t}$ ).

2.4. Pingevektor, tema projektsioonid ja märgireglid

Kui lõike pind on paralleelne koordinaatasanditega, siis kasutatatakse indeksi  $\nu$  asemel lõikepinnale normaalks oleva koordinaattelje nime, näiteks  $x$ .



Märgireglid: joonis 2.14.

- *Positiivne ja negatiivne sisepind* on defineeritud täpselt samuti kui sisejõudude puhul.
- *Positiivne normaalpinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas. Positiivne normaalpinge vastab tõmbele.
- *Positiivne nihkepinge* mõjub positiivsel sisepinnal koordinaattelje positiivses suunas ja negatiivsel sisepinnal koordinaadi negatiivses suunas.

Joonis 2.14: Normaal- ja nihkepingete positiivsed suunad.



## 2.5 Pingetensor

Vaatleme keha meelevaldset punkti. Seda punkti läbib kolm koordinaattasandit, millel mõjuvad kolm normaalpinget  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja kuus nihkepinget  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  moodustavad *pingetensori*

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Pingetensor on *teist järku tensor* ja teda saab esitada  $3 \times 3$  (tasandülesannete korral  $2 \times 2$ ) tabelina nagu matrikseid.

Pingetensor iseloomustab täielikult *pingust* (pingeseisundit) antud punktis ning tema abil saab määrata pingevektori suvalisel seda punkti läbival pinnal<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Selle juurde tuleme tagasi 4. peatükis, kui hakkame käsitlema pingeid kaldpindadel, peapingeid jms.

### 2.5.1 Skalaar, vektor, tensor

Käesolevas kursuses vaatleme kolme liiki füüsikalisi suurusi — skalaare, vektoreid ja (teist järku) tensoreid.

*Skalaar* pole seotud suunaga, teda iseloomustab vaid (arv)väärtus.

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

*Vektorit* iseloomustab lisaks moodulile (arvväärtusele) ka suund.

- 3D juhul esitatav arvukolmikuna —  $3 \times 1$  või  $1 \times 3$  matriksina.
  - Arvud arvukolmikus sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
  - Vektori moodul ja suund on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Vektori iga komponent (projektsioon) on samuti seotud tihed suunaga ja tema tähistamisel kasutatakse tihede indekseid.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.

*Teist järku tensor* on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.

- 3D juhul on teist järku tensor esitatav  $3 \times 3$  matriksina, st. 9 arvu abil.
  - Arvud matriksis sõltuvad koordinaatsüsteemi (baasi) valikust.
  - Tensor ise on koordinaatsüsteemist (baasist) sõltumatu.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- Teist järku tensori komponentide tähistamisel kasutatakse kahte indeksit, sest iga komponenti iseloomustab lisaks moodulile kaks suunda.
  - Näiteks pingetensori korral näitab esimene indeks pinnanormaali suunda ja teine indeks pingekomponendi suunda.

### 2.5. Pingetensor

### 2 - 36

- Teisest küljest (“matemaatiliselt”) on teist järku tensor  $\mathbf{T}$  defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori  $\mathbf{u}$  vektoriks  $\mathbf{v}$ , i.e.

$$\mathbf{T} : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

kus punkt  $\cdot$  tähistab tensori  $\mathbf{T}$  sisekorrutist<sup>7</sup> vektoriga  $\mathbf{u}$ .

### Maatriksite ja tensorite omavaheline suhe

- Kui on fikseeritud kordinaatsüsteem, siis saab iga teist järku tensori esitada  $3 \times 3$  maatriksina ja iga vektori arvukolmnikuna.
- Vastupidine aga ei kehti — iga  $3 \times 3$  maatriks ei osutu tensoriks.
- Koordinaatide teisendamisel teisenevad nii tensori kui vektori komponendid kindlate reeglite alusel.
  - Pärast koordinaatiseisendust peab tensor (vektor) esitama endiselt täpselt sama füüsikalist suurust, mida enne teisendust.

<sup>7</sup>Punktkorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product*, *dot product*, *scalar product*.

- \* Kui see nii on, siis ongi tegu tensoriga (vektoriga), vastupidisel juhul mitte.
- \* Vastupidine olukord on füüsikaliselt vastuvõtmatu. Pole võimalik, et pinge keha punktis või punkti siire või kiirus sõltuks koordinaatsüsteemi valikust.
- \* Näide. Vektor ning kaks koordinaatsüsteemi  $xy$  ja  $x'y'$ , mille vaheline nurk on  $\theta$ .

### Märkused:

- Vektoreid võib nimetada esimest järku tensoreiks ja skalaare nullindat järku tensoreiks.
- Kui tensor (vektor) on määratud igas vaadeldava keha punktis, siis on meil tegu tensorväljaga (vektorväljaga).
  - Näiteks on pingetensori korral tegu tensorväljaga, sest ta on määratud igas vaadeldava keha punktis.

### 2.5. Pingetensor

#### 2.5.2 Pingetensori invariantid

Suuruseid

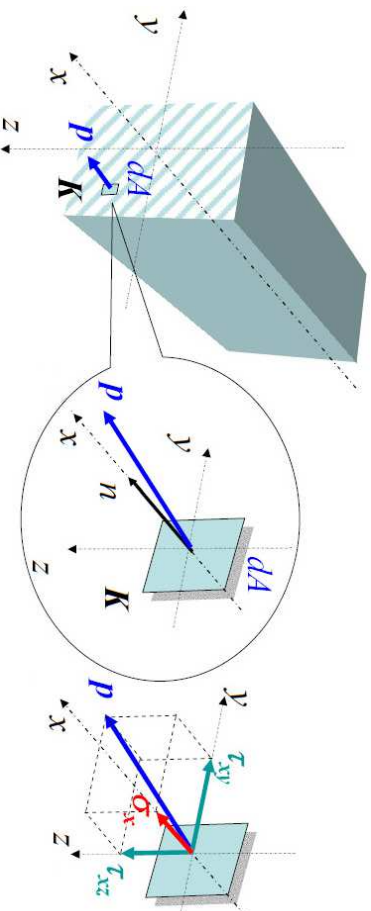
$$\left\{ \begin{array}{l} I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \\ I_3^\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

nimetatakse *pingetensori invariantideks* ehk lühidalt *pinge invariantideks*. Invariantis tähendab siin seda, et need kolm suurust ei sõltu koordinaatide valikust (vaatamata sellele, et pingetensori komponendid omavad erinevates koordinaatsüsteemides ilddjuhul erinevaid väärtusi). On märkimisväärne, et see invariantis ei piirdu vaid erinevalt orienteeritud Descartes'i ristkoordinaatidega vaid kehtib suvaliste koordinaatsüsteemide, k.a. silindrilised, sfäärilised, elliptilised, hüperboolsed jne. vahel.

**Märkus:** Taolised kolm invarianti saab leida igale teist järku tensorile.

## 2.6 Pinged varda ristlõike punktis.

Varda korral on Descartes'i ristikordinaadid valitud tavaliselt nii, et  $x$ -telg on varda teljeks. Seetõttu on  $x$ -telg ristlõike normaaliks ja teised 2 koordinaattelge on suunatud mööda lõikepinda. Vaatleme varda ristlõike punkti  $K$ , mida läbib pind normaaliga  $\mathbf{n} \parallel x$ . Seal mõjub pingektor<sup>8</sup>  $\mathbf{p}$  mille normalkomponendiks on  $\sigma_x$  ning tangentsiaalkomponentideks  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .

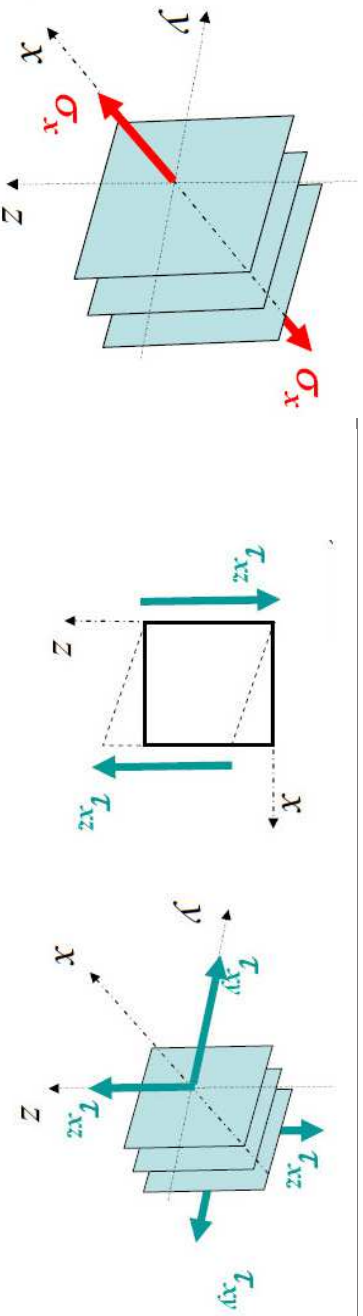


Joonis 2.15: Pinge varda punktis

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

<sup>8</sup>Siin oleme lihtiduse pärast loobunud indeksist  $\mathbf{n}$  pingektori juures.

### 2.6. Pinged varda ristloike punktis.



Joonis 2.16: Normaalpinge  $\sigma_x$  ning nihkepinged  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$ .  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

- Normaalpinged  $\sigma_x$  iseloomustavad varda telje sihis mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad muudavad varda ristlõigete vahelist kaugust.
- Normaalpinge  $\sigma_x$  määrgiregel on analoogiline pikijõu määrgireeglga.
- Nihkepinged iseloomustavad varda teljega risti mõjuvate sisejõudude intensiivsust ja nad nihutavad (või pööravad) erinevaid varda lõikeid (materjalikihte) üksteise suhtes.
- Nihkepinge ehk tangentsiaalpinge  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  määrgiregel on analoogiline põikjõu määrgireeglga.

## 2.7 Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

Pinge mõiste selgitamisega tegime algust alajaotuses 2.3, käesolevas alajaotuses tuletame seosed varda ristlõikes mõjuvate sisejõudude ja pingete vahel. Siinjuures peame silmas, et ristlõikes mõjuvad sisejõud ei kujuta endast mitte midagi muud kui samas ristlõikes mõjuvate pingete peavektori ja peamomendi projektsioone koordinaattelgedele. Pikemalt seletades:

1. ristlõikes mõjuvad pinged moodustavad jõuvälja, mille saab vastavalt staatika põhiteoreemile taandada ristlõike pinnakeskmesse,
  - selle tulemusena on pinged asendatud ühe jõu ja ühe momendiga;
2. projekteerides saadud jõu ja momendi koordinaattelgedele saame peavektori ja peamomendi lahutada kolmeks koordinaattelgede sihiksiks komponentiks,
  - saadud kuus komponenti kannavad meile juba tuntud nimetusi – pikijõud ( $N$ ), põikjõud ( $Q_y$  ja  $Q_z$ ), väändmoment ( $T$ ) ning paindemoment ( $M_y$  ja  $M_z$ ).

---

### 2.7. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

### 2 - 42

On selge, et rääkides seostest pingete ja varda sisejõudude vahel on võimalikud nn. kaks erinevat ülesande püstitust:

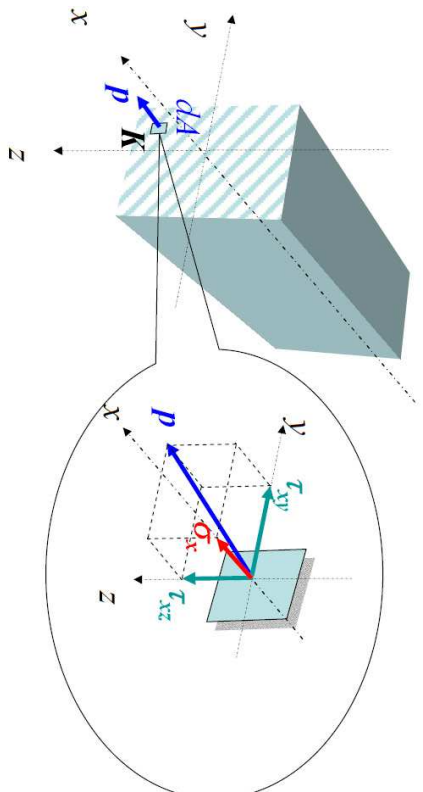
1. Teades pingeid, leida sisejõud.
2. Teades sisejõudusid, leida pinged.

Esimene neist on tunduvalt lihtsam, kuid teine suurema praktilise tähtsusega (vähemalt tugevusõpetuse seisukohalt).

#### 2.7.1 Sisejõudude avaldamine pingete kaudu

**Pikijõud.** Vaatleme ristlõike elementaarpinda  $dA$ , kus mõjub keskmine pinge  $\mathbf{p}$ , millele vastav normaalpinge on  $\sigma_x$  (joon. 2.17). Vaadeldaval elementaarpinnal pingest  $\sigma_x$  põhjustatud summaarne jõud  $\sigma_x dA$  mõjub samuti pinnanormaali  $\mathbf{n}$  sihis. Ristlõikes mõjuvate normaalpingete peavektori saame integreerides:

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (2.7)$$

Joonis 2.17: Pinged varda ristlõike elementaarpinnal  $dA$ .(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.)

**Põikjõud.** Ristlõikes mõjuvate põikjõudude  $Q_y$  ja  $Q_z$  arvutamine käib analoogiliselt pikijõuga. Nüüd vaadeldakse ristlõike elementaarpinnal  $dA$  mõjuvaid nihkepingeid  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  (pingevektori  $\mathbf{p}$  projektsioone  $y$ - ja  $z$ -telgedel, vt. joon. 2.17) ja saadakse põikjõudude leidmiseks valemid

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (2.8)$$

### 2.7. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

2 - 44

**Paindemomendid**  $M_y$  ja  $M_z$  on seotud normaalpingega  $\sigma_x$ . Kui paine toimub  $x - z$  tasandis, siis iseloomustab painet paindemoment  $M_y$  ning kui  $x - y$  tasandis, siis  $M_z$ . Eksperimentide põhjal on leitud, et momendid  $M_y$  ja  $M_z$  tuleb arvutada ristlõike kesktelgede<sup>9</sup> suhtes. Vastavalt paindemomendi määgireeglile põhjustab elementaarpinnal  $dA$  mõjuv summaarne jõud  $\sigma_x dA$  elementaarpaindemomendid  $z\sigma_x dA$  ja  $y\sigma_x dA$  vastavalt  $y$ - ja  $x$ -telje suhtes (vt. joon. 2.17). Vastavad peamomendid saadakse integreerimise teel:

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \quad \text{ja} \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA. \quad (2.9)$$

**Väändmoment.** Ristlõikes mõjuva väändmomendi arvutamise juures tuleb silmas pidada, et vastavalt sisejõudude ja pingete määgireeglitele põhjustab elementaarpinnal  $dA$  mõjuv positiivne nihkepinge  $\tau_{xz}$  positiivse väändmomendi ja positiivne nihkepinge  $\tau_{xy}$  negatiivse väändmomendi (vt. joon. 2.17). Integreerides üle kogu ristlõike, saame

$$T = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA. \quad (2.10)$$

<sup>9</sup>Ristlõike keskteljed läbiivad ristlõike pinnakeset.

## 2.7.2 Pingete avaldamine sisejõudude kaudu

Elmises alajaotuses (st. 2.7.1) tuletatud valemite korral pole tähtis, kas kasutusel on tugevusõpetuse (ehk nn. elementaartheooria) eeldused ja hüpoteesid või lineaarse elastsusteooria omad. Käesolevas alajaotuses osutub aga ülitähtsaks täpsustada, et praegust rakendamise tugevusõpetusele ehk nn. elementaartheooriale vastavaid lihtsustusi. Universaalsena<sup>10</sup> kuulub nende hulka *ristlõigete tasandilisuse hüpotees*, ehk *Bernoulli hüpotees*: ristlõiked, mis enne deformatsiooni olid tasapinnalised, jäävad ka peale deformatsiooni tasapinnalisteks.

*Pikkepinged.* Pingeid, mis on põhjustatud pikijõust, nimetatakse *pikkepingedeks*. Siin eeldatakse, et

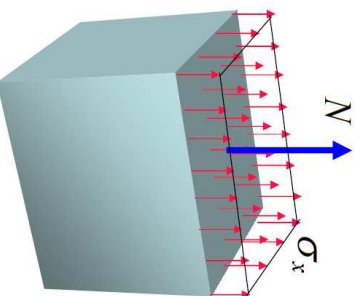
- vardale mõjub vaid piki tema telge mõjuv väliskoorumus,
  - seega mõjub varda ristlõigetes vaid üks sisejõud — pikijõud,
- pikijõust põhjustatud normaalpinge on jaotunud ühtlaselt üle kogu ristlõike (vrd. Bernoulli hüpotees ja vt. joon. 2.18).

<sup>10</sup>See hüpotees kehtib elementaartheooria raames tõmbel-survel, paindel, lõikel ja väändel.

### 2.7. Seosed pingete ja varda sisejõudude vahel

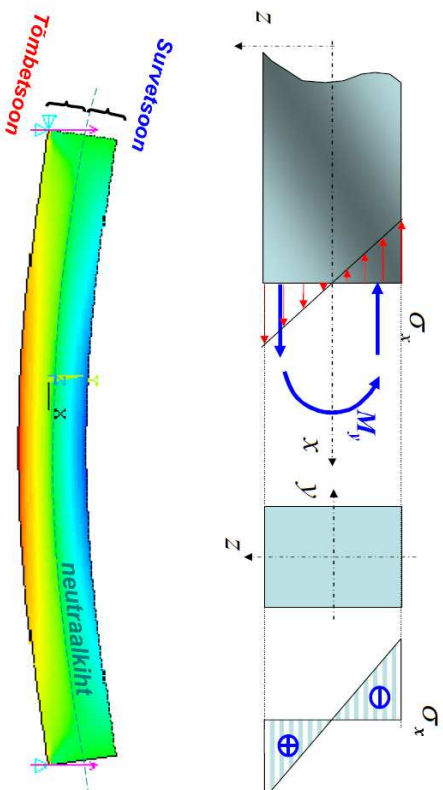
Seega saame seose

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (2.11)$$



Joonis 2.18: Pikijõud ja pikkepinge  
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetist.)

*Paindepinge.* Paindemomentid põhjustatud pingeid nimetatakse *paindepingeteks*. Oma olemuselt on paindepinged normaalpinged. Mõjugu talale selline väliskoorumus, mille toimel tekib vaid üks sisejõud – paindemoment  $M_y$  (joon. 2.19). Eksperimentaalsete ja teoreetiliste tulemuste põhjal ning kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga eeldatakse elementaartheoorias, et tekkinud paindepinge



Joonis 2.19: Paindepinge

(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehanika* loengukonspetsist.)

sõltub koordinaadist  $z$  lineaarselt, st,

$$\sigma_x = kz, \quad (2.12)$$

kus  $k$  on konstant, mille määramiseks kasutame seoseid (2.9):

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA = \int_A kz^2 dA = kI_y, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_y}{I_y}. \quad (2.13)$$

### 2.7. Seosed pingete ja varda sissejõudude vahel

Avaldiste (2.12) ja (2.13) põhjal

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}z. \quad (2.14)$$

Tugevusarvutuste seisukohalt omavad tähtsust just maksimaalsed paindepinged, mis tekivad neis ristlõike punktides, kus koordinaat  $z$  omab ekstremaal-seid väärtusi ( $z_{\max}$  ja  $z_{\min}$ ). Kui ristlõige on sümmeetriline  $y$ -telje suhtes, siis on  $z_{\max} = -z_{\min}$  ja arvutuste lihtstamiseks võib tuua sisse *ristlõike tugevusmomendi*

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (2.15)$$

Vimase abil saame maksimaalse paindepinge arvutamiseks valemi

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}. \quad (2.16)$$

Kui talale mõjuva väliskoormuse toimel tekib vaid paindemoment  $M_z$ , siis saame eelnevatega analoogilised valemid

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z}y, \quad (2.17)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad \max \sigma_x = \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.18)$$



**Märkused:**

- Tugevusmomentide  $W_y$  ja  $W_z$  arvutamise juures tuleb silmas pidada, et kui ristlõikeks on lihtkuju, st. ta on jaotatav  $n$  lihtsaks osakujuandiks, siis tuleb kõigepealt leida lihtkujuandi inertsimomendid  $I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)}$  ja/või  $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)}$ . Seejärel arvutatakse tugevusmomentid  $W_y$  ja  $W_z$  valemite (2.15) ja (2.18)<sub>1</sub> põhjal<sup>11</sup>.
- Kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga on paindepingete arvutamise juures eeldatud, et paindemomendist  $M_z$  põhjustatud paindepinged on  $z$  järgi konstantsed ja  $M_y$  põhjustatud paindepinged on  $y$  järgi konstantsed, vt. valemid (2.14) ja (2.17). Viimaste valemitega esitatud lineaarsed seosed on samuti kooskõlas Bernoulli hüpoteesiga.
- Varda paindel jääb surutud ja tõmmatud kihtide vahele kiht, milles nn. kiindude pikkus ei muutu ja kus paindepinge on null (vt. joon. 2.19). Vastavat varda kihti nimetatakse *neutraalkihiks*. Neutraalkihi ja ristlõike lõikejoont nimetatakse *nulljooneks*.

<sup>11</sup> NB!  $W_y \neq W_y^{(1)} + W_y^{(2)} + \dots + W_y^{(n)}$  ja  $W_z \neq W_z^{(1)} + W_z^{(2)} + \dots + W_z^{(n)}$

- On selge, et  $x - z$  tasapinnas toimuva painde korral on  $z = 0$  korral paindepinge  $\sigma_x = 0$ .
- Elementaariteooria korral eeldatakse, et nulljooned on määratud keskpunktidega.

**Näide 2-11.** Pikkepinged vardas. Lahendatakse loengus.

**Näide 2-12.** Paindepinged talas. Lahendatakse loengus.

### Väände- ja lõikepinged.

Väändepinge on põhjustatud väändemomendist ja lõikepinge põikjõust. Oma olemuselt on nad mõlemad nihkepinged ning kuna nende leidmine on tihti komplitseeritum kui pikijõust ja paindemomendist põhjustatud normaalpingete leidmine, siis pühendame neile omaette jaotise.

## 2.8 Nihkepinged varda ristlõikes<sup>12</sup>

### 2.8.1 Üldised seaduspärasused

#### Nihkepingete paarsuse seadus.

Elementaartheooria kasutatakse nn. nihkepingete paarsuse seadust, mis tule-  
tatakse järjenselt<sup>13</sup>. Eeldame, et vardas on homogeenne pingeseisund ehk ho-  
mogeenne pingus<sup>14</sup>. Sellisel juhul peavad elementaarriistahuka vastastahkudel  
mõjuma võrdvastupidised pinged. See tingimus kehtib nii normaal- kui nihke-  
pingete kohta ning ta on tuletatud tasakaalutingimustest  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$   
ja  $\sum F_{iz} = 0$  (vt. joon. 2.20 a) ja b)). Teatavasti on aga tasakaaluks vajalik veel  
kolme võrrandi kehtimine, st.  $\sum M_x(\mathbf{F}_i) = 0$ ,  $\sum M_y(\mathbf{F}_i) = 0$  ja  $\sum M_z(\mathbf{F}_i) = 0$ .  
Nende põhjal saadaksegi nihkepingete paarsuse seadus (vt. joon. 2.20 c)):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.19)$$

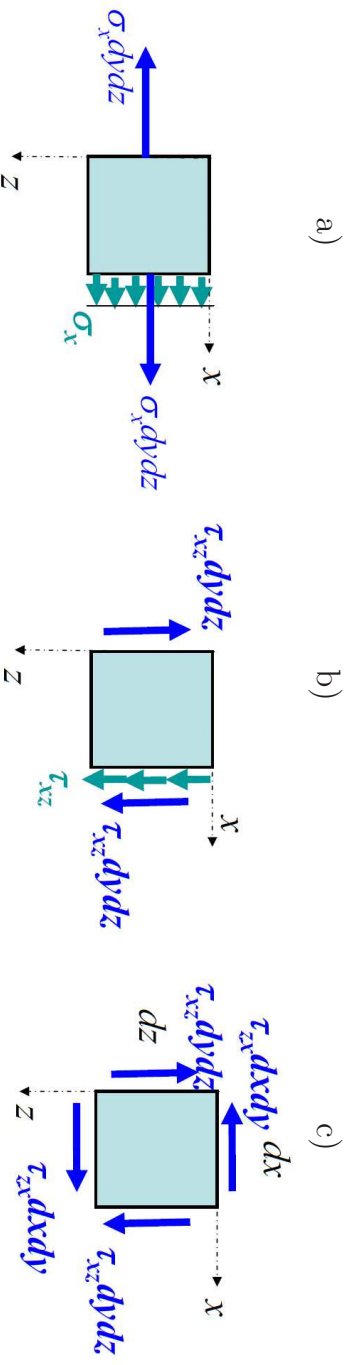
<sup>12</sup>Joonised on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspetsist.

<sup>13</sup>Hiljem esitame sama seaduspärasuse jaoks rangema tuletuskäigu.

<sup>14</sup>Pinguse ehk pingeseisundi all mõistetakse keha punkti lähivatel kõlkvõimalikel pindadel mõjuvate pingete hulka. Pinguse mõiste juurde tuleme tagasi.

Homogeenne pinguse korral on keha kõigis punktides tihesugune pingus.

#### 2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

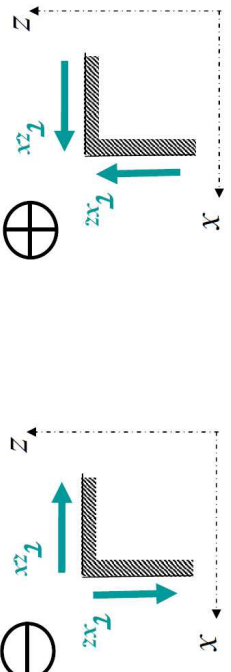


Joonis 2.20: Elementaarriistahuka tahkudel mõjuvad pinged.

Näiteks,

$$\sum M_y(\mathbf{F}_i) = -(\tau_{xz} dy dz) dx + (\tau_{zx} dx dy) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.20)$$

Avaldiste (2.19) põhjal on selge ka see, et kui mingis keha punktis on nihkepinge  $\tau_{xy} > 0$ , siis ka  $\tau_{yx} > 0$  ja vastupidi (vt. joonis 2.21). Analoogilised seosed kehtivad ka tilejäänud kahe nihkepingete paari jaoks.



Joonis 2.21: Nihkepingete paarsus.

### Nihkepinged ristlõike serval

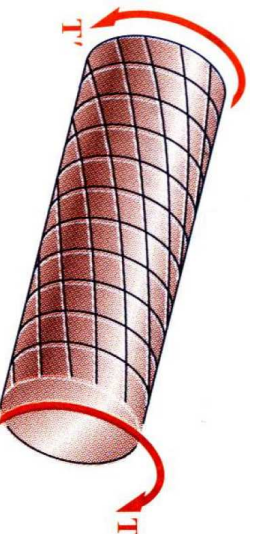
- Ristlõike serval mõjub nihkepinge puutuja sihis.
- Kuna ristlõike nurgapunktis on lõpmata palju puutuajaid, siis seal on nihkepinge null.

### 2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

#### 2.8.2 Väändepinged ümarvarda ristlõikes

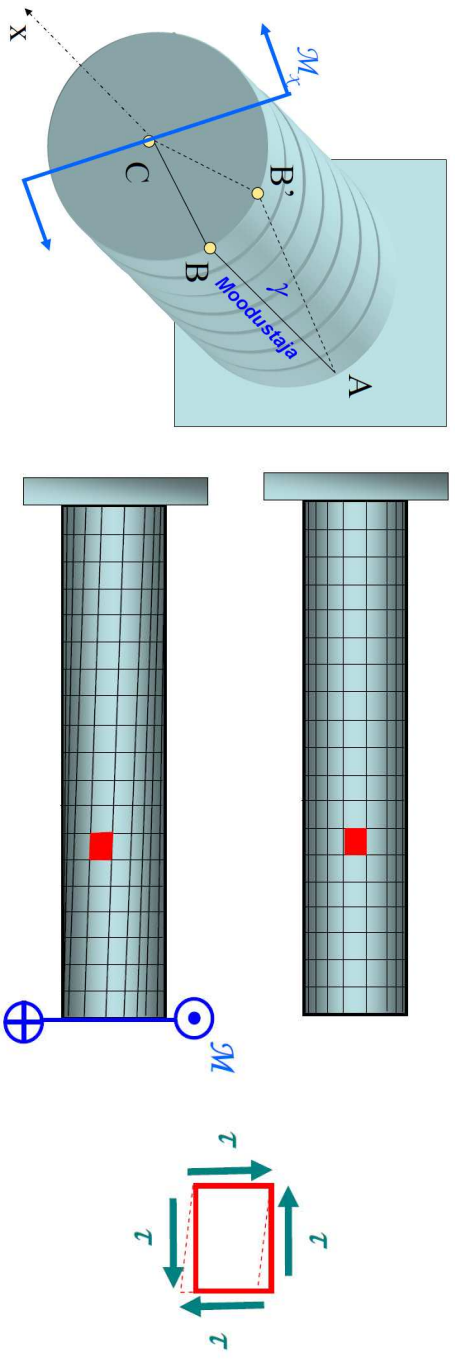
Olgu ümarvarda otstesse rakendatud momendid  $\mathbf{T}$  ja  $\mathbf{T}'$  (joonis 2.22). Selle tulemusena tekkitab vardas deformatsioon, mida nimetatakse *väändeks*. Väändel tekkivate pingete ja deformatsioonide uurimisel on elementaarteoorias kasutusel järgmised eeldused:

- Kehtib Bernoulli hüpotees.
- Varda telg jääb sirgjooneliseks.
- Ristlõike raadiused jäävad sirgjooneliseks.



allikas: [www.clarkson.edu/class/es22201/3\\_torsion.ppt](http://www.clarkson.edu/class/es22201/3_torsion.ppt)

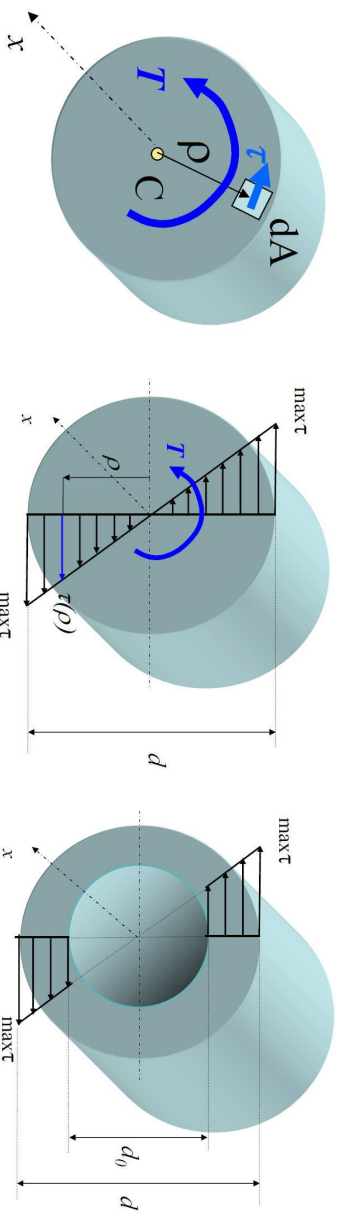
Joonis 2.22: Ümarvarda väände.



Joonis 2.23: Väändedeformatsioon.

Tehud eelduste põhjal pöörduvad ristlõiked väändel timber varda telje. Selle tulemusena pöörduvad varda moodustajad nurga  $\gamma$  võrra. Seega on väändedeformatsioon oma olemuselt nihkedeformatsioon ja algsed ristkülikulised pinnaelemendid muutuvad rööpkülikulisteks. Nurka  $\gamma$  nimetatakse *väändenurgaks*, ta on üks oluline väännet iseloomustav suurus ja tema juurde tuleme hiljem tagasi.

2.8. Nihkepinged varda ristlõikes



Joonis 2.24: Väändepinged timbarvardas ja paksuseinalises torrus.

Tehud eeldustest ja Hooke'i seadusest (pingete ja deformatsioonide vahel on lineaarne sõltuvus) lähtudes peab väändepinge olema lineaarfunktsioon varda raadiusest  $\rho$ , s.t.  $\tau = k\rho$  (joon. 2.24). Konstandi  $k$  määrame väändemomendi ja väändepinge vahelisest seosest kasutades *polaarinertsimomenti*  $I_\rho$ :

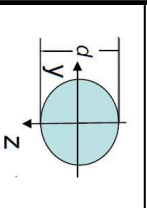
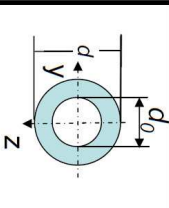
$$T = \int_A \rho \tau dA = k \int_A \rho^2 dA = k I_\rho \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T}{I_\rho}. \quad (2.21)$$

Nüüd saame väändepinge jaoks valemi

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_\rho 2}. \quad (2.22)$$

Valemid (2.22) kehtivad ka rõngasristlõike korral (vt. joon. 2.24).

Väändepingete arvutamise valem on paljuski analoogiline paindepingete arvutamise valemiga: maksimaalsed pinged on ristlõike servas. Seega on ka siin võimalik sisse tuua ristlõike tugevusmoment – antud juhul nimetatakse seda *polaar-tugevusmomentiks* –

| Ristlõige  | $I_p$   | $W_p$                          |
|--|---|--------------------------------|
|  | $\frac{\pi d^4}{32}$                                  | $\frac{\pi d^3}{16}$           |
|  | $\frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$<br>$c = \frac{d_0}{d}$ | $\frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4)$ |

Joonis 2.25: Polaarineretsimendid ja polaar-tugevusmomentid.

mille abil saab määrata maksimaalseid väändepingeid:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{2I_p}{d} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (2.23)$$

Tihti kasutatakse polaarineretsimendi ja polaar-tugevusmomenti tähistena vastavalt  $I_p$  ja  $W_p$ , st. kasutatakse indeksi  $p$  asemel indeksit  $p$ .

**Näide 2-13.** Väändepinged ümar- ja rõngasristlõikes. Lahendatakse loengus.

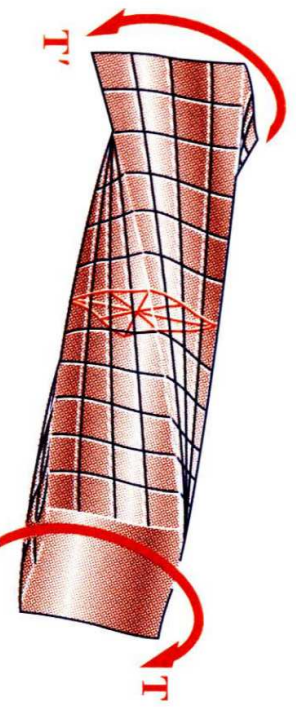
2.8. Niikepinged varda ristlõikes

### 2.8.3 Väändepinged mitteümaristlõigetes

Ümar- ja rõngasristlõigete korral on väändepingete arvutamine suhteliselt lihtne, kuid muude ristlõigete, st. mitteümaristlõigete, korral on see tunduvalt komplitseeritud. Bernoulli hüpootees taoliste ristlõigete korral tavaliselt enam ei kehti (joon. 2.26). Selliseid väändeülesandeid käsitletakse lineaarses elastsusteoorias. Elementaar-teooria (tugevusõpetuse) kursustes refereeritakse vaid lineaarse elastsusteooria raames saadud tulemusi, piirdudes tavaliselt maksimaalsete väändepingete valemitega kujul

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}, \quad (2.24)$$

kus  $W_t$  on ristlõike tugevusmoment.



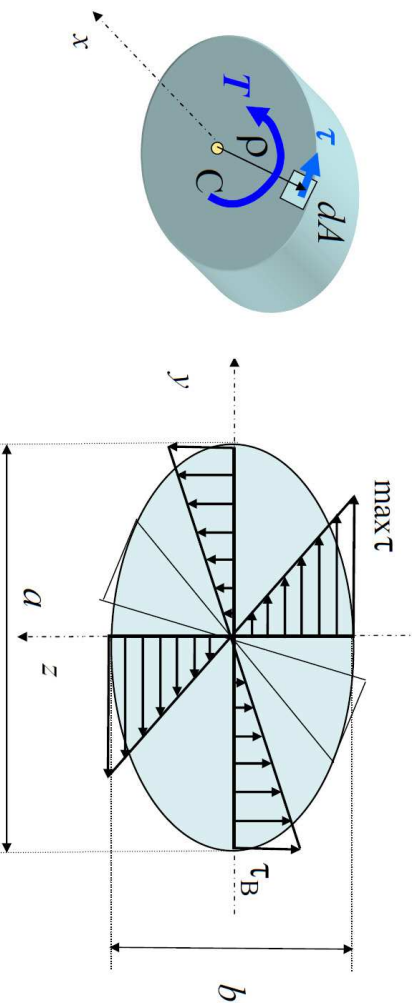
allikas: www.clarkson.edu/class/es22201/3\_torsion.ppt

Joonis 2.26: Ristkülikvarda vääne.

### Elliptiline varras

Elliptilise ristlõikega vardas arvutatakse pingeid pooltelgede otstes järgmiste valemitega (joon. 2.27):

$$W_t = \frac{\pi ab^2}{16}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi ab^2}, \quad \tau_B = \frac{16T}{\pi a^2 b}. \quad (2.25)$$



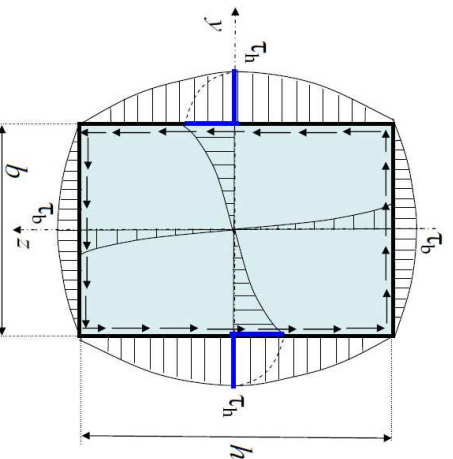
Joonis 2.27: Elliptilise ristlõikega varda vääne.

### 2.8. Niikepinged varda ristlõikes

### Ristkülikuline varras

Ristkülikulise ristlõikega vardas on väändepinged pikli servi jaotunud paraboolselt ja omavad maksimaalseid väärtusi servade keskpunktides. Ristlõike nurkades on väändepinged nullid (joon. 2.28). Iseloomulikud pinged leitakse valemitega

$$\tau_{\max} \equiv \tau_h = \frac{T}{W_t}, \quad W_t = k_h hb^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h. \quad (2.26)$$

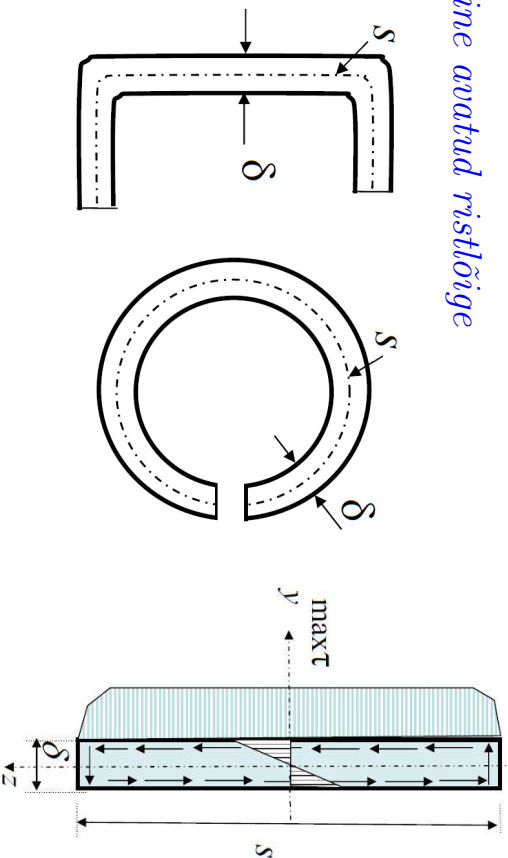


Joonis 2.28: Väändepinged ristkülikulise ristlõikega vardas.

|       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $h/b$ | 1     | 1,2   | 1,5   | 2     | 3     | 5     | 10    | $\infty$ |
| $k_h$ | 0,208 | 0,219 | 0,231 | 0,246 | 0,267 | 0,291 | 0,312 | 0,333    |
| $k_b$ | 1,00  | 0,93  | 0,86  | 0,79  | 0,75  | 0,74  | 0,74  | 0,74     |

**Näide 2-14.** Väändepinged ristkülikulises ristlõikes. Lahendatakse loengus.

### Õhukeseseineline avatud ristlõige



Joonis 2.29: Väändepinged õhukeseseinälises avatud ristlõikes.

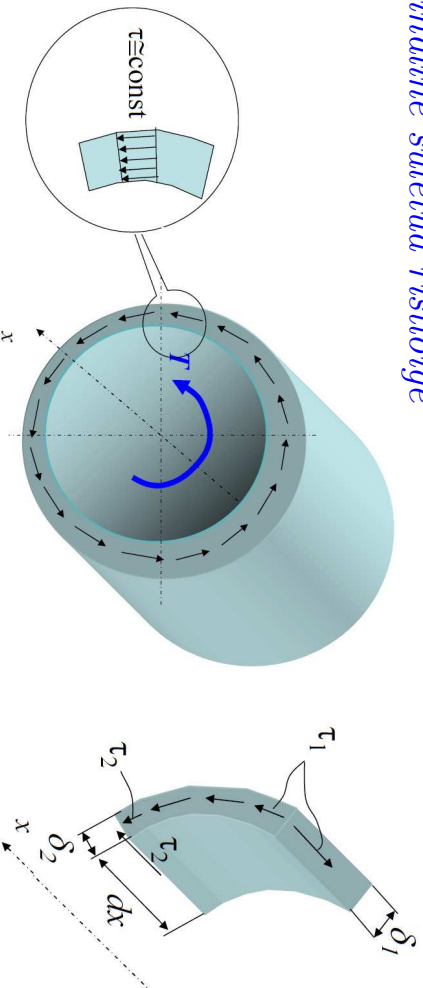
Väga mitmed konstruktsioonielemendid on valmistatud metall-lehtedest, mille ristlõike paksus  $\delta$  on väike võrreldes kõrgusega  $s$  (joon. 2.29). Vastavalt tabelile joonisel 2.28 on sellise ristlõike korral  $k_h = 0.333 = 1/3$  ja ristlõike tugevusmoment ja maksimaalne väändepinge

$$W_t = \frac{s\delta^2}{3}, \quad \tau_{\max} = \frac{3T}{s\delta^2}. \quad (2.27)$$

Valemid (2.27) kehtivad ka metall-lehest tehtud avatud ristlõikega varraste jaoks.

### 2.8. Nihepinged varda ristlõikes

### Õhukeseseineline suletud ristlõige



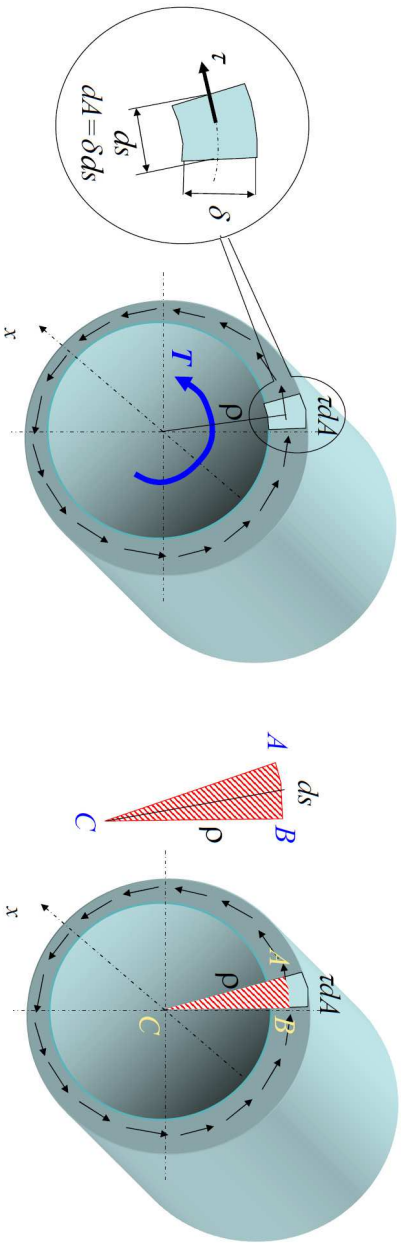
Joonis 2.30: Väändepinged õhukeseseinälises suletud ristlõikes.

Vaatleme muutuva seinapaksusega suletud ristlõiget (joon. 2.30). Kuna seinapaksus on väike, siis loeme pinge seinapaksuse järgi konstantseks. Samas on lihtne näidata, et paksenas osas on pinge väiksem ja õhemas osas suurem. Projekteerime joonise 2.30 parempoolisel osal kujutatud jõud  $x$ -teljele:

$$\sum F_{ix} = -\tau_1 \delta_1 dx + \tau_2 \delta_2 dx = 0. \quad (2.28)$$

kust saamegi, et

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 \quad \text{ehk} \quad \tau \delta = \text{const}. \quad (2.29)$$



Joonis 2.31: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

Järgnevalt tuletame valemid maksimaalse väändepinge arvutamiseks. Alustame nagu tavaliselt väändemomendi ja väändepingete vahelisest seosest (joon. 2.31):

$$T = \int_A \rho \tau dA = \oint_s \rho \tau \delta ds. \quad (2.30)$$

Kuna  $\tau \delta = \text{const}$  ja  $p ds = 2d\omega$  on kolmnurga  $ABC$  kahekoradne pindala, siis

$$T = \tau \delta \oint_s p ds = 2\tau \delta \oint_s d\omega = 2\tau \delta \omega, \quad (2.31)$$

### 2.8. Nihepinged varda ristlõikes

kus  $\omega$  on ristlõike keskjoonega piiratud kujundi (antud juhul ringi) pindala (vt. joon. 2.32).

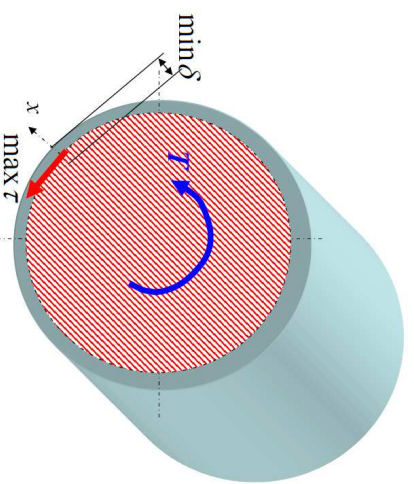
Kuna  $\tau \delta = \text{const}$ , siis vastab maksimaalsele väändepingele minimaalne seinapaksus ning tuues sisse õhukeseseinalises suletud ristlõike tugevusemomendi väändel

$$W_t = 2\omega \delta_{min} \quad (2.32)$$

saame maksimaalse väändepinge leidmiseks valemid

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{2\omega \delta_{min}}. \quad (2.33)$$

Joonis 2.32: Väändepinged õhukeseseinalises suletud ristlõikes.

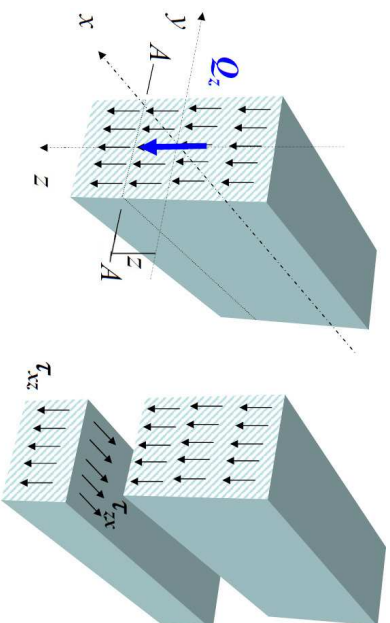


**Näide 2-15.** Väändepinged avatud ja suletud õhukeseseinalises ristlõikes. Lahendatakse loengus.



### 2.8.4 Lõikepinge

Vaatleme tala, kus mõjub põikjõud  $Q_z$  (joon. 2.33). Teatavasti on põikjõud  $Q_z$  lõikepingete  $\tau_{xz}$  peavektoriks. Põikjõud  $Q_z$  esineb alati koos paindemomendiga  $M_y$  ja seega mõjuvad vadeldavalt ristlõikel ka normaalpinged  $\sigma_x$ , mida sel joonisel ei ole kujutatud. Lisaks eeldame, et tala on koormatud nii tema pealmine ja alumine pind on nihkepingest vabad.



Joonis 2.33: Põikjõud ja lõikepinged (1)

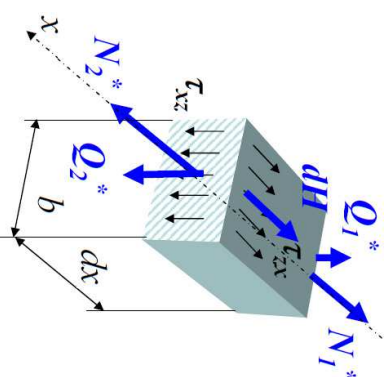
Põikjõust põhjustatud pingete ristlõikes jaotumise seaduspärasuste selgitamiseks teeme talas täiendava lõike ja vaatleme parempoolisel joonisel 2.33 kujutatud alumise osa tasakaalu. Nihkepingete paarsuse seaduse põhjal mõjuvad vaadeldava vardaosa pealmisel pinnal nihkepinged  $\tau_{zx}$ .

#### 2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

Eraldame nüüd tala alumisest osast väikese risttahuka pikkusega  $dx$ , laiusega  $b$  ja "muutuva" kõrgusega  $h/2 - z$ . Risttahuka otstahkudel mõjuvad pikijõud  $N_1^* \neq N_2^*$  ja põikjõud  $Q_1^* \neq Q_2^*$ ; Pealmisel tahul mõjub pingete  $\tau_{zx}$  peavektor  $dH$ . Eeldades, et  $N_2^* > N_1^*$  saame tasakaalutingimusest  $\sum F_{ix} = 0$  avaldada

$$dH = N_2^* - N_1^*. \quad (2.34)$$

Joonis 2.34: Põikjõud ja lõikepinged (2)



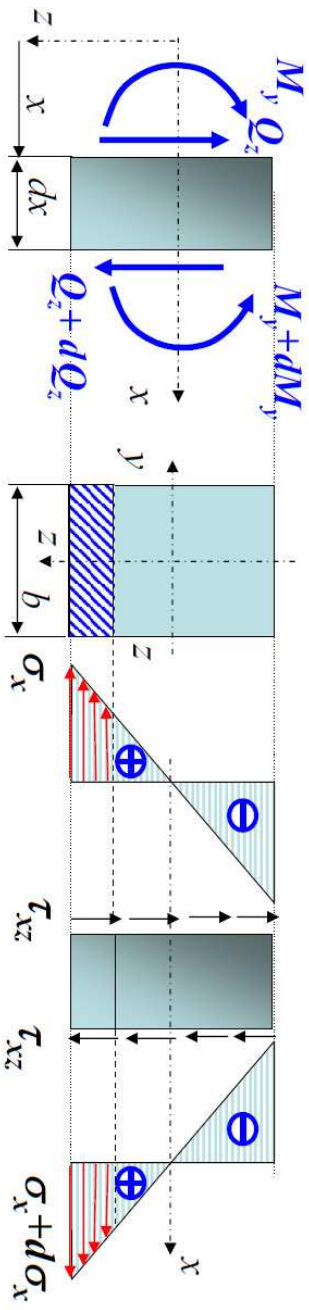
$\sqrt{z}$

Edaspildises rakendame Žurawski<sup>15</sup> hüpoteesi, mille kohaselt on lõikepinged talas jaotunud ühtlaselt  $y$ -koordinaadi järgi. Seega saame valemi

$$\tau_{zx} = \frac{dH}{b dx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx}. \quad (2.35)$$

Nüüd on õige aeg sisse tuua ka põikjõuga  $Q_z$  koos käiv paindemoment  $M_y$  (joon. 2.35).

<sup>15</sup>Inglisekeelses kirjanduses Jourawski.



Joonis 2.35: Põikjõud ja lõikepinged (3)

Tähistame vaadeldava risttahuka otspinna (joon. 2.34) pindala  $A^*$ . Joonisel 2.35 on see pind viirutatud. Nüüd saame esitada risttahuka otspindadel mõjuvad pikijõud paindemomendi kaudu:

$\sqrt{z}$

$$\begin{aligned}
 N_1^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y}{I_y} S_y^* \\
 N_2^* &= \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} \int_{A^*} z dA = \frac{M_y + dM_y}{I_y} S_y^*
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

kus  $S_y^*$  on viirutatud pinna staatliline moment  $y$ -telje suhtes.

2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

Arvestades lõikepingete paarsuse seadust ja valemeid (2.35) ning (2.36) saame

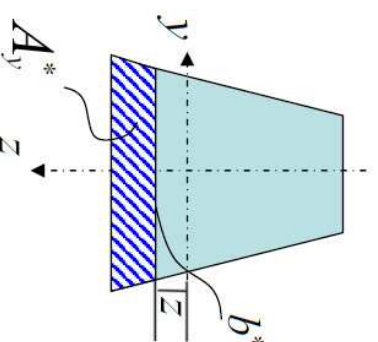
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{N_2^* - N_1^*}{b dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y^*}{I_y b}
 \tag{2.37}$$

Rakendades diferentsiaalseteid oleme kokkuvõttes saanud valemi, mis on rakendatav meelevaldse kujuga ristlõike jaoks:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}
 \tag{2.38}$$

Siin  $Q_z$  on vaadeldavas ristlõikes mõjuv põikjõud,  $b^*$  on viirutatud pinna "ülemine joonmõõde" (joon. 2.36),

$S_y^*$  viirutatud pinna staatliline moment  $y$ -telje suhtes ja  $I_y$  ristlõike peainertsimoment. Järgnevalt vaatleme lõikepingete leidmist mõnes mõnes spetsiifilise kujuga ristlõikes.



Joonis 2.36: Põikjõud ja lõikepinged (4)

### Ristkülik

Kasutame valemite (2.38) ja leiame seal kasutatavad geomeetrised suurused ristküliku korral:

$$I_y = \frac{bh^3}{12},$$

$$S_y^* = z^* A^* = \dots = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^{*2} \right),$$

Joonis 2.37: Lõikepinged ristkülikulises ristlõikes

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*} = \dots = \frac{6Q_z}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^{*2} \right).$$

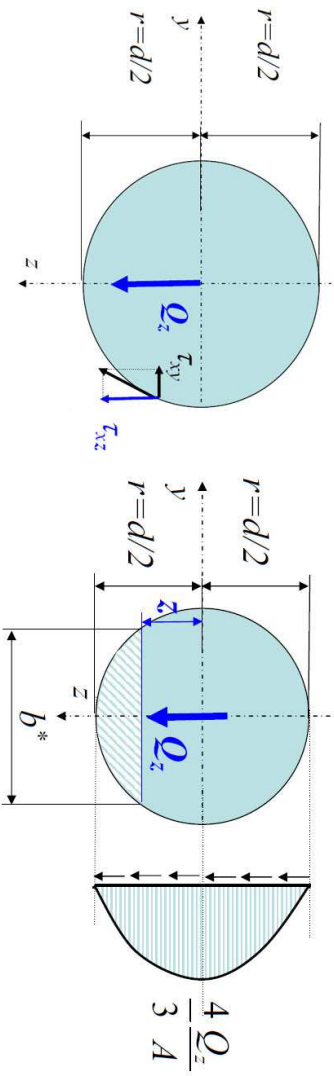
Arvestades, et ristküliku pindala  $A = bh$ , saame lõpuks valemid

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A} \left( 1 - \frac{4z^{*2}}{h^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{3Q_z}{2A}. \tag{2.39}$$

Seega on tegu ruutparabooliga ja  $\tau_{xz} = 0$  kui  $z = \pm 0, 5h$  ning mille maksimum on kohal  $z = 0$ .

### 2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

#### Ring



Joonis 2.38: Lõikepinged ümaristlõikes

Kuna ristlõike serval on nihkepinged puutuja sihilised, siis lahutame selle kaheks komponendiks ja tuletame valemite lõikepinge  $\tau_{xz}$  leidmiseks. Kasutame jällegi valemite (2.38) ja leiame vajalikud geomeetrised suurused ringi korral:

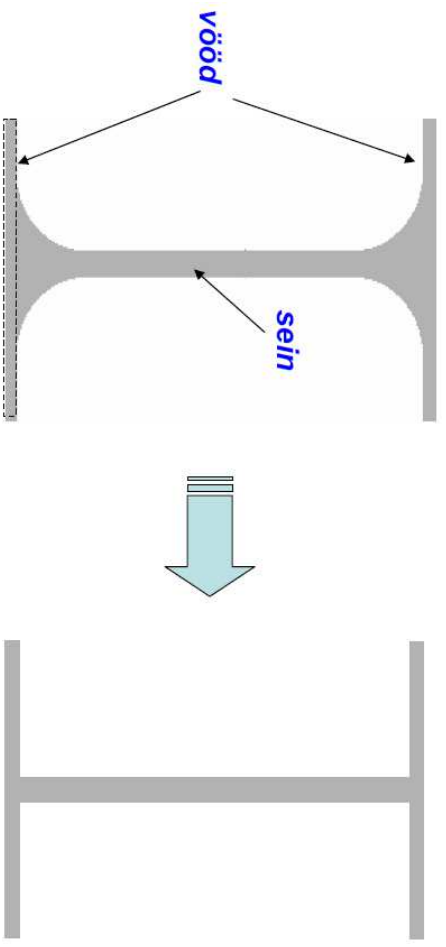
$$I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad b^* = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad S_y^* = \frac{3}{2} (r^2 - z^2)^{3/2}.$$

Kokku saame jällegi ruutparabooli, mille maksimum on kohal  $z = 0$  ja mis on null kui  $z = \pm r$ :

$$\tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right), \quad \max \tau_{xz} = \frac{4Q_z}{3A}. \tag{2.40}$$

*I-tala.*

Vaatleme valtsmetallist profiili, mille ristlõige on I tähe kujuline. Tävaliselt nimetatakse sellist tala I-talaks (joon. 2.39). Eesmärgiks on leida nihkepingete jaotus sellises ristlõikes. Lihtsuse mõttes vaatleme sellist profiili koosnevana riskülikutest.



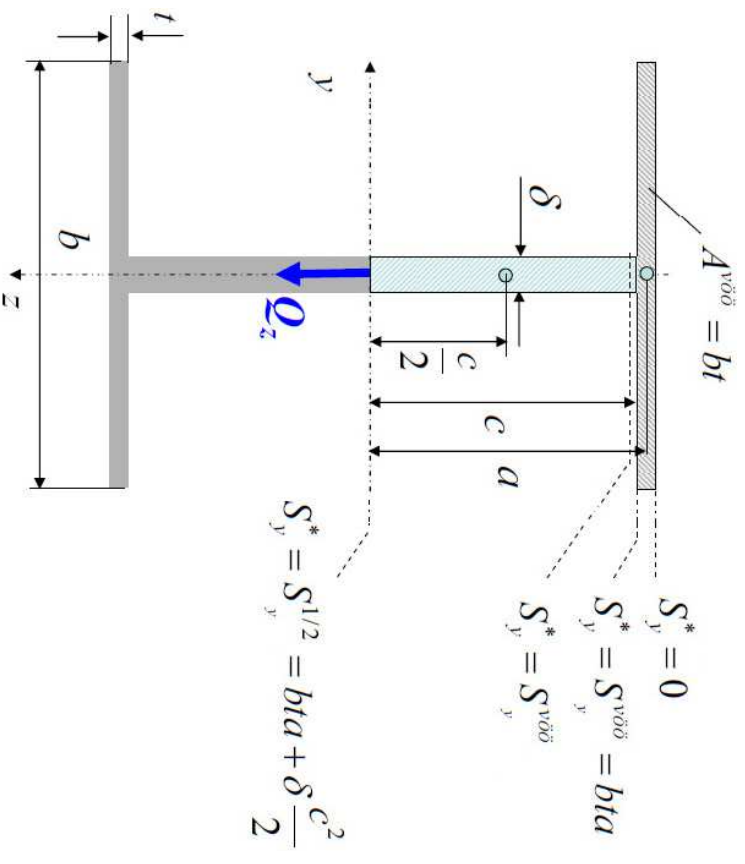
Joonis 2.39: I-tala.

2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

Lõikepinge arvutamiseks kasutame endiselt valemite (2.38):

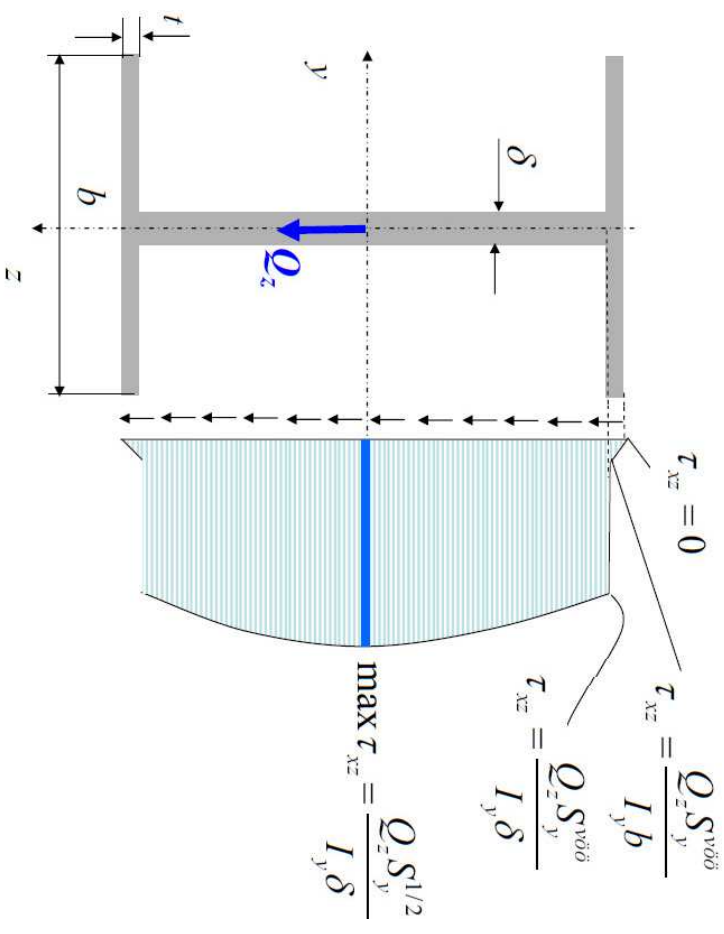
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}.$$

Seega on nihkepingete epüüride koostamiseks vaja teada tervet rida staatilisi momente, mis on esitatud joonisel 2.40



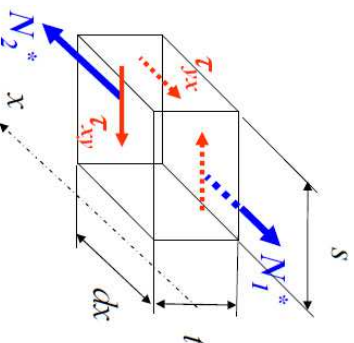
Joonis 2.40: I-tala iseloomulikud staatilised momendid.

Joonisel 2.41 on kujutatud lõikepinge  $\tau_{xz}$  epiür I-tala jaoks. Nihkepinge valemite esinevad staatilised momendid tuleb arvutada joonisel 2.40 esitatud valemite abil. Üleminek seinalt vööle on tegelikkuses sujuv (vt. joon 2.39) ja seetõttu ei esine tegelikkuses ka sellist järsku hüpet nagu on joonisel 2.41. On selge, et võrreldes seinaga on lõikepingete  $\tau_{xz}$  väärtused vöös väikesed.



Joonis 2.41: Lõikepinge  $\tau_{xz}$  epiür I-tala korral.

2.8. Nihkepinged varda ristlõikes



Joonis 2.42: Lõikepinge  $\tau_{xy}$  põhjused.

Tala vöös esinevad lisaks lõikepingetele  $\tau_{xz}$  veel lõikepinged  $\tau_{xy}$ . Üks nende olemasolu põhjendus<sup>16</sup> on esitatud joonisel 2.42. Eeldades, et  $N_2^* > N_1^*$ , tasakaalustab pikijõu juurdekasvu  $dN$  nihkepingest  $\tau_{yx}$  põhjustatud jõud  $\tau_{yx} t dx$ . Nihkepingete paarsusseaduse põhjal peab nihkepingega  $\tau_{yx}$  koos eksisteerima nihkepinge  $\tau_{xy}$ , mille arvutamiseks kasutame valemiga (2.38) analoogilist valemite

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}. \tag{2.41}$$

<sup>16</sup>Eksisteerib veel teisigi põhjendusi. Näiteks, et vöös mõjuv pinge  $\tau_{yx}$  tasakaalustab seinas mõjuvat pinget  $\tau_{xz}$ .

Joonise 2.43 põhjal saame viimasest valemist

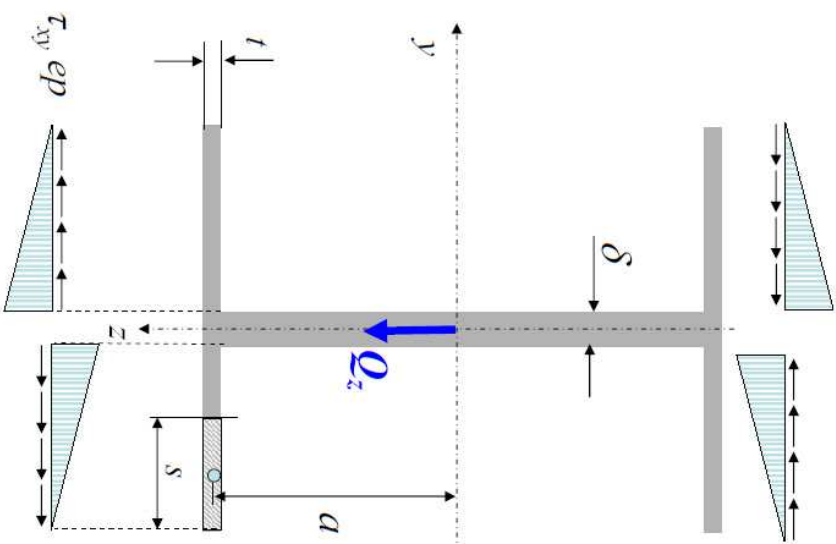
$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t} = \frac{Q_z s a t}{I_y t} = \frac{Q_z s a}{I_y}. \quad (2.42)$$

$S_y^*$  tähistab siin viirutatud pinnastaatilist momenti  $y$ -teljesuhtes. Arvestades, et tala vöö laius on  $b$  ja seinapaksus  $\delta$ , saame nihkepingete  $\tau_{xy}$  ekstreemaalsed väärtused

$$\max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a (b - \delta)}{2I_y}. \quad (2.43)$$

On selge, et vöö „sobivate“ mõõtmete korral võivad nihkepinged  $\tau_{xy}$  omada märkimisväärsed väärtusi.

Tala vöös mõjuvate nihkepingete summeerimisel saame peavektorid  $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}'_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}'_3$  (vt. joon. 2.44).



Joonis 2.43: Lõikepinge  $\tau_{xy}$  epiüür I-tala vöös.

2.8. Nihkepinged varda ristlõikes

Valemi (2.42) põhjal

$$Q_2 = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^l \frac{Q_z s a}{I_y} t ds \quad (2.44)$$

Arvestades, et  $a = h/2 - t/2 \approx h/2$  ja  $l = b/2 - \delta/2 \approx b/2$  saame

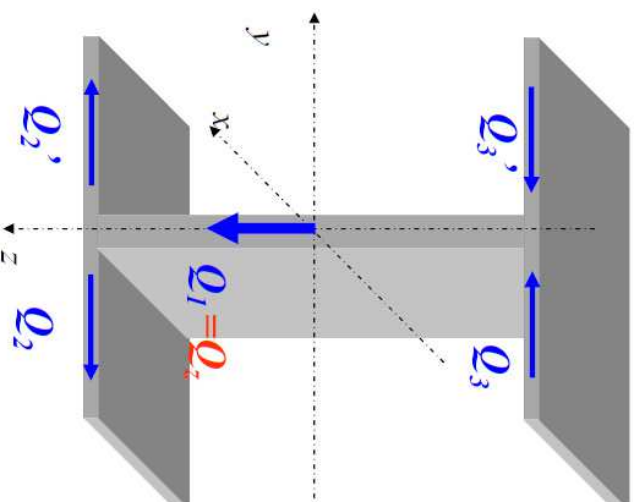
$$Q_2 = \frac{Q_z a t}{I_y} \int_0^l s ds = \frac{Q_z a t l^2}{2I_y} \approx \frac{Q_z h t b^2}{16I_y}. \quad (2.45)$$

On selge, et jooniste 2.43 ja

2.44 põhjal vektorid  $\mathbf{Q}_2 = -\mathbf{Q}'_2$ ,

$\mathbf{Q}_3 = -\mathbf{Q}'_3$  ja  $\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_1$  ( $\mathbf{Q}_1$  on sisse

toodud vöö ja seinavahelise analoogia mõttes) ning moodulid  $Q_2 = Q_3$



Joonis 2.44: Põljkõud I-talas.

### Näide 2-16. Painde- ja lõikepinged I-talasal (nn. keevisristlõige).

Talal ristlõikes mõjub paindemoment  $M = 20 \text{ kNm}$  ja põikjõud  $Q = 100 \text{ kN}$ . Koostada paindepinge  $\sigma_x$  ja lõikepingete  $\tau_{xz}$  ning  $\tau_{xy}$  epiüürid. Ristlõike mõõtmed:  $b_1 = 6 \text{ cm}$ ,  $h_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $b_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 10 \text{ cm}$ . Kuidas mõjutab mõõtmete suurendamine ja/või vähendamine pingeid?

*Lahendus.*

Paindepinged arvutatakse valemite (2.15) ja (2.16) põhjal:

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{W_y}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}},$$

Nihkepingete arvutamiseks kasutame valemeid (2.38) ja (2.43):

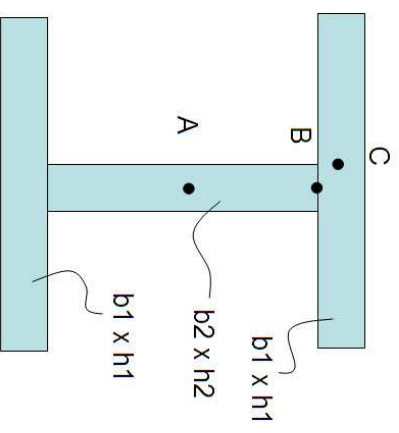
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y b^*}, \quad \max |\tau_{xy}| = \frac{Q_z a(b - \delta)}{2I_y}.$$

Viimaste jaoks on vaja leida mitmed inertsi- ja staatilised momendid

$$I_y, \quad W_y, \quad S_y^A, \quad S_y^B$$

| M   | Q   | h1 | b1 | h2 | b2 | ly     | Wy    | Sat  | Sbt | sx     | taxz  | tbxzz | tbxz1 | txy   |
|-----|-----|----|----|----|----|--------|-------|------|-----|--------|-------|-------|-------|-------|
| kNm | kN  | cm | cm | cm | cm | cm4    | cm3   | cm3  | cm3 | Mpa    | Mpa   | Mpa   | Mpa   | Mpa   |
| 20  | 100 | 2  | 6  | 10 | 2  | 1038,7 | 148,4 | 97   | 72  | 134,79 | 46,69 | 34,66 | 11,55 | 11,55 |
| 20  | 100 | 1  | 6  | 10 | 2  | 530,7  | 88,4  | 58   | 33  | 226,13 | 54,65 | 31,09 | 10,36 | 20,73 |
| 20  | 100 | 3  | 6  | 10 | 2  | 1714,7 | 214,3 | 142  | 117 | 93,31  | 41,41 | 34,12 | 11,37 | 7,58  |
| 20  | 100 | 2  | 6  | 10 | 1  | 955,3  | 136,5 | 84,5 | 72  | 146,55 | 88,45 | 75,37 | 12,56 | 15,70 |
| 20  | 100 | 2  | 6  | 10 | 3  | 1122,0 | 160,3 | 110  | 72  | 124,78 | 32,53 | 21,39 | 10,70 | 8,02  |
| 20  | 100 | 2  | 5  | 10 | 2  | 893,3  | 127,6 | 85   | 60  | 156,72 | 47,57 | 33,58 | 13,43 | 10,07 |
| 20  | 100 | 2  | 8  | 10 | 2  | 1329,3 | 189,9 | 121  | 96  | 105,32 | 45,51 | 36,11 | 9,03  | 13,54 |
| 20  | 100 | 2  | 6  | 9  | 2  | 855,5  | 131,6 | 86,3 | 66  | 151,96 | 50,41 | 38,57 | 12,86 | 12,86 |
| 20  | 100 | 2  | 6  | 11 | 2  | 1243,8 | 165,8 | 108  | 78  | 120,59 | 43,51 | 31,35 | 10,45 | 10,45 |

Epiüüride joonistamiseks vajalikud arvud on järgnevas tabelis. Epiüürid joonis-  
tatakse ja täiendavaid seletusi antakse loengus.



Joonis 2.45: I-talal ristlõige

## 2.9 Ristlõigete geometriliste karakteristikute tabelid

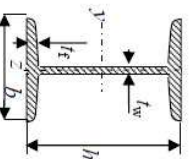
Tugevusõpetuses esitatakse sellised tabelid tavaliselt valtsmetallide kohta ja kuna tihti on tegu terasega siis kutsutakse neid tabelleid sel juhul terasprofiilide tabeliteks. Kuna erinevatel tootjatel ja erinevatel riikidel on erinevad standard-  
sed ristlõiked, siis eksisteerib ka palju erinevaid terasprofiilide tabelleid. Loomulikult pole konstruktsioonieleemendid ainult valtsterasest ja leidub väga erinevate kujudega ristlõikeid ning neile vastavaid tabelleid.

Siin vaatleme ühte komplekti, mis on ka käesoleva peatiki lisas ja mida võib vaja minna ülesannete lahendamise juures. Tabelid pärinevad kolleegidelt mehhaanika instituudist ja profiilid vastavad autorile teadaoleva info kohaselt Euroopa standardile.

Järgnevalt on esitatud tabelite algused kahte liiki I-profiilile, nn. karprauale ning võrd- ja erikülgssele nurkrauale. Pikemad tabelid on esitatud Lisas 2-A.

### 2.9. Ristlõigete geometriliste karakteristikute tabelid

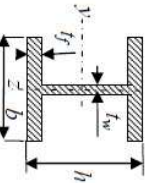
#### IPN



A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$  - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoonusmeetodi korral,  $I_{y_0}$ ,  $I_{z_0}$  - inertsiraadiused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  - väändinertsimoment,  $A_{xz}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtis.

| Profiili nr. | h   | b  | t <sub>w</sub> | t <sub>f</sub> | A               | I <sub>y</sub>  | W <sub>y</sub>  | W <sub>pl,y</sub> | I <sub>y</sub>  | A <sub>xz</sub> | I <sub>z</sub>  | W <sub>z</sub>  | W <sub>pl,z</sub> | I <sub>z</sub>  | I <sub>x</sub>  |
|--------------|-----|----|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|
| mm           | mm  | mm | mm             | mm             | cm <sup>2</sup> | cm <sup>4</sup> | cm <sup>3</sup> | cm <sup>3</sup>   | cm <sup>4</sup> | cm <sup>2</sup> | cm <sup>4</sup> | cm <sup>3</sup> | cm <sup>3</sup>   | cm <sup>4</sup> | cm <sup>4</sup> |
| IPN 80       | 80  | 42 | 3,9            | 5,9            | 7,58            | 77,8            | 19,5            | 22,8              | 3,20            | 3,41            | 6,29            | 3,00            | 5,0               | 0,91            | 0,87            |
| IPN 100      | 100 | 50 | 4,5            | 6,8            | 10,6            | 171             | 34,2            | 39,8              | 4,01            | 4,85            | 12,2            | 4,88            | 8,1               | 1,07            | 1,60            |

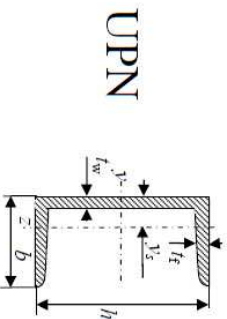
#### IPE



A - ristlõike pindala,  $I_y$ ,  $I_z$  - inertsimomendid vastavalt y ja z-telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirpingemeetodi korral,  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$  - tugevusmomendid vastavalt y ja z-telje suhtes piirkoonusmeetodi korral,  $I_{y_0}$ ,  $I_{z_0}$  - inertsiraadiused vastavalt y ja z-telje suhtes,  $I_x$  - väändinertsimoment,  $A_{xz}$  - taandatud ristlõikepindala nihkedeforformatsiooni arvutamiseks z-telje suhtis.

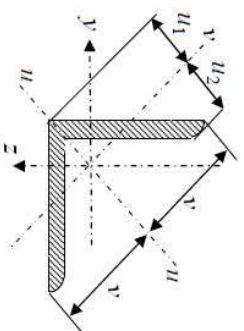
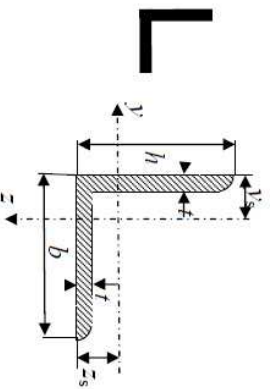
| Profiili nr. | h   | b  | t <sub>w</sub> | t <sub>f</sub> | A               | I <sub>y</sub>  | W <sub>y</sub>  | W <sub>pl,y</sub> | I <sub>y</sub>  | A <sub>xz</sub> | I <sub>z</sub>  | W <sub>z</sub>  | W <sub>pl,z</sub> | I <sub>z</sub>  | I <sub>x</sub>  |
|--------------|-----|----|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|
| mm           | mm  | mm | mm             | mm             | cm <sup>2</sup> | cm <sup>4</sup> | cm <sup>3</sup> | cm <sup>3</sup>   | cm <sup>4</sup> | cm <sup>2</sup> | cm <sup>4</sup> | cm <sup>3</sup> | cm <sup>3</sup>   | cm <sup>4</sup> | cm <sup>4</sup> |
| IPE 80       | 80  | 46 | 3,8            | 5,2            | 7,64            | 80,1            | 20,0            | 23,2              | 3,24            | 3,58            | 8,49            | 3,69            | 5,82              | 1,05            | 0,70            |
| IPE 100      | 100 | 55 | 4,1            | 5,7            | 10,3            | 171             | 34,2            | 39,4              | 4,07            | 5,08            | 15,9            | 5,79            | 9,15              | 1,24            | 1,20            |





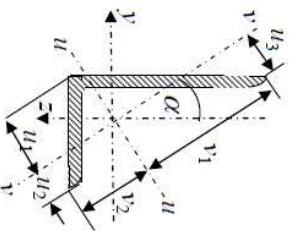
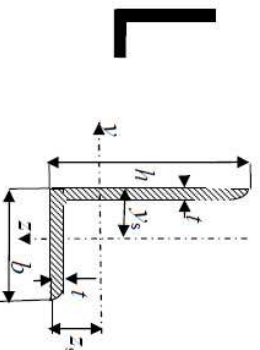
A - ristliigke pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsmomentid vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$ -tingvusmomentid vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes piirpingemeetri korral,  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ -tingvusmomentid vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes pihkoormismeetri korral,  $i_y$ ,  $i_z$ -inertsraadiused vastavalt  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  $I_x$  – väändinertsmoment,  $A_{yz}$ ,  $A_{xy}$  - taandatud ristliigkepindala nihkedeformatsiooni arvutamiseks  $z$  ja  $y$ -telje suhis.

| Profiili nr | $h$<br>mm | $b$<br>mm | $t_w$<br>mm | $t_f$<br>mm | $t_s$<br>mm | $A$<br>cm <sup>2</sup> | $I_y$<br>cm <sup>4</sup> | $W_y$<br>cm <sup>3</sup> | $W_{pl,y}$<br>cm <sup>3</sup> | $i_y$<br>cm | $A_{yz}$<br>cm <sup>2</sup> | $I_z$<br>cm <sup>4</sup> | $W_z$<br>cm <sup>3</sup> | $W_{pl,z}$<br>cm <sup>3</sup> | $i_z$<br>cm | $A_{xy}$<br>cm <sup>2</sup> | $I_x$<br>cm <sup>4</sup> | $i_x$<br>cm | $I_{yz}$<br>cm <sup>4</sup> |
|-------------|-----------|-----------|-------------|-------------|-------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------|-------------|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------|-------------|-----------------------------|--------------------------|-------------|-----------------------------|
| UPN 80      | 80        | 45        | 6.0         | 8.0         | 4.00        | 106                    | 26.5                     | 31.8                     | 3.10                          | 5.10        | 19.4                        | 6.36                     | 12.1                     | 1.33                          | 7.14        | 2.16                        | 1.45                     | 1.45        | -78.5                       |
| UPN 100     | 100       | 50        | 6.0         | 8.5         | 4.50        | 206                    | 41.2                     | 49.0                     | 3.91                          | 6.46        | 29.3                        | 8.49                     | 16.2                     | 1.47                          | 8.43        | 2.81                        | 1.55                     | 1.55        | -95.3                       |



A - ristliigke pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsmomentid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $I_u$ ,  $I_v$  – inertsmomentid  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tingvusmomentid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $i_y$ ,  $i_z$  – inertsraadiused  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $I_{yz}$  – tsentrifugaalmoment  $y$ ,  $z$ -telje suhtes.

| Profiili nr.  | $h = b$<br>mm | $t$<br>mm | $A$<br>cm <sup>2</sup> | $z_s = y_s$<br>cm | $v$<br>cm | $u_1$<br>cm | $u_2$<br>cm | $I_y = I_z$<br>cm <sup>4</sup> | $W_y = W_z$<br>cm <sup>3</sup> | $i_y = i_z$<br>cm | $I_u$<br>cm <sup>4</sup> | $i_u$<br>cm | $I_v$<br>cm <sup>4</sup> | $i_v$<br>cm | $I_{yz}$<br>cm <sup>4</sup> |
|---------------|---------------|-----------|------------------------|-------------------|-----------|-------------|-------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|-------------|-----------------------------|
| L 90 x 90 x 7 | 90            | 7         | 12.2                   | 2.45              | 6.36      | 3.47        | 3.16        | 92.5                           | 14.1                           | 2.75              | 14.7                     | 3.47        | 38.0                     | 1.76        | -54.5                       |
| L 90 x 90 x 8 | 90            | 8         | 13.9                   | 2.50              | 6.36      | 3.53        | 3.17        | 104                            | 16.1                           | 2.74              | 16.6                     | 3.46        | 42.9                     | 1.76        | -61.5                       |



B - ristliigke pindala,  $I_y$ ,  $I_z$ -inertsmomentid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $I_u$ ,  $I_v$  – inertsmomentid  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $W_y$ ,  $W_z$  - tingvusmomentid  $y$ ,  $z$ -telje suhtes,  $i_y$ ,  $i_z$  - inertsraadiused  $y$  ja  $z$ -telje suhtes,  $i_u$ ,  $i_v$  – inertsraadiused  $u$ ,  $v$ -telje suhtes,  $I_{yz}$  – tsentrifugaalmoment  $y$ ,  $z$ -telje suhtes.

| Profiili nr.    | $h$<br>mm | $b$<br>mm | $t$<br>mm | $A$<br>cm <sup>2</sup> | $z_s$<br>cm | $y_s$<br>cm | $v_1$<br>cm | $v_2$<br>cm | $u_1$<br>cm | $u_2$<br>cm | $u_3$<br>cm | $\alpha$<br>° |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| L 120 x 80 x 8  | 120       | 80        | 8         | 15.5                   | 3.83        | 1.87        | 8.23        | 5.97        | 3.25        | 4.19        | 2.09        | 23,6          |
| L 120 x 80 x 10 | 120       | 80        | 10        | 19,1                   | 3,92        | 1,95        | 8,19        | 6,01        | 3,35        | 4,17        | 2,15        | 23,5          |

| Profiili nr.    | $I_y$<br>cm <sup>4</sup> | $W_y$<br>cm <sup>3</sup> | $i_y$<br>cm | $I_z$<br>cm <sup>4</sup> | $W_z$<br>cm <sup>3</sup> | $i_z$<br>cm | $I_u$<br>cm <sup>4</sup> | $i_u$<br>cm | $I_v$<br>cm <sup>4</sup> | $i_v$<br>cm | $I_{yz}$<br>cm <sup>4</sup> |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|-------------|--------------------------|-------------|-----------------------------|
| L 120 x 80 x 8  | 226                      | 27,6                     | 3,82        | 80,8                     | 13,2                     | 2,28        | 260                      | 4,10        | 46,4                     | 1,73        | -78,5                       |
| L 120 x 80 x 10 | 276                      | 34,1                     | 3,80        | 98,1                     | 16,2                     | 2,26        | 317                      | 4,07        | 56,6                     | 1,72        | -95,3                       |