

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut
Rakendusmehaanika õppetool

Andrus Salupere

Elastusteooria

Loengukonspekt

Tallinn 2002/2003

Eessõna

Käesolev loengukonspekt põhineb autori poolt alates 1999. aastast Tallinna Tehnikaülikoolis tehnilise füüsika eriala üliõpilastele peetud elastsusteooria loengutel. Antud kursus, kus leiavad käsitlemist nii lineaarsed kui mittelineaarsed probleemid, kujutab endast jätku minu poolt loetavale pideva keskkonna mehaanika kursusele. See-ga eeldan kuulajatelt pideva keskkonna mehaanika mittelineaarse käsitluse elementaarset tundmist. Loengukonspekti esimese varian-dina tuleb vaadelda autori poolt käsitsi kirjutatud ja 1999–2000. aastani loengutel kasutatud kilesid, millest üliõpilased said endale koopiad.

Kuna tegu on õppevahendiga, mis valmis 2001/2002 õ/a kevadse-mestril ja jõudis seda ainet õppivate tudengiteni järk järgult, siis on kirjanduse loetelu esitatud sissejuhatava peatüki viimase pa-ragrahvina (mitte aga vahetult enne sisukorda nagu on kombeks fikseeritud sisuga ja kirjastatud õppevahendite puhul).

Märkused:

1. Loengukonspekt (pidevalt uuenevana) on väljas internetis mi-nu koduleheküljel <http://cens.ioc.ee/~salupere>.
2. Loengukonspekt pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpiku-na.

3. Teksti paremas servas olevad märgid ($\sqrt{\quad}$, \bullet , \star jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitatakse olulisi selgitavaid märkusi.
4. Loengukonspekt võib sisaldada trükivigu.

Andrus Salupere

Peatükk 1

Sissejuhatus

Katsed on näidanud, välismõjude (pindkoormused, massjõud, soojendamise, jahutamise) toimetel võivad tahked kehad deformeeruda. Kui deformatsioonid ei ületa teatud piiri, siis välismõjude kõrvaldamisel keha taastab oma esialgse kuju. Sellist tahket keha omadust nimetatakse *elastsuseks*. **Elastsusteooria** uurib elastsete kehade deformatsioone ja liikumist. Sõltuvalt välismõjude kõrvaldamise kiirusest võivad siin kaasnedada teatud võnkumised. Kui deformatsioonid aga ületavad teatud piiri, siis keha algne kuju ei taastu täielikult — osa deformatsioone säilib. Neid jäävaid deformatsioone nimetatakse *plastseteks deformatsioonideks*.

Elastsusteooria püüab määrata ja hinnata

- geomeetrilisi suurusid, mis iseloomustavad keha deformatsiooni;
- pingeid (sisejõude), mis ilmnevad deformatsiooniprotsessis.

Selleks rakendatakse matemaatilise füüsika meetodeid.

Elastsusteooria põhineb pideva keskkonna mehaanikal¹. Seega on vaja sisse tuua või määrata:

- Pideva keskkonna mõiste.
- Pideva keskkonna tihedus.
- Geomeetrilised suurused, mis kirjeldavad keha deformatsioone.
- Sisejõud ja nende seos välismõjudega.
- Sisejõudude ja deformatsioonide vahelised seosed (olekuvõrrandid).

Viimased määratakse eksperimentidest — seega on tegu fenomenoloogilise teooriaga.

1.1 Kirjandus

1. A.C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continious Media*. McCraw-Hill Book Company, New-York et al., 1962.
2. M.N.L. Narasimhan. *Principlec of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993.
3. A.C. Eringen. *Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, inc., New-York et al., 1967.
4. Y.C. Fung. *Foundation of Solid Mechanics*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

¹Pideva keskkonna mehaanika uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimetel.

5. Y. Başar, D. Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer, Berlin et al., 2000.
6. A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics. Series: Longman mathematical texts*. Longman Scientific & Thechnical, Harlow, 1988.
7. J. Salençon. *Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts, Thermoelasticity*. Springer, Berlin et al., 2001.
8. U. Nigul, J. Engelbrecht. Nelineinõje i lineinõje perehodnõje volnovõje protsessõ deformatsii termouprugih i uprugih tel /*Mittelineaarsed ja lineaarsed deformatsioonilainete leviku üleminekuprotsessid termoelastsetes ja elastsetes kehades*/. Tallinn, 1972 (vene keeles).
9. W. Nowacki. Teoria uprugosti /*Elastsusteooria*/. Mir, Moskva, 1975 (vene keeles).
10. S. Timošenko, J.N. Goodier. Teoria uprugosti /*Elastsusteooria*/. Nauka, Moskva, 1975 (vene keeles).

1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandest.

1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid

Pidevushüpotees

Kõik kehad koosnevad osakestest, kuid meid huvitavas mahus (ruumalas) on neid palju. Seetõttu eeldame, et uuritavad *vedelikud, gaasid ja tahked kehad on sellised keskkonnad, mis täidavad vaadeldava ruumi pidevalt*. See hüpotees võimaldab nende keskkondade matemaatilisel kirjeldamisel kasutada pidevaid funktsioone.

Ruumi meetrilisus

Eeldame, et *kahe pidevas ruumis asuva punkti vaheline kaugus on alati üheselt määratav*. Eksperimendid on näidanud, et reaalseid füüsikalisi ruume võib mitte väga suurte mastaapide puhul lugeda eukleidilisteks ruumideks. Meie vaatleme edaspidi eranditult eukleidilisi ruume. Mehaanikat, mis baseerub eukleidilisel ruumil, nimetatakse Newtoni mehaanikaks.

Aja absoluutsus

Eeldame et *eksisteerib absoluutne aeg*, mis kulgeb kõigis taustsüsteemides ühesuguselt ².

²Newton: “Absoluutsel ajal pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ning ta kulgeb ühtlaselt.” Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel siiski mingist konkreetsest füüsikalisest nähtusest.

Koordinaadid

Euleri koordinaadid ehk ruumilised koordinaadid (EK). x^1, x^2, x^3 on ajas muutumatud. Nende suhtes kirjeldatakse keskkonna materiaalse osakeste liikumist.

Lagrange'i koordinaadid ehk materiaalsed koordinaadid (LK). Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalse punkti asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi X^1, X^2, X^3 . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem X^1, X^2, X^3 . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Lagrange'i koordinaatsüsteemiks ehk materiaalseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate X^1, X^2, X^3 — *Lagrange'i koordinaatideks ehk materiaalseks koordinaatideks*.

Kõverjooneliste koordinaatide avaldamine Descartes'i ristkoordinaatide (DRK) kaudu Nii EK kui LK tuuakse sisse läbi DRK:

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

$$Z^K = Z^K(X^1, X^2, X^3), \quad K = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Seega eeldatakse, et nii EDRK kui LDRK sõltuvad kolmest Eukleidilise ruumi E^3 muutujast (vastavalt x^1, x^2, x^3 ja X^1, X^2, X^3). Funktsioonide z^k ja Z^K puhul eeldatakse kuuluvust klassi $C^r, r \geq 1$ ning on defineeritud mingis ruumi E^3 piirkonnas.

Vastavad pöördteisendused:

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

$$X^K = X^K(Z^1, Z^2, Z^3), \quad K = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Teoreem ilmutamata funktsioonist: koordinaatteisendus (1.1) omab ruumipunkti p ümbruses δ ühest pöördteisendust (1.3) siis ja ainult

siis kui eksisteerivad osatuletised $\partial z^k / \partial x^k$ ja jakobiaan

$$J_E = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \neq 0; |x^k - x_0^k| > \delta. \quad (1.5)$$

Siin x_0^k , $k = 1, 2, 3$, on ruumipunkti p koordinaadid.

Analoogsed tingimused peavad olema täidetud ka LK ja LDRK puhul: koordinaatteisendus (1.2) omab materiaalse punkti P ümbruses δ ühest pöördteisendust (1.4) siis ja ainult siis kui eksisteerivad osatuletised $\partial Z^K / \partial X^K$ ja jakobiaan

$$J_L = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^L} \right| \neq 0; |X^K - X_0^K| > \delta, \quad (1.6)$$

Siin X_0^K , $K = 1, 2, 3$, on ruumipunkti P koordinaadid.

- Koordinaatkõverad
- Koordinaatpinnad

Edaspidises eeldame, et

- kõverjoonelised koordinaatsüsteemid on sisse toodud Descartes'i ristkoordinaatide kaudu (EK kujul (1.1) ja LK kujul (1.2)) selliselt, et jakobiaanid (1.5) ja (1.6) pole samaselt nullid ruumis E^3 või vähemalt mingis meid huvitavas ruumi E^3 piirkonnas (v.a. mõned singulaarsed punktid, jooned või pinnad);
- üldjuhul on pikkuse mõõtmiseks piki telgi z^k ja Z^K valitud ühtne mastaap.

✓

1.2.2 Skalaar, vektor, tensor

Skalaar

Vaatleme koordinaatsüsteeme ζ^i ja η^i . Funktsiooni $\varphi(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \equiv \varphi(\zeta)$ nimetatakse (absoluutseks) *skalaariks* kui ta ei muuda koordinaatteisendusega $\zeta^k = \zeta^k(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \equiv \zeta^k(\eta)$, $k = 1, 2, 3$ oma algväärtust, st.,

$$\varphi(\zeta^1(\eta), \zeta^2(\eta), \zeta^3(\eta)) \equiv \psi(\eta) = \varphi(\zeta). \quad (1.7)$$

Seega ei sõltu skalaari väärtus antud punktis koordinaatide valikust.

Näide: *Temperatuur on absoluutne skalaar.*

Kontravariantne vektor

Suurusi $\varphi^k(\zeta)$ nimetatakse vektori kontravariantseteks komponentideks ehk lihtsalt *kontravariantseteks vektoriks* kui koordinaatteisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul muutub ta vastavalt seadusele

$$\varphi^k(\zeta(\eta)) \equiv \psi^k(\eta) = \varphi^m(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Suurusi $\psi^k(\eta)$ tuleb siin mõista kui suuruste $\varphi^k(\zeta)$ komponente koordinaatsüsteemis η^i , $i = 1, 2, 3$.

Näide: *Diferentsiaal on kontravariantne vektor, sest võttes $\varphi^k = d\zeta^k$, saame*

$$\psi^k = d\eta^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} d\zeta^m \equiv \varphi^m \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m}.$$

Kovariantne vektor

Suursi $\varphi_k(\zeta)$ nimetatakse vektori kovariantseteks komponentideks ehk lühidalt *kovariantseks vektoriks* kui nad koordinaatide teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad vastavalt seadusele

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Näide: *Osatuletis absoluutsest skalaarist on kovariantne vektor, sest tähistades*

$$\varphi_m = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m}$$

kus Φ on absoluutne skalaar, saame

$$\varphi_k(\zeta(\eta)) \equiv \psi_k(\eta) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} = \varphi_m(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Kontravariantne, kovariantne ja segatensor

Suursi $\Phi^{kl}(\zeta)$, $\Phi_{kl}(\zeta)$ ja $\Phi^k_l(\zeta)$ nimetatakse vastavalt kontravariantseteks-, kovariantseks- ja segatensoriks kui nad koordinaat-teisenduse $\zeta = \zeta(\eta)$ puhul teisenevad seaduste

$$\Phi^{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^{kl}(\eta) = \Phi^{mn}(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \eta^l}{\partial \zeta^n}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.10)$$

$$\Phi_{kl}(\zeta(\eta)) \equiv \Psi_{kl}(\eta) = \Phi_{mn}(\zeta) \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^k} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

ja

$$\Phi^k_l(\zeta(\eta)) \equiv \Psi^k_l(\eta) = \Phi^m_n(\zeta) \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^l}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

järgi.

1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid

EDRK z^k ja LDRK Z^K — ortonormeeritud baasid \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K

EK x^k ja LK X^K jaoks defineeritakse *kovariantseid baasivektorid* \mathbf{g}_k ja \mathbf{G}_K läbi punktide p ja P kohavektorite kujul

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \quad (1.13)$$

ja

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{I}_M. \quad (1.14)$$

Kroneckeri delta

$$\delta_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{I}_L = \begin{cases} 1, & K = L \\ 0, & K \neq L \end{cases} \quad (1.15)$$

Kovariantne meetriline tensor

$$G_{KL} = G_{LK} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L, \quad g_{kl} = g_{lk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l \quad (1.16)$$

Kontravariantne baas — \mathbf{g}^k ja \mathbf{G}^K defineeritakse läbi ortonormaalsustingimuste

$$\mathbf{G}^K \cdot \mathbf{G}_L = \delta^K_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k_l \quad (1.17)$$

kust

$$\mathbf{G}^K = G^{KL} \mathbf{G}_L \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}^k = g^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (1.18)$$

Kontravariantne meetriline tensor —

$$G^{KL} = \frac{\text{cofactor } G_{KL}}{G} \quad \text{ja} \quad g^{kl} = \frac{\text{cofactor } g_{kl}}{g}, \quad (1.19)$$

kus

$$G = |G_{KL}| \quad \text{ja} \quad g = |g_{kl}| \quad (1.20)$$

on determinandid.

$$G^{LM}G_{MK} = \delta^L_K, \quad g_{kl}g^{lm} = \delta_k^m \quad \text{jne.} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{g}^k = v^k \mathbf{g}_k \quad (1.22)$$

$$v^k = g^{kl}v_l \quad \text{ja} \quad v_k = g_{kl}v^l \quad (1.23)$$

$$c^{kl} = g^{lm}c^k_m, \quad c^k_l = g^{km}c_{ml} \quad \text{jne. jne.} \quad (1.24)$$

1.2.4 Liikumise kirjeldamine

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, t) \quad (1.25)$$

või

$$X^K = X^K(x^1, x^2, x^3, t), \quad (1.26)$$

mis siirdab materiaalse punkti X^1, X^2, X^3 ruumipunkti x^1, x^2, x^3 .

- Koordinaatteisendused (1.25) ja (1.26) on teineteise pöördteisendused.
- Ühesus: $\exists \partial x^k / \partial X^K$ ja

$$j = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \right| \neq 0 \quad (1.27)$$

ruumipunkti p ümbruses $|x^k - x_0^k| > \delta$.

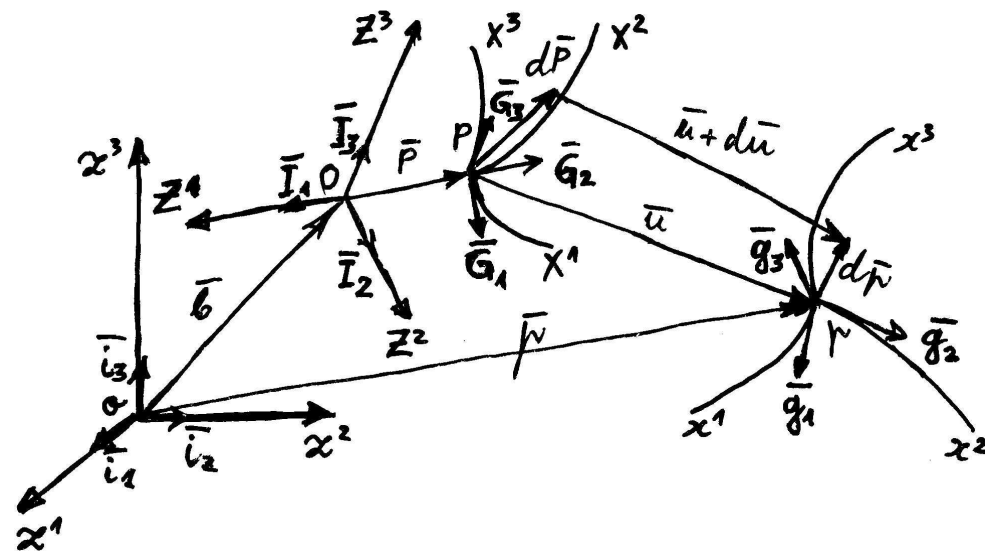
- (1.25) — Lagrange'i kirjeldus.
- (1.26) — Euleri kirjeldus.

★

1.2.5 Deformatsioon ja siire

Siire

Materiaalse punkti P asukohta muut ajavaheühikus Δt on määratud siirdevektoriga \mathbf{u} .



Joonis 1.1: Deformatsioon

Elementaarpikkuse ruut (kohavektori muudu ruut)

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL}dX^KdX^L = \delta_{KL}dZ^KdZ^L, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl}dx^kdx^l = \delta_{kl}dz^k dz^l. \end{cases} \quad (1.28)$$

Deformatsioon (deformatsiooni mõõt)

$$ds^2 - dS^2 \quad (1.29)$$

Deformatsioonigradiendid

$$x^k_{,K} = \frac{\partial x^k(X^1, X^2, X^3, t)}{\partial X^K} \quad \text{ja} \quad X^K_{,k} = \frac{\partial X^K(x^1, x^2, x^3, t)}{\partial x^k}, \quad (1.30)$$

Deformatsioonitensorid**Cauchy deformatsioonitensor**

$$c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (1.31)$$

Greeni deformatsioonitensor

$$C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = g_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad (1.32)$$

Fingeri deformatsioonitensor

$$c^{-1kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{c}^l = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad (1.33)$$

Piola deformatsioonitensor

$$C^{-1KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^K \cdot \mathbf{C}^L = g^{kl} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (1.34)$$

Nende puhul $c_{km} c^{-1ml} = \delta_k^l$ ja $C_{KM} C^{-1ML} = \delta_K^L$.

Lagrange'i deformatsioonitensor

$$2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} \quad (1.35)$$

Euleri deformatsioonitensor

$$2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} \quad (1.36)$$

Kuna

$$\begin{cases} dS^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = G_{KL} dX^K dX^L = c_{kl} dx^k dx^l, \\ ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = g_{kl} dx^k dx^l = C_{KL} dX^K dX^L \end{cases}$$

siis nüüd

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX^K dX^L = 2e_{kl} dx^k dx^l, \quad (1.37)$$

Seosed:

$$E_{KL} = e_{kl} x^k_{,K} x^l_{,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l} \quad (1.38)$$

Kovariantsed osatuletised

Christoffeli teist liiki sümboolid

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 Z^N}{\partial X^K \partial X^L} \frac{\partial X^M}{\partial Z^N} \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial z^n}. \quad (1.39)$$

Christoffeli esimest liiki sümboolid on defineeritavad kahel moel.

i) Läbi Christoffeli teist liiki sümboolite

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} G_{MN} \left\{ \begin{matrix} N \\ KL \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} = G^{MN} [KL, N], \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} g_{mn} \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} = g^{mn} [kl, n]. \end{cases} \quad (1.40)$$

ii) kujul

$$\begin{cases} [KL, M] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial G_{LM}}{\partial X^K} - \frac{\partial G_{KL}}{\partial X^M} \right), \\ [kl, m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \end{cases} \quad (1.41)$$

NB! *Christoffeli sümboolid pole tensorid!*

Osatuletused vektoreist \mathbf{U} või \mathbf{u} avalduvad kujul

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X^K}(U^L \mathbf{G}_L) = U^M{}_{;K} \mathbf{G}_M, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(u^l \mathbf{g}_l) = u^m{}_{;k} \mathbf{g}_m, \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X^K}(U_L \mathbf{G}^L) = U_{M;K} \mathbf{G}^M, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(u_l \mathbf{g}^l) = u_{m;k} \mathbf{g}^m. \end{cases} \quad (1.42)$$

Siin

$$\begin{cases} U^M{}_{;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U^M}{\partial X^K} + \left\{ \begin{matrix} M \\ KL \end{matrix} \right\} U^L, \\ u^m{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} u^l \end{cases} \quad (1.43)$$

on kontravariantsete vektorite kovariantsed osatuletised (meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} järgi) ning

$$\begin{cases} U_{M;K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_M}{\partial X^K} - \left\{ \begin{matrix} L \\ MK \end{matrix} \right\} U_L, \\ u_{m;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_m}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} u_l \end{cases} \quad (1.44)$$

on kovariantsete vektorite kovariantsed osatuletised (meetriliste tensorite G_{KL} ja g_{kl} järgi).

Suurused $U^M{}_{;K}$ ja $u^m{}_{;k}$ on segatensorid ning $U_{M;K}$ ja $u_{m;k}$ kovariantsed tensorid.

Meetriliste tensoritega saab teostada üleminekuid (1.43) \rightarrow (1.44) ja vastupidi:

$$\begin{cases} U^L{}_{;K} = G^{LM} U_{M;K} & U_{L;K} = G_{LM} U^M{}_{;K} \\ u^l{}_{;k} = g^{lm} u_{m;k} & u_{l;k} = g_{lm} u^m{}_{;k} \end{cases}$$

Kovariantse osatuletise geomeetriline interpretatsioon
Kovariantse osatuletise avaldised (1.43) ja (1.44) koosnevad kahest

osast. Neist esimene iseloomustab vektori \mathbf{u} muutumist kui muutub koordinaat X^K (või x^k) ning teine \mathbf{u} muutumist kui seoses X^K (või x^k) muutumisega muutub baas \mathbf{G}_M (või \mathbf{g}_m).

Sirgjooneliste koordinaatide puhul on Christoffeli sümboolid samaselt nullid ja seega kovariantne osatuletis on võrdne “harilikku” osatuletisega. *

Deformatsioonitensorite ja siirete vahelised seosed

$$\begin{cases} C_{KL} = G_{KL} + U_{K;L} + U_{L;K} + U_{N;K} U^N{}_{;L}, \\ c_{kl} = g_{kl} - u_{k;l} - u_{l;k} + u_{n;k} u^n{}_{;l}. \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + U_{M;K} U^M{}_{;L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k} u^m{}_{;l}. \end{cases} \quad (1.46)$$

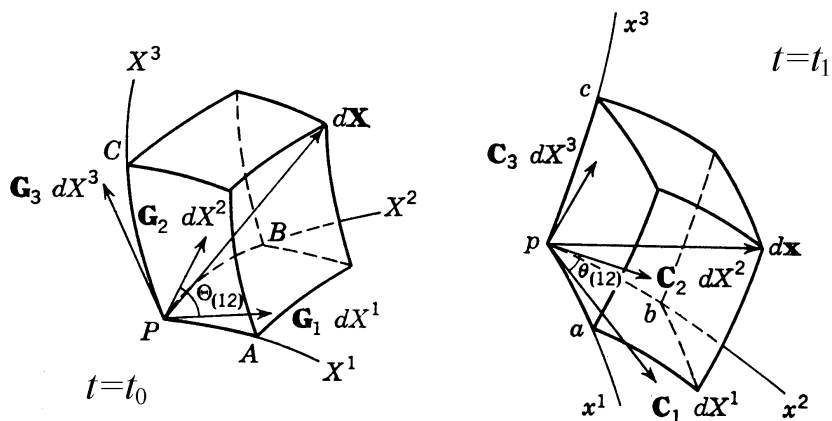
Need võrrandid on PKM ühed põhivõrrandid, mis seovad omavahel Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid ning materiaalse punktide siirded \mathbf{u} .

Suurusi $u_{l;k}$, $u^m{}_{;l}$ jne. nimetatakse tihti *siirdegradientideks*. Sirgjooneliste koordinaatide puhul $U_{M;K} \equiv U_{M,K}$ jne. DRK puhul lisaks eelnevale $U^M{}_{;L} \equiv U_{M,K}$ jne. ning võrrandid (1.46) saavad kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = 2E_{LK} = C_{KL} - G_{KL} = U_{L,K} + U_{K,L} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = 2e_{lk} = g_{kl} - c_{kl} = u_{l,k} + u_{k,l} - u_{m,k} u_{m,l}. \end{cases} \quad (1.47) \quad \dagger$$

Pikenemine ja nihe (nurga muutus)

Vaatleme kõverjoonelist rööptahukat³ (Joon. 1.2). Tema “servavektorid” hetkel $t = t_0$ on $\mathbf{G}_K dX^K$ ja need deformeeruvad servavektoreteks $\mathbf{C}_K dX^K$.



Joonis 1.2: Kõverjoonelise rööptahuka deformatsioon

Defineerime vektorite $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ sihilised ühikvektorid

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \text{ ja } \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad (1.48)$$

mille komponendid

$$N^K = \frac{dX^K}{dS} \text{ ja } n^k = \frac{dx^k}{ds} \quad (1.49)$$

kujutavad endast ühikvektorite \mathbf{N} ja \mathbf{n} suunakoosinusi.

Pikenemiskoeffitsendid⁴

³I.k. *curvilinear parallelepiped*

⁴I.k. *stretch*

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N^K N^L} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl}n^k n^l}} \quad (1.50)$$

Füüsikaliselt on suurused $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ ja $\lambda_{(\mathbf{n})}$ samad — esimene on vaid esitatud LK-s, teine EK-s.

Suhteline pikenemine (suunas \mathbf{N})⁵

$$E_{(\mathbf{N})} = e_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 \equiv \lambda_{(\mathbf{n})} - 1. \quad (1.51)$$

LDRK ja EDRK

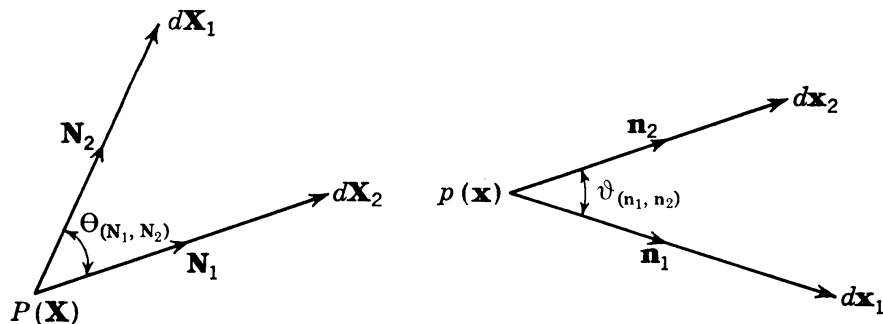
$$\begin{aligned} C_{\underline{K}\underline{K}} &= \Lambda_{(K)}^2, & 2E_{\underline{K}\underline{K}} &= \Lambda_{(K)}^2 - 1 = (1 + E_{(K)})^2 - 1 \\ c_{\underline{k}\underline{k}} &= \lambda_{(k)}^{-2}, & 2e_{\underline{k}\underline{k}} &= 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = 1 - (1 + e_{(k)})^{-2}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Kui $E_{\underline{K}\underline{K}} \ll 1$ või $e_{\underline{k}\underline{k}} \ll 1$, siis arendades avaldised (1.52)₂ ja (1.52)₄ Maclaurin'i ritta ning säilitades vaid kõige madalamat järku • liikmed, saame

$$E_{\underline{K}\underline{K}} \approx E_{(K)} \text{ ja } e_{\underline{k}\underline{k}} \approx e_{(k)} \quad (1.53)$$

⁵I.k. *extension*

Vaatleme kahte lõpmata väikest vektorit $d\mathbf{X}_1$ ja $d\mathbf{X}_2$, mille vaheline nurk on $\Theta \equiv \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}$ ja mis deformeeruvad vektoriteks $d\mathbf{x}_1$ ja $d\mathbf{x}_2$, mille vaheline nurk on $\vartheta \equiv \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$.



Joonis 1.3: Nurga muutus

Ühikvektorid

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{d\mathbf{X}_\alpha}{|d\mathbf{X}_\alpha|} \quad \text{ja} \quad \mathbf{n}_\alpha = \frac{d\mathbf{x}_\alpha}{|d\mathbf{x}_\alpha|} \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.54)$$

ning nurkade koosinused

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = \frac{G_{KL} dX_1^K dX_2^L}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = G_{KL} N_1^K N_2^L \quad (1.55)$$

ja

$$\cos \vartheta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|} = \frac{C_{KL} N_1^K N_2^L}{\Lambda_{(\mathbf{N}_1)} \Lambda_{(\mathbf{N}_2)}} \stackrel{\text{tähistame}}{=} H. \quad (1.56)$$

Nihe ehk nihkedeformatsioon ehk nihkenurk vektoritega \mathbf{N}_1 ja \mathbf{N}_2 määratud pinnal on defineeritud kui algse nurga Θ muut —

$$\Gamma_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} = \gamma_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \Theta_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)} - \vartheta_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}. \quad (1.57)$$

$$\sin \Gamma = \sin(\Theta - \vartheta) = H \sin \Theta - \sqrt{1 - H^2} \cos \Theta \quad (1.58)$$

Kui $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2$, siis $\sin \Gamma = H$.

LDRK

$$2E_{KL} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \sin \Gamma_{KL}, \quad K \neq L. \quad (1.59)$$

Kui nii $|E_{(K)}| \ll 1$, $|E_{(L)}| \ll 1$ kui $|\sin \Gamma_{(KL)}| \ll 1$ siis saame

$$2E_{KL} \approx \sin \Gamma_{(KL)}, \quad K \neq L. \quad (1.60)$$

Kui lisaks $\Gamma_{(KL)} \rightarrow 0$, siis

$$2E_{KL} \approx \Gamma_{(KL)}, \quad K \neq L. \quad (1.61)$$

Kui x^k on EDRK, $e_{(k)} \ll 1$, $e_{(l)} \ll 1$ ja $\gamma_{(kl)} \rightarrow 0$, siis

$$2e_{kl} \approx \gamma_{(kl)}, \quad k \neq l. \quad (1.62)$$

Deformatsioonitensori peasuunad

Tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$(C^K_L - C\delta^K_L) N^L = 0. \quad (1.63)$$

Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend juhul kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C^K_L - C\delta^K_L| = 0. \quad (1.64)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C = 0 \quad (1.65)$$

tundmatu C määramiseks.

Karakteristlik võrrand (1.65) omab kolme juurt C_α , $\alpha = 1, 2, 3$, mida nimetatakse *omaväärtusteks* ehk *peaväärtusteks*⁶. Võrrandisüsteemi (1.63) abil saame nüüd igale peaväärtusele C_α seada vastavusse *omavektori* ehk *peavektori* \mathbf{N}_α , mis määrab *peasuuna*.

Saab tõestada, et peaväärtused on reaalsed ning neile vastavad peasuunad on omavahel risti ja eksisteerivad alati. •

Kui koordinaadid on valitud peasuundades (st., baasivektorite siht ühtib peavektortite sihtidega igas materiaalses punktis), siis ★

$$N^L_\alpha = \kappa_\alpha \delta^L_\alpha \quad (1.66)$$

ja avaldiste (1.63) põhjal

$$C^K_\alpha = C_\alpha \delta^K_\alpha, \quad (1.67)$$

st., $C^1_1 = C_1$, $C^2_2 = C_2$, $C^3_3 = C_3$ ja $C^K_\alpha = 0$, kui $K \neq \alpha$. Kokkuvõttes võib öelda, et peaväärtused võrduvad deformatsioonitensori normaalkomponentidega peatelgedes (peadeformatsioonidega). Nihkedeformatsioonid selliste telgede (koordinaatide) puhul puuduvad.

Deformatsioonitensori invariandid —

$$\begin{cases} \text{I}_C = C_1 + C_2 + C_3, \\ \text{II}_C = C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2, \\ \text{III}_C = C_1 C_2 C_3. \end{cases} \quad (1.68)$$

Pikenemiskoeffitsendid peasuundades

$$\lambda_\alpha \equiv \Lambda_\alpha = \sqrt{C_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} \quad (1.69)$$

1.2.6 Kiirus ja kiirendus

Materiaalne tuletis vektorist

Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi) nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\text{const}} \quad (1.70)$$

LK:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (1.71)$$

EK:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f^k \mathbf{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f^k \mathbf{g}_k) \dot{x}^l, \\ \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (f_k \mathbf{g}^k) + \frac{\partial}{\partial x^l} (f_k \mathbf{g}^k) \dot{x}^l. \end{cases} \quad (1.72)$$

Esimest liiget nimetatakse siin *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muutusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti ümbruses).

Defineerime materiaalse tuletise vektori komponentidest

$$\frac{Df^k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k_{;l} \dot{x}^l \quad \text{ja} \quad \frac{Df_k}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k;l} \dot{x}^l. \quad (1.73)$$

Vektori jaoks seega

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Df^k}{Dt} \mathbf{g}_k = \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{g}^k. \quad (1.74)$$

⁶I.k. *eigenvalues or principal values or proper numbers*

Materiaalne tuletis skalaarist. Vaatleme skalaarfunktsiooni $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$. *Materiaalne tuletis skalaarist* on defineeritud kujul †

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^l} \dot{x}^l. \quad (1.75)$$

Näide: Tähistagu skalaar Φ materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev temperatuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.

Materiaalse punkti kiirus

Joonise 1.1 (lk. 13) põhjal punkti kohavektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{P} + \mathbf{u}. \quad (1.76)$$

Kuna \mathbf{b} ja \mathbf{P} ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (1.77)$$

Kui lähtuda materiaalse punkti kohavektorist $\mathbf{p} = x^k(X^1, X^2, X^3, t)\mathbf{g}_k$, siis tema kiirus

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k \equiv \dot{x}^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial t} \equiv \frac{Dx^k}{Dt}. \quad (1.78)$$

Kui lähtuda siirdevektorist $\mathbf{u} = U^K(\mathbf{X}, t)\mathbf{G}_K = u^k(\mathbf{x}, t)\mathbf{g}_k$, siis saame LK ja EK puhul kardinaalselt erinevad kiiruse avaldised.

LK:

$$\mathbf{v} = V^K \mathbf{G}_K, \quad \text{kus} \quad V^K = \frac{\partial U^K}{\partial t} \quad (1.79)$$

EK:

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k, \quad \text{kus} \quad v^k = \frac{Du^k}{Dt} \equiv \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k{}_{;l} \underbrace{\dot{x}^l}_{v^l} \quad (1.80)$$

Seega on kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

Materiaalse punkti kiirendus

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.81)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A^K \mathbf{G}_K, \quad A^K = \frac{\partial V^K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U^K}{\partial t^2} \quad (1.82)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k, \quad a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k{}_{;l} \underbrace{\dot{x}^l}_{v^l} \quad (1.83)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

Deformatsioonikiiruse tensorid

Euleri deformatsioonikiiruse tensor

$$2d_{kl} = v_{k;l} + v_{l;k}, \quad (1.84)$$

Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L}. \quad (1.85)$$

Keeriselisuse tensor

Defineerime (*Cauchy*) *keeriselisuse tensori*⁷

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k;l} - v_{l;k}) \equiv v_{[k;l]}. \quad (1.86)$$

1.2.7 Mass

Mass on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon M ei sõltu ei pikkuse dimensioonist L ega aja dimensioonist T . Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon ρ , mida nimetatakse *massi tiheduseks*. Sel juhul keha kogu mass

$$\mathfrak{M} = \int_v \rho dv. \quad (1.87)$$

Pideva keskkonna mehaanika I põhiaksioom — massi jäävuse seadus

Globaalne massi jäävuse aksioom: keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_o d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (1.88)$$

Lokaalse massi jäävuse aksioomi saame kui rakendame globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses.

Lagrange'i kirjeldus:

$$\rho_o = \rho J = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_o J^{-1} = \rho_o \sqrt{\text{III}_c}. \quad (1.89)$$

⁷I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

Siin on arvestatud, et

$$dv = J d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Avaldisi (1.89) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides.

Euleri kirjelduse saame kui esitame globaalse massi jäävuse aksioomi kujul $\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = 0$. Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksioom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0, \quad (1.90)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit* ja esitatakse EKs. Avaldised (1.89) ja (1.90) esitavad ühe ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (1.89) on mugavam kasutada tahke keha mehaanikas, (1.90) aga vedelike ja gaaside puhul.

1.2.8 Jõud

Pideva keskkonna vaatepunktist lähtudes võib jõud jagada kolme kategooriasse:

1. *Mahu- ehk massijõud*⁸ mõjuvad keha või keskkonda moodustavatele materiaalselele punktidele (masspunktidele). Näiteks gravitatsiooni jõud või elektrostaatilised jõud. Summaarne jõud saadakse integreerimisel üle kogu ruumala v . Siin eeldatakse, et on teada jõu tihedus ühikmassi või ühikruumala kohta.
2. *Pinna- ehk kontaktjõud*⁹ on põhjustatud teiste kehade või keskkondade mõjust kokkupuutepinnal. Siin eeldatakse, et on teada pinnaühikule mõjuv jõud. Näiteks hüdrostaatilise rõhu mõju vette asetatud keha pinnale.

⁸I.k. *body forces (loads)*

⁹I.k. *surfice or contact forces (loads)*

3. *Sisejõud*¹⁰ on põhjustatud materiaalsete punktide omavahe-
lisest mõjust. Dünaamika kursuses näidati, et kõigi sisejõudu-
de peavektor ja peamoment on võrdsed nulliga. Punkt-
masside vahelised jõud (sisejõud) muutuvad pinnajõududeks
kui me isoleerime (mõtteliselt) keskkonna või keha ühe osa
ülejäänust. See annab pingehüpoteesi.

Pideva keskkonna mehaanika kursuses kasutasime järgmisi
tähistusi:

- \mathbf{f} — massijõud (jõud massiühiku kohta),
- $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ — pinnajõud (jõud pinnaühiku kohta) punktis,
mille pinnanormaal on \mathbf{n} ,
- \mathcal{F}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv koondatud jõud,
- \mathbf{m} — massimoment (moment massiühiku kohta),
- $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ — pinnamoment (moment pinnaühiku kohta) punktis,
mille pinnanormaal on \mathbf{n} ,
- \mathcal{M}_α — punktis \mathbf{p}_α mõjuv jõupaari moment.

Seega, kehale mõjuva jõusüsteemi peavektor

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha \quad (1.91)$$

ja peamoment

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} [\mathbf{m} + \mathbf{p} \times \mathbf{f}] d\mathfrak{M} + \int_s [\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}] da + \\ + \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \times \mathcal{F}_\alpha + \sum_\beta \mathcal{M}_\beta. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Koondatud jõudusid defineeritakse tihti kui piirjuhte pinna- või
mahujõududest. Selline käsitlus võib aga mõnikord põhjustada ma- \checkmark

¹⁰I.k. *mutual or internal forces (loads)*

temaatilisi raskusi ning vajab seetõttu täiendavate tingimuste ka-
sutamist. Näiteks, et vältida määramatusi rakendatakse lokaalseid
teoreeme ja printsiipe vaid punktides, kus ei mõju koondatud jõudu-
sid. Globaalsete teoreemide puhul sellist probleemi pole.

1.2.9 Liikumishulk

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *liikumishulk*¹¹ \mathcal{P} avaldub kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} v^k(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) d\mathfrak{M} \quad (1.93)$$

kusjuures baasivektorid $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ saab integraali ette tuua vaid sirg-
jooneliste koordinaatide puhul. Kuna pideva massijaotuse puhul
 $d\mathfrak{M} = \rho dv$, siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või
massi. Kui korrutada viimast avaldist skalaarselt $\mathbf{G}^K(\mathbf{X})$ siis saa-
me liikumishulga \mathcal{P} komponendid \mathcal{P}^K LK-s —

$$\mathcal{P}^K(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k(\mathbf{X}, \mathbf{x}) v^k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M}. \quad (1.94)$$

**Pideva keskkonna mehaanika II põhiaksioom —
liikumishulga tasakaalu seadus**

Liikumishulga globaalse tasakaalu seadus. Liikumishulga
muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude
peavektoriga¹² —

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k v^k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}^K \quad (1.95)$$

¹¹I.k. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit
impulss.

¹²I.k. *principle of balance of momentum*

1.2.10 Kineetilise momendi

Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) kineetilise momendi¹³ \mathcal{H}_o ruumipunkti o suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{g}_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (1.96)$$

Analoogselt eelnevaga saame ka kineetilise momendi komponendid esitada LK-s

$$\mathcal{H}_o^K = \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (1.97)$$

Pideva keskkonna mehaanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus

Kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadus. Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peamomendiga¹⁴ (mõlemad momendid peavad olema võetud ühe ja sama ruumipunkti suhtes) —

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_o &= \mathcal{M}_o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k \epsilon^{klm} p_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_o^K \quad \text{ehk} \\ \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} g^K_k g^L_l (p^k v^l - p^l v^k) d\mathfrak{M} &= \mathcal{M}_o^{KL}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

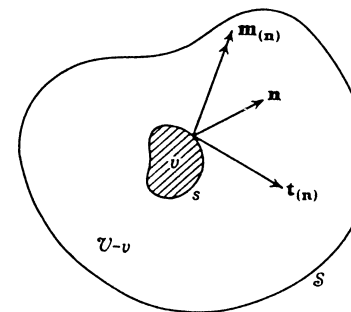
✓

¹³I.k. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördeimpulss.

¹⁴I.k. *principle of balance of moment of momentum*

1.2.11 Pinge

Pinnal Δa mõjub keskmine jõud $\Delta \mathcal{F}$ ja keskmine moment punkti p suhtes \mathcal{M}_p . Kui $\Delta a \rightarrow 0$, siis suhe $\Delta \mathcal{F}/\Delta a \rightarrow \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$. Kui vaadeldavas protsessis moment punkti p suhtes ei lähene nullile, siis saame ka suuruse $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$. †

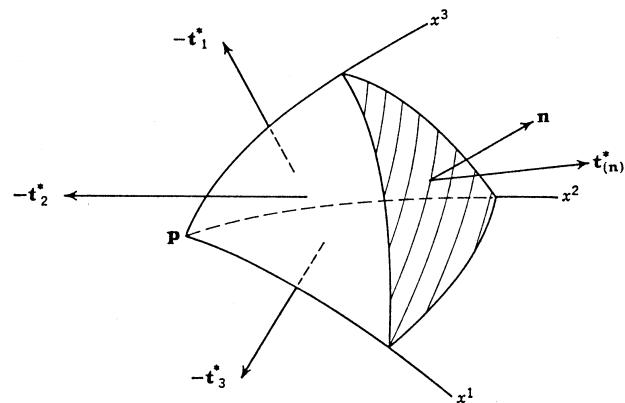


Joonis 1.4: Pingevektor ja momentpinge

Vaatleme väikest ruumi piirkonda v , mis on ümbritsetud pinnaga s ja mis asub täielikult kehas mahuga \mathcal{V} ja pinnaga S (joonis 1.4). Punktis p , mis asub pinnal s on välisnormaal \mathbf{n} ning mõjuvad jõud $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ ja moment $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ pinnauhiku kohta. Mõlemad nad on põhjustatud mahtude v ja $\mathcal{V} - v$ koosmõjust pinnal s . Suurust $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ nimetatakse *pingevektoriks* ja suurust $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ *pingemomendiks* ehk *momenti pingeks*¹⁵. Nad iseloomustavad vaadeldava mahu v välispinnal s mõjuvat väliskoormust, mis ei sõltu ainult vaadeldava punkti kohavektorist \mathbf{p} vaid ka pinnanormaalist \mathbf{n} .

Cauchy pingehüpotees. Vaatleme väikest tetraeedrit (joonis 1.5), mille tipp p asub vaadeldava piirkonna v sees ja mille kolm tahku on koordinaatpinnad ning neljas asub pinnal s . Koordinaatpinnal $x^i = \text{const.}$ mõjuva keskmise pinge tähistame $-\mathbf{t}_i^*$. Kasutame vaadeldava tetraeedri jaoks liikumishulga tasakaalu ✓

¹⁵I.k. *couple stress*



Joonis 1.5: Tetraeder

seadust (integreerimisel on rakendatud keskväärtusteoreeme) —

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}^* \Delta v) = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}^* \Delta a - \mathbf{t}_k^* \Delta a^k + \rho \mathbf{f}^* \Delta v. \quad (1.99)$$

Siin Δv on tetraeedri ruumala, Δa ja Δa^k – tetraeedri tahkude pindalad, \mathbf{v}^* – tetraeedri punktide keskmine kiirus ning \mathbf{f}^* – keskmine mahujõud.

Jagame nüüd viimase avaldise Δa ja laseme $\Delta a \rightarrow 0$ nii, et punkt p läheneb pinnale s mahu v seest. Kuna $\Delta v / \Delta a \rightarrow 0$, siis piiril saame

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k \frac{da^k}{da} = \mathbf{t}_k n^k = \mathbf{t}^k n_k, \quad (1.100)$$

sest teatavasti elementaarpind $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = da^k \mathbf{g}_k$ ja $da^k = n^k da$. Kokkuvõttes oleme seega tõestanud **teoreemi** — *pingevektor pinnapunktis p on lineaarfunktsioon ühikulisest pinnanormaalist \mathbf{n} . Selle lineaarfunktsiooni kordajateks on pingevektorid, mis mõjuvad vaadeldavat punkti läbivatel koordinaattasanditel.*

Pingevektorid \mathbf{t}_k ei sõltu pinnanormaalist \mathbf{n} . Eeldades, et $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ on pidev funktsioon normaalist \mathbf{n} ja võttes valemis (1.100) $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ saame

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \quad (1.101)$$

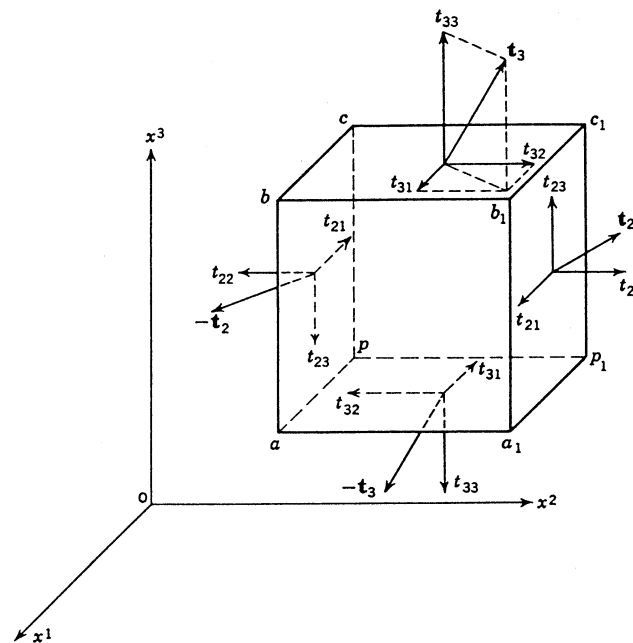
st., punktis p mõjuvad sama pinna vastaskülgedel võrdvastupidised pingevektorid.

1.2.12 Pingetensor

Pingetensori komponent (pingekomponent) t_{kl} on koordinaatpinnal $x^k = \text{const}$ mõjuva pingevektori \mathbf{t}_k l -is komponent, st.,

$$\mathbf{t}_k = t_{kl} \mathbf{g}^l \quad (1.102)$$

Seega näitab esimene indeks koordinaatpinda, millel pingevektor \mathbf{t}_k mõjub ja teine indeks vaadeldava komponendi mõjumise suunda. Pingekomponentide positiivsed suunad on näidatud joonisel 1.6.



Joonis 1.6: Pingetensor

Pingetensori normaalkomponente $k = l$ nimetatakse *normaalpinge-*

teks¹⁶ ja segakomponente $k \neq l$ nihkepingeteks¹⁷.

Pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_k n^k \stackrel{(1.102)}{=} t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \quad (1.103)$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n^k. \quad (1.104)$$

Seega oleme tõestanud **teoreemi** — punkti p läbival suvalisel pinnal (normaaliga \mathbf{n}) mõjuv pingevektor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist t_{kl} .

Märkus: Kui vaadeldavat pingetensorit t_{kl} on vaja eristada teistest pingetensoreist, siis nimetatakse teda *Cauchy pingetensoriks*.

Meetriliste tensoritega indekseid tõstes saame moodustada kontravariantseid ja segatensoreid, näiteks

$$g^{km} g^{ln} t_{mn} = g^{ln} t^k_n = t^{kl}.$$

Seega, lisaks valemile (1.102) ja (1.103), on pingevektorite avaldamiseks mitmeid võimalusi —

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t^k_l n_k \mathbf{g}^l = t_l^k n^l \mathbf{g}_k = t^{lk} n_l \mathbf{g}_k = t_{kl} n^k \mathbf{g}^l, \\ \mathbf{t}^k = t^k_l \mathbf{g}^l = t^{kl} \mathbf{g}_l, \\ \mathbf{t}_k = t_k^l \mathbf{g}_l = t_{kl} \mathbf{g}^l. \end{cases} \quad (1.105)$$

Peapinged, pingetensori peasuunad ja invariandid

Kui massi- ja pinnamomendid puuduvad, siis on pingetensor t_{kl} sümmeetriline. Seega kehtivad tema kohta samad seaduspärasused, mis deformatsioonitensorite kohta —

¹⁶I.k. *normal stress*

¹⁷I.k. *shear stress*

- (i) pingetensoril leidub vähemalt kolm peasuunda;
- (ii) pingetensoril leidub kolm peapinget, t_α ($\alpha = 1, 2, 3$), mis mõjuvad peapindadel;
- (iii) peapindadel on nihkepinged nullid;
- (iv) pingetensoril leidub kolm sõltumatut invarianti I_t , II_t ja III_t , mille leidmise eeskirjad, läbi pingetensori t^k_l või peaväärtuste t_α , on analoogsed Greeni deformatsioonitensori C^K_L invariantide leidmise eeskirjadele (1.68) (lk. 22).

1.2.13 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused

Liikumishulga lokaalse tasakaalu seadus

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) + \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0 \quad (1.106)$$

ehk

$$t^{jk}_{;j} + \rho (f^k - a^k) = 0$$

Need võrrandid väljendavadki *liikumishulga lokaalse tasakaalu seadust* ja on samas tuntud ka *Cauchy' esimese liikumisseadusena*.

Alternatiivsed kujud:

$$\begin{cases} t^{kl}_{;l} + \rho (f^k - a^k) = 0, \\ t^l_{k;l} + \rho (f_k - a_k) = 0, \\ t_{lk}{}^l + \rho (f_k - a_k) = 0. \end{cases} \quad (1.107)$$

Kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadus

Vaatleme mittepolaarset juhtu (st. puuduvad mahu ja pinnamomendid) ja eeldame, et liikumishulk on lokaalses tasakaalus. Sel juhul saab *kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadus* kuju

$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{t}^k = 0 \quad \text{ehk} \quad \epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad (1.108)$$

Võrrandid (1.108) on tuntud ka *Cauchy teise liikumisseadusena*. Sisuliselt tähendab viimane tingimus, et pingetensor peab olema sümmeetriline —

$$\epsilon^{ijk} t_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{jk} - t_{kj} = 0, \quad (1.109)$$

Järeldus: Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad, on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline. Seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti: $t^{11}, t^{22}, t^{33}, t^{12} = t^{21}, t^{13} = t^{31}, t^{23} = t^{32}$, st.,

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad t^{kl} = t^{lk}, \quad t^k_l = t_l^k. \quad (1.110)$$

1.2.14 Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides

(Pseudo)pingevektor \mathbf{T}^K esitab pinget ruumipunktis \mathbf{x} , kusjuures pinget vastab deformeerumata pinnale $d\mathbf{A}$ materiaalses punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ ja

$$\mathbf{t}_{(n)} da = \mathbf{t}^k da_k = \mathbf{T}^K dA_K. \quad (1.111)$$

Seos pingevektoriga \mathbf{t}^k (mis vastab deformeerunud pinnale $d\mathbf{a}$):

$$\mathbf{t}^k = J^{-1} x^k_{,K} \mathbf{T}^K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}^K = J X^K_{,k} \mathbf{t}^k. \quad (1.112)$$

Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensorid: Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid T^{Kl} ja T^{KL} nii, et

$$\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{g}_l = T^{KL} x^l_{,L} \mathbf{g}_l = T^{KL} \mathbf{G}_L. \quad (1.113)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. Terminid pseudopinge kasutatakse siin seetõttu, et mõlemad tensorid väljendavad pinget algse (deformeerumata) pinna kohta. Tensor T^{Kl} esitab pinget ruumipunktis \mathbf{x} ja tensor T^{KL} materiaalses punktis \mathbf{X} . Seosed Cauchy pingetensoriga:

$$\begin{aligned} T^{Kl} &= J X^K_{,k} t^{kl}, & t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} T^{Kl}, \\ T^{KL} &= T^{Kl} X^L_{,l} = J X^K_{,k} X^L_{,l} t^{kl}, \\ t^{kl} &= J^{-1} x^k_{,K} x^l_{,L} T^{KL}, & T^{Kl} &= x^l_{,L} T^{KL}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Cauchy esimene liikumisseadus (liikumishulga tasakaalu seadus):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial X^K} \left(\sqrt{G} \mathbf{T}^K \right) + \underbrace{J \rho}_{=\rho_o} (\mathbf{f} - \mathbf{a}) &= 0, \\ T^{Kk}_{,K} + \rho_o (f^k - a^k) &= 0, \\ (x^l_{,L} T^{Kk})_{,K} + \rho_o (f^k - a^k) &= 0. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Koolon tähistab viimastes võrrandites *kovariantset täistuletist* ($A^{Kk} = A^{Kk}(\mathbf{X}, \mathbf{x})$)

$$A^{Kk}_{,L} = \underbrace{A^{Kk}_{,L}}_{A^{Kk}_{,L}} + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} K \\ ML \end{matrix} \right\}}_{A^{Kk}_{,L}} A^{Mk} + \underbrace{\left(A^{Kk}_{,l} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ml \end{matrix} \right\} A^{Kl} \right)}_{A^{Kk}_{,l}} x^l_{,L}. \quad (1.116)$$

Cauchy teine liikumiseseadus (kineetilise momendi tasakaalu seadus):

$$\begin{aligned} T^{Kk} x^m_{,K} &= T^{Km} x^k_{,K}, \\ T^{KL} &= T^{LK}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Tensoritega T^{KL} ja T^{Kl} seotud valemeid on mugav kasutada väikeste deformatsioonide puhul, sest nad on seotud algpinnaga ning järelikult on lihtne aproksimeerida järgnevaid väikseid muutusi. Deformatsiooni käigus keha välispind muutub ja seega tuleb rajatingimused esitada liikuval ja muutuval pinnal ning nad sõltuvad siirdevektorist \mathbf{u} , mis on tundmatu. Lagrange'i kirjelduse puhul aga siin probleemi pole, sest rajatingimused esitatakse algse pinna jaoks, mis on teada. Tõsi küll, liikumisvõrrandid ise on sel juhul "pitsut" keerukamad. Lineaarse teooria puhul erinevus kahe vaadeldava kirjelduse vahel kaob.

1.2.15 Energia ja entroopia

Keskkonnale (või tema osale või kehale) rakendatud pind- ja mahujõud põhjustavad tema osade liikumist. Liikumise olemus sõltub keskkonna (või keha) omadustest. Näiteks deformatsioon, jäiga keha liikumine, vedeliku voolamine. Seega teevad keskkonnale rakendatud jõud tööd ja keskkond omandab energiat. Nimetatud energiale võib liituda veel muu päritoluga energiad (näiteks soojusenergia, keemiline energia jne.). Pideva keskkonna mehaanika puhul piirduakse muude energiatega osas tavaliselt vaid soojusenergia-ga. Summaarne energia¹⁸ on seega põhjustatud soojusenergiast ja välisjõudude tööst. Osa sellest summaarsest energiast «kulutatakse» kineetilise energi kujul (näiteks keskkonna deformeerimiseks või vedeliku voolamiseks). Ülejäänud osa summaarsest energiast kujutab endast vaadeldava keskkonna (kui mehaanikalise süsteemi) *si-*

¹⁸I. k. *Total energy*

*seenergiat*¹⁹. Deformeeruva keha puhul võib siseenergia koosneda näiteks soojusenergiast ja deformatsioonienergiast, vedeliku voolamisel aga soojusenergiast ja viskoosse dissipatsiooniga seotud energiast.

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus

Globaalne energia jäävuse seadus (termodünaamika I seadus): Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude poolt ajaühiku jooksul tehtud töö (välisjõudude võimsuse) ja ajaühiku jooksul keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud soojusenergia summaga —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}. \quad (1.118)$$

Kineetiline energia: Keha (mahus v sisalduva massi \mathfrak{M}) *kineetiline energia*²⁰ ($d\mathfrak{M} = \rho dv$)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_v \rho v^2 \rho dv = \frac{1}{2} \int_v \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dv = \frac{1}{2} \int_v \rho g_{kl} v^k v^l \rho dv. \quad (1.119)$$

Siseenergia: Kui on teada siseenergia tihedus ε (ühikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathfrak{M}} \varepsilon d\mathfrak{M} \equiv \int_v \rho \varepsilon dv. \quad (1.120)$$

¹⁹I. k. *Internal energy*. Siseenergia mõiste võttis 1851. a. kasutusele W. Thomson sõnastamaks termodünaamika I seadust.

²⁰I. k. *kinetic energy*

Välisjõudude töö ajaühikus (välisjõudude võimsus):

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r + \int_V \rho f^p v_p dv = \int_S \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} da + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv. \quad (1.121)$$

Siin elementaarpind $d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_{(1)} \times d\mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{n} da = da_k \mathbf{g}^k$ ja $da_k = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_k$.

Ajaühiku jooksul keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud soojusenergia: Soojuse juurdevool koosneb kahest osast: (i) soojuse juurdevool läbi pinna S kehasse \mathcal{V} ja (ii) keha siseallikaist toodetud soojus, st.,

$$Q = \int_S q^p da_p + \int_V \rho h dv = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \rho h dv. \quad (1.122)$$

Siin $\mathbf{q} = q^p \mathbf{g}_p$ on soojuse juurdevool ehk soojuse voog pinnaiühiku kohta ja h — keha siseallikaist toodetud soojus massiühiku kohta.

Lokaalne energia jäävuse seadus

$$\rho \dot{\mathcal{E}} = t^{pr} d_{pr} + q^p{}_{;p} + \rho h. \quad (1.123)$$

Esitatud diferentsiaalvõrrand väljendab *lokaalset energia jäävuse seadust* ja teda nimetatakse ka *energia lokaalse tasakaalu diferentsiaalvõrrandiks*. Kuna arvesse pole võetud energia jaotust elementaarmahu pinnal, siis võidakse siia lisada veel üks $q^p{}_{;p}$ tüüpi liige. Viimases avaldises esinevat mehaanikalist energiat

$$\phi = t^{pq} d_{pq} \quad (1.124)$$

nimetatakse ka *pinge võimsuseks*, sest ta iseloomustab pinge poolt deformeerimisel või voolamised tehtud töö muutumise kiirust.

Potentsiaalne energia

Vaatleme juhtu, kus mahu- ja pinnamomendid puuduvad (nn. mittepolaarne juht) ning välisjõud f_p (massijõud) on statsionaarsed ja avaldatavad läbi potentsiaali $U(\mathbf{x})$, st. $f_p = -U_{,p}$. Seega potentsiaalne energia

$$\mathcal{U} = \int_V \rho U dv \quad (1.125)$$

Välisjõudude võimsuse avaldisele (1.121) saab nüüd anda kuju

$$\mathcal{W} = \int_S t^{rp} v_p da_r - \dot{\mathcal{U}} \quad (1.126)$$

ja globaalsele energia jäävuse seadusele (termodünaamika esimene seadus) kuju

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{U}} = \int_S t^{rp} v_p da_r + Q. \quad (1.127)$$

Antud kujul väidab termodünaamika esimene seadus, et koguenergia muutus võrdub pindjõudude võimsus pluss soojuse juurdevool ajaühikus. Kui p.p. on null, siis

$$\mathcal{K} + \mathcal{E} + \mathcal{U} = \text{const.} \quad (1.128)$$

Selline olukord esineb kui keha on isoleeritud (st. $Q = 0$) ja pinnajõud ja/või kiirused on nullid või omavahel risti.

Entroopia

Entroopia on termodünaamiline olekufunktsioon, mis iseloomustab energia pöördumatut hajumist. Tihti defineeritakse entroopiat ka kui suurust millega mõõdetakse süsteemi korrastamatuse astet. Energia ja entroopia konteseptsioonid on termodünaamika alustalad. Termodünaamika esimene seadus — energia jäävuse seadus

— sätestab, et materiaalses süsteemis muutub energia ühest vormist teise kuid ei teki juurde ega kao. Samas ei sätesta see seadus, mis vormis selline energia muutumine ehk ülekanne toimub. Näiteks ei anna termodünaamika esimene seadus informatsiooni selle kohta, kas selline ülekanne on pööratav või pöördumatu. Viimane küsimus energia ülekanne pööratavusest on eriti tähtis juhtudel, kus on vaja teada energia hulka, mida on võimalik vaadeldava süsteemi puhul kasutada. *Entroopia* kontseptsioon tuuakse sisse selleks, et mõõta energia hulka, mis on pöördumatult muundunud kasutatavast vormist kasutamatusse. Viimase all tuleb mõista seda hulka energiast, mida pole enam võimalik muundada (mehaanikaliseks) tööks. Näiteks, kui deformeeruvale kehale mõjub jõud, siis keha (üldjuhul) deformeerub. Viimase protsessiga kaasneb alati teatav temperatuuri tõus (soojusenergia juurdekasv). Sellist soojusenergia kasvu deformeerumisprotsessis iseloomustabki entroopia.

Süsteemi summaarne entroopia:

$$H = \int_v \rho \eta dv, \quad (1.129)$$

kus η on *erientroopia* ehk *entroopia tihedus* (massiühiku kohta)²¹. Tema dimensioon $\dim(\eta) = (\text{energia})/(\text{mass} \cdot \text{temperatuur})$

Termodünaamika teine seadus

Entroopia tootmise kiirus:

$$N = \dot{H} - \int_s \frac{q^p}{\vartheta} da_p - \int_v \frac{\rho h}{\vartheta} dv \geq 0. \quad (1.130)$$

Klassikalised sõnastused: 1) *Clausius*: soojus ei saa iseenesest minna külmemalt kehalt soojemale; 2) *Kelvin*: protsessid, mille ainsaks tulemuseks on keha jahtumine ja selle arvelt saadav töö pole

²¹I.k. *specific entropy or entropy density*

võimalikud; 3) *Carathéodory*: iga termodünaamilise oleku ümbruses eksisteerivad nn. naaberolekud, kuid üleminek ühest naaberolekust teise pole võimalik adiabaatilise protsessi käigus.

Termodünaamiline olek

Termodünaamika üks põhieeldus väidab, et igal materjali jaoks leidub üks ja ainult üks funktsioon, mida nimetatakse siseenergia tiheduse funktsiooniks ja mis on esitatav kujul

$$\varepsilon = \varepsilon(\eta, \nu_1, \dots, \nu_n, \mathbf{X}). \quad (1.131)$$

Siin η on erientroopia ja suurused ν_α kujutavad endast mehaanikalisi, keemilisi, elektromagneetilisi jne. parameetreid, mis iseloomustavad süsteemi termodünaamilist käitumist. Suurusi η ja ν_α nimetatakse *termodünaamilisteks olekumuutujateks* ning nad määravad süsteemi *termodünaamilise oleku* materiaalses punktis \mathbf{X} . Kuna siseenergia tiheduse funktsioon ε iseloomustab vaadeldava materjali sisemist ehitust, siis nimetatakse teda *olekufunktsiooniks*.

Temperatuur ϑ ja **termodünaamiline pinge** τ^α on defineeritud järgmiselt —

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \quad \text{ja} \quad \tau^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_\alpha}. \quad (1.132)$$

Seega fikseeritud materiaalse punkti jaoks avaldub siseenergia tiheduse lõpmata väike muut kujul

$$d\varepsilon = \vartheta d\eta + \tau^\alpha d\nu_\alpha. \quad (1.133)$$

Viimane on tuntud kui *Gibbs'i võrrand* [1873].

1.2.16 Pidevustingimused ehk sobivustingimused

Kolmemõõtmelises ruumis on deformatsioonitensori kuus (sõltumatut) komponenti seotud siirdevektori kolme komponendiga läbi kuue võrrandi (vt. (1.46) lk.17). Näiteks,

$$2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL} = 2E_{LK} = U_{K;L} + U_{L;K} + G^{MN}U_{M;K}U_{N;L}. \quad (1.134)$$

Kui on teada siirdevektori komponendid U_K , siis valemi (1.134) põhjal saab määrata kas tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti. Kui aga on vastupidi, st., et teada on tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti, siis on meil kolme tundmatu määramiseks kuus võrrandit. Järelikult on meil tegu ülemääratud süsteemiga. Selleks, et siirdekomponendid U_K oleks üheselt määratavad ja pidevad (siirdeväli peab olema üheselt määratud ja pidev) tuleb nüüd deformatsiooni tensori komponentidele peale panna lisatingimused, mis välistaks nende meelevaldse valiku. Neid tingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks* ehk *sobivustingimusteks*²². Kui siirdekomponendid U_K on ette teada (siirdekomponendid on valitud põhimuutujateks) siis on kooskõlatingimused automaatselt täidetud. Kui aga põhimuutujateks on deformatsioonitensorid, siis on sobivustingimustel täita oluline roll.

Avaldised

$$\begin{aligned} & e_{km;ln} + e_{ln;km} - e_{lm;kn} - e_{kn;lm} + \\ & + c^{-1pq} [(e_{mq;l} + e_{lq;n} - e_{lm;q})(e_{kp;n} + e_{np;k} - e_{kn;p}) - \\ & - (e_{lq;n} + e_{nq;l} - e_{ln;q})(e_{kp;m} + e_{mp;k} - e_{km;p})] = 0, \end{aligned} \quad (1.135)$$

kus c^{-1pq} on Fingeri deformatsioonitensor, esitavad pidevustingimusi Euleri deformatsioonitensori jaoks.

²²I.k. *compatibility conditions*

Kui avaldistes (1.135) asendada tensor e_{kl} lineaarse teooria deformatsioonitensoriga $\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} + u_{l;k})$ ning hüljata kõik mittelineaarsed liikmed, saame lineaarse teooria (lõpmata väikeste deformatsioonide) sobivustingimused —

$$\tilde{e}_{kn;lm} + \tilde{e}_{lm;kn} - \tilde{e}_{km;ln} - \tilde{e}_{ln;km} = 0. \quad (1.136)$$

Saadud 81 võrrandist vaid 6 osutuvad lineaarselt sõltumatuteks. • Tasapinnalise deformatsiooni puhul jääb neist kuuest järele vaid üks võrrand.

1.2.17 Olekuvõrrandid

Olekuvõrrandid on vaja sisse tuua selleks, et saada võrdseks tundmatute arv ja võrrandite arv. Meil on kaheksa võrrandit: massi jäävus — 1 võrrand; Cauchy I ja II liikumisseadus — 3 + 3 võrrandit; energia jäävus — 1 võrrand. Eringeni järgi on tundmatuid kakskümmend viis: tihedus ρ — 1; kiirusvektori komponendid v_i — 3; pingetensori komponendid t^{ij} — 9; momentpingetensori komponendid m^{ij} — 9; soojuse juurdevool q^k — 3. Lisanduda võib veel elektrilisi ja keemilisi muutujaid. Kui tegu on nn. mittepolaarse juhuga, siis väheneb tundmatute arv üheksa momentpingetensori komponendi ja kolme pingetensori komponendi võrra ning samas võrrandite arv kolme võrra (Cauchy II liikumisseaduse arvelt, mille põhjal peab pingetensor olema sümmeetriline). Seega antud juhul on viis võrrandit ja kolmteist tundmatut.

Nimetatud võrrandid kehtivad suvalisest materjalist keskkonna puhul, olekuvõrrandid kirjeldavad aga konkreetse keskkonna omadusi.

Olekuvõrrandite tuletamise meetodid:

- (i) statistilis mehaaniline — arvestab keskkonna koosnemist osakekestest;

- (ii) puht matemaatiline — õige arv võrrandeid tagab füüsikaliste nähtuste ühese kirjelduse;
- (iii) termodünaamiline — arvestab eeskätt soojust ja temperatuuri mõju;
- (iv) pideva keskkonna füüsikal baseeruv meetod — arvestab kõiki kolme eeltoodud meetodit.

Olekuvõrrand kirjeldab teatavat idealiseeritud materjali. Et see kirjeldus oleks adekvaatne, peab ta lähtuma teatavatest printsiipidest.

1. Välistamise ehk hülgamise printsiibid
 - (a) Pärilikkuse (mälu) arvestamine
 - (b) Ümbruse printsiip
 - (c) Võrdse kohaloleku ehk sõltumatute olekuparameetrite valiku ühesuse printsiip
 - (d) Unifitseerimise printsiip
jne.
2. Invariantsus koordinaatteisenduste suhtes
3. Ruumiline invariantsus
4. Materiaalne invariantsus
5. Mõõtühikuist sõltumatuse printsiip
6. Sobivusnõuded

Greeni meetod

- Lähtub hüperelastse keha mudelist — siseenergia on funktsioon deformatsioonist. Näiteks

$$\begin{aligned} \rho_0 \varepsilon &= \Sigma(X^K, x^k, g^k{}_K, \rho, \mathbf{G}_K, x^k{}_{,K}) \\ &\text{või} \\ \rho_0 \varepsilon &= \Sigma(X^K, \text{I, II, III}), \end{aligned} \tag{1.137}$$

kus I, II ja III on invariantid ühest deformatsioonitensorist ($C^{KL}, c^{kl}, E^{KL}, \bar{c}^{kl}$, jne., jne.).

- Elektrilised, keemilised ja termodünaamilised nähtused hüljatakse.
- Eeldatakse, et eksisteerib nn. loomulik olek.
- Eeldatakse, et dissipatsioon puudub.

Cauchy meetod

1. Lähtub ideaalselt elastse keha mudelist — pinge sõltub vaid deformatsioonist, st. eeldatakse, et pinge on deformatsiooni funktsioon.
2. On üldistatav ka dissipatiivsele süsteemile.

1.3 Elastsusteooria põhivõrrandite süsteem

1. Massi jäävuse seadus: Lokaalne massi jäävuse seadus on esitatud kas Lagrange'i või Euleri koordinaatides:

- materiaalne pidevusvõrand²³ —

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\text{III}_c} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_{-c}}}; \quad (1.138)$$

- ruumiline pidevusvõrand²⁴ —

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0. \quad (1.139)$$

2. Cauchy I ja II liikumisseadus. Euleri koordinaatide korral on Cauchy I liikumisseadus esitatav kujul

$$\begin{aligned} t^{kl}_{;l} + \rho (f^k - a^k) &= 0 & \text{või} \\ t^l_{k;l} + \rho (f_k - a_k) &= 0 & \text{või} \\ t_{lk}{}^{;l} + \rho (f^k - a^k) &= 0 \end{aligned} \quad (1.140)$$

ja Cauchy II liikumisseadus kujul

$$t^{kl} = t^{lk} \quad \text{või} \quad t^k_l = t_l^k. \quad (1.141)$$

Loomulikult saab Cauchy I ja II liikumisseadust esitada ka Lagrange'i koordinaatides (vt. alajaotus 1.2.14 lk. 36).

²³I. k. *Material equation of continuity*

²⁴I. k. *Spatial equation of continuity*

3. Keskkonna olekuvõrrandid. Näitena vaatleme kahte isotroopset keskkonda iseloomustavat olekuvõrrandit.

- Kokkusurutav keskkond — Fingeri olekuvõrand (vt. Pideva keskkonna mehaanika loengukonspekt).

$$t^k_l = b_{-1} c^{-1k}_l + b_0 \delta^k_l + b_1 c^k_l, \quad (1.142)$$

$$\begin{cases} b_{-1} = 2(\text{III}_c)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} = \frac{2}{\sqrt{\text{III}_{-c}}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-c}}, \\ b_0 = -2\sqrt{\text{III}_c} \left(\text{II}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_c} + \text{III}_c \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_c} \right) \\ = \frac{2}{\sqrt{\text{III}_{-c}}} \left(\text{II}_{-c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}} + \text{III}_{-c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}_{-c}} \right), \\ b_1 = -2\sqrt{\text{III}_c} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_c} = -2\sqrt{\text{III}_{-c}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}}. \end{cases} \quad (1.143)$$

- Kokkusurumatu keskkond — Ariano-Rivlini olekuvõrand (vt. Pideva keskkonna mehaanika loengukonspekt).

$$t^k_l = -p \delta^k_l + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-c}} c^{-1k}_l - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}} c^k_l. \quad (1.144)$$

Isotroopse materjali korral on loomulik eeldada, et $t_\alpha \geq t_\beta$ alati kui $\lambda_\alpha \geq \lambda_\beta$. Seetõttu peavad olekuvõrrandid rahuldama lisatingimusi

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-c}} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}_{-c}} \begin{cases} > 0 & \text{kui } \lambda_\beta \neq \lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq) \\ \geq 0 & \text{kui } \lambda_\beta = \lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq). \end{cases} \quad (1.145)$$

Lisakas ülaltoodud võrranditele tuleb või saab kasutada alljärgnevat seost ja tingimusi.

4. Geomeetrilised ja kinemaatilised seosed.

- Deformatsioonitensorid —

$$\begin{cases} c_{kl} = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l}, \\ \bar{c}^{-1kl} = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L}. \end{cases} \quad (1.146)$$

- Kiirus ja kiirendus —

$$v^k = \frac{Du^k}{Dt} = \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k_{;l} v^l, \quad (1.147)$$

$$a^k = \frac{Dv^k}{Dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^k_{;l} v^l. \quad (1.148)$$

5. Alg- ja rajatingimused.

- Kui keha pinnal S on pinged $t^k_{(n)}$ teada, siis

$$t^k_{(n)} = t^{lk} n_l = s^k, \quad \text{pinnal } S. \quad (1.149)$$

- Kui teame pinna S siirdeid, siis võime kirjeldada kas x^k või u^k pinnal S .
- Võimalik on ka nn. segarajatingimuste juht, kus osal rajapinnal on antud siirded, osal pinged.
- Algtingimused

$$x^k(\mathbf{X}, 0) = x_0^k, \quad \dot{x}^k(\mathbf{X}, 0) = v_0^k \quad (1.150)$$

kirjeldavad olukorda kehas alghetkel $t = 0$.

6. Pidevus- ehk sobivustingimused. Juhul kui põhimuutuujateks on deformatsioonid või pinged, või kui teoorias esineb olulisi lihtsustusi (näiteks plaatide ja koorikute teoorias), läheb üldjuhul vaja veel nn. sobivus- ehk pidevustingimusi (vt. alajaotus 1.2.16).

Peatükk 2

Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast

2.1 Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon

See on üks lihtsamaid ülesannete klasse elastsusteoorias Valime DRK, st. $x_k \equiv z_k$ ja $X_K \equiv Z_K$. Ühtlasi koab erinevus ko- ja kontravariantsete koordinaatide vahel ning edaspidi on selles paragrahvis indeksid all.

2.1.1 Põhiseosed

Homogeenset deformatsiooni esitab teisendus

$$x_k = A_{kK} X_K, \quad (2.1)$$

kus A_{kK} on konstantne ja mittesingulaarne tensor. Vastav $\sqrt{}$

pöördteisendus

$$X_K = \overset{-1}{A}_{Kk} x_k \quad (2.2)$$

ja $A_{kK} \overset{-1}{A}_{Kl} = \delta_{kl}$. Cauchy deformatsioonitensor ja vastav pöördtensor olid defineritud kujul

$$c_{kl} = G_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \text{ ja } \overset{-1}{c}{}^{kl} = G_{KL} x_{k,K} x_{l,L}.$$

DRK puhul teatavasti $G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL}$ ja $g_{kl} = g^{kl} = \delta_{kl}$. Seega

$$c_{kl} = \delta_{KL} \overset{-1}{A}_{Kk} \overset{-1}{A}_{Ll} \text{ ja } \overset{-1}{c}{}^{kl} = \delta_{KL} A_{kK} A_{lL} \quad (2.3)$$

Lokaalse massi jäävuse seaduse põhjal

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{\text{III}_c} = \sqrt{|c_{kl}|} = \left| \overset{-1}{A}_{Kk} \right|. \quad (2.4)$$

Seega on homogeenne deformatsioon isohooriline parajasti siis kui $\left| \overset{-1}{A}_{Kk} \right| = 1$. Pingete ja deformatsioonide vahelist seost esitav olekuvõrrand on saadud Greeni meetodil (vt. lk.47). Eeldame, et siseenergia on esitatav kujul $\rho_0 \varepsilon = \Sigma(\text{I}, \text{II}, \text{III})$, loeme keskkonna isotroopseks ja lähtume järgmistest olekuvõrrandest ($\text{I} \equiv \text{I}_{-1}, \dots$):

(a) kokkusurutav keskkond —

$$t_{kl} = b_{-1} \overset{-1}{c}{}^{kl} + b_0 \delta_{kl} - b_1 c_{kl}, \quad (2.5)$$

kus fenomenoloogilised kordajad

$$\begin{cases} b_{-1} = \frac{2}{\sqrt{\text{III}}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \\ b_0 = \frac{2}{\sqrt{\text{III}}} \left(\text{II} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} + \text{III} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}} \right) \\ b_1 = -2\sqrt{\text{III}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \end{cases} \quad (2.6)$$

(b) kokkusurutatu keskkond —

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \overset{-1}{c}{}^{kl} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} c_{kl}, \quad (2.7)$$

kus p on hüdrostaatiline surve.

Asendades deformatsioonitensorid (2.3) olekuvõrrandesse (2.5) ja (2.7) saame kokkusurutavale keskkonnale võrrandi

$$t_{kl} = b_{-1} \delta_{KL} A_{kK} A_{lL} + b_0 \delta_{kl} + b_1 \delta_{KL} \overset{-1}{A}_{Kk} \overset{-1}{A}_{Ll} \quad (2.8)$$

ja kokkusurutatule keskkonnale

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \delta_{KL} A_{kK} A_{lL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \delta_{KL} \overset{-1}{A}_{Kk} \overset{-1}{A}_{Ll}. \quad (2.9)$$

Vaadeldaval juhul, st. homogeenne deformatsiooni korral, on nii tensorid A_{kK} ja $\overset{-1}{A}_{Kk}$ kui fenomenoloogilised kordajad b_{-1} , b_0 ja b_1 konstantsed. Pinge-deformatsiooni seoste (2.8) ja (2.9) korral on tasakaaluvõrrandid (Cauchy I liikumisseadus (1.140) juhul kui $\mathbf{f} = \mathbf{a} = 0$) $t_{kl,l} = 0$ kokkusurutava keskkonna puhul automaatselt rahuldatud ja kokkusurutatu keskkonna puhul kui $p = \text{const}$. Järgnevalt vaatleme mõningaid erijuhte.

2.1.2 Puhas homogeenne deformatsioon

Puhta homogeenne deformatsiooni¹ puhul on deformatsioon kirjeldatud kujul

$$x_i = \lambda_i X_I, \quad i = I, \quad (2.10)$$

ehk

$$\begin{cases} A_{kK} = \lambda_k = 1 + e_k, & \text{kui } k = K \\ A_{kK} = 0, & \text{kui } k \neq K \end{cases} \quad (2.11)$$

¹I. k. *Pure homogeneous strain*

Seega tensoreile A_{kK} ja A_{Kk}^{-1} vastavad maatriksid

$$[A_{kK}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ ja } [A_{Kk}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Ülesanne: Leida deformatsioonitensoritele c_{kl} ja c_{kl}^{-1} vastavad maatriksid!

$$[c_{kl}] = \quad [c_{kl}^{-1}] = \quad (2.13)$$

Invariandid:

$$\begin{cases} \text{I} = \text{I}_{-c} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ \text{II} = \text{II}_{-c} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \\ \text{III} = \text{III}_{-c} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Nüüd saame võrrandist (2.8) kokkusurutava materjali jaoks

$$\begin{cases} t_{11} = 2\lambda_1 \left\{ \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right] + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}} \right\}, \\ t_{22} = 2\lambda_2 \left\{ \frac{1}{\lambda_3 \lambda_1} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right] + \lambda_3 \lambda_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}} \right\}, \\ t_{33} = 2\lambda_3 \left\{ \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right] + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}} \right\}, \\ t_{kl} = 0, \quad k \neq l. \end{cases} \quad (2.15)$$

Kokkusurumatu keskkonna puhul $\text{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ ja valemist (2.9) järeldeb, et

$$t_{kk} = -p + 2\lambda_k^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - \frac{2}{\lambda_k^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}. \quad (2.16)$$

2.1.3 Tõmme

(Lihtsa) tõmbe² puhul on kaks normaalpinge komponenti nullid ja vastavad pikenemiskoeffitsendid on võrdsed, näiteks $t_{22} = t_{33} = 0$ ja $\lambda_2 = \lambda_3$. Seega saavad kokkusurutava materjali olekuvõrrandid (2.15) kuju

$$\begin{cases} t_{11} = 2\lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} + \lambda_2^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}} \right), \\ 0 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{III}}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Võrrand (2.17)₂ seob omavahel pikenemiskoeffitsendid λ_1 ja $\lambda_2 = \lambda_3$. See on transtsendentne võrrand, mille lahend $\lambda_2 = f(\lambda_1)$ va-
*jab igal juhul täiendavat uurimist, sest (vähemalt Eringeni põhjal) ei pruugi ta olla ühene ja reaalne. Seega võib tasakaal sõltuda näiteks koormuse rakendamise viisist.

Kokkusurumatu keskkonna puhul annab $t_{22} = t_{33} = 0$ asendamine võrrandisse (2.16) hüdrostaatilise surve

$$p = \frac{2}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - 2\lambda_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}. \quad (2.18)$$

ja pinge

$$t_{11} = 2 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right) \quad (2.19)$$

²I. k. *Simple extension*

Kokkuvõttes on olukord kokkusurumatu materjali puhul võrreldes kokkusurutava materjaliga mõnevõrra lihtsam, sest pinge t_{11} sõltub vaid piknemisest λ_1 . Kokkusurutava materjali puhul aga lisaks ka piknemistest $\lambda_2 = \lambda_3$, kusjuures λ_1 ja λ_2 vahelise seose määramine võib osutuda üpris komplitseerituks. Enamgi veel, et tagada vaadeldava kokkusurutava materjali puhul kindla suurusega piknemine, võib osutuda vajalikuks pindkoormuse rakendamine.

2.1.4 Hüdrostaatiline surve

Hüdrostaatilise surve³ puhul $\lambda_\alpha = K$ ja $t_{kl} = -p\delta_{kl}$. Seega saame võrrandest (2.15) avaldada surve

$$p = -2 \left(\frac{1}{K} \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + 2K \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + K^3 \frac{\partial \Sigma}{\partial III} \right). \quad (2.20)$$

Kuna $III \equiv III_{-1} \equiv 1/III_c = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = K^6$ ja $\rho/\rho_0 = \sqrt{III_c}$, siis $K = \sqrt[3]{\rho_0/\rho}$. Seega nii deformatsioonitensori \bar{c}^{-1} invariantid kui siseenergia avalduvad tiheduse ρ funktsioonidena ($I = I(\rho), \dots, \Sigma = \Sigma(\rho)$) ning ka olekuvõrrandi (2.20) üldkuju on $p = p(\rho)$.

2.1.5 Nihe

(Lihtsa) nihke⁴ puhul deformeerub ruut $OABC$ rööpkülilikuks $Oabc$ (vt. joonis 2.1). Nüüd kirjeldavad deformatsiooni seosed

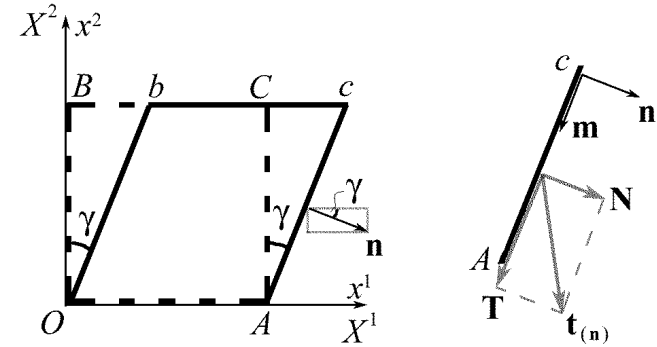
$$x^1 = X^1 + KX^2, \quad x^2 = X^2, \quad x^3 = X^3, \quad (2.21)$$

kus $K = \tan \gamma$. Seega valides

$$[A_{IL}] = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [A_{IL}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

³I. k. *Hydrostatic pressure*

⁴I. k. *Simple shear*



Joonis 2.1: Nihe

saame ka nihke puhul esitada deformatsiooni kujul (2.1), st. ka nihe on vaadeldav homogeenne deformatsioonina ja vastavalt avaldistele (2.3) avalduvad Fingeri ja Greeni deformatsioonitensordid kujul

$$[\bar{c}_{kl}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 + K^2 & K & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [c_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & -K & 0 \\ -K & 1 + K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Fingeri deformatsioonitensori \bar{c}_{kl}^{-1} invariantid

$$I = II = 3 + K^2 \quad \text{ja} \quad III = 1. \quad (2.24)$$

Viimane võrdus viitab isohoorilisele deformatsioonile.

Asendades avaldised (2.22)–(2.24) olekuvõrrandesse (2.5) ja arvestades võrduseid (2.6) saame pingetensori komponendid

$$\begin{cases} t_{11} = 2(1 + K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + 2(2 + K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial III}, \\ t_{22} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + 4 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial III}, \\ t_{33} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + 2(2 + K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial III}, \\ t_{12} = 2K \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \quad t_{23} = t_{31} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Deformeerunud pinna Ac ühiknormaali \mathbf{n} projektsioonid koordinaattelgedel (vt. joonis 2.1)

$$\begin{cases} n_1 = \cos \gamma = (1 + K^2)^{(-1/2)}, \\ n_2 = -\sin \gamma = -K(1 + K^2)^{(-1/2)}, \quad n_3 = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Keha pinnal mõjuva pingevektori koordinaattelgede sihilised komponendid on esitatud valemiga $t_{k(\mathbf{n})} = t_{kl}n_l$ (\mathbf{n} on pinna normaal ning indeksid on all, sest kasutame DRK). Seega,

$$\begin{cases} t_{1(\mathbf{n})} = 2(1 + K^2)^{(-1/2)} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III} \right), \\ t_{2(\mathbf{n})} = -2K(1 + K^2)^{(-1/2)} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial II} + \frac{\partial \Sigma}{\partial III} \right), \\ t_{3(\mathbf{n})} = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Normaal- ja nihkepinged (tangentsiaalpinged) tahul Ac ✓

$$\begin{cases} N = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} = t_{k(\mathbf{n})}n_k = \\ = 2(1 + K^2)^{(-1/2)} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + (2 + K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + (1 + K^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial III} \right] \\ T = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{m} = t_{k(\mathbf{n})}m_k = -2K(1 + K^2)^{-1} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \end{cases} \quad (2.28)$$

kus $m_1 = n_2$ ja $m_2 = -n_1$. Deformeerumata pindadel $X^2 = const.$ ja $X^3 = const.$ mõjuvaid pingeid saab leida otse valemist (2.25). ✓

Leitud pingevaldistest nähtub, et vastupidiselt lineaarsele teooriale, pole antud juhul võimalik saavutada nihkeseisundit vaid nihkepingete rakendamisega kuubi tahkudele. Antud juhul tuleb nihke saavutamiseks lisaks pingetele $t_{21} = t_{12}$ rakendada ka normalpinged pinged t_{kk} (vt. valemid (2.25)). Viimased võib omakorda jagada kahte ossa: •

- (i) ruumala muutust — Kelvini efekti — ära hoidev hüdrostaatiline tõmme, mis on võrdne normaalpingega t_{22} ;
- (ii) keha proportsioonide muutust — Poyntingi efekti — ärahoidev osa $t_{kk} - t_{22}$.

Kokkusurumatu materjali puhul lähtume olekuvõrrandist (2.7) ning valemist (2.23) ja (2.24) ning saame pingetensori komponendid kujul

$$\begin{cases} t_{11} = -p + 2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I}, \quad t_{22} = -p - 2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II}, \quad t_{33} = -p, \\ t_{12} = 2K \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \quad t_{31} = t_{32} = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Valides viimastes võrrandites $p = 0$ saame pinnad $X^3 = const.$ pingevabaks.

Kokkusurumatu materjali puhul loomulikult ei esine Kelvini efekti, kuid Poyntingi efekt on endiselt esindatud (vt. t_{11} ja t_{22} avaldisi).

Nii kokkusurutava kui kokkusurumatu materjali puhul

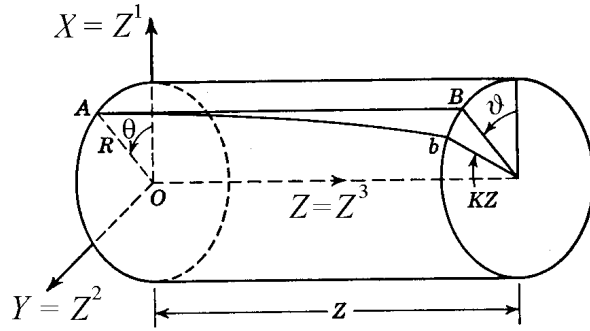
$$t_{11} - t_{22} = Kt_{12}. \quad (2.30)$$

2.2 Ringsilindri vääne

Ringsilindri ehk ümarvarda (ühtlast) väänet⁵ esitab deformatsioon

$$r = R, \quad \vartheta = \Theta + KZ, \quad z = Z, \quad (2.31)$$

kus K on vääne varda pikkusühiku kohta. Antud juhul Euleri koordinaadid $x^k \leftrightarrow r, \vartheta, z$ ja Lagrange'i koordinaadid $X^K \leftrightarrow R, \Theta, Z$, kusjuures vastavalt definitsioonile (2.31) $r = R$.



Joonis 2.2: Ümarvarda vääne

Silindriliste koordinaatide puhul meetrilised tensorid

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [G_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Deformatsioonitensorid $c_{kl} = G_{KL} X^K_{,k} X^L_{,l}$ ja $\bar{c}^{-1kl} = G^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L}$. Kuna antud on liikumise Lagrange'i kirjeldus, siis leiame algul \bar{c}^{-1kl}

$$[\bar{c}^{-1kl}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Kuna kasutatavad olekuvõrrandid on esitatud segatensorite jaoks, siis tuleb järgmisena leida $\bar{c}^{-1k}_l = g_{lm} \bar{c}^{-1km}$ ja viimase pöördtensor c^k_l :

$$[\bar{c}^{-1k}_l] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad [c^k_l] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Fingeri deformatsioonitensori \bar{c}^{-1k}_l invariantid

$$\text{I} = \text{II} = 3 + K^2 r^2 \quad \text{ja} \quad \text{III} = 1. \quad (2.35)$$

Seega on deformatsioon isohooriline ning seetõttu vaatleme siin vaid kokkusurumatut materjali. Pärast indeksite ülestõstmist saame olekuvõrrandist (1.144)

$$\begin{cases} t^{11} = -p + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}, \\ r^2 t^{22} = -p + 2 (1 + K^2 r^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}, \\ t^{33} = -p + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - 2 (1 + K^2 r^2) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}, \\ t^{23} = 2K \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right), \quad t^{31} = t^{21} = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

⁵I. k. *Uniform torsion of a circular cilinder*

Homogeense deformatsiooni puhul (vt. lk. 53) olid Cauchy liikumisvõrrandest saadud tasakaaluvõrrandid ($p = \text{const.}$) puhul automaatselt rahuldatud, nüüd see aga nii pole. Cauchy I liikumisvõrrand (1.107)₁ põhjal omab tasakaaluvõrrand omab kuju

$$t^{kl}{}_{;l} = 0. \quad (2.37)$$

Meil tuleb leida⁶

$$t^{kl}{}_{;l} = \dots \quad (2.40)$$

Seega tuleb leida järgmised kovariantsed osatuletised:

$$\begin{cases} t^{1l}{}_{;l} = \\ t^{2l}{}_{;l} = \\ t^{3l}{}_{;l} = \end{cases} \quad (2.41)$$

Viimaste valemite tuletamisel on arvestatud, et avaldiste (2.36) põhjal $r^2 t^{22} = t^{11} + 2K^2 r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I}$ ja $t^{33} = t^{11} - 2K^2 r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II}$. Kuna avaldiste (2.35) põhjal sõltuvad invariantid I ja II vaid koordinaadist r , siis saavad tasakaaluvõrrandid (2.41) olla rahuldatud vaid juhul kui

⁶Kontravariantse tensori kovariantne tuletis —

$$A^{kl}{}_{;m} = A^{kl}{}_{,m} + \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} A^{nl} + \left\{ \begin{matrix} l \\ mn \end{matrix} \right\} A^{kn} \quad (2.38)$$

Christoffeli sümbolid silindriliste koordinaatide r, ϑ ja z puhul —

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \text{ kõik teised } \left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} = 0. \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(\overbrace{-p + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II}}^{t^{11}} \right) - 2K^2 r \frac{\partial \Sigma}{\partial I} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Seega sõltub hüdrostaatiline pinge p vaid koordinaadist r ja seega saab ta määrata integreerides avaldist (2.42)₁, st.

$$p = 2 \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} - \frac{\partial \Sigma}{\partial II} - K^2 \int_0^r r \frac{\partial \Sigma}{\partial I} dr \right) + C_1. \quad (2.43)$$

Konstandi C_1 määramiseks kasutame tingimust $t_{11} = 0$ silindri pinnal $r = a$, st. avaldiste (2.36)₁ ja (2.43) põhjal

$$C_1 = 2K^2 \int_0^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial I} dr. \quad (2.44)$$

Asendame viimase võrdusse (2.43), ning tulemuse omakorda avaldistesse (2.36) ning saame

$$\begin{cases} t^{11} = -2K^2 \int_r^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial I} dr, \\ r^2 t^{22} = 2K^2 \left(r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} - \int_r^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial I} dr \right), \\ t^{33} = -2K^2 \left(r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + \int_r^a r \frac{\partial \Sigma}{\partial I} dr \right), \\ t^{23} = 2K \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \quad t^{31} = t^{21} = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Silindri vabal otsal $z = l$ on ühiknormaal $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Seega pingevektori $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ komponendid $t_{(\mathbf{n})}^k = t^{kl}n_l$

$$t_{(\mathbf{n})}^1 = 0, \quad t_{(\mathbf{n})}^2 = t^{23}, \quad t_{(\mathbf{n})}^3 = t^{33}. \quad (2.46)$$

Järelikult radiaalne pinge puudub, kuid eksisteerivad tangentsiaalne pinge (nihkepinge) ja silindri telje sihiline normaalpinge. Viimase läbi ilmnebki Pointingi efekt. Kuna eksperimentide põhjal on tuletised $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$ ja $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$ mittenegatiivsed, siis on pinge $t^{33} \leq 0$. Kui var-
da otsa ei rakendata seda pinget tasakaalustavat normaaljõudu, siis silindriline varras püüab väändel lüheneda. Lineaarses teoorias normaalpinged t^{kk} hüljatakse kui lõpmata väikesed (võrreldes pingega t^{23}).

Silindri otspinnal mõjuvate pindjõudude summaarse mõju (peavektori ja peamomendi) leidmiseks on vaja teada pingetensori füüsikalisi komponente. Teatavasti on kontravariantse tensori füüsikalised komponendid defineeritud järgmiselt

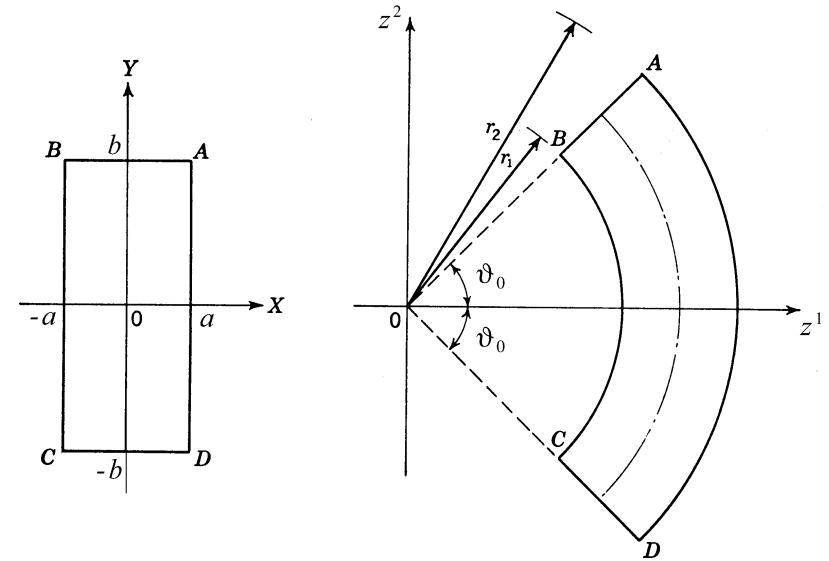
$$t^{(k)(l)} = \sqrt{g_{ll}g_{kk}}t^{kl}. \quad (2.47)$$

Seega $t^{(1)(1)} = t^{11}$, $t^{(2)(2)} = r^2t^{22}$, $t^{(3)(3)} = t^{33}$ ja $t^{(2)(3)} = rt^{23}$ ning otspinnal mõjuvate pindjõudude $(0, rt^{23}, t^{33})$ peamoment ja peavektor avalduvad kujul

$$\begin{cases} M_z = 2\pi \int_0^a r^3 t^{23} dr, \\ N = 2\pi \int_0^a r t^{33} dr. \end{cases} \quad (2.48)$$

2.3 Ploki paine

Vaatleme ploki (tala) painet⁷. Lagrange'i koordinaatideks on valitud DRK ($X^1 \equiv X, X^2 \equiv Y, X^3 \equiv Z$) ja Euleri koordinaatideks silindrilised koordinaadid ($x^1 \equiv r, x^2 \equiv \vartheta, x^3 \equiv z$).



Joonis 2.3: Ploki paine — tasandid $X = -a$ ja $X = a$ deformeeruvad silindrilisteks pindadeks $r = r_1$ ja $r = r_2$; tasandid $Y = \pm b$ tasanditeks $\vartheta = \pm\vartheta_0$; tasandid $Z = const.$ tasanditeks $z = const.$

Joonisel 2.3 kujutatud deformatsioon on kirjeldatav valemitega

$$r = f(X), \quad \vartheta = g(Y), \quad z = h(Z). \quad (2.49)$$

⁷I. k. *Bending of a block*. Vt. ka pideva keskkonna mehaanika loengukonsepti paragrahv 2.10

Meetrilised tensorid

$$G_{KL} = G^{KL} = \delta_{KL},$$

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g^{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{(-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deformatsioonitensorid $c_{kl} = G_{KL}X^K{}_{,k}X^L{}_{,l}$, $\bar{c}^{-1kl} = G^{KL}x^k{}_{,K}x^l{}_{,L}$ ja $\bar{c}^{-1k}{}_l = g_{lm}\bar{c}^{-1km}$. Kui tähistame $f' = \partial f/\partial X$, $g' = \partial g/\partial Y$ ja $h' = \partial h/\partial Z$, siis

$$[x^k{}_{,K}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & g' & 0 \\ 0 & 0 & h' \end{bmatrix},$$

$$[\bar{c}^{-1kl}] = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad [\bar{c}^{-1k}{}_l] = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Deformatsioonitensori $\bar{c}^{-1k}{}_l$ invariantid (arvestades, et $r \equiv f$)

$$\begin{cases} \text{I} = f'^2 + r^2 g'^2 + h'^2 = f'^2 + f^2 g'^2 + h'^2, \\ \text{II} = f'^2 r^2 g'^2 + f'^2 h'^2 + r^2 g'^2 h'^2 = f^2 f'^2 g'^2 + f'^2 h'^2 + f^2 g'^2 h'^2, \\ \text{III} = f'^2 r^2 g'^2 h'^2 = f^2 f'^2 g'^2 h'^2. \end{cases} \quad (2.51)$$

Selleks, et protsess oleks isohooriline peab $\text{III} = 1$. See on tagatud kui $f f' = A$, $g' = C$ ja $h' = D = 1/AC$, kus A, C, D on konstandid. Seega saame konkreteriseerida funktsioonide f, g ja h sisu — tuues sisse veel ühe konstandi B võime avaldada

$$r = \sqrt{2AX + B}, \quad \vartheta = CY, \quad z = DZ. \quad (2.52)$$

Deformatsioonitensorid ja deformatsioonitensori $\bar{c}^{-1k}{}_l$ invariantid

saavad nüüd kuju

$$[\bar{c}^{-1k}{}_l] = \begin{bmatrix} A^2/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix}, \quad [c^k{}_l] = \begin{bmatrix} r^2/A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{I} = \frac{A^2}{r^2} + C^2 r^2 + D^2, \quad \text{II} = \frac{1}{D^2} + \frac{r^2}{A^2} + \frac{1}{C^2 r^2}, \quad \text{III} = 1. \quad (2.53)$$

ning konstantide A, B, C ja D määramiseks on järgmised valemid (vt. joonis 2.3)

$$A = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}, \quad B = \frac{r_2^2 + r_1^2}{2}, \quad C = \frac{\vartheta_0}{b}, \quad D = \frac{4ab}{\vartheta_0(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (2.54)$$

Kuna tegu on isohoorilise deformatsiooniga, siis valime Ariano-Rivlini olekuvõrrandi (1.144) (kokkusurumatu materjali jaoks)

$$t^k{}_l = -p\delta^k{}_l + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}}\bar{c}^{-1k}{}_l - 2\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}c^k{}_l.$$

Arvestades deformatsioonitensorite avaldise (2.53)_{1,2} on seega pingete ja deformatsioonide vahelised seosed järgmised

$$\begin{cases} t^1{}_1 = -p + \frac{2A^2}{r^2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - \frac{2r^2}{A^2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}, \\ t^2{}_2 = -p + 2C^2 r^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - \frac{2}{C^2 r^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}, \\ t^3{}_3 = -p + 2D^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - \frac{2}{D^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}, \\ t^k{}_l = 0, \quad k \neq l. \end{cases} \quad (2.55)$$

Tasakaaluvõrrandid $t^l{}_{k;l} = 0$ saadakse Cauchy I liikumisseadusest

(1.106). Seega on meil vaja leida kovariantsed osatuletised⁸

$$t^l_{k;l} = t^l_{k,l} - \left\{ \begin{matrix} n \\ kl \end{matrix} \right\} t^l_n + \left\{ \begin{matrix} l \\ ln \end{matrix} \right\} t^n_k, \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} t^l_{1;l} = \\ t^l_{2;l} = \\ t^l_{3;l} = \end{cases} \quad (2.57)$$

Seega saavad tasakaaluvõrrandid kuju

$$\frac{\partial t^1_1}{\partial r} + \frac{t^1_1 - t^2_2}{r} = 0, \quad \frac{\partial t^2_2}{\partial \vartheta} = \frac{\partial t^3_3}{\partial z} = 0. \quad (2.58)$$

Vastavalt valemitele (2.53)₃₋₅ avaldub siseenergia kujul $\rho_0 \varepsilon = \Sigma(\text{I}, \text{II}) = \Sigma(r)$. Seega valemite (2.58) ja (2.55)_{2,3} põhjal ka $p = p(r)$. Avaldame valemitest (2.55)_{1,2}

$$\frac{t^1_1 - t^2_2}{r} = 2 \left(\frac{A^2}{r^3} - C^2 r \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - 2 \left(\frac{r}{A^2} - \frac{1}{C^2 r^3} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}}. \quad (2.59)$$

Teiselt poolt, kuna $\Sigma(\text{I}, \text{II}) = \Sigma(r)$, siis arvestades (2.53)₃₋₅

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} \frac{\partial \text{I}}{\partial r} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \frac{\partial \text{II}}{\partial r} = \dots \\ &= -\frac{t^1_1 - t^2_2}{r} \end{aligned} \quad (2.60)$$

⁸Segatensori kovariantne tuletis —

$$A^k_{l;m} = A^k_{l,m} - \left\{ \begin{matrix} n \\ lm \end{matrix} \right\} A^k_n + \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} A^n_l$$

Christoffeli sümbolid silindriliste koordinaatide r, ϑ ja z puhul —

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \text{kõik teised } \left\{ \begin{matrix} k \\ lm \end{matrix} \right\} = 0.$$

Avaldiste (2.58)₁ ja (2.60) põhjal $\frac{\partial}{\partial r}(t^1_1 - \Sigma) = 0$. Selle integreerimisel saame

$$t^1_1 = \Sigma + K, \quad (2.61)$$

kus K on konstant. Asendades tulemused (2.60) ja (2.61) olekuvõrrandesse (2.55) saame pingetensorite normaalkomponentide⁹ avaldised

$$\begin{cases} t^1_1 = \Sigma + K, \\ t^2_2 = 2 \left(C^2 r^2 - \frac{A^2}{r^2} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - D^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right) = r \frac{\partial \Sigma}{\partial r} + \Sigma + K, \\ t^3_3 = 2 \left(D^2 - \frac{A^2}{r^2} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}_{-1}} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \text{I}} - r^2 C^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \text{II}} \right) + \Sigma + K. \end{cases} \quad (2.62)$$

Vastavalt saadud avaldistele on pinged kõverdunud pindadel $r = r_1$ ja $r = r_2$

$$t^1_1(r_1) = \Sigma(r_1) + K \quad \text{ja} \quad t^1_1(r_2) = \Sigma(r_2) + K. \quad (2.63)$$

Kui vaadeldav deformatsioon on saavutatud vaid tala otstesse rakendatud koormuste abil, siis peavad ülaltoodud pinged (2.63) olema nullid, st.,

$$\Sigma(r_1) = \Sigma(r_2) = -K. \quad (2.64)$$

Viimane tingimus tähendab ühtlasi, et $\text{I}(r_1) = \text{I}(r_2)$ ja $\text{II}(r_1) = \text{II}(r_2)$, kust

$$A = Cr_1 r_2, \quad \text{ehk} \quad A^2 = \frac{r_1 r_2}{D}. \quad (2.65)$$

Seega jäävad vabalt valitaveteks konstantideks näiteks D ja r_1 . †

⁹NB! Segatensori normaalkomponentid osutuvad ka füüsikalisteks komponentideks, sest

$$t^{(k)}_{(l)} = t^k_l \sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}}.$$

Paindemoment tala paksusühiku kohta

$$\mathcal{M}_z = \int_{r_1}^{r_2} r t^2 dr = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) K + \int_{r_1}^{r_2} r \Sigma dr \quad (2.66)$$

Kui on teada Σ ja \mathcal{M}_z siis saab võrrandit (2.66) kasutada raadiuse r_1 määramiseks.

Deformeerunud oleku neutraalkiht $r = r_0$ on määratud tingimusega $c^2_2 = C^2 r^2 = 1$. Seega arvestades (2.65) $r^2_0 = D r_1 r_2$. Kui $D = 1$, siis $z = Z = \text{const.}$ ja $r^2_0 = r_1 r_2$. Sama tulemuse annab ka lineaarne teooria.

Poyntingi efekt avaldub jällegi selles, et pinge t^3_3 pole null. Järelikult tuleb puhta painde saavutamiseks rakendada vastassuunalist pindkoormust.

2.4 Lõplik tasapinnaline deformatsioon¹⁰

Suur hulk elastsusteooria ülesandeid on oma olemuselt tasapinnalised. Nende lahendamine lihtsustub tunduvalt kui esitada siirdeväli kujul

$$x^a = x^a(X^1, X^2), \quad x^3 = \lambda X^3, \quad (2.67)$$

kus λ on konstant. Tasapinnalise deformatsiooni puhul indeksid a, b, c, d omavad väärtusi 1 ja 2. Esimene avaldistest (2.67) kirjeldab deformatsioone (x^1, x^2) tasapinnas ja teine ühtlast pikendamist x^3 sihis. Siinjuures eeldatakse, et $x^3 \perp (x^1, x^2)$ tasapinnaga. Sobivaks kõverjooneliseks koordinaatsüsteemiks selliste protsesside kirjeldamisel on näiteks silindriline koordinaatsüsteem. Meetriline tensor ja deformatsioonitensorid on nüüd esitatavad kujul

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} [g_{ab}] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [{}^{-1}c^k_l] = \begin{bmatrix} [{}^{-1}c^a_b] & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad [c^k_l] = \begin{bmatrix} [c^a_b] & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Siinjuures on tensorid g_{ab} , ${}^{-1}c^a_b$ ja c^a_b vaid muutujate x^1 ja x^2 funktsioonid. Dünaamika ülesannete puhul võivad x^a ja λ sõltuda lisaks ka ajast t .

Deformatsioonitensori ${}^{-1}c^k_l$ invariantid saab nüüd avaldada kujul \star

$$\begin{cases} \text{I} = {}^{-1}c^k_k = {}^{-1}c^a_a + \lambda^2 = \text{I}_1 + \lambda^2, \\ \text{II} = \dots = \lambda^2 \text{I}_1 + \text{I}_2 \lambda^2, \\ \text{III} = \dots = \lambda^2 \text{I}_2, \end{cases} \quad \text{kus} \quad \begin{cases} \text{I}_1 = {}^{-1}c^a_a, \\ \text{I}_2 = |{}^{-1}c^a_b|. \end{cases} \quad (2.69)$$

¹⁰Lõplikku mõistetakse siin kui vastandit lõpmata väikesele. I. k. *Finite plane deformation*.

Cayley-Hamiltoni teoreemi¹¹ põhjal

$$\bar{c}^{-1a}_c \bar{c}^{-1c}_b - I_1 \bar{c}^{-1a}_b + I_2 \delta^a_b = 0 \mid \cdot c^b_d \Rightarrow \quad (2.70)$$

$$I_2 c^a_b = I_1 \delta^a_b - \bar{c}^{-1a}_b \quad (2.71)$$

Asendades (2.69) ja (2.71) isotroopse kokkusurutava keskkonna olekuvõrrandesse (vt. Fingeri olekuvõrrand (1.142), (1.143) lk. 49), saame

$$\begin{cases} t^a_b = \frac{2}{\lambda\sqrt{I_2}} \left[\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial II} \right) \bar{c}^{-1a}_b + \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial II} + \lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial III} \right) I_2 \delta^a_b \right], \\ t^3_3 = \frac{2\lambda}{\sqrt{I_2}} \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + I_1 \frac{\partial\Sigma}{\partial II} + I_2 \frac{\partial\Sigma}{\partial III} \right), \quad t^a_3 = t^3_a = 0. \end{cases} \quad (2.72)$$

Nüüd oleks mõttekas esitada $\Sigma = \Sigma(I, II, III) = \Sigma(I_1, I_2, \lambda^2)$. Seega avaldiste (2.69) põhjal

$$\begin{cases} \frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} = \frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial II}, & \frac{\partial\Sigma}{\partial I_2} = \frac{\partial\Sigma}{\partial II} + \lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial III}, \\ \frac{\partial\Sigma}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial\Sigma}{\partial I} + I_1 \frac{\partial\Sigma}{\partial II} + I_2 \frac{\partial\Sigma}{\partial III}. \end{cases} \quad (2.73)$$

Viimase kahe avaldise põhjal

$$\begin{cases} t^a_b = \frac{2}{\lambda\sqrt{I_2}} \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} \bar{c}^{-1a}_b + \frac{\partial\Sigma}{\partial I_2} I_2 \delta^a_b \right), \\ t^3_3 = \frac{2\lambda}{\sqrt{I_2}} \frac{\partial\Sigma}{\partial \lambda^2}, \quad t^a_3 = t^3_a = 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

¹¹Maatriks $[c^k_l]$ rahuldab karakteristlikku võrrandit

$$\mathbf{c}^3 - I_c \mathbf{c}^2 + II_c \mathbf{c} - III_c \mathbf{I} = 0,$$

kus $\mathbf{c} \equiv [c^k_l]$ ja \mathbf{I} on ühikmaatriks. Tensorkujul

$$c^k_m c^m_n c^n_l - I_c c^k_m c^m_l + II_c c^k_l - III_c \delta^k_l = 0$$

Kokkusurumatu materjali puhul $III = \lambda^2 I_2 = 1$ ja seega $\Sigma = \Sigma(I_1, \lambda^2)$ ning analoogselt valemitega (2.74) saame Ariano-Rivlini olekuvõrrandest (1.144) (lk. 49)

$$\begin{cases} t^a_b = -p \delta^a_b + 2 \frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} \bar{c}^{-1a}_b, \\ t^3_3 = -p + 2\lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial \lambda^2}, \quad t^a_3 = t^3_a = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

Cauchy I liikumiseseadus $t^{kl};l + \rho(f^k - a^k) = 0$ saab nüüd tasakaaluvõrrandina kuju

$$t^{ab};b = 0. \quad (2.76)$$

Seega tuleb kokkusurutava materjali puhul lahendada võrrand (2.76) koos olekuvõrrandiga (2.74) ja kokkusurumatu materjali puhul koos olekuvõrrandiga (2.75).

Pindjõud olid esitatud valemiga $t^k_{(n)} = t^{lk} n_l$. Nüüd

$$t^a_{(n)} = t^{ba} n_b; \quad t^3_{(3)} = t^{33}. \quad (2.77)$$

Järgnevalt toome sisse Airy' pingefunktsiooni, et veelgi lihtsustada tasapinnalise deformatsiooniülesande lahendamist. Pideva keskkonna mehaanika kursuses on näidatud, et tasakaaluvõrrandile $t^{kl};l = 0$ saab anda kuju

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \mathbf{t}^k) = 0, \quad \text{kus pingektor } \mathbf{t}^k = t^{kl} \mathbf{g}_l. \quad (2.78)$$

Antud juhul saame esitada pingektori kujul

$$\mathbf{t}^a = t^{ba} \mathbf{g}_b, \quad \mathbf{t}^3 = t^{33} \mathbf{g}_3. \quad (2.79)$$

Kuna g ja \mathbf{t}^a on vaid x^1 ja x^2 funktsioonid, siis lihtsustub (2.78)₁ kujule

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{g} \mathbf{t}^a) = 0. \quad (2.80)$$

Võrrand (2.80) on rahuldatud kui pingvektori \mathbf{t}^a avaldada kujul

$$\mathbf{t}^a = \epsilon^{ca} \chi_{,c}, \text{ kus } \begin{cases} \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0 \\ \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} \end{cases} \quad (2.81)$$

ja χ on vektor tasandil $x^3 = 0$, st. *

$$\chi = \chi^b \mathbf{g}_b \text{ ja } \frac{\partial \chi}{\partial x^c} \equiv \chi_{,c} = \chi^b{}_{;c} \mathbf{g}_b. \quad (2.82)$$

Kokku annavad avaldised (2.81)₁ ja (2.82)₂

$$\mathbf{t}^a = \epsilon^{ca} \chi^b{}_{;c} \mathbf{g}_b. \quad (2.83)$$

Kuna kovariantne osatuletis on võetud tasandil, kus $x^3 = 0$, siis saavad Christoffeli II liiki sümbolid kuju

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} = g^{ad} [bc, d] = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}). \quad (2.84)$$

Avaldiste (2.79) ja (2.83) põhjal pingetensor

$$t^{ab} = \epsilon^{cb} \chi^a{}_{;c}. \quad (2.85)$$

Cauchy II liikumisseaduse põhjal peab pingetensor olema sümmeetriline. See on tagatud, kui tuua sisse Airy' pingefunktsioon $\phi(x^1, x^2)$ selliselt, et †

$$\chi^a = \epsilon^{da} \phi_{,d}. \quad (2.86)$$

Nüüd

$$t^{ab} = \epsilon^{cb} \epsilon^{da} \phi_{,dc} = \epsilon^{bc} \epsilon^{ad} \phi_{,cd}. \quad (2.87)$$

Võrrandi (2.87) lahendi saab esitada kujul

$$\phi_{;a}{}^b = \epsilon^{ac} \epsilon_{bd} t^d{}_c = t^c{}_c \delta^a{}_b - t^a{}_b. \quad (2.88)$$

Asendades (2.74)₁ võrrandisse (2.88) saame pingefunktsiooni avaldise kokkusurumatu materjali jaoks

$$\phi_{;a}{}^b = \frac{2}{\lambda \sqrt{I_2}} \left[\left(I_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \right) \delta^a{}_b - \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} c^{-1a}{}_b \right] \quad (2.89)$$

Asendades aga (2.75)₁ võrrandisse (2.88) saame pingefunktsiooni avaldise kokkusurutava materjali jaoks

$$\phi_{;a}{}^b = \left(-p + 2I_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \right) \delta^a{}_b - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} c^{-1a}{}_b. \quad (2.90)$$

Avaldistest (2.89) on võimalik elimineerida kas $\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}$ või $\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}$ kui võtta arvesse, et

$$\phi_{;a}{}^a = \frac{2}{\lambda \sqrt{I_2}} \left(I_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + 2I_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \right). \quad (2.91)$$

Vastavad alternatiivsed kujud valemile (2.89) on

$$\begin{aligned} \phi_{;a}{}^b - \frac{1}{2} \phi_{;c}{}^c \delta^a{}_b &= \frac{2}{\lambda \sqrt{I_2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \left(\frac{I_1}{2} \delta^a{}_b + c^{-1a}{}_b \right) \text{ ja} \\ \phi_{;a}{}^b - \left(\delta^a{}_b - \frac{1}{I_1} c^{-1a}{}_b \right) \phi_{;c}{}^c &= \frac{4\sqrt{I_2}}{\lambda I_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \left(-\frac{I_1}{2} \delta^a{}_b + c^{-1a}{}_b \right). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Kokkusurumatu materjali puhul saame võrrandist (2.90)

$$\phi_{;a}^a = -2p + 2I_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \quad (2.93)$$

ja avaldistest (2.90) võime elimineerida kas p või $\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}$. Vastavad alternatiivsed kujud on järgmised:

$$\begin{aligned} \phi_{;a}^a - \frac{1}{2} \phi_{;c}^c \delta^a_b &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \left(\frac{I_1}{2} \delta^a_b - \bar{c}^{-1a}_b \right) \text{ ja} \\ \phi_{;a}^a - \left(\delta^a_b - \frac{1}{I_1} \bar{c}^{-1a}_b \right) \phi_{;c}^c &= \frac{2p}{I_1} \left(\frac{I_1}{2} \delta^a_b - \bar{c}^{-1a}_b \right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Kuna saadud võrrandid sisaldavad deformatsioonitensorit \bar{c}^{-1a}_b , siis tuleb enne ülesande lahendamist rahuldada pidevus ehk sobivustingimused¹²

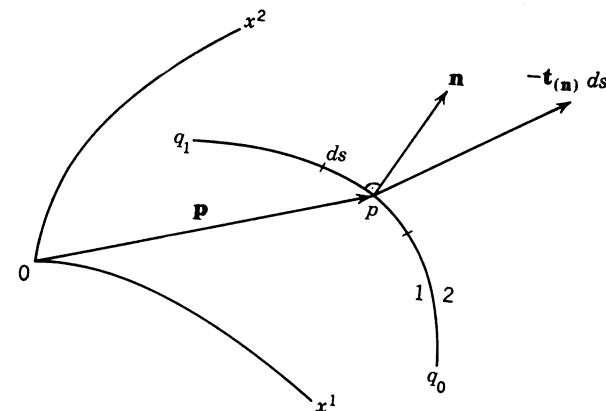
$$R \binom{-1}{c}{}_{klmn} = 0. \quad (2.95)$$

Vaadeldaval tasapinnalisel juhul vaid komponent R_{1212} pole samaselt null. Seega sobivustingimuste rahuldamiseks tuleb avaldada \bar{c}^{-1a}_b avaldistest (2.89) või (2.90) (või nende alternatiivkujudest (2.92) või (2.94)) sõltuvana Airy' pingefunktsioonist ϕ ning seejärel asendada saadud tulemus tingimusse $R \binom{-1}{c}{}_{1212} = 0$. Tulemuseks on neljandat järku mittelineaarne võrrand ϕ suhtes. Lineaarses teoorias on selleks biharmooniline võrrand $\nabla^4 \phi = 0$.

Järgnevalt püüame selgitada suuruste χ ja ϕ füüsikalist sisu. Leiame summaarse jõu millega mõjub piirkond 1 piirkonnale 2 läbi kaare $q_0 q_1$. Jõud \mathbf{r} on esitatud x^3 pikkusühiku kohta. Lähtume sellest, et

$$\mathbf{r} = - \int_{q_0}^{q_1} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} ds. \quad (2.96)$$

¹²I. k. *Compatibility conditions* (vt. pideva keskkonn amehaania loengukonsept)



Joonis 2.4: Suuruste χ ja ϕ füüsikaline sisu — piirkondade 1 ja 2 vastastikune mõju.

Kuna

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}^a n_a = \mathbf{t}^a \underbrace{\epsilon_{ab} \frac{dx^b}{ds}}_{n_a}. \quad (2.97)$$

Asendades (2.97) ja (2.81) avaldisse (2.96) saame

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= - \int_{q_0}^{q_1} \epsilon^{ca} \chi_{,c} \epsilon_{ab} \frac{dx^b}{ds} ds = - \int_{q_0}^{q_1} \chi_{,b} dx^b = \chi \text{ ehk} \\ \mathbf{r} &= \chi = \chi^a \mathbf{g}_a = \epsilon^{ba} \phi_{,b} \mathbf{g}_a. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Jõuga analoogne moment

$$\mathbf{m} = (p^a \phi_{,a} - \phi) \mathbf{g}^3, \quad (2.99)$$

st momendi moodul

$$m = p^a \phi_{,a} - \phi. \quad (2.100)$$

Kui vaadeldava piirkonna rajajoon on koormusvaba, siis $\chi = 0$ kõigis rajapunktides Seega avaldise (2.98)₂ põhjal ka $\phi_{,1} = \phi_{,2} = 0$ ja $\phi = const.$ kõigis rajapunktides.

2.5 Elastsuskonstantide eksperimentaalne määramine

2.5.1 Sissejuhatus

Klassikalises elastsusteoorias vaadeldakse homogeeniseid isotroopseid lineaarselt elastseid kehasid ja kasutatakse kahte materjali-konstanti — nn. Lamé konstanti — λ_e ja μ_e ning olekuvõrrandina üldistatud Hooke'i seadust

$$t^k_l = \lambda_e \tilde{e}^m_m \delta^k_l + 2\mu_e \tilde{e}^k_l. \quad (2.101)$$

Nende konstantide määramine on suhteliselt lihtne. On vaja sooritada vaid kaks eksperimenti — tõmme ja nihe. Mittelineaarse teooria olekuvõrrandid homogeenisele isotroopsele materjalile omavad aga tunduvalt keerukamat kuju (vt. alajaotus 1.3 lk. 48). Kokkusurutava materjali puhul näiteks

$$t^k_l = b_{-1} \tilde{c}^{-1k}_l + b_0 \delta^k_l + b_1 c^k_l,$$

kus konstandid b_α sõltuvad deformatsioonitensori invariantidest I, II ja III. Elastsuskonstantide määramine on siin tunduvalt keerulisem, sest keskkonna mittelineaarsuse tõttu ei saa kasutada superpositsiooni printsiipi. Koefitsendid b_α püütakse määrata läbi potentsiaali Σ . See lihtsustab küll asja, kuid kokkusurutavate materjalide puhul on praktiliste tulemuste saamine, vähemalt Eringeni andmeil, ülimalt problemaatiline.

Alljärgnevalt vaatleme kokkusurumatuid materjale, mille olekuvõrrandid avalduvad kujul (1.144)

$$t^k_l = -p \delta^k_l + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{I}} \tilde{c}^{-1k}_l - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{II}} c^k_l, \quad (2.102)$$

kus invariantid vastavad deformatsioonitensorile \tilde{c}^{-1k}_l , $\Sigma = \Sigma(\mathbf{I}, \mathbf{II})$ ja $\mathbf{III} = 1$. Kuna deformeerumata olekus $\mathbf{I} = \mathbf{II} = 3$, siis on leitud,

et potentsiaali Σ võib esitada järgmise rea kujul

$$\Sigma = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} (\mathbf{I} - 3)^m (\mathbf{II} - 3)^n, \quad (2.103)$$

kus A_{mn} on konstandid ja $A_{00} = 0$. Kuna väikeste deformatsioonide puhul on suurused $\mathbf{I} - 3$ ja $\mathbf{II} - 3$ väikesed, siis piirduetakse reaga

$$\Sigma = A_{10} (\mathbf{I} - 3) + A_{01} (\mathbf{II} - 3). \quad (2.104)$$

Kummilaadsete materjalide puhul kasutatakse potentsiaali

$$\Sigma = A_{10} (\mathbf{I} - 3). \quad (2.105)$$

Selliseid materjale nimetatakse inglise keeles «neo-hookean materials.» Kui (2.105) ei rahulda siis kasutatakse ka potentsiaali

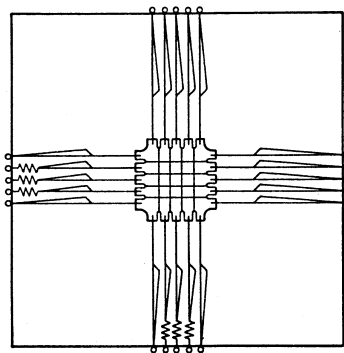
$$\Sigma = A_{10} (\mathbf{I} - 3) + f(\mathbf{II} - 3), \quad (2.106)$$

kus f sõltub vaid argumentidest II.

Järgnevalt esitatakse ülevaade mõningatest eksperimentidest, mis algselt on teostatud Rivlini ja Sandersi poolt. Nimetatud teadlased korraldasid terve rea eksperimente «kummist lehega», kus tekitati selliseid homogeeniseid deformatsioone, kus üks invariantidest I või II omas fikseeritud väärtust. Eksperimentideseeria tulemusena saadi olekuparameetrite $\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{I}}$ ja $\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{II}}$ ning invariantide I ja II vahelised sõltuvused. Nii suurte kui väikeste deformatsioonide puhul ilmnes eksperimentaalseid ebatäpsusi, näiteks kui invariantid I ja II olid viiest väiksemad, muutusid tulemused väga tundlikuks eksperimenti vigade suhtes. Olekuvõrrandis (2.102) esinev tundmatu rõhk p määrati rajatingimustest.

2.5.2 Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine)

Katse skeem on kujutatud joonisel 2.5. Ruudukujulist õhukest kummist lehte tõmmatakse risti külgedega. Pikenemiskoeffitsentide λ_1 ja λ_2 arvutamiseks tuleb mõõta lehele joonistatud ruutude külgede pikkused deformeerunud olekus. Ruudu külgede pikkusühiku kohta mõjuvad jõud t_1 ja t_2 saadakse mõõtes vedrudes mõjuvad jõud.



Joonis 2.5: Puhta homogeense deformatsiooni eksperiment — «kummist lehe» ühtlane tõmme ristuvates suundades.

Lähtume olekuvõrrandest (2.16), st.

$$t_{kk} = -p + 2\lambda_k^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} - \frac{2}{\lambda_k^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial II}. \quad (2.107)$$

Kuna pindadel $z = \pm H/2$ (kus H on lehe paksus) $t_{33} = 0$, siis saame viimasest avaldisest ellimineerida p —

$$\begin{cases} t_{11} = 2 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \lambda_2^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ t_{22} = 2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \lambda_1^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ t_{33} = t_{kl} = 0, \quad k \neq l \end{cases} \quad (2.108)$$

Kokkusurumatuse tõttu $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Seega invariantid

$$I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad II = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad III = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1. \quad (2.109)$$

Lehe serva pikkusühiku kohta mõjuvad jõud t_1 ja t_2 avalduvad järgmiselt

$$t_1 = t_{11} \frac{H}{\lambda_1}, \quad t_2 = t_{22} \frac{H}{\lambda_2}, \quad (2.110)$$

kus nii serva pikkus kui lehe paksus H on mõõdetud deformeerumata olekus. Avaldistest (2.108) ja (2.110) saame avaldada $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$ ja $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$ sõltuvana jõududest t_1 ja t_2 —

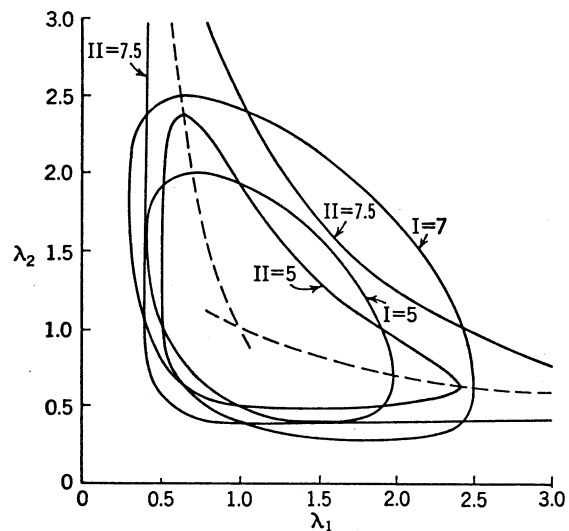
$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial I} = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{\lambda_1^3(t_1/H)}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2^3(t_2/H)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} \right] \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial II} = \frac{1}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{\lambda_1(t_1/H)}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2(t_2/H)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} \right] \end{cases} \quad (2.111)$$

Mõõtes nüüd t_1 ja t_2 etteantud λ_1 ja λ_2 puhul, saab leida vastavad $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$ ja $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$ väärtused. Avaldiste (2.109) kaudu saame omakorda vastavad I ja II väärtused ning meil on võimalik esitada $\frac{\partial \Sigma}{\partial I}$ ja $\frac{\partial \Sigma}{\partial II}$ kui invariantide I ja II funktsioone.

Eksperimenti käigus muudeti λ_1 ja λ_2 väärtusi nii, et emb-kumb, kas I või II oli jääv. Avaldise (2.109) põhjal

$$\begin{cases} \lambda_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ (I - \lambda_1^2) \pm \sqrt{(I - \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^{-2}} \right\}, \quad I = const. \\ \lambda_2^2 = \frac{1}{2\lambda_1^2} \left\{ (II - \lambda_1^{-2}2) \pm \sqrt{(II - \lambda_1^{-2})^2 - 4\lambda_1^2} \right\}, \quad II = const. \end{cases} \quad (2.112)$$

Seega pole pikenemiskoeffitsente λ_1 ja λ_2 võimalik suvaliselt ette anda — fikseeritud I ja II puhul on tegu suletud kõveratega $\lambda_1 - \lambda_2$ tasandil (vt. joonis 2.6). Punktiirjooned esitavad kõveraid $\lambda_2 = \lambda_1^{-2}$ ($t_2 = 0$) ja $\lambda_1 = \lambda_2^{-2}$ ($t_1 = 0$), mis vastavad tõmbele servade sihis.



Joonis 2.6: Pikenemiskoeffitsentide λ_1 ja λ_2 vaheline sõltuvus invariantide I ja II erinevate väärtuste puhul.

Tehtud eksperimentid näitasid, et

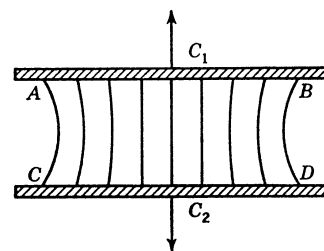
- $\partial\Sigma/\partial I$ on konstantne piirkonnas $5 \leq I < 12$ ja $5 \leq II \leq 30$ ning $\partial\Sigma/\partial II$ on vaid II funktsioon;
- suhe $(\partial\Sigma/\partial II)/(\partial\Sigma/\partial I) \approx 1/8$ invarianti II väikeste väärtuste jaoks ning kahanes kiiresti suuremate puhul;
- avaldist (2.106) võib kasutada siseenergia Σ ja invariantide vahelise sõltuvuse aproksimeerimiseks (mõistlikes piires).

2.5.3 Puhas nihe

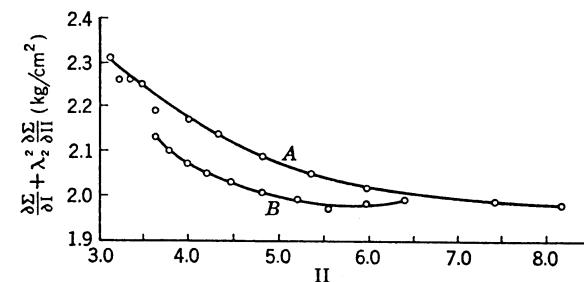
Puhas nihe¹³ on selline homogeenne deformatsioon, mille puhul üks pikenemiskoeffitsentidest, näiteks λ_2 , hoitakse konstantne ja teisi kahte muudetakse. Valemite (2.108)₁ ja (2.110) põhjal

$$t_1 = 2H \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \lambda_2^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial II} \right). \quad (2.113)$$

Hoides nüüd $\lambda_2 = const.$ ja mõõtes t_1 erinevate λ_1 puhul saame joonistada suuruse $\partial\Sigma/\partial I + \lambda_2^2 \partial\Sigma/\partial II$ sõltuvana teisest invariantist II. Kuna suurusel $\partial\Sigma/\partial I$ leiti olema konstantne väärtus $5 \leq I \leq 12$ ja $5 \leq II \leq 30$ puhul, siis saame esitada ka $\partial\Sigma/\partial II$ ja II vahelise sõltuvuse.



Joonis 2.7: Puhta nihke eksperiment.



Joonis 2.8: Suurus $\partial\Sigma/\partial I + \lambda_2^2 \partial\Sigma/\partial II$ sõltuvana invariantist II. Kõver A vastab puhtale nihkele ($\lambda_2 = 1$) ja kõver B nihkele koos tõmbega ($\lambda_2 = 0,776$).

Joonis 2.7 kirjeldab vaadeldavat eksperimenti. Kitsas õhuke kummiriba on kinnitatud klambrite C_1 ja C_2 vahele. Kui rakendada risti klambritega jõud t_1 (mõõdetunan pikkusühiku kohta) siis tekib joonisel kujutatud deformatsioon. Riba keskosa deformatsioon on aproksimeeritav puhta nihke kaudu. Joonisel 2.8 esitab kõver A katsetulemusi $\lambda_2 = 1$ jaoks ja kõver B $\lambda_2 = 0,776$ jaoks. Eelmise-

¹³I. k. *Pure shear*

na vaadeldud eksperimendis tuvastati, et $(\partial\Sigma/\partial\text{II})/(\partial\Sigma/\partial\text{I}) = 1/8$ kui $\text{II} = 5$. $\lambda_2 = 1$ puhul saab nüüd jooniselt 2.8 määrata suuruse $\partial\Sigma/\partial\text{I} + \partial\Sigma/\partial\text{II}$ väärtuse ($\lambda_2 = 1$!). Edasi saab leida, et $\text{II} = 5$ puhul $\partial\Sigma/\partial\text{I} = 1,84 \text{ kg/cm}^2$ ja $\partial\Sigma/\partial\text{II} = 0,23 \text{ kg/cm}^2$. Eelmise eksperimendi põhjal eeldatakse, et $\partial\Sigma/\partial\text{I} = 1,84 \text{ kg/cm}^2 = \text{const.}$ ja $\partial\Sigma/\partial\text{II}$ sõltub vaid invariandist II . Seega saab määrata $\partial\Sigma/\partial\text{II}$ väärtused suvalise II väärtuse jaoks.

Kõver B joonisel 2.8 esitab eksperimendi tulemusi $\lambda_2 = 0,776$ jaoks. Need tulemused lähevad hästi kokku tulemustega, mis saadakse avaldisest $\partial\Sigma/\partial\text{I} + 0,776^2\partial\Sigma/\partial\text{II}$, kui suurused $\partial\Sigma/\partial\text{I}$ ja $\partial\Sigma/\partial\text{II}$ võtta eksperimendist, kus $\lambda_2 = 1$.

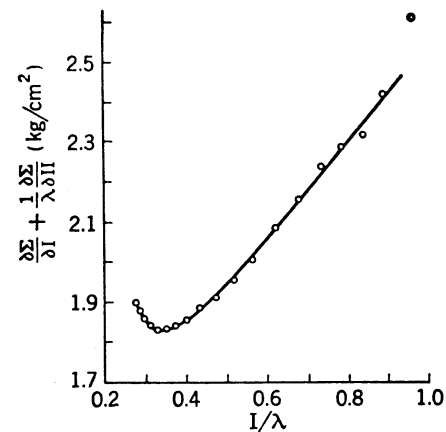
2.5.4 Tõmme

Tõmbe¹⁴ puhul $t_{22} = t_{33} = 0$. Seega võttes avaldises (2.108)₂ $t_{22} = 0$ saame $\lambda_1 = \lambda_2^{-2} \stackrel{\text{tähist}}{=} \lambda$. Avaldis (2.108)₁ ja invariandid saavad nüüd kuju

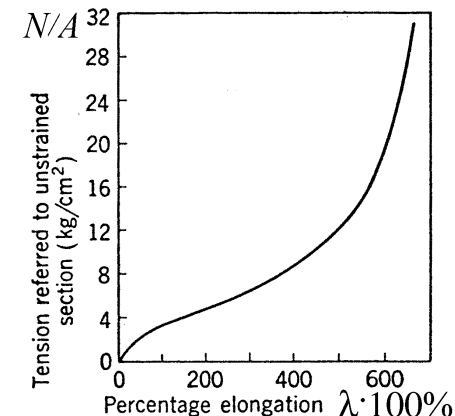
$$t_{11} = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\text{I}} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\Sigma}{\partial\text{II}} \right), \quad \text{I} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad \text{II} = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.114)$$

Katsekehaks on siin ühtlase ristlõikega «kummikang». Rakendatav pikijõud $N = At_{11}/\lambda$ (A — ristlõike algpindala). Seega mõõtes jõu N iga λ jaoks saame arvutada $\partial\Sigma/\partial\text{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\text{II}$. Tulemused on esitatud joonisel 2.9 (NB! horisontaalteljel on $1/\lambda$). Kui kasutati eelmistes eksperimendites saadud suuruste $\partial\Sigma/\partial\text{I}$ ja $\partial\Sigma/\partial\text{II}$ väärtusi, siis leiti, et avaldise $\partial\Sigma/\partial\text{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\text{II}$ väärtus ühtis väga hästi eksperimendi tulemustega.

Joonisel 2.10 on esitatud tõmbejõud jagatuna algpindalaga sõltuvana pikenemiskoeffitsendist λ .



Joonis 2.9: Suuruste $1/\lambda$ ja $\partial\Sigma/\partial\text{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\text{II}$ vaheline sõltuvus.



Joonis 2.10: Tõmbejõu sõltuvus pikenemiskoeffitsendist

2.5.5 Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

Tähistame

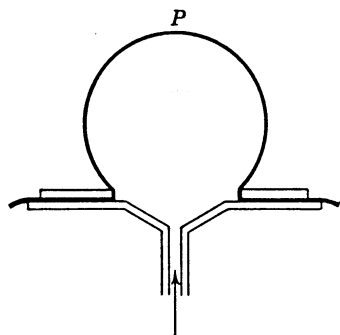
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = 1/\lambda^2 = \lambda', \quad \text{ehk } \lambda^2 = 1/\lambda'. \quad (2.115)$$

Joonisel 2.11 kujutatud katse puhul puhutakse servadest kinnitatud kummikile alla õhku ja saavutatakse meid huvitav deformatsioon vaadeldava katsekeha keskosas. Joonis 2.12 esitab suuruste $\partial\Sigma/\partial\text{I} + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial\text{II}$ ja $1/\lambda'$ vahelist sõltuvust (NB! kohal $1/\lambda' = 1$ toimub skaala muutus). Tabelis 1 on esitatud $\partial\Sigma/\partial\text{II}$ ja II vaheline sõltuvus, eeldades, et $\partial\Sigma/\partial\text{I} = \text{const.}$ Rõhk p keras ja tõmme T pikkusühiku kohta deformeeritud kiles (punktis P) on seotud valemiga

$$p = \frac{2T}{r}, \quad (2.116)$$

kus r on kõverusraadius punktis P .

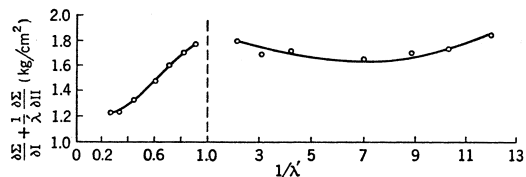
¹⁴I. k. *Simple extention*



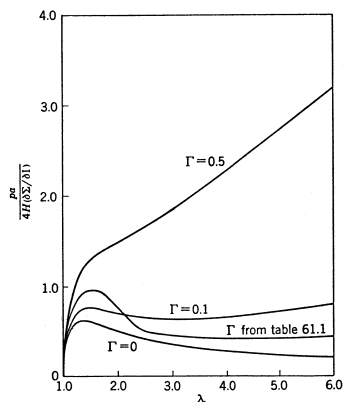
Tabel 1

$\lambda^2 \equiv 1/\lambda'$	Π	$\frac{\partial\Sigma/\partial\Pi}{\partial\Sigma/\partial I}$
0,5	4,25	0,16
0,6	3,69	0,26
0,7	3,35	0,33
0,8	3,14	0,39
3	9,67	0,12
5	25,4	0,06
7	49,3	0,04
9	81,2	0,03
11	121	0,035

Joonis 2.11: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme



Joonis 2.12: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste $\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \frac{1}{\lambda'}$ · $\frac{\partial\Sigma}{\partial\Pi}$ ja $1/\lambda'$ vaheline sõltuvus.



Joonis 2.13: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste p ja λ vaheline sõltuvus.

Kuna deformeeritud olekus on kile paksus H/λ^2 , siis saame valemite (2.108), (2.115) ja (2.116), et

$$p = \frac{2Ht_{11}}{r\lambda^2} = \frac{4H}{r} \left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right) \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \lambda^2 \frac{\partial\Sigma}{\partial\Pi}\right). \quad (2.117)$$

Joonise 2.12 ja tabeli 1 koostamisel ongi kasutatud valemit (2.117), st. mõõdetakse p ja r iga λ jaoks ning leitakse suurus $\frac{\partial\Sigma}{\partial I} + \frac{1}{\lambda'} \cdot \frac{\partial\Sigma}{\partial\Pi}$. Joonis 2.13 esitab rõhu p ja pikenemise λ vahelisi seoseid erinevate $\Gamma = (\partial\Sigma/\partial\Pi)/(\partial\Sigma/\partial I)$ väärtuste jaoks (a — sfäärilise «õhupalli» algraadius.)

Näide. Õhupalli täispuhumisel on kõige suuremat rõhku tarvis algul. Kui palli diameeter on saavutanud teatud väärtuse, siis palli suurendamiseks vajalik surve väheneb (võrdle joonis 2.13).

Peatükk 3

Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast

Käesolev peatükk põhineb õpiku [2] 7. peatükil (Selected topics in Linear Elasticity Theory).

Eeldame, et vaadeldavad elastsed kehad on isotroopsed ja homogeensed ning deformatsioonid on isothermilised.

3.1 Põhivõrrandid

Üldiselt lähtume 1. peatükis esitatud põhivõrrandest, kuid lisaks seni domineerivalt kasutatud komponentkujule esitame nad ka alternatiivkujul, mis sarnaneb nn. maatriks ja vektorkirjaviisile. Deformatsioonitensorite ja olekuvõrrandite puhul kasutame nüüd loomulikult vaid lineaarseid seoseid.

1) Massi jäävuse seadus.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{;k} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.1)$$

Operaatorit

$$\nabla = \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (3.2)$$

nimetatakse siin gradientoperaatoriks kõverjoonelistes koordinaatides x^k ning skalaarkorrutis $\nabla \cdot \mathbf{v}$ kujutab endast vektori \mathbf{v} divergentsi •

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \text{div } \mathbf{v} = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} = \mathbf{g}^k \cdot v^m_{;k} \mathbf{g}_m = v^k_{;k}. \quad (3.3)$$

2) Cauchy liikumisseadused.

$$\text{I)} \quad t^{kl}_{;l} + \rho(f^k - a^k) = 0 \quad \text{ehk} \quad \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.4)$$

Siin \mathbf{t} on pingetensor ja \mathbf{f} massjõud.

Teist järku tensori $\mathbf{t} = t^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \equiv t^{kl} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l$ puhul on divergents $\nabla \cdot \mathbf{t}$ defineeritud järgmiselt —

$$\nabla \cdot \mathbf{t} \equiv \text{div } \mathbf{t} = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x^k} = \mathbf{g}^k \cdot t^{lm}_{;k} \mathbf{g}_l \mathbf{g}_m = t^{km}_{;k} \mathbf{g}_m. \quad (3.5)$$

$$\text{II)} \quad t^{kl} = t^{lk} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}^{(T)} \quad (3.6)$$

3) Euleri deformatsioonitensor on nüüd esitatud vastavalt lineaarsele teooriale, st. kujul

$$e^k_l \equiv \tilde{e}^k_l = \frac{1}{2} (u^k_{;l} + u_{l; k}) \quad \text{ehk} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{(T)}]. \quad (3.7)$$

Vektori gradient $\nabla \mathbf{u}$ on siin defineeritud lähtudes \mathbf{u} kovariantsetest komponentidest

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{g}^k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = u_{m;k} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^m = (\nabla \mathbf{u})_{mk} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^m, \quad (3.8)$$

kus

$$(\nabla \mathbf{u})_{mk} = u_{m;k} \quad (3.9)$$

on teist järku kovariantne tensor ning kui kirjutatakse $\nabla \mathbf{u}$, siis peetakse tavaliselt silmas just ülaltoodud kovariantset tensorit. Loomulikult saab meetriliste tensorite abil $(\nabla \mathbf{u})_{mk}$ indekseid tõsta ja langetada. Analoogselt, tensor

$$\left\{ (\nabla \mathbf{u})^{(T)} \right\}_{km} = u_{k;m} \quad (3.10)$$

4) Lineaarse teooria olekuvõrrand on antud kujul

$$t^k_l = \lambda e^m_m \delta^k_l + 2\mu e^k_l \text{ ehk } \mathbf{t} = \lambda I_e \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (3.11)$$

See on üldistatud Hooke'i seadus, kus λ ja μ on Lamé koefitsendid, \mathbf{I} on nn. identsustensor ja I_e deformatsioonitensori \mathbf{e} esimene invariant, st.

$$I_e = e^k_k = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.12)$$

5) Sobivus- ehk pidevustingimused

$$e_{kl;mn} + e_{mn;kl} - e_{km;ln} - e_{ln;km} = 0 \quad (3.13)$$

6) Deformatsioonienergia tihedus

$$\Sigma = \frac{1}{2} t^{mn} e_{mn} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{1}{2} [\lambda I_e^2 + 2\mu e^{mn} e_{mn}] \geq 0. \quad (3.14)$$

Liikumisvõrrandid siiretes

Asendades invariandi I_e avaldisest (3.12) olekuvõrrandisse (3.11), saame

$$\mathbf{t} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (3.15)$$

Kasutades viimast tulemust, saame Cauchy I liikumisseadusele kuju

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}] + \rho \mathbf{f} \quad (3.16)$$

Teisendame avaldise (3.16) esimest liidetavat.

Kui $\mathbf{A} = \Phi \mathbf{I}$, kus Φ on diferentseeruv skalaarväli, siis

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{I}) = A^{kl}_{;k} \mathbf{g}_l = \nabla \Phi \quad (3.17)$$

Seega võttas $\Phi = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$, saame

$$\nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.18)$$

Korrutame nüüd avaldise (3.7) nablaga —

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{2} [\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]. \quad (3.19)$$

Siin on arvestatud, et $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv \nabla^2 \mathbf{u}$ ja $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^{(T)} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Asendame (3.18) ja (3.19) avaldisse (3.16) ja saame

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.20)$$

Arvestades, et $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ saame eelmisele võrrandile kuju

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.21)$$

Viimase kaks võrrandit, (3.20) ja (3.21) on tuntud kui Navier' (Navier'-Cauchy) võrrandid. Nad esitavad liikumisvõrrandid siiretes ja on lineaarse elastsusteooria ühed põhivõrrandid. Komponentkujul saab võrrandi (3.20) avaldada kujul

$$(\lambda + \mu)u^k_{;kl} + \mu u_{l; k}^k + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0. \quad (3.22)$$

Kuna lineaarses teorias eeldatakse, et nii siirde kui kiiruse gradiendid on väikesed, siis tavaliselt esitatakse võrrandid (3.20) ja (3.21) kujul, kus v.p. on liige $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$, st., materiaalse tuletise asemel vaadeldakse osatuletist.

Navier' võrrandid on liikumisvõrrandid ja elstostaatika ülesannete puhul, kus eeldatakse, siire \mathbf{u} ei sõltu ajast, saavad nad tasakaaluvõrrandite kuju —

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} &= 0 \\ \text{ehk} \\ (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} &= 0 \\ \text{ehk} \\ (\lambda + \mu)u^k_{;kl} + \mu u_{l; k}^k + \rho f_l &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Kui rajatingimused on antud pingetes, siis on tavaline, et tasakaaluvõrranditena kasutatakse Cauchy I liikumisvõrrandit kujul

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = 0. \quad (3.24)$$

3.2 Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga

Insenerirakenduste puhul kasutatakse Lamé koefitsentide λ ja μ asemel tavaliselt Youngi moodulit ja Poissoni tegurit. Olekuvõrrandist (3.11) avaldame deformatsioonitensori

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{t} - \lambda \mathbf{I}_e \mathbf{I}). \quad (3.25)$$

ja leiame invariandi

$$I_t = t^k_k = I_e(3\lambda + 2\mu). \quad (3.26)$$

Avaldame viimasest I_e , asendame ta avaldisse (3.25) ja saame

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{t} - \frac{\lambda I_t}{3\lambda + 2\mu} \mathbf{I}) \quad \text{ehk} \quad e^k_l = \frac{1}{2\mu}(t^k_l - \frac{\lambda I_t}{3\lambda + 2\mu} \delta^k_l). \quad (3.27)$$

Seega saab avaldada deformatsioonitensori normaal ja nihkekomponendid läbi pingetensori normaal ja nihkekomponentide kujul

$$e^k_{\underline{k}} = \frac{1}{2\mu}(t^k_{\underline{k}} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} t^k_k) \quad \text{ja} \quad e^k_l = \frac{1}{2\mu}(t^k_l), \quad k \neq l. \quad (3.28)$$

(3.28)₁ saab avaldada kujul

$$\left\{ \begin{aligned} e^1_1 &= \frac{1}{2\mu} \left[t^1_1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (t^1_1 + t^2_2 + t^3_3) \right] \\ &= \frac{1}{E} [t^1_1 - \nu(t^2_2 + t^3_3)], \\ e^2_2 &= \frac{1}{E} [t^2_2 - \nu(t^3_3 + t^1_1)], \\ e^3_3 &= \frac{1}{E} [t^3_3 - \nu(t^1_1 + t^2_2)], \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

kus

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.30)$$

on Youngi moodul ja

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.31)$$

on Poissoni tegur. Viimasest kahest saab omakorda tuletada seosed

$$\begin{cases} 1 + \nu = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} = \frac{E}{2\mu}, & \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ ja} \\ \lambda = \frac{2\nu\mu}{1 - 2\nu} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Elastsuskonstantide E ja ν füüsikaline tähendus ilmneb väga lihtsalt tõmbekatsel. Kui x^k on DRK ja näiteks silindriline katsekeha on allutatud telje x^3 sihilisele tõmbele nii, et $t_{33} = t_o = \text{const.}$ ja $t_{11} = t_{22} = t_{kl} = 0, k \neq l$, siis (3.28) ja (3.29) põhjal

$$\begin{cases} e_{33} = \frac{t_o}{E}, & e_{11} = e_{22} = -\nu \frac{t_o}{E} \\ e_{kl} = 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (3.33)$$

Seega $t_{33} = t_o = Ee_{33}$ ja me võime öelda, et Youngi moodul iseloomustab normaalpinge ja vastava (samasuunalise) deformatsiooni suhet. Avaldise põhjal

$$\nu = \left| \frac{e_{11}}{e_{33}} \right| = \left| \frac{e_{22}}{e_{33}} \right|, \quad (3.34)$$

st. Poissoni tegur iseloomustab põiksuunalise ja pikisuunalise deformatsiooni suhet. Mõlemad konstandid on positiivsed.

Vaatleme nüüd ühtlasele hüdrostaatilisele survele allutatud keha, st.

$$t^k_l = -p\delta^k_l, \quad p > 0. \quad (3.35)$$

Kui pingetensor on esitatav kujul (3.35), siis öeldakse, et tegu on hüdrostaatilise pingeseisundiga (pingusega)¹. (3.35) põhjal

$$p = -\frac{1}{3}I_t \stackrel{(3.26)}{=} -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)I_e = -kI_e, \quad (3.36)$$

kus

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.37)$$

on ruumimoodul ehk ruumpaisumismoodul ehk (EE järgi) mahtelastsusmoodul², mida tähistatakse tihti ka tähega K . Kuna nii k kui E on positiivsed, siis (3.37) põhjal peab $\nu < 0,5$. Arvestades viimast, saab (3.30)–(3.32) põhjal väita, et ka Lamé koefitsendid λ ja μ peavad olema positiivsed. Konstanti μ nimetatakse ka nihkemooduliks ning tähistatakse $G \equiv \mu$.

¹I. k. *hydrostatic stress state*

²I. k. *bulk modulus*

3.3 Sobivustingimused pingetes

Sobivustingimusi ehk pidevustingimusi on vaja selleks, et elastsusteooria ülesandele oleks võimalik saada ühene lahend siiretes. Originaalis olid sobivustingimused esitatud deformatsioonide jaoks. Kui aga rajatingimused on esitatud pindjõudude kaudu, siis osutub vajalikuks esitada ka sobivustingimused läbi pingetensori komponentide. Kasutades elastsuskonstantide määratlusi (3.32) saame olekuvõrrandist (3.27)

$$e_{kl} = \frac{1 + \nu}{E} \left[t_{kl} - \frac{\nu}{1 + \nu} I_t g_{kl} \right]. \quad (3.38)$$

Pannes (3.38) sobivustingimustesse (3.13) ja arvestades, et Ricci teoreemi põhjal $g_{kl;m} = 0$ saame

$$t_{kl;mn} + t_{mn;kl} - t_{km;ln} - t_{ln;km} = \frac{\nu}{1 + \nu} \left[g_{kl} (I_t)_{,mn} + g_{mn} (I_t)_{,kl} - g_{km} (I_t)_{,ln} - g_{ln} (I_t)_{,km} \right]. \quad (3.39)$$

Korrutades saadut meetrilise tensoriga g^{mn} ja lihtsustades saame •

$$g^{mn} t_{kl;mn} + (I_t)_{,kl} - t^n_{k;ln} - t^m l; km = \frac{\nu}{1 + \nu} \left[g_{kl} g^{mn} (I_t)_{,mn} + 3 (I_t)_{,kl} - 2 (I_t)_{,kl} \right]. \quad (3.40)$$

Kuna

$$g^{mn} t_{kl;mn} = \nabla^2 t_{kl} \text{ ja } g^{mn} (I_t)_{,mn} = \nabla^2 I_t, \quad (3.41)$$

siis saame

$$\nabla^2 t_{kl} - t^n_{k;ln} - t^m l; km + \frac{1}{1 + \nu} (I_t)_{,kl} = \frac{\nu}{1 + \nu} g_{kl} \nabla^2 I_t. \quad (3.42)$$

Elastostaatika ülesannete puhul saame Cauchy I liikumisseadusest (3.4), et

$$t^n_{k;ln} = -\rho f_{k;l} \text{ ja } t^m l; km = -\rho f_{l;k}. \quad (3.43)$$

Asendades (3.43) sobivustingimustesse (3.42), saame

$$\nabla^2 t_{kl} + \frac{1}{1 + \nu} (I_t)_{,kl} - \frac{\nu}{1 + \nu} g_{kl} \nabla^2 I_t = -\rho (f_{k;l} + f_{l;k}). \quad (3.44)$$

Viimased esitavad kuus lineaarselt sõltumatut sobivusvõrrandit pingekomponentides ja nad on tuntud kui *Beltrami-Michelli sobivusvõrrandid* ehk lühidalt *Beltrami-Michelli võrrandid*.

Juhul kui mahujõud puuduvad või on konstantsed, siis lihtsustuvad viimased võrrandid veelgi. Võtame võrrandist (3.23)₂ divergentsi, st. $\nabla \cdot (3.23)_2$. Saame *

$$\nabla \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 I_e = 0. \quad (3.45)$$

Avaldise (3.26) põhjal $I_t = t^k_k = (3\lambda + 2\mu)I_e$. Kuna (3.45) põhjal $\nabla^2 I_e = 0$, siis ka

$$\nabla^2 I_t = (3\lambda + 2\mu) \nabla^2 I_e = 0. \quad (3.46)$$

Seega antud juhul lihtsustuvad Beltrami-Michelli võrrandid (3.44) oluliselt ja saavad kuju

$$\nabla^2 t_{kl} + \frac{1}{1 + \nu} (I_t)_{,kl} = 0. \quad (3.47)$$

Kui rakendada võrrandile (3.47) Laplace'i operaatorit ∇^2 , siis saame

$$\nabla^4 t_{kl} = 0, \quad (3.48)$$

st. juhul kui mahujõud puuduvad või on konstantsed, peab pingetensor elastostaatika ülesannete puhul rahuldama biharmoonilist võrrandit (3.48). Rakendades nüüd biharmoonilist operaatorit ∇^4 olekuvõrrandile (3.38) ja arvestades, et $\nabla^4 I_t = \nabla^2 (\nabla^2 I_t)$, saame

$$\nabla^4 e_{kl} = 0. \quad (3.49)$$

Seega peab ka lineaarne deformatsioonitensor antud juhul rahuldama biharmoonilist võrrandit.

3.4 Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas

Tasand-deformatsioon ehk tasapinnaline deformatsioon³. Siia alla käivad ülesanded, mille puhul deformatsioonid on identsed paralleelsetel tasanditel ja vaadeldava tasandi normaali sihis deformatsioonid puuduvad. Seega on siirdevektori see komponent, mis on risti vaadeldava tasandiga võrdne nulliga ja teised kaks on funktsioonid kahest koordinaadist vaadeldaval tasandil.

Näitena vaatleme pikka silindrilist keha ja silindrilisi koordinaate $r-\vartheta-z$. On loomulik valida z -telg silindri teljeks. Seega $r-\vartheta$ tasandis toimuvaid deformatsiooni kirjeldab siirdeväli ($\mathbf{u} = (u_r, u_\vartheta, u_z)$)

$$u_r = u_r(r, \vartheta), \quad u_\vartheta = u_\vartheta(r, \vartheta), \quad u_z = 0. \quad (3.50)$$

Võttes siirdekomponentidest kovariantsed osatuletised koordinaadi järgi, saame leida lineaarse deformatsioonitensori (3.7) komponendid

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right), & e_{zz} = 0, \\ e_{r\vartheta} = e_{\vartheta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right), \\ e_{rz} = e_{zr} = e_{\vartheta z} = e_{z\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Seega on vaid kolm deformatsioonikomponenti e_{rr} , $e_{\vartheta\vartheta}$ ja $e_{r\vartheta}$ nullist erinevad. Invariant

$$I_e = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}. \quad (3.52)$$

Olekuvõrrandi (3.11) abil saab nüüd avaldada pingetensori komponendid

$$\begin{cases} t_{rr} = \lambda I_e + 2\mu e_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ t_{\vartheta\vartheta} = \lambda I_e + 2\mu e_{\vartheta\vartheta} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \\ t_{zz} = \lambda I_e + 2\mu e_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \\ t_{r\vartheta} = t_{\vartheta r} = 2\mu e_{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \\ t_{rz} = t_{zr} = t_{\vartheta z} = t_{z\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Erinevalt deformatsioonikomponentidest, on siin nullist erinev ka pingekomponent t_{zz} . Valemite (3.53)₁₋₃ põhjal

$$t_{zz} = \nu (t_{rr} + t_{\vartheta\vartheta}) \quad (3.54)$$

Seega, tasapinnalise deformatsiooni puhul on pingekomponent t_{zz} nullist erinev samal ajal kui deformatsioonikomponent e_{zz} on null.

Vaadeldud näite puhul oli meil viis tundmatut (kaks siirdekomponenti ja kolm sõltumatut pingekomponenti), mille määramiseks tuleb kasutada tasakaalu- ja sobivusvõrrandeid ning massi jäävuse seadust koos rajatingimustega.

³I. k. *plane stress*

Tasandpinge ehk tasandpingus ehk tasapinnaline pingeseisund⁴. Keha pingeseisund on tasapinnaline siis ja ainult siis kui üks peapingetest on null. Vaadeldud silindri puhul tähendab see seda, et pingeseisund on $r - \vartheta$ tasandi suhtes tasapinnaline, kui nullist erinevad on vaid pingekomponendid t_{rr} , $t_{\vartheta\vartheta}$ ja $t_{r\vartheta} = t_{\vartheta r}$. Olekuvõrrandi (3.11) abil saab jällegi esitada seosed pingetensori komponentide ja siirete vahel. Tingimuse $t^z_z = 0$ tõttu saame nüüd

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{rr} = \lambda I_e + 2\mu e_{rr} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ t_{\vartheta\vartheta} = \lambda I_e + 2\mu e_{\vartheta\vartheta} \\ \quad = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 2\frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_r \right) \\ t_{r\vartheta} = t_{\vartheta r} = 2\mu e_{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \\ t_{zz} = t_{rz} = t_{zr} = t_{\vartheta z} = t_{z\vartheta} = 0. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Seega, kuigi mõlemal vaadeldud tasapinnalisel juhul on pingekomponendid avaldatavad läbi siirdekompontentide u_r ja u_ϑ , on pingeseisundid täiesti erinevad — tasapinnalise deformatsiooni puhul pole pingeseisund tasapinnaline.

⁴I. k. *Plane strain*

3.5 Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste funktsioonide abil

Biharmooniline võrrand, õigemini tema lahend, omab elastostaatikas väga suurt tähtsust. Ka käesolevas kursuses on sellest võrrandist juba mitu korda juttu olnud. Järgnevalt vaatleme kuidas leida biharmoonilise võrrandi lahendit rakendades kompleksmuutuja funktsioonide teooriat. Saadud tulemust kasutame järgmistes alajaotustes.

Vaatleme funktsiooni $F(x, y)$, mis on reaalne ja ühene analüütiline \star funktsioon⁵ klassis C^r , $r \geq 4$ ning on määratud ja tõkestatud x, y tasandi piirkonnas Ω (x, y on DRK). Allpool konstrueeritakse läbi kahe analüütilise (kompleksmuutuja $z = x + iy$) funktsiooni selline funktsioon F , mis rahuldab biharmoonilist võrrandit

$$\nabla^4 F = 0. \quad (3.56)$$

Loomulikult saadakse lahend vaid piirkonnas Ω . Tähistame

$$\nabla^2 F = U(x, y), \quad (3.57)$$

st. (3.56) on avaldatav kujul

$$\nabla^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (3.58)$$

Seega on U harmooniline funktsioon⁶, mis on teada Laplace'i võrrandi (3.58) lahendist.

⁵Analüütiline funktsioon ehk holomorfe funktsioon ehk regulaarne funktsioon — kompleksmuutuja funktsioon, mida vaadeldava piirkonna igas punktis saab esitada koonduva astmereana.

⁶Harmooniline funktsioon — Laplace'i võrrandit rahuldav funktsioon.

Iga harmoonilise funktsiooni U jaoks saab leida kaasharmoonilise funktsiooni V . Funktsioone U ja V nimetatakse kaasharmoonilisteks funktsioonideks kui nad rahuldavad Cauchy-Riemanni võrrandeid

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.59)$$

Kui funktsioonid U ja V on teineteise kaasharmoonilised funktsioonid, siis funktsioon

$$W(z) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (3.60)$$

on analüütiline funktsioon. Analüütilise funktsiooni integraal on samuti analüütiline funktsioon, st., et saame tuua sisse uue analüütilise funktsiooni

$$w(z) = \int W(z) dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (3.61)$$

Diferentseeruva kompleksmuutuja funktsiooni puhul

$$w'(z) = W(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.62)$$

Viimase avaldise põhjal

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ja} \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.63)$$

Seega on φ ja ψ teineteise kaasharmoonilised funktsioonid. Enamgi veel, funktsioonid φ ja ψ on harmoonilised funktsioonid, st. nad rahuldavad Laplace'i võrrandit

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{ja} \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (3.64)$$

Vaatleme funktsiooni

$$G(x, y) = F(x, y) - \frac{1}{4}(x\varphi + y\psi) \quad (3.65)$$

ja näitame, et tegu on harmoonilise funktsiooniga (piirkonnas Ω), st. näitame, et G rahuldab võrrandit

$$\nabla^2 G = \nabla^2 F - \frac{1}{4} \nabla^2 (x\varphi + y\psi). \quad (3.66)$$

Teisendame võrrandit (3.66):

$$\nabla^2 (x\varphi) = \dots$$

$$\dots = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \stackrel{(3.63)}{=} 2U, \quad (3.67)$$

$$\nabla^2 (y\psi) = \dots$$

$$\dots = 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \stackrel{(3.63)}{=} 2U, \quad (3.68)$$

Asendame (3.67), (3.68) \rightarrow (3.66) ja saame

$$\nabla^2 G = \nabla^2 F - U \stackrel{(3.57)}{=} 0. \quad (3.69)$$

Seega on G harmooniline funktsioon, sest ta rahuldab Laplace'i võrrandit (3.69). Avaldisest (3.65) saame avaldada

$$F(x, y) = G(x, y) + \frac{1}{4}(x\varphi + y\psi). \quad (3.70)$$

Harmoonilist funktsiooni $G(x, y)$ saab vaadelda mingi analüütilise funktsiooni $g(z)$ reaalosana, st.,

$$g(z) = G(x, y) + iH(x, y), \quad (3.71)$$

kusjuures funktsiooni $g(z)$ imaginaarosa $H(x, y)$ määratakse kui $G(x, y)$ kaasharmooniline funktsioon. Avaldist $\frac{1}{4}(x\varphi + y\psi)$ võib vaadelda kui avaldise $\frac{1}{4}\bar{z}w(z)$ reaalosa ($\bar{z} = x - iy$ ja $w(z)$ on määratud \star avaldisega (3.61)). Seega

$$F = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{4}\bar{z}w(z) + g(z) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}\bar{z}w(z) + g(z) + \frac{1}{4}z\bar{w}(\bar{z}) + \bar{g}(\bar{z}) \right] \quad (3.72)$$

Kui tähistada

$$w(z) = 4f(z) \quad (3.73)$$

siis saame avaldisele (3.72) kuju

$$F = \frac{1}{2} [\bar{z}f(z) + g(z) + z\bar{f}(\bar{z}) + \bar{g}(\bar{z})], \quad (3.74)$$

mis ongi biharmoonilise võrrandi (3.56) üldlahend.

3.6 Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul

Vaatleme elastostaatika ülesannet DRK-s. Tasapinnalise deformatsiooni puhul, kus deformatsioonid on määratud $x - y$ tasapinnas, on pingekomponendid

$$t_{xz} = t_{zx} = t_{yz} = t_{zy} = 0. \quad (3.75)$$

Seega, nullist erinevad pingekomponendid on t_{xx} , t_{yy} , t_{zz} ja $t_{xy} = t_{yx}$, kusjuures

$$t_{zz} = \nu(t_{xx} + t_{yy}). \quad (3.76)$$

Tavaliselt uuritakse sellise ülesandepüstituse puhul riskülikulisi plaate.

Mahujõudude puudumisel saab tasakaaluvõrrand (3.24), st. $\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = 0$ kuju

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (3.77)$$

Kui valida

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad t_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (3.78)$$

kus $F = F(x, y)$ on siin Airy' pingefunktsioon, siis on tasakaaluvõrrandid (3.77) automaatselt rahuldatud. Peale tasakaaluvõrrandite (3.77) peavad olema rahuldatud ka sobivustingimused, antud juhul Beltrami-Michelli võrrandid kujul (3.47), st.

$$\nabla^2 t_{kl} + \frac{1}{1 + \nu} (\mathbf{I}_t)_{,kl} = 0.$$

Meil on nüüd $k = 1, 2, 3$ ja $l = 1, 2, 3$ asemel x, y, z ja invariant $I_t = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} = (1 + \nu)(t_{xx} + t_{yy})$. Seega on vaja leida

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 t_{xx} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_t = \dots \\ \nabla^2 t_{yy} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_t = \dots \\ \nabla^2 t_{xy} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_t = \dots \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Arvestades avaldise (3.78) saame viimastest biharmoonilise võrrandi Airy' pingefunktsiooni jaoks —

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \quad (3.80)$$

Viimase üldlahendi leidsime eelmises punktis läbi kompleksmuutuva funktsioonide $f(z)$ ja $g(z)$ ja nende kaaskomplekside. Seega saab läbi biharmoonilise võrrandi lahendi avaldada pingeaotuse, st. pingetensori komponendid t_{xx} , t_{yy} ja t_{xy} . Enne toome aga sisse avaldised

$$\begin{cases} t_{xx} + it_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \\ \text{ja} \\ t_{yy} - it_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (3.81)$$

Kuna $F = F(z, \bar{z})$, siis läheme muutujatelt x, y üle muutujatele z, \bar{z} . Kompleksmuutuva funktsiooni tuletise leidmise valemite põhjal \checkmark

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (3.82)$$

Nüüd saame avaldistest (3.81) ja (3.82) \bullet

$$\begin{cases} t_{xx} + it_{xy} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) F \\ t_{yy} - it_{xy} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) F. \end{cases} \quad (3.83)$$

(3.74) \rightarrow \dagger

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} = \dots \end{cases} \quad (3.84)$$

(3.84) \rightarrow (3.83) \rightarrow

$$\begin{cases} t_{xx} + it_{xy} = f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) - z\bar{f}''(\bar{z}) - \bar{g}''(\bar{z}) \\ t_{yy} - it_{xy} = f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) + z\bar{f}''(\bar{z}) + \bar{g}''(\bar{z}). \end{cases} \quad (3.85)$$

Nüüd liidame ja lahutame saadud võrrandid (3.85) —

$$\begin{cases} t_{xx} + t_{yy} = 2 \left[f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) \right] = 4\text{Re} [f'(z)] \\ t_{yy} - t_{xx} - 2it_{xy} = 2 \left[z\bar{f}''(\bar{z}) + \bar{g}''(\bar{z}) \right]. \end{cases} \quad (3.86)$$

Võtame (3.86)₂-st kaaskompleksi, st.

$$t_{yy} - t_{xx} + 2it_{xy} = 2 \left[\bar{z}f''(z) + g''(z) \right]. \quad (3.87)$$

Kust omakorda

$$\begin{cases} t_{yy} - t_{xx} = 2\text{Re} \left[\bar{z}f''(z) + g''(z) \right] \\ t_{xy} = \text{Im} \left[\bar{z}f''(z) + g''(z) \right] \end{cases} \quad (3.88)$$

On ilmselge, et kui funktsioonid $f(z)$ ja $g(z)$ oleks teada, siis saaks (3.86)₁ ja (3.88) abil määrata pingekomponendid t_{xx} , t_{yy} ja t_{xy} . Puuduvad funktsioonid saab leida rajatingimuste abil, st. ülesannet tuleb konkretiseerida. Seda teeme järgmises alajaotuses.

Järgmisena leiame tasapinnalise deformatsiooni nullist erinevad siirdekomponendid $u(x, y) \parallel x$ ja $v(x, y) \parallel y$. Selleks tuleb kasutada lineaarse elastsusteooria olekuvõrrandeid (3.11) koos deformatsioonitori definitsiooniga (3.7), st.

$$t_{ij} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.89)$$

Antud juhul, st kasutades tähistusi x, y, u ja v , saame

$$\begin{cases} t_{11} = t_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \\ t_{22} = t_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ t_{21} = t_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (3.90)$$

(3.90)₁₋₂ st saab avaldada osatuletised

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \nabla^2 F \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \nabla^2 F \end{cases} \quad (3.91)$$

(3.57) põhjal $\nabla^2 F = U$ ja (3.63) põhjal $U = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$. Asendades need avaldistesse (3.91) saame

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \frac{\partial\psi}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.92)$$

Viimaste integreerimisel saame

$$\begin{cases} 2\mu u = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \varphi + k(y), \\ 2\mu v = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + \mu} \psi + l(x), \end{cases} \quad (3.93)$$

kus $k(y)$ ja $l(x)$ on suvalised funktsioonid vastavalt argumentidest y ja x . Nende suvaliste funktsioonide olemuse määratlemiseks diferentseerime (3.93)₁ muutuja y järgi ja (3.93)₂ muutuja x järgi ning liidame tulemused —

$$\underbrace{2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\stackrel{(3.90)}{=} -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}} = -2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{\stackrel{(3.63)}{=} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \right) + k'(y) + l'(x). \quad (3.94)$$

Seega $k'(y) + l'(x) = 0$, ehk

$$k'(y) = -l'(x) = C_1, \quad (3.95)$$

kus C_1 on suvaline konstant. Seega

$$k(y) = C_1 y + C_2 \quad \text{ja} \quad l(x) = -C_1 x + C_3, \quad (3.96)$$

kus C_2 ja C_3 on jällegi suvalised konstandid. Kui sellised $k(y)$ ja $l(x)$ panna siirete avaldisse (3.93), siis see osa siirdest ($k(y)$ ja $l(x)$ osa) vastab nn. jäigale deformatsioonile ja seega võib nad lugeda † võrdseks nulliga. Leiame nüüd (3.93)₁ + i (3.93)₂ (kasutades valemeid (3.61) ja (3.82)) — ‡

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) = \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} (\varphi + i\psi) = -2 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} w(z). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Arvetsades $w(z)$ ja $F(z)$ avldisi (3.73) ja (3.74) saame võrdusele (3.97) kuju

$$2\mu(u + iv) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} f(z) - z \bar{f}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z}). \quad (3.98)$$

Kasutades Poissoni teguri ja Lamé koefitsentide vahelist seost $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$ saab anda viimasele kuju

$$2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu) f(z) - z \bar{f}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z}). \quad (3.99)$$

Eraldades avaldises (3.99) reaali- ja imaginaarosad saamegi määrata siirdekomponendid u ja v tasapinnalise deformatsiooni puhul.

3.7 Pingete kontsentratsioon ühtlaselt pingestatud plaadis oleva elliptilise augu ümber

Käesolevas alajaotuses vaatleme ühtlaselt pingestatud plaati, mis non nõrgestatud elliptilise auguga. Eesmärgiks on leida pingete jaotus ümber selle elliptilise augu. Kuna auk on elliptiline, siis osutub mõistlikuks tuua sisse ka elliptilised koordinaadid. Kompleksarvude puhul saab ellipsi defineerida kujul

$$z = c \cosh \zeta. \quad (3.100)$$

Siin $z = z^1 + iz^2 \equiv x + iy$ ja $\zeta = \xi + i\eta$ on kompleksmuutujad, x, y on DRK, ξ, η elliptilised koordinaadid ja c on reaalne konstant. Avaldise (3.100) põhjal

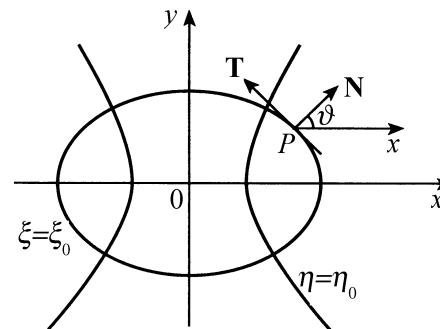
$$z^1 \equiv x = c \cosh \xi \cos \eta \quad \text{ja} \quad z^2 \equiv y = c \sinh \xi \sin \eta. \quad (3.101)$$

Viimasest saame, et

✓

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1. \quad (3.102)$$

Võrranditega (3.102) on esitatud konfokaalsete ellipsite ja hüperboolide $\xi = \text{const.}$ ja $\eta = \text{const.}$ parv. Kuna need ellipsid ja hüperboolid lõikavad teineteist täisnurga all, siis moodustavad ξ ja η ortogonaalse kõverjoonelise koordinaadistiku. \mathbf{T} ja \mathbf{N} on ellipsi $\xi = \xi_0$ puutuja ja välisnormaal suvalises punktis P . $\eta = \eta_0$ esitab hüperbooli, mis lõikab vaadeldavat ellipsit ortogonaalselt. ϑ tähistab nurka x positiivse suuna ja välisnormaali \mathbf{N} vahel. Igas punktis on kõverjooneline koordinaat ξ suunatud ellipsi välisnormaali suunas ja η piki tema puutujat. On selge, et igas punktis võib koordinaate ξ ja η tõlgendada kui DRK x ja y lokaalsel pöördel (vastupäeva) nurga ϑ võrra (vastupäeva) saadud uusi koordinaate.



Joonis 3.1: Elliptilised koordinaadid ξ ja η .

Tähistame pingetensori elliptilistes koordinaatides $\mathbf{T}(\zeta)$ ja DRK-s $\mathbf{t}(z)$, kus $\zeta = (\xi, \eta)$ ja $z = (x, y)$. Siis

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^{(T)} \mathbf{t} \mathbf{Q}, \quad (3.103)$$

kus \mathbf{Q} on ortogonaalne tensor, mille maatriks (lähtudes DRK-st) on

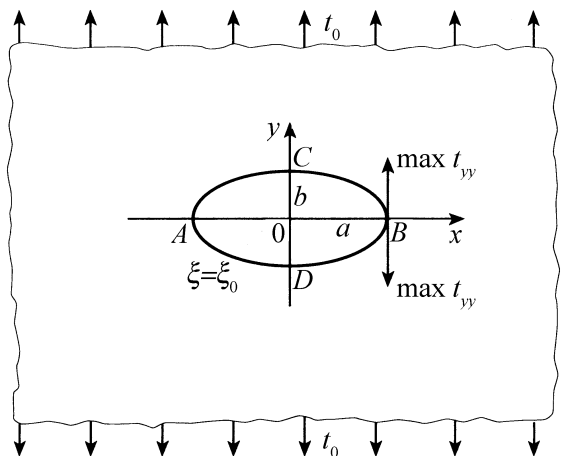
$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Väljendatuna pingekomponentides saab (3.103) kuju

$$\begin{cases} T_{\xi\xi} = t_{xx} \cos^2 \vartheta + 2t_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta + t_{yy} \sin^2 \vartheta, \\ T_{\eta\eta} = t_{xx} \sin^2 \vartheta - 2t_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta + t_{yy} \cos^2 \vartheta, \\ T_{\xi\eta} = (t_{yy} - t_{xx}) \sin \vartheta \cos \vartheta + t_{xy} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta). \end{cases} \quad (3.105)$$

Avaldiste (3.105), (3.86) ja (3.87) põhjal

$$\begin{cases} T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta} = t_{xx} + t_{yy} = 2 \left[f'(z) + \overline{f'(\bar{z})} \right] = 4 \operatorname{Re} [f'(z)], \\ T_{\eta\eta} - T_{\xi\xi} + 2iT_{\xi\eta} = (t_{yy} - t_{xx} + 2it_{xy}) e^{2i\vartheta} = \\ = 2 [\bar{z} f''(z) + g''(z)] e^{2i\vartheta}. \end{cases} \quad (3.106)$$



Joonis 3.2: Ühtlaselt tõmmatud lõpmatu plaat elliptilise auguga tsentris.

Täpsustame uuritavat probleemi. Vaadeldav plaat on nn. lõpmatu plaat ja elliptilise augu poolteljed on a ja b ($a > b$). Lõpmatuses on plaadile rakendatud ühtlane tõmme, mis on risti poolteljega a . Ellips on määratud võrrandiga $\xi = \xi_0$. Kehtivad tasapinnalise deformatsiooni hüpoteesid, st. nullist erinevaks loetakse vaid neli pingetensori komponenti t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} ja $t_{zz} = \nu(t_{xx} + t_{yy})$. Viimased saab leida avaldistest (3.106), kuid enne tuleb formuleerida rajatingimused:

$$\text{lõpmatuses:} \quad t_{yy} = t_0, \quad t_{xx} = t_{xy} = 0; \quad (3.107)$$

$$\text{augu serval:} \quad T_{\xi\xi} = T_{\xi\eta} = 0. \quad (3.108)$$

Asendades rajatingimused (3.107) avaldistesse (3.106) saame lõpmatuse jaoks

$$4\text{Re}[f'(z)] = t_0 \quad \text{ja} \quad 2[\bar{z}f''(z) + g''(z)]e^{2i\vartheta} = t_0. \quad (3.109)$$

Elliptilised koordinaadid ξ ja η toodi sisse avaldisega (3.100). Seega teeb punkt ühe tiiru ümber ellipsi kui η muutub nullist 2π . Seega peavad ka pingekomponendid ja siirdekomponeendid olema ühesed

ja η suhtes perioodilised perioodiga 2π . Sellest tulebki lähtuda funktsioonide $f(z)$ ja $g(z)$ valikul — näiteks hüperboolsed funktsioonid $\sinh n\zeta$ ja $\cosh n\zeta$ ($n \in \mathbb{Z}$ täisarv) on perioodilised η suhtes perioodiga 2π . Inglis [1913] pakkus välja järgmise valiku

$$\begin{cases} 4f(z) = A_1 c \cosh \zeta + A_2 c \sinh \zeta, \\ 4g(z) = B_1 c^2 \zeta + B_2 c^2 \cosh 2\zeta + B_3 c^2 \sinh 2\zeta, \end{cases} \quad (3.110)$$

kus konstandid A_1, A_2, B_1, B_2 ja B_3 määratakse rajatingimustest ja avaldise (3.100) põhjal $z = c \cosh \zeta$. Pärast rajatingimuste rahuldumist saavad avaldised (3.110) kuju

$$\begin{cases} 4f(z) = ct_0 [(1 + e^{2\xi_0}) \sinh \zeta - e^{2\xi_0} \cosh \zeta], \\ 4g(z) = \\ -c^2 t_0 \left\{ (\cosh 2\xi_0 - \cosh \pi) \zeta + \frac{1}{2} e^{2\xi_0} - \cosh \left[2 \left(\zeta - \xi_0 - \frac{i\pi}{2} \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (3.111)$$

Kui tähistada siirdekomponeente elliptilistes koordinaatides u_ξ ja u_η ning DRK-s u ja v ., siis on nende vaheline seos esitatav kujul

$$u_\xi = u \cos \vartheta + v \sin \vartheta \quad \text{ja} \quad u_\eta = -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta. \quad (3.112)$$

Viimase põhjal

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-i\vartheta}(u + iv). \quad (3.113)$$

Kasutades avaldist (3.99) saab viimasest

$$2\mu(u_\xi + iu_\eta) = e^{-i\vartheta} [(3 - 4\nu)f(z) - z\bar{f}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z})]. \quad (3.114)$$

Kuna augu serval $T_{\xi\xi} = 0$, siis avaldiste (3.106) ja (3.111) põhjal

$$T_{\eta\eta}|_{\xi=\xi_0} = 4\text{Re}[f'(z)] = \frac{t_0[\sinh(2\xi_0) - 1 + e^{2\xi_0} \cos(2\eta)]}{\cosh(2\xi_0) - \cos(2\eta)}. \quad (3.115)$$

$T_{\eta\eta}$ maksimaalsed väärtused on seal, kus $\cos 2\eta = 1$, st. kus $\eta = 0, \pi, 2\pi, \dots$, st. pikema peatelje otstes. See maksimaalne väärtus

$$\max T_{\eta\eta} = T_{\eta\eta} \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = 0, \pi, \dots}} = \frac{t_0[\sinh(2\xi_0) - 1 + e^{2\xi_0}]}{\cosh(2\xi_0) - 1}. \quad (3.116)$$

Võrrandi (3.102) põhjal $a = c \cosh \xi_0$, $b = c \sinh \xi_0$ ja $c^2 = a^2 - b^2$. Seega $\sinh 2\xi_0 = 2ab/c^2$, $\cosh 2\xi_0 = (a^2 + b^2)/c^2$ ning avaldis (3.116) saab kuju

$$\max T_{\eta\eta} = T_{\eta\eta} \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = 0, \pi, \dots}} = t_0 \left(1 + \frac{2a}{b} \right). \quad (3.117)$$

Seega kui $b \rightarrow 0$, siis $\max T_{\eta\eta} \rightarrow \infty$. Kui $b \rightarrow 0$, siis ellips läheneb joonele, täpsemalt sirgele praole. Seega ennustab lineaarne teooria siin füüsikaliselt paikapidamatut.⁷ Kui $a = b$, siis on auk ringikujuline ja probleeme pole — $\max T_{\eta\eta} = 3t_0$. $T_{\eta\eta}$ minimaalne väärtus on lühema pooltelje otsas ja on nii ellipsi kui ringi puhul $-t_0$.

3.8 Lainelevi elastses keskkonnas

3.8.1 Põhivõrrandid

Käesolevas alajaotuses tuletame harmooniliste lainete levimist kirjeldavad võrrandid lineaarse elastse keskkonna jaoks. Lähtume punktis 3.1 tuletatud Navier' võrrandeist (3.21) või (3.22), st.,

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.118)$$

Viimase kirjeldavad elastse keskkonna liikumist siiretes \mathbf{u} . Kasutades lineaarse elastsusteooria eeldust, et nii siirde kui kiiruse grafiendid on väikesed ja tähistades

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{ja} \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.119)$$

saame Navier' võrranditele kuju

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (3.120)$$

Helmholtzi teoreemi põhjal saab siirdevälja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ avaldada kujul

$$\mathbf{u} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{G}, \quad (3.121)$$

kus $F = F(\mathbf{x}, t)$ ja $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ on vaadeldavas piirkonnas pidevalt diferentseeruvad skalaar- ja vektorfunktsioonid, mis on tuntud kui Lamé potentsiaalid. Helmholtzi teoreemi rakendades eeldasime, et \mathbf{u} on vaadeldavas piirkonnas tõkestatud, pidevalt diferentseeruv ja et $r^2 |\mathbf{u}|$ on tõkestatud lõpmatutes. Siin $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ on punkti \mathbf{x} ja suvalise punkti \mathbf{x}' vaheline kaugus (tavaliselt vaadeldakse \mathbf{x} kui laineallika asukohta ja \mathbf{x}' kui vaatleja asukohta).

⁷Mittelineaarses seades on see probleem praeguseks lahendatud.

Kuna nüüd on meil kolm siirdekomponenti u_k esitatud avaldisega (3.121) läbi nelja muutja F ja G_K , siis on tekkinud nn. esimest järku määramatus. Selle kõrvaldamiseks on vaja sisse tuua lisakitsendus. Üks, kuid mitte ainuke võimalus selleks on väita, et vektorväli \mathbf{G} peab olema divergentsi vaba, st.,

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0. \quad (3.122)$$

Sellist tingimust nimetatakse kalibratsiooni tingimuseks⁸. Ka võrrandis (3.121) esinevale mahujõule võime rakendada Helmholtzi teoreemi koos kalibratsiooni tingimusega —

$$\mathbf{f} = \nabla f_1 + \nabla \times \mathbf{f}_2, \quad \nabla \cdot \mathbf{f}_2 = 0, \quad (3.123)$$

kus f_1 ja \mathbf{f}_2 on vastavalt skalaar- ja vektorpotentsiaal mahujõu jaoks. Sageli on ainukeseks mahujõuks gravitatsioonijõud, mis omakorda on ajast sõltumatu. Väga sageli aga mahujõud hüljatakse.

Asendades Navier'võrrandeis (3.120) suurused \mathbf{u} ja \mathbf{f} avaldistest (3.121) ja (3.123), saame saame

$$\nabla \left(c_1^2 \nabla^2 F + f_1 - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right) + \nabla \times \left(\nabla c_2^2 \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{f}_2 - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (3.124)$$

Võrrand (3.124) on rahuldatud kui valida F ja \mathbf{G} kui kahe võrrandi

$$c_1^2 \nabla^2 F + f_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad \text{ja} \quad \nabla c_2^2 \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{f}_2 = \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} \quad (3.125)$$

lahendid. Võrrandid (3.125) on mittehomogeensed lineaarsed lainevõrrandid. Kui nüüd suurused F ja \mathbf{G} on leitud kui võrrandeid (3.125) ja konkreetseid raja- ning algtingimusi rahuldavad lahendid, siis on siirdeväli leitav avaldistest (3.121).

Lamé potentsiaalidel on mitmeid huvitavaid omadusi, näiteks kalibreerimistingimuse tõttu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 F \quad \text{ja} \quad \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{G}. \quad (3.126)$$

⁸I. k. *gauge condition*

Lisaks eelnimetatule väidab Helmholtzi teoreem, et ∇F kujutab endast siirdevälja \mathbf{u} keerisevaba osa ja $\nabla \times \mathbf{G}$ solenoidaalset osa — $\nabla \times \nabla F = 0$ ja $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$. Tähistame siirdevälja solenoidaalse osa

$$\mathbf{u}_s = \nabla \times \mathbf{G}. \quad (3.127)$$

Seega

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0. \quad (3.128)$$

Kuna lineaarse teooria puhul

$$\left(\frac{dv - dV}{dV} \right)_s \approx (\mathbf{I}_e)_s = \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0, \quad (3.129)$$

siis saab teha järelduse, et siirdevälja solenoidaalsele osale vastav deformatsioon on isohooriline.

Skalaarne ja vektoriaalne lainevõrrand (3.125) viitab selgelt sellele, et antud ülesande lahendina saadakse kaks lainet — üks liigub kiirusega c_1 ja teine kiirusega c_2 , kusjuures need kiirused sõltuvad materjali elastsuskonstantidest ja massi tihedusest. Kui vaatleme tõkestamata piirkonda, siis peab siirdeväli rahuldama veel teata- vaid lisatingimusi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \right) \quad \text{ja} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u} = 0, \quad (3.130)$$

kus $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ on allika ja vaadeldava piirkonna suvalise punkti vaheline kaugus ning c on laine kiirus (faasi kiirus). Esimene tingimus, st. (3.130)₁, on nn. kiirgustingimus⁹, mis sisuliselt tähendab seda, et tõkestamata piirkonnas saab laine liikuda vaid allikast eemale ja lõpmatuses ei kiirgu mitte midagi tagasi. Teine tingimus, st. (3.130)₂, on nn. regulaarsustingimus, mis väidab, et lõpmatuses on siirdeväli null. Seega tõkestamata piirkonnas tuleb ühese lahendi saamiseks täita lisaks raja- ja algtingimustele ka nn. kiirgus- ja regulaarsustingimused.

⁹I. k. *radiation condition*

3.8.2 Tasapinnalised harmoonilised lained

Vaatleme selliseid laineid, mille liikumine on identne paralleelse tel tasanditel tasanditel ning mis ei sõltu tingimustest vaadeldava tasandiga ristaval suunal. Sel juhul on kõik väljamuutujad, kaasa arvatud siirded, deformatsioonid ja pinged, vaadeldavad kui kahe ruumimuutuja ja aja funktsioonid. Seega on meil tegu tasapinnalise ülesandega. Lihtsuse mõttes vaatleme juhtu, kus mahujõud on hüljatud, st., vaatleme vaid selliseid füüsikalisi protsesse, kus mahujõud võib jätta arvesse võtmata.

Kasutame DRK $x^1 \equiv x, x^2 = y$ ja $x^3 = z$. Vastavaid siirdekomponeente tähistame $u^1 = u, u^2 = v$ ja $u^3 = w$. Avaldise (3.121) kohaselt on siirdekomponeendid esitatavad läbi Lamé potentsiaalide F ja \mathbf{G} kujul

$$u^k = \delta^{kl} F_{,l} + e^{klm} G_{m,l}. \quad (3.131)$$

Kuna tasapinnalisel juhul sõltuvad kõik väljamuutujad vaid kahest ruumikoordinaadist, näiteks $x^1 = x$ ja $x^2 = y$, siis saavad võrdused (3.131) kuju

$$u^1 = \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial G_3}{\partial x^2}, \quad u^2 = \frac{\partial F}{\partial x^2} - \frac{\partial G_3}{\partial x^1}, \quad u^3 = \frac{\partial G_2}{\partial x^1} - \frac{\partial G_1}{\partial x^2}. \quad (3.132)$$

Tähistades $G_3 = G$, saab viimase esitada kujul

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}. \quad (3.133)$$

Lamé potentsiaalid leitakse lainevõrranditest (3.125).

Et leida pingeaotust, asendame siirdekomponeendid (3.133) olekuvõrranditesse (3.89). Saame

$$\begin{cases} t_{xx} = \lambda \nabla^2 F + 2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right), \\ t_{yy} = \lambda \nabla^2 F + 2\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right), \\ t_{zz} = \lambda \nabla^2 F, \\ t_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right), \\ t_{yz} = \mu \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} \right), \\ t_{zx} = \mu \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} \right), \end{cases} \quad (3.134)$$

kus $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Standardne meetod lainevõrrandite (3.125) lahendamiseks «harmoonilistes lainetes» on järgmine. Lainevõrrandi lahend esitatakse kujul

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \operatorname{Re} E, \quad E = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (3.135)$$

Siin \mathbf{a} ja \mathbf{k} on konstantsed vektorid, mida nimetatakse vastavalt amplituudivektoriks ja lainevektoriks, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ on laine faas ning ω laine ringsagedus (nurksagedus). Sellisel juhul on siirdevälja periood $T = 2\pi/\omega$. Lainevektori füüsikaline sisu on järgmine — lainevektor \mathbf{k} määrab laine levimissuuna ja tema moodul $k = |\mathbf{k}|$ annab lainearvu. Viimane on omakorda seotud lainepikkusega $l = 2\pi/k$ ehk $k = 2\pi/l$. Suurust

$$c = \frac{l}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (3.136)$$

nimetatakse faasikiiruseks ja ta määrab laine levimise kiiruse. Kui tähistame laine levimissuunda määrava ühikvektori \mathbf{n} , siis

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}k. \quad (3.137)$$

Pinda, mille lokaalseks normaaliks on \mathbf{n} , nimetatakse laine frondiks. Frondi võrrandi saaame avaldisest (3.135)₂ —

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t = kn_p x^p - \omega t = \text{const.}, \quad p = 1, 2. \quad (3.138)$$

On selge, et frondi võrrand sõltub ajast.

Enne avaldiste (3.135) asendamist Navier' võrrandeisse (3.120) loobume kokkuleppeliselt tähistusest Re avaldises (3.135) ning toome sisse mõningad lihtsustused.

$$\begin{cases} \nabla E = \mathbf{g}^m \frac{\partial E}{\partial x^m} = i\mathbf{g}^m k_m E & \Rightarrow \quad \nabla = i\mathbf{k} = ik\mathbf{n}, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{a})k^2 E, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = (\mathbf{a} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{a})k^2 E, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{a}\omega^2 E, \end{cases} \quad (3.139)$$

kus $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ on vektori \mathbf{n} väliskorrutus (tensorkorrutus) iseendaga. Asendame nüüd siirdevektori (3.135) Navier' võrrandeisse (3.120). Arvestades lihtsustusi (3.139) saame

$$[(c^2 - c_2^2)\mathbf{I} - (c_1^2 - c_2^2)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (3.140)$$

Siin $c = \omega/k$ on faasikiirus ning nii identsustensor \mathbf{I} kui vektorid \mathbf{n} ja \mathbf{a} on defineeritud (x^1, x^2) tasandil.

Võrrand (3.140) omab ühest lahendit \mathbf{a} suhtes kui

$$\det(m\mathbf{B}) = 0, \quad (3.141)$$

kus

$$m = c^2 - c_2^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} - \frac{1}{m} (c_1^2 - c_2^2) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (3.142)$$

Kuna \mathbf{B} on esitatav 2×2 matriksina, siis

$$\det(m\mathbf{B}) = m^2 \det(\mathbf{B}). \quad (3.143)$$

Omakorda

$$\det(\mathbf{B}) = 1 - \frac{1}{m} (c_1^2 - c_2^2) = \frac{c^2 - c_1^2}{c^2 - c_2^2}, \quad (3.144)$$

sest $\det(\mathbf{I} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \det(\delta^k_l - b^k c_l) = 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ kui \mathbf{b} ja \mathbf{c} on defineeritud ruumis E^2 . Seega, arvestades (3.144) on tingimus (3.141) esitatav kujul

$$(c^2 - c_1^2)(c^2 - c_2^2) = 0. \quad (3.145)$$

Viimane tingimus viitab veelkord sellele, et elastses keskkonnas on võimalik kaks erinevat laine liikumist — üks toimub faasikiirusega $c = c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ ja teine faasikiirusega $c = c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$.

Juht $c = c_1$. Sel korral saame võrrandist (3.140)

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}). \quad (3.146)$$

Viimane avaldis ütleb, et siirdevektor \mathbf{u} on laine levimissuunaga samasihiline — $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$. Selliseid laineid nimetatakse pikilaineteks ja nad levivad kiirusega $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$. Kuna avaldiste (3.135), (3.137) ja (3.139) põhjal

$$\nabla \times \mathbf{u} = -ikE\mathbf{n} \times \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) = 0, \quad (3.147)$$

siis on pikilaine alati nn. mittepöörlev laine (keerisevaba laine). Vahel nimetatakse neid ka paisumislaineteks¹⁰.

Juht $c = c_2$. Nüüd on (3.140) põhjal

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (3.148)$$

mis tähendab, et siirdevektor \mathbf{u} on risti laine levimissuunaga \mathbf{n} , st., et siirdevektor asub liikuva laine frondi tasandil. Sellist lainet nimetatakse põiklaineteks ehk ristlaineteks ehk nihkelaineteks. Tema levib kiirusega $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$. Antud juhul

$$\mathbf{I}_e = \nabla \cdot \mathbf{u} = ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}E = 0 \quad (3.149)$$

¹⁰I. k. *dilatational waves*

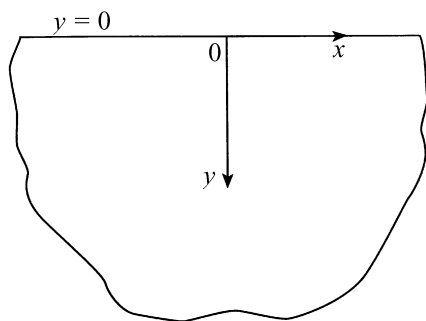
ja seega on tegu isohoorilise protsessiga (vt. (3.129) lk. 117).

Tasapinnaliste harmooniliste lainete puhul nimetatakse pikilainet primaarseks¹¹ ja põiklainet sekundaarseks¹², sest kuna $c_1 > c_2$, siis näiteks maavärina puhul saabub esimene varem.

3.8.3 Rayleigh' lained

Käesolevas punktis vaadeldakse pinnalaineid (näit. seismilised lained). Pinnalaine kujutab endast häiritust, mis liigub läbi keskkonna nii, et tema mõju on oluline vaid kitsas piirkonnas keskkonna piirpinna lähedal. Selliste lainete amplituud väheneb kiiresti sügavuse kasvades ja lained levivad pinnakihtide puutujate sihis. Vaadeldava teooria loojaks peetakse Rayleigh't (1885).

Vaatleme elastset poolruumi $y \geq 0$, mis on piiratud tasandiga $y = 0$ ning alajaotuste 3.8.1 ja 3.8.2 tulemusi. z -telje (mis on



Joonis 3.3: Elastne poolruum

risti xy tasandiga) sihis ulatub keskkond $z = \pm\infty$. Kõik vaadeldavad füüsikalised suurused sõltuvad vaid muutujatest x, y ja t .

¹¹I. k. *primary wave, P-wave*

¹²I. k. *secondary wave, S-wave*

Massjõudude puudumisel saavad võrrandid (3.125) kuju

$$\nabla^2 F = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 G = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad (3.150)$$

kus konstandid c_1 ja c_2 leitakse valemitest (3.119), F ja G on vastavalt Lamé skalaarpotentsiaal ja vektorpotentsiaali \mathbf{G} z -telje sihiline komponent (vt. (3.132)). (Kuna me oleme huvitatud vaid xy tasandil toimuvast, siis ei paku G_1 ja G_2 huvi.)

Eeldame, et $y = 0$ on vaba pind ja seega on rajatingimused pingete jaoks esitatavad kujul

$$t_{xy} = t_{yy} = 0, \quad \text{kui } y = 0. \quad (3.151)$$

Siirde ja pingeväljad on esitatud vastavalt avaldistega (3.133) ja (3.134).

Antud ülesande puhul otsime lainevõrrandeile (3.150) selliseid lahendeid F ja G , mille puhul laine amplituud kahaneb kiiresti sügavuse y kasvades ning millel on sama periood nii aja t kui koordinaadi x järgi (sest nad koos peavad rahuldama Navier' võrrandeid). Seega on lainevõrrandite (3.150) lahendid on esitatavad kujul

$$\begin{cases} F(x, y, t) = a \exp[-\alpha y + ik(x - ct)], \\ G(x, y, t) = b \exp[-\beta y + ik(x - ct)], \end{cases} \quad (3.152)$$

kus a ja b on lainete amplituudid, α ja β — sumbuustegurid (amplituud peab kiiresti vähenema sügavuse kasvades), k — lainearv ja c — faasikiirus.

Üldiselt võivad suurused a, b, α, β ja c olla mittelineaarsed funktsioonid ringsagedusest ω (või lainearvust k või lainepikkusest l). Seega kui faasikiirus $c(k) = \omega(k)/k \neq \text{const.}$, siis iga alghäiritust moodustav harmooniline laine levib erineva kiirusega ja laine kuju muutub oluliselt. Sellist nähtust nimetatakse dispersiooniks.

Kui panna kompleksed avaldised (3.152) võrranditesse (3.150), siis saame reaalarvulise faasikiiruse eksisteerimise tingimuse

$$\alpha^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right), \quad \beta^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right). \quad (3.153)$$

See reaalarvuline faasikiirus leitakse rajatingimustest. Algul asendame avaldised (3.152) ja (3.153) pingete avaldistesse (3.134) ja rakendame rajatingimusi (3.151). Saame võrrandisüsteemi

$$-\frac{2i\alpha}{k}a + \left(1 + \frac{\beta^2}{k^2}\right)b = 0, \quad \left(1 + \frac{\beta^2}{k^2}\right)a + \frac{2i\beta}{k}b = 0 \quad (3.154)$$

amplituudide a ja b määramiseks. Vaadeldaval võrrandisüsteemil on mittetriviaalne lahend siis ja ainult siis kui

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{k^2}\right)^2 - \frac{4\alpha\beta}{k^2} = 0. \quad (3.155)$$

Asendades $\alpha(c)$ ja $\beta(c)$ avaldistest (3.153) võrrandisse (3.155) saame võrrandi faasikiiruse c leidmiseks. Võrrand (3.155) on tuntud kui Rayleigh' võrrand. Tähistame

$$\xi = \frac{c^2}{c_2^2}, \quad m = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \quad (3.156)$$

kus ν on Poisson'i koefitsent. Kuna $0 \leq \nu \leq 1/2$, siis ka $0 \leq m \leq 1/2$ ja kui ν kasvab, siis m kahaneb. Avaldised (3.153) ja Rayleigh' võrrand (3.155) saavad nüüd kuju

$$\alpha = k(1 - m\xi)^{1/2}, \quad \beta = k(1 - \xi)^{1/2} \quad (3.157)$$

ja

$$R(\xi) = (2 - \xi)^2 - 4(1 - \xi)^{1/2}(1 - m\xi)^{1/2} = 0. \quad (3.158)$$

Et vabaneda viimases ruutjuurtest, korrutame teda avaldisega

$$M(\xi) = (2 - \xi)^2 + 4(1 - \xi)^{1/2}(1 - m\xi)^{1/2} \quad (3.159)$$

ning saame

$$\xi [\xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi(3 - 2m) - 16(1 - m)] = 0. \quad (3.160)$$

Lahend $\xi = 0$ ei sobi, sest siis ka $c = 0$ ja laine ei leviks. Seega tuleb lahendada kuupvõrrand

$$N(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi(3 - 2m) - 16(1 - m) = 0. \quad (3.161)$$

Kuna $N(0) < 0$ ja $N(1) > 0$, siis järelikult leidub vahemikus $0 < \xi < 1$ vähemalt üks võrrandi (3.161) juur $\xi_1 = c^2/c_2^2$ (vastav c on reaalne ja $c < c_2$).

Võrrandite (3.158)–(3.161) põhjalik analüüs näitab, et ξ_1 ongi ainus reaalse faasikiiruse tagav ja võrrandit (3.158) rahuldav ξ väärtus. Saadud reaalsel pinnalaine kiirust

$$c_R = (\xi_1)^{1/2}c_2 \quad (3.162)$$

nimetatakse Rayleigh' laine kiiruseks.

Eringen ja Suhubi (1975) on leidnud Rayleigh' laine kiirusi väga mitmete materjalide jaoks, nende järgi:

kokkusurumatu materjal,	$\nu = 0, 5,$	$c_R = 0, 9553c_2,$
teras,	$\nu = 0, 29,$	$c_R = 0, 9258c_2,$
nn. Poisson'i materjal,	$\nu = 0, 25,$	$c_R = 0, 9194c_2.$

Kasutades c_R väärtust Poisson'i materjali jaoks saame läbi avaldiste (3.133) siirdekomponeendid kujul

$$\begin{cases} u = -kA[\exp(-0, 8475ky) - \\ \quad - 0, 5773 \exp(-0, 3933ky)] \sin[k(x - c_R t)], \\ v = kA[-0, 8475 \exp(-0, 8475ky) + \\ \quad + 1, 4679 \exp(-0, 3933ky)] \cos[k(x - c_R t)], \end{cases} \quad (3.163)$$

kus A on ampituudi tegur. Vastavad pingekomponentid saadakse avaldistest (3.134).

Peatükk 4

Valik klassikalisi inseneriprobleeme

4.1 Sissejuhatus

Käesolesvas peatükis esitatav materjal põhineb Timoshenko & Goodieri õpikul “Theory of Elasticity”

Tähistused

- σ — normaalpinge; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — normaalpinge komponendid (pingetensori normaalkomponendid).
- τ — nihkepinge; $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ — nihkepinge komponendid.
- Siirdevektori komponendid $u \parallel x, v \parallel y, w \parallel z$ on lõpmata väikesed pidevalt muutvad (üle kogu vaadeldava keha ruumala) suurused.

Deformatsioonitensori komponendid

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (4.1)$$

NB! tensortähistuse puhul $2\tilde{e}_{12} = \gamma_{xy}$ jne.

Olekuvõrrand — Hooke'i seadus

- Vaatleme vaid nn. väikeseid deformatsioone.
- Tõmme x telje sihis ($\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \dots = 0$)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (4.2)$$

kus E on Youngi moodul ja ν Poisson'i koefitsent. Tõmbel y telje või z telje sihis — analoogsed seosed.

- Nn. kolmeteljelisel tõmbel

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], \end{cases} \quad (4.3)$$

- Nihkel

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad (4.4)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ — nihkeelastsus moodul.}$$

- Deformatsioonikomponendid ε . ja γ . on üksteisest sõltumatud.
- Normaalspingete summa

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (4.5)$$

- Ruumpaisumine

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}. \quad (4.6)$$

Hüdrostaatilisel surveel $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ja

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p = -\frac{p}{k} \quad (4.7)$$

kus $k = E/[3(1 - 2\nu)]$ (see pole Timošenko ja Goodieri tähistus) on ruumpaisumis moodul ehk ruumi moodil.

- (4.3) pöördteisendus

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z, \end{cases} \quad (4.8)$$

kus

$$\lambda = \nu E/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)] \quad \text{ja} \quad \mu = G \quad (4.9)$$

on Lamé konstandid.

Tasapinnalised ülesanded

- Tasapinnaline pingeseisund (tasandpingus) — $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, teised pingekomponendid on nullist erinevad. Võib veel täiendavalt eeldada, et pinge ei sõltu koordinaadist z .

- Tasapinnalisel deformatsioonil $w = 0$ ja $u = u(x, y)$ ning $v = v(x, y)$. Nüüd on vaja leida vaid kolm nullist erinevat sõltumatut pingekomponenti σ_x , σ_y ja τ_{xy} —

$$\begin{cases} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

- Tasapinnalisel juhul saadakse tasakaalu diferentsiaal võrrandid elementaarristiküliku tasakaalu tingimustest

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

kus \mathbf{f} on mahujõud (st. $\dim \mathbf{f} = \text{jõud/ruumala}$).

- Rajatingimused

$$\begin{cases} t_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \\ t_y = m\sigma_y + l\tau_{xy}, \end{cases} \quad (4.12)$$

kus \mathbf{t} on pindjõud ja l, m — pinnanormaali \mathbf{N} suunakoosinused.

- Sobivus- ehk pidevustingimused (kolm deformatsioonikomponenti ja kaks siirdekompontenti).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.13)$$

- Tasapinnalise deformatsiooni puhul saame valemeist (4.3) ja

$$(4.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x], \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{cases} \quad (4.14)$$

- Kombineerides valemeid (4.14), sobivustingimusi (4.13) ja tasakaaluvõrrandeid (4.11) saame sobivustingimused pingetes

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \quad (4.15)$$

Viimase võrrandi põhjal selgub, et kui mahujõud on konstantsed, siis ei sisalda sobivusvõrrand materjalikonstantne.

- Tasandpinguse puhul saame avaldistest (4.3) ja (4.4)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.16)$$

- Kombineerides nüüd avaldise (4.16), sobivustingimusi (4.13) ja tasakaaluvõrrandeid (4.11) saame võrrandi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right). \quad (4.17)$$

Ka võrrand (4.17) (nagu ka sobivusvõrrand (4.15)) annab konstantsete mahujõudude puhul tulemuseks

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (4.18)$$

mis ei sisalda materjalikonstante.

Airy' pingefunktsioon. Vaatleme juhtu, kus ainuke mahujõud on keha kaal. Seega kui y telg on suunatud alla, siis $f_x = 0$ ja $f_y = \rho g$ ning tasakaaluvõrrandid (4.11) saavad kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Need tuleb lahendada koos sobivustingimustega (4.18) ja rajatingimustega (4.12).

Väga tihti tuuakse nende võrrandite lahendamiseks sisse Airy' pingefunktsioon $\varphi = \varphi(x, y)$, mis on seotud pingekomponentidega järgmisel moel:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \rho g y; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho g y; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4.20)$$

Sellise φ valiku puhul on tasakaaluvõrrandid (4.19) automaatselt rahuldatud. Pingekomponentide (4.20) asendamisel võrrandisse (4.18) saame biharmoonilise võrrandi

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.21)$$

Seega tuleb leida selline funktsioon φ , mis rahuldab nii diferentsiaalvõrrandit (4.21) kui ka rajatingimusi (4.12).

4.2 Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides

Vaadeldav lähenemisviis on rakendatav kui uuritakse pikki ristkülikulisi plaate või talasid.

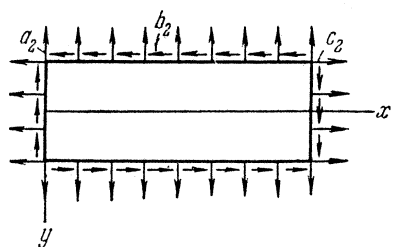
A) Ruutpolünoom

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (4.22)$$

Sellise valiku puhul on biharmooniline võrrand (4.21) automaatselt rahuldatud. Massjõude hülgamise puhul saame avaldistest (4.20) pingekomponendid kujul

$$\sigma_x = c_2; \quad \sigma_y = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (4.23)$$

Selline pingeseisund tähendab $a_2 > 0$ ja $c_2 > 0$ puhul ühtlast



Joonis 4.1: Ruutpolünoomile vastavad rajatingimused.

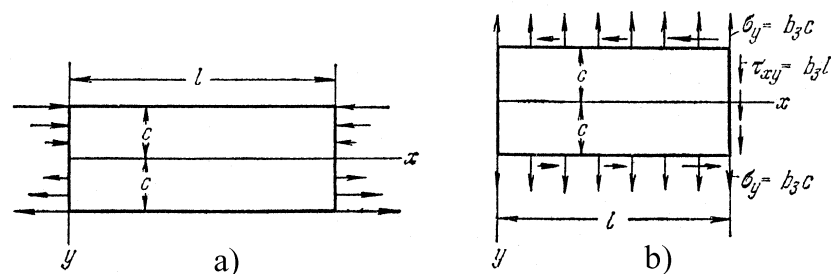
tõmmet kahes ristivas sihis koos ühtlase nihkega. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 4.1. Võttes osa polünoomi koefitsente võrdseks nulliga, saab rajatingimusi varieerida.

B) Kuuppolünoom

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2}y^3. \quad (4.24)$$

Ka antud juhul on biharmooniline võrrand (4.21) automaatselt rahuldatud. Pingete avaldiste (4.20) põhjal aga

$$\sigma_x = c_3x + d_3y; \quad \sigma_y = a_3x + b_3y; \quad \tau_{xy} = -b_3x - c_3y. \quad (4.25)$$



Joonis 4.2: Kuuppolünoomile vastavad rajatingimused: a) $d_3 \neq 0$, $a_3 = b_3 = c_3 = 0$ ja b) $b_3 \neq 0$, $a_3 = c_3 = d_3 = 0$

- Valides nüüd vaid $d_3 \neq 0$ saame puhtale paindele vastava pingeseisundi. Vastavad rajatingimused on esitatud joonisel 4.2 a).
- Vaid $b_3 \neq 0$ — pindadel $y = \pm c$ mõjuvad pinged $\sigma_y = \pm b_3y$ ja $\tau_{yx} = -b_3x$ ning pinnal $x = l$ pinge $\tau_{xy} = -b_3l$ (joonis 4.2 b)).
- Vaid $c_3 \neq 0$...
- Vaid $a_3 \neq 0$...

Teist ja kolmandat järku polünoomide puhul polnud vaja esitada täiendavaid kitsendusi polünoomide koefitsentidele, sest biharmooniline võrrand oli automaatselt rahuldatud. Kõrgemat järku polünoomide puhul pole asi aga enam nii lihtne.

C) Neljandat järku polünoom

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (4.26)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (4.21) rahuldatud vaid juhul kui

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad (4.27)$$

ning pingekomponendid (4.20) saavad kuju

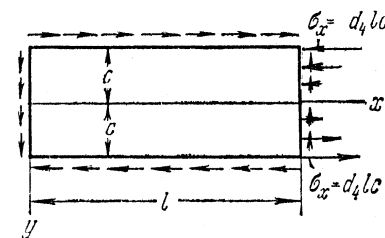
$$\begin{cases} \sigma_x = c_4 x^2 + d_4 x y - (2c_4 + a_4) y^2; \\ \sigma_y = a_4 x^2 + b_4 x y + c_4 y^2; \\ \tau_{xy} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 x y - \frac{d_4}{2} y^2. \end{cases} \quad (4.28)$$

Kuna koefitsentide a_4, \dots, d_4 valik on vaba, siis on (4.28) abil võimalik kirjeldada mitmesuguseid rajatingimusi. Näiteks kui vaid $d_4 > 0$ on nullist erinev polünoomi koefitsent, siis

$$\sigma_x = d_4 x y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2. \quad (4.29)$$

Vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \tau_{yx} = -\frac{d_4}{2} c^2, \\ x = 0, & \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \\ x = l, & \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2, \quad \sigma_x = d_4 l y. \end{cases} \quad (4.30)$$



Joonis 4.3: Neljandat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_4 > 0$ ja $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ puhul.

on kujutatud joonisel 4.3.

Vaatleme ühikulise paksusega plaati. Leiame plaadi kontuuril mõjuvatest pingetest põhjustatud jõupaaride momendid (vt. joonis 4.3)

$$\begin{cases} M(\tau_{xy}) = -2 \int_0^c |\tau_{xy}| l dy = \dots = -\frac{d_4 l c^3}{3}, \\ M(\tau_{yx}) = 2 |\tau_{yx}| l c = \dots = d_4 l c^3, \\ M(\sigma_x) = -2 \int_0^c \sigma_x y dy = \dots = -\frac{2d_4 l c^3}{3}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Seega on antud juhul (st. juhul kui mööda plaadi kontuuri on raken-datud joonisel 4.3 kujutatud pindjõud) plaadile mõjuv jõusüsteem tasakaalus.

Kui vaid $c_4 > 0$ oleks nullist erinev polünoomi koefitsent, siis saaksime avaldistest (4.28)

$$\sigma_x = c_4 x^2 - 2c_4 y^2; \quad \sigma_y = c_4 y^2; \quad \tau_{xy} = -2c_4 x y. \quad (4.32)$$

Jne., jne.

D) Viiendat järku polünoom

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5. \quad (4.33)$$

Nüüd on biharmooniline võrrand (4.21) rahuldatud kui

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5) \text{ ja } f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \quad (4.34)$$

Pinge komponendid

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \dots \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = \dots \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = \dots \end{cases} \quad (4.35)$$

Valides vaid $d_5 > 0$ nullist erinevaks polünoomikoefitsendiks, saame pingejaotuse

$$\sigma_x = d_5(x^2 y - \frac{2}{3} y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5 x y^2. \quad (4.36)$$

Viimasele vastavad rajatingimused

$$\begin{cases} y = \pm c, & \sigma_y = \pm \frac{1}{3} d_5 c^3, & \tau_{yx} = -d_5 x c^2 \\ x = 0, & \sigma_x = -\frac{2d_5 y^3}{3}, & \tau_{xy} = 0, \\ x = l, & \sigma_x = d_5(l^2 y - \frac{2}{3} y^3), & \tau_{xy} = -d_5 l y^2. \end{cases} \quad (4.37)$$

Kuna biharmooniline võrrand (4.21) on lineaarne diferentsiaalvõrrand, siis on tema lahendiks ka suvaline lahendite superpositsioon. Seega, liites eespool leitud elementaarlahendeid, saame leida meid huvitava probleemi lahendi.

Kui nüüd pingekomponendid on määratud, siis saab Hooke'i seaduse (4.3) ja (4.4) abil leida deformatsioonikomponendid ε_x , ε_y ja γ_{xy} . Viimastest omakorda aga siirdekomponeendid kui diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (4.38)$$

lahendid u ja v . Tõsi küll, (4.38) ei määra siirdekomponeente üheselt. Kui lisada siirdekomponeentidele u ja v lineaarfunktsioonid, vastavalt

$$u_1 = a + by \text{ ja } v_1 = c - bx, \quad (4.39)$$

siis jääb (4.38) kehtima (a, b, c on konstandid). Konstandid a ja c määravad jäiga keha rööpliikumise ja konstant b jäiga keha pöörde ümber z telje väikese nurga võrra.

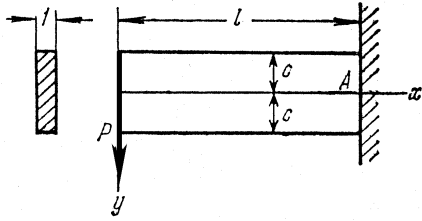
Konkreetsete ülesannete puhul pöördume diferentsiaalvõrrandite (4.38) juurde tagasi.

4.3 Saint-Venant'i printsiip

Elastse keha pinna väikesele osale mõjuva jõusüsteemi asendamine staatiliselt ekvivalentsega muudab oluliselt lokaalseid pingeid jõudude rakenduskoha lähedal, kuid praktiliselt ei mõjuta pingeid punktides, mis asuvad piisavalt kaugel pinnaosast, kus jõusüsteemi muudeti. Kaugust tuleb võrralda vaadeldava pinnaosa lineaarmõõtmega. Mõjud (täiendavad pinged ja deformatsioonid) vähenevad geomeetrilise progressiooni kiirusega.

4.4 Konsooli paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega konsooli, mille vabas otsas ($x = 0$) on rakendatud jõud \mathbf{P} , mida võib vaadelda kui otspinnal mõjuvate nihkepingete peavektorit (joonis 4.4). Konsooli pealmine ja alumine pind on pingevabad ja ots $x = l$ jäigalt kinnitatud.



Joonis 4.4: Kitsa ristkülikulise ristlõikega konsool pikkusega l , kõrgusega $2c$ ja paksusega 1 .

Sellist olukorda saab vaadelda kui superpositsiooni puhtast nihkest (alajaotus 4.2 A valemid (4.23) $a_2 = c_2 = 0$ ja $b_2 \neq 0$) ja valemitega (4.29) esitatud juhust (alajaotus 4.2 C $a_4 = b_4 = c_4 = e_4 = 0$ ja $d_4 \neq 0$). Saame

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2. \quad (4.40)$$

Rajatingimused

$$\tau_{yx}|_{y=\pm c} = \tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iy}|_{x=0} = P &= - \int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy \\ &\Rightarrow b_2 = \frac{3P}{4c}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Pannes nüüd konstandid b_2 ja d_4 valemite (4.41) ja (4.42) pingete avaldusse (4.40) saame

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad (4.43)$$

Arvestades, et inertsimoment $I \equiv I_z = 2c^3/3$, siis

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} (c^2 - y^2). \quad (4.44)$$

Lahend on täpne Saint-Venanti printsipi mõttes, st., 4.2 C puhul on tala otsas nihkepinged paraboolse jaotusega.

Leiame nüüd siirdekomponeendid u ja v . Hooke'i seadusest

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{P}{EI} xy, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EI} xy, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.45)$$

Integreerime (4.45)_{1,2} —

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + f(y), \quad v = \frac{\nu P}{2EI} x y^2 + f_1(x). \quad (4.46)$$

Pannes (4.46) valemisse (4.45)₃ saame

$$-\frac{P}{2EI} x^2 + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI} y^2 + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \quad (4.47)$$

Viimane on esitatav kujul

$$\begin{cases} F(x) + G(y) = K, \\ F(x) = \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{P}{2EI} x^2, \\ G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu P}{2EI} y^2 - \frac{P}{2IG} y^2, \\ K = -\frac{P}{2IG} c^2. \end{cases} \quad (4.48)$$

Kuna $F(x) + G(y) = K = \text{const.}$, siis peavad ka $F(x)$ ja $G(y)$ olema konstantsed. Tähistades $F(x) = d$ ja $G(y) = e$ saame valemist (4.48) tingimuse

$$d + e = -\frac{P}{2IG}c^2 \quad (4.49)$$

ja diferentsiaalvõrrandid

$$\begin{cases} \frac{df(y)}{dy} = -\frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{P}{2IG}y^2 + e, \\ \frac{df_1(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}x^2 + d \end{cases} \quad (4.50)$$

Viimaste integreerimisel saame

$$\begin{cases} f(y) = -\frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6IG}y^3 + ey + g, \\ f_1(x) = \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \end{cases} \quad (4.51)$$

Seega saavad siirete avaldised (4.46) kuju

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + ey + g, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 + dx + h. \end{cases} \quad (4.52)$$

Konstandid d, e, g ja h määratakse tingimusest (4.49) ja kolmest rajatingimusest siiretele.

Olgu punkt A tala ristlõike $x = l$ kese. Seega peab olema see punkt fikseeritud — tema siirded on nullid ja ristlõige $x = l$ ei saa pöörelda ümber punkti A . Seega kui $x = l$ ja $y = 0$, siis $u = v = 0$ ning

$$g = 0 \quad \text{ja} \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl. \quad (4.53)$$

Et saada konsooli kõverdunud telje võrrandit, võtame valemis (4.52)₂ $y = 0$ —

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x). \quad (4.54)$$

Konstandi d määramiseks kasutame kolmandat rajatingimust, mis ei luba vaadeldaval ristlõikel pöörelda ümber punkti A . Seda tingimust võib ette anda mitmel viisil. Vaatleme kahte:

a) tala telje element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0; \quad (4.55)$$

b) tala ristlõike vertikaalne element on punktis A fikseeritud, st.,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad (4.56)$$

Juhul a) saame avaldiste (4.55), (4.54) ja (4.49) põhjal

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}. \quad (4.57)$$

Seega saavad siirdekomponeentide avaldised (4.52) ja kõverdunud telje võrrand (4.54) kuju

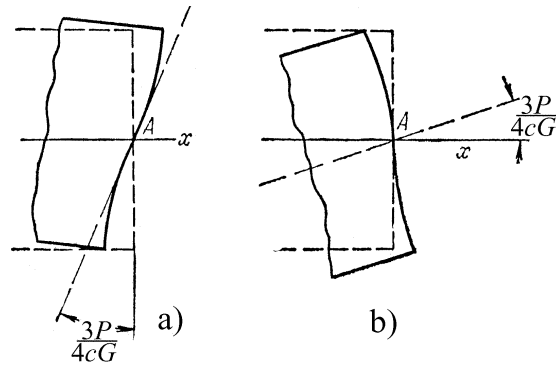
$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y - \frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6GI}y^3 + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}\right)y, \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}, \\ v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{3EI}. \end{cases} \quad (4.58)$$

Juhul b) saame konstantidele väärtused

$$d = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{ja} \quad e = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \quad (4.59)$$

ning tala kõverdunud telje võrrandiks

$$v|_{y=0} = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Pl^2}{2EI}x + \frac{Pl^3}{2EI} + \frac{Pc^2}{2GI}(l-x). \quad (4.60)$$

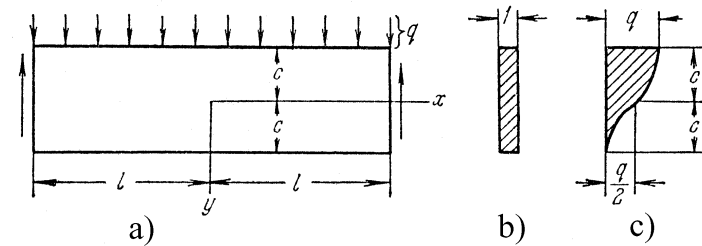
Joonis 4.5: Rajatingimused otsas $x = l$.

Seega saame võrrandi (4.60) kasutamise puhul

$$\frac{Pc^2}{2GI}(l-x) = \frac{3P}{4Gc}(l-x) \quad (4.61)$$

võrra suuremad läbipainded kui võrrandi (4.58)₃ puhul. Põhjus on selles, et rajatingimused (4.55) keelavad tala telje pöörded kuid lubavad otspinna pöörded punktis A (vt. joonis 4.5 a). Rajatingimused (4.56) keelavad aga tala otspinna pöörded kuid lubavad telje pöörded (vt. joonis 4.5 b). Mõlemal juhul toimuvad pöörded ühe ja sama nurga $3P/4cG$ võrra kuigi pöörduvad erinevad elemendid.

Tegelikult jääb aga kogu otspind $x = l$ paigale ja õiget tulemust ei anna ei juht a) ega b) ning kinnituskoha läheduses ei vasta ka pingeaotus valemitega (4.44) antule. Avaldise (4.44) puhul tuleb rakendada Saint-Venant'i printsiipi, st., et (4.44) annaks tõepärasema tulemuse, peame olema otsast $x = l$ piisavalt kaugel. Seega pikkade konsoolide puhul on tulemus «täpsem», st. vastab enam tegelikku- sele, kui lühikeste puhul.

Joonis 4.6: Ühtlaselt koormatud kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (tala pikkus $2l$, kõrgus $2c$, paksus 1).

4.5 Ühtlaselt koormatud tala paine

Vaatleme kitsa ristkülikulise ristlõikega tala (joonis 4.6). Tala on otstes vabalt toetatud ja talle mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega q .

Rajatingimused: a) külgpindadel $y = \pm c$

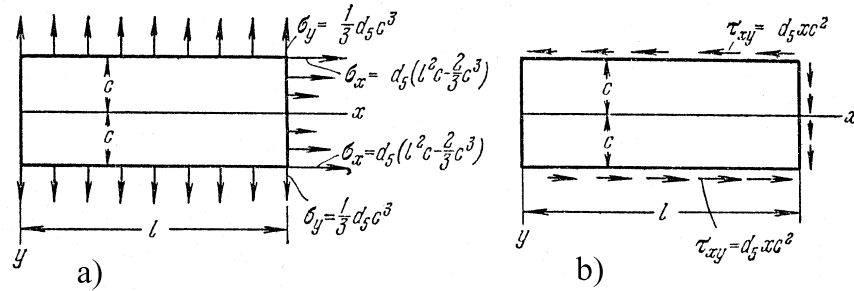
$$\tau_{xy}|_{y=\pm c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=+c} = 0, \quad \sigma_y|_{y=-c} = -q; \quad (4.62)$$

b) otspindadel $x = \pm l$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-c}^c \tau_{xy}|_{x=\pm l} dy = \mp ql, \quad \text{põikjõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} dy = 0, \quad \text{pikijõud tala otstes,} \\ \int_{-c}^c \sigma_x|_{x=\pm l} y dy = 0, \quad \text{paindemoment tala otstes.} \end{array} \right. \quad (4.63)$$

Rajatingimusi (4.62) ja (4.63) saab rahuldada kui kombineerida alajaotuses 4.2 leitud lahendeid.

Lähtume lahendist (4.36) (lk. 136), millele vastavad rajatingimused on kujutatud joonisel 4.7 Et vabaneda tõmbepingetest küljel $y = c$ ja nihkepingetest külgedel $y = \pm c$ lisame kehale tõmbe σ_y lahendist



Joonis 4.7: Viiendat järku polünoomile vastavad rajatingimused $d_5 \neq 0$ ja $a_5 = b_5 = c_5 = e_5 = f_5 = 0$ puhul.

(4.23) ja pinged $\sigma_y = b_3y$ ning $\tau_{xy} = -b_3x$ lahendist (4.25). Kokku saame seega

$$\begin{cases} \sigma_x = d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \\ \sigma_y = \frac{1}{3}d_5y^3 + b_3y + a_2, \\ \tau_{xy} = -d_5xy^2 - b_3x. \end{cases} \quad (4.64)$$

Rajatingimustest (4.62) saame

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3q}{4c}, \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3}. \quad (4.65)$$

Arvestades, et $I = I_z = 2c^3/3$ saame valemistest (4.64) ja (4.65)

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{2I}(x^2y - \frac{2}{3}y^3), \\ \sigma_y = -\frac{q}{2I}(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3), \\ \tau_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x. \end{cases} \quad (4.66)$$

Leitud pingekomponendid rahuldavad lisaks rajatingimustele (4.62) ka (4.63)₁₋₂. Et oleks rahuldatud ka (4.63)₃ lisame puhtale paindele vastavad pinged $\sigma_x = d_3y$ ja $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ lahendist (4.25).

Rajatingimusest (4.63)₃ leiame

$$d_3 = \frac{3q}{4c} \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right). \quad (4.67)$$

Seega kokku avaldub normaalpinge kujul

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (l^2 - x^2) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right). \quad (4.68)$$

Avaldise (4.68) esimene liige vastab elementaarsele paindeteooriale ning teist saab vaadelda kui parandusliiget ja ta on väike võrreldes esimesega. «Parandusliige» on põhjustatud sellest, et elementaar-teooria puhul eeldatakse, et $\sigma_y \equiv 0$, kuid (4.66) põhjal pole see nii (vt. joon. 4.6). Avaldisega (4.68) esitatud pinged annavad otspindadel nulliga võrduva peavektori ja peamomendi. Lahend on täpne vaid juhul kui otspindadel $x = \pm l$ mõjuks pindjõud

$$t_x = \pm \frac{3q}{4c^3} \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right). \quad (4.69)$$

Saint-Venant'i printsiibi põhjal loetakse lahend täpseks punktides, mis on otstest $x = \pm l$ kaugemal kui tala kõrgus, st. $2c$, ka $t_x = 0$ puhul.

Tala punktide siirded u ja v leitakse analoogselt alajaotusele 4.4. Nüüd eeldatakse, et punktis $x = y = 0$ on horisontaalsed siirded võrdsed nulliga ja vertikaalsed siirded võrdsed läbipaindega δ .

Kokku saame, et

$$\begin{cases} u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \right. \\ \quad \left. + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right], \\ v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + \right. \\ \quad \left. + \nu \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} - \\ \quad - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right] + \delta. \end{cases} \quad (4.70)$$

Kuna (4.70)₁ põhjal siirded tala keskjoonel

$$u|_{y=0} = \frac{\nu qx}{2E}, \quad (4.71)$$

siis ei osutu keskjoon neutraalseks jooneks. Tala keskjoone läbipaine

$$v|_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right]. \quad (4.72)$$

Kuna tala otsad on vabalt toetatud, siis $v|_{x=\pm l} = 0$ ja

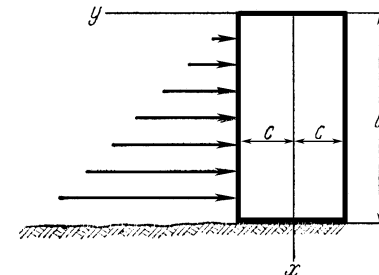
$$\delta = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (4.73)$$

Avaldises (4.73) nurksulgude ees olev kordaja esitab elementaar-teooriale vastavat läbipainet (eeldades, et tala ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks). Teine liige nurksulgudes esitab parandust, st. arvestab põikjõu mõju läbipaindele. Diferentseerides (4.72) kaks korda saame keskjoone kõverust iseloomustava avaldise

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (4.74)$$

Ka selles avaldises vastab esimene liige elementaar-teooria valemile ning on proportsionaalne paindemomendiga $q(l^2 - x^2)/2$.

4.6 Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool



Joonis 4.8: Vertikaalsele konsoolile mõjuv hüdrostaatiline surve.

Kui üldistada alajaotuses 4.2 esitatud lahendusmeetodikat ja vaadelda 6. järku polünoomi, siis saame laida pingejaotuse hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalse konsooli jaoks:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{qx^3 y}{4c^3} + \frac{q^3}{4c^3} \left(-2xy^3 + \frac{6}{5} c^2 xy \right), \\ \sigma_y = -\frac{qx}{2} + qx \left(\frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right), \\ \tau_{xy} = \frac{3qx^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.75)$$

Siin tähistab q vedeliku erikaalu (N/m^3) ja seega on koormuse intensiivsus sügavusel x võrdne qx , põikjõud $qx^2/2$ ja paindemoment $qx^3/6$. Avaldiste (4.75) esimesed liikmed vastavad jällegi elementaar-teooriale.

Konsooli vabal otsal $x = 0$ on leitud lahendi põhjal normaalpinged nullid, kuid nihkepinged

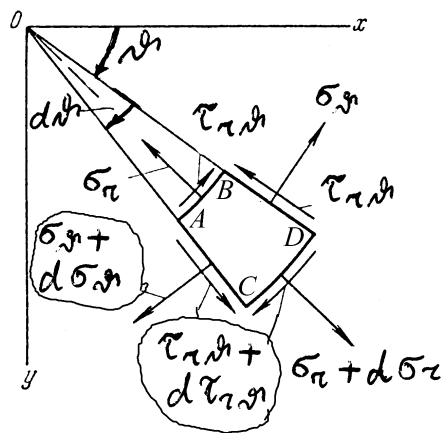
$$\tau_{xy} = \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2). \quad (4.76)$$

Nihkepingete peavektor on aga null. See võimaldab lugeda väliskoormuse kohal $x = 0$ nulliks.

Kui tahetakse arvesse võtta ka konsooli materjali omakaal, siis tuleb σ_x avaldisse lisada liige $-q_1 x$, kus q_1 on konsooli materjali erikaal.

4.7 Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides

4.7.1 Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon



Joonis 4.9: Väikese elemendi $ABCD$ tasakaal.

DRK-s esitatud tasakaaluvõrrandite analoog saadakse kui vaadeldakse elemendi $ABCD$ tasakaalu ja projekteeritakse tema külgedel mõjuvad summaarsed jõud ja mahujõud ϑ ja r sihile. Minnes üle

piirile $d\vartheta \rightarrow 0$ ja $dr \rightarrow 0$ saame

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + f_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} + f_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (4.77)$$

Siin tähistavad f_r ja f_ϑ mahujõudude projektsioone radiaal ja tangentsiaal suunale (r ja ϑ kasvamise suunale).

Ka siin saab mahujõudude puudumisel sisse tuua Airy' pingefunktsiooni $\varphi = \varphi(\vartheta, r)$, nii et

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}, & \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right). \end{cases} \quad (4.78)$$

Nüüd Laplace'i operaator

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \quad (4.79)$$

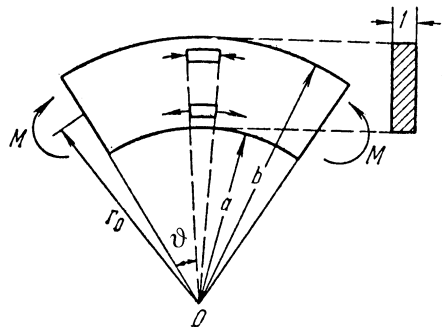
ja biharmooniline võrrand

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (4.80)$$

Kui pingekomponendid ja seega ka φ sõltuvad vaid koordinaadist r , siis saab võrrandi (4.80) üldlahendi esitada kujul

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \quad (4.81)$$

4.7.2 Kõvera tala paine



Joonis 4.10: Kõvera tala paine.

Näitena vaatleme kõvera tala puhast painet, st. vaatleme tala, mis paindub kõverustasapinnas otstesse rakendatud momentide M mõjul. Sel juhul jääb paindemoment konstantseks kogu varda pikuse ulatuses, järelikult sõltub pinge vaid radiaalkoordinaadist r . Seega saab kasutada lahendit (4.81).

Rajatingimused:

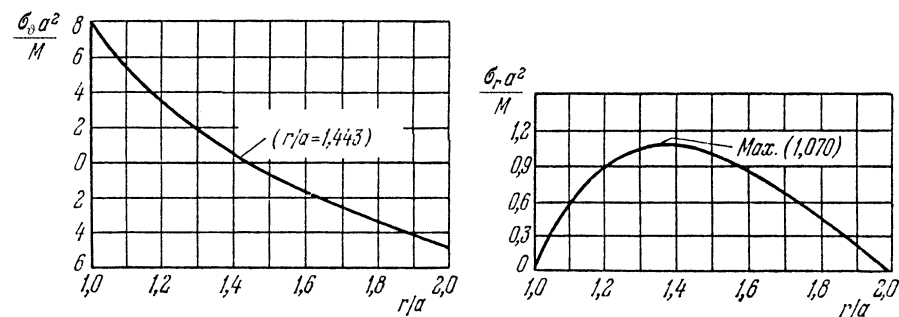
$$\begin{cases} \sigma_r = 0, & r = a, r = b, \\ \int_a^b \sigma_\vartheta dr = 0, & \int_a^b \sigma_\vartheta r dr = -M \\ \tau_{r\vartheta} = 0, & \text{kõigil rajapindadel.} \end{cases} \quad (4.82)$$

Pärast rajatingimuste (4.82) rahuldamist ja tähistuse

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \quad (4.83)$$

sissetoomist saame

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \\ \sigma_\vartheta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \\ \tau_{r\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (4.84)$$



Joonis 4.11: Pingete jaotus kõvera tala paindel.

Lahend on täpne vaid siis kui pingejaotus otspindadel vastab avaldisele (4.84)₂. Muil juhtudel tuleb rakendada Saint-Venanti printsiipi. Joonisel 4.11 on esitatud suurused $\sigma_\vartheta a^2/M$ ja $\sigma_r a^2/M$ sõltuvana suhtest r/a juhul kui $b/a = 2$. Järeldused: 1) $\sigma_r > 0$ iga r puhul vaadeldavas piirkonnas; 2) neutraalne telg vastab $r/a = 1,443$ ja $\max \sigma_\vartheta > |\min \sigma_\vartheta|$; 3) σ_r maksimum ei asu neutraalsel teljel.

4.7.3 Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \\ \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{cases} \quad (4.85)$$

Siin mõistetakse suurusi u ja v kui radiaalset ja tangentsiaalset siirdekompontenti. Hooke'i seaduse kuju jääb endiseks:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta), \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r), \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\tau_{r\vartheta}}{G}. \quad (4.86)$$

Siirete määramine toimub analoogiliselt DRK-ga.

4.7.4 Pöörlev ketas

Teiseks näiteks polaarkoordinaatide puhul on pöörleva ketta ülesanne. Vaatleme pöörlevat ketast, mis pöörleb jääva nurkkiirusega ω . Ketta paksuse loeme raadiusega võrreldes väikeseks. Ainsaks mahujõuks (mida arvesse võtame) on inertsjõud, st. $f_r = \rho\omega^2 r$ ja $f_\vartheta = 0$. Antud juhul on tegu nn. polaarsümmeetrilise ülesandega, kus σ_r ja σ_ϑ sõltuvad vaid koordinaadist r ja seega valemi (4.78) põhjal $\tau_{r\vartheta} = 0$. Teine tasakaaluvõrrandest (4.77) on antud juhul automaatselt rahuldatud ja esimesele saab anda kuju

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\vartheta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \quad (4.87)$$

Kuna ka ε_r ja ε_ϑ on vaid r funktsioonid, siis (4.85) põhjal

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}. \quad (4.88)$$

Hooke'i seadusest (4.86)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r - \nu\varepsilon_\vartheta), \quad \sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\vartheta - \nu\varepsilon_r). \quad (4.89)$$

Asendades nüüd deformatsioonikomponendid (4.88) Hooke'i seadusse (4.89) ning viimase omakorda tasakaaluvõrrandisse (4.87) saame diferentsiaalvõrrandi siirdekomponendi u määramiseks:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r^3. \quad (4.90)$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujul

$$u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho\omega^2 r^3 \right]. \quad (4.91)$$

Vastavad pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\vartheta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2. \end{cases} \quad (4.92)$$

Konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest.

Täisketta (ilma auguta keskel) puhul vastab $r = 0$ siire $u = 0$, seega $C_1 = 0$. Ketta serval $r = b$ jõudude puudumisel $\sigma_r = 0$, seega

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2. \quad (4.93)$$

Seega pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2 \end{cases} \quad (4.94)$$

Plaadi keskel on neil pingetel maksimaalne väärtus

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 b^2. \quad (4.95)$$

Kui ketta keskel on ava raadiusega a , siis konstandid C ja C_1 määratakse rajatingimustest $\sigma_r|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = 0$ —

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (a^2 + b^2), \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 a^2 b^2. \quad (4.96)$$

Pingekomponendid

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right). \end{cases} \quad (4.97)$$

Radiaalpinge on nüüd maksimaalne kohal $r = \sqrt{ab}$ ja tangentsiaalpinge sisemisel serval

$$\begin{cases} \max \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 (b-a)^2, \\ \max \sigma_\vartheta = \frac{3+\nu}{4} \rho\omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right). \end{cases} \quad (4.98)$$

Kui $a \rightarrow 0$, siis $\max \sigma_y$ läheneb väärtusele, mis on kaks korda suurem kui avaldisega (4.95) esitaud väärtus. Seega kui teha täisketta tsentrisse väike ava, siis suureneb tangentsiaalpinge plaadi tsentris kaks korda.

4.8 Ruumilised ülesanded

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

Rajatingimused

$$\begin{cases} t_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ t_y = \sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{yz} n, \\ t_z = \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m. \end{cases} \quad (4.100)$$

4.8.1 Varda tõmme omakaalu mõjul

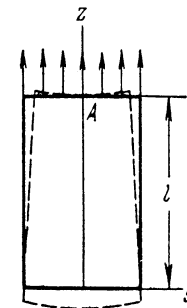
Vaatleme punktis A jäigalt kinnitatud ristkülikulise ristlõikega varrast. Mahujõud

$$f_x = f_y = 0, \quad f_z = -\rho g, \quad (4.101)$$

kus ρg on varda erikaal. Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui pingeaotus esitada kujul

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \quad (4.102)$$

st. varda igas ristlõikes on nullist erinev vaid temast allpool asuva osa kaalust põhjustatud normaalpinge.



Joonis 4.12: Varda deformatsioon omakaalu mõjul.

Rajatingimused: Nullist erinevad pinged vaid varda ülemisel välispinnal — seal $\sigma_z = \rho g l$.

Kuna sobivustingimused pingetes (vt. näiteks Beltrami-Michelli võrrandid (3.44)) sisaldavad vaid teist järku osatuletisi pingekomponentidest, siis on nad antud juhul automaatselt rahuldatud.

Siirded ja deformatsioonid määrame Hooke'i seaduse abil

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\rho g z}{E}, \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.103)$$

Siirdekomponeendid u, v ja w leitakse avaldistest (4.103) integreerimise teel. Integreerimiskonstandid määratakse rajatingimustest punktis A . Jäiga kinnituse tõttu on seal keelatud nii siirded kui pöörded, st., punktis $x = y = 0, z = l$ on $u = v = w = 0$ ja $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial w / \partial x = 0$. Tulemus on järgmine:

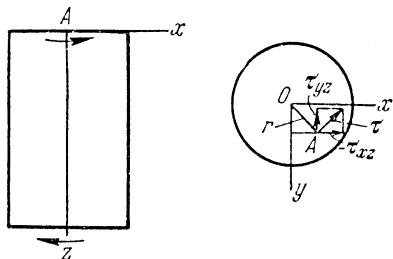
$$\begin{cases} u = -\frac{\nu \rho g x z}{E}, \quad v = -\frac{\nu \rho g y z}{E}, \\ w = \frac{\rho g z^2}{2E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{cases} \quad (4.104)$$

On selge, et z -telje punktid omavad vaid vertikaalseid siirdeid:

$$w|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{\rho g}{2E}(l^2 - z^2). \quad (4.105)$$

Teised punktid, st. kus $x \neq 0$ või $y \neq 0$, omavad ka horisontaa-seid siirdeid. Seega sirged, mis olid enne deformatsiooni paralleel-sed z -teljega on peale deformatsiooni z suhtes kaldu. Tala lõiked, mis olid enne deformatsiooni risti z -teljega, moodustavad pärast deformatsiooni paraboolse pinna. Näiteks punktid, mis olid enne deformatsiooni tasandil $z = c$ asuvad peale deformatsiooni pinnal $z = c + w|_{z=c}$. See pind on risti kõigi nende varda kiududega, mis enne deformatsiooni olid vertikaalsed.

4.8.2 Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne



Joonis 4.13: Ümarvarda vääne.

Vastavalt elementaarteoriale, avaldub nihkepinge varda väändel kujul

$$\tau = G\vartheta r, \quad (4.106)$$

kus G on nihkeelastsusmoodul, r — polaarraadius ja ϑ — väändenurk varda pikkusühiku kohta. Pingevektor $\boldsymbol{\tau}$ on seejuures risti varda raadiusega r .

Lahutame nüüd pingevektori $\boldsymbol{\tau}$ x - ja y -telje sihiliseks komponen-diks:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\vartheta r \frac{x}{r} = G\vartheta x, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -G\vartheta r \frac{y}{r} = -G\vartheta y. \quad (4.107)$$

Ülejäänud pinged eeldatakse võrduvat nulliga, st.,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (4.108)$$

Kuna pingekomponendid on kas nullid või linearfunktsioonid koor-dinaatidest x ja y , siis on sobivustingimused automaatselt rahulda-tud. Järgnevalt vaatleme kuidas on rahuldatud tasakaaluvõrrandid (4.99) ja rajatingimused (4.100). Tasakaaluvõrrandid on rahulda-tud kui hüljata massjõudude mõju. Silindri külgpind on pingevaba, seega, arvestades avaldist (4.108) ning et ümarvarda pinnal

$$l = \cos(\mathbf{N}, x) = \frac{x}{r}, \quad m = \cos(\mathbf{N}, y) = \frac{y}{r}, \quad n = \cos(\mathbf{N}, z) = 0, \quad (4.109)$$

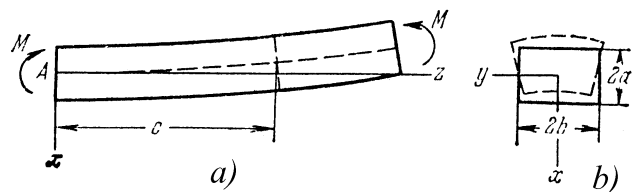
saame rajatingimustest (4.100).

$$0 = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m. \quad (4.110)$$

Seega rahuldab elementaarteooria lahend (4.107)–(4.108) rajatin-gimusi (4.110). Samuti on selge, et mitteümarvarda puhul elemen-taarteooria lahend ei sobi, sest (4.109) ei kehti varda külgpinnal. Varda otspindade lähedal tuleb rakendada Saint-Venant'i printsii-pi. Siirete leidmine tomub analoogselt alajaotuses 4.8.1 käsitletud juhuga, st., $u = v = w = 0$ ja $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = 0$ punktis A . Sellistel rajatingimustel saame

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = 0. \quad (4.111)$$

Seega osutub ümarvarda puhul elementaarteooria eeldus, et ristlõiked jäävad tasapinnaliseks ja raadiused sirgeteks, õigeks.



Joonis 4.14: Prismaatilise varda paine.

4.8.3 Prismaatiliste varraste puhas paine

Vaatleme prismaatilist varrast, mis paindub peatasandis xz varda otstesse rakendatud vastassuunaliste ja suuruselt võrdsete momentide toimel. Koordinaatide alguse paneme varda vasakusse otsa ja ristlõike pinnakeskmesse. Elementaarteooria põhjal

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.112)$$

kus R on painutatud varda kõverusraadius. Lahend (4.112) rahuldab massjõudude puudumisel tasakaaluvõrrandeid (4.99) ja rajatingimusi (4.100) varda külgpinnal. Otspindadel on lahend täpne kui väliskoormus jaotub vastavalt avaldisele (4.112). Paindemoment määratakse valemiga

$$M = \int_A \sigma_z x dA = \int_A \frac{Ex^2 dA}{R} = \frac{EI_y}{R}. \quad (4.113)$$

Viimasest avaldisest saame leida varda telje kõveruse

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}. \quad (4.114)$$

Siirete leidmiseks kasutame samu rajatingimusi, mis alajaotuses 4.8.1, st., punktis A on keelatud nii siirded kui pöörded. Hooke'i seaduse (4.2) ja deformatsioonikomponentide definitsioonide (4.1)

põhjal (antud juhul on tala teljeks z -telg!)

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R}, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu x}{R}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.115)$$

Kui lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem (4.115) rajatingimustel $u = v = w = 0$ ja $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial x = 0$ punktis $x = y = z = 0$, siis saame

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2R}[z^2 + \nu(x^2 - y^2)], \\ v = -\frac{\nu xy}{R}, \quad w = \frac{xz}{R}. \end{cases} \quad (4.116)$$

Varda kõverdunud telje võrrandi saame võttes viimases avaldises $x = y = 0$ —

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y}, \quad v = w = 0. \quad (4.117)$$

See avaldis langeb kokku elementaarteooria läbipainde avaldisega.

Vaatleme nüüd varda suvalist ristlõiget $z = c$ (enne deformatsiooni). Peale deformatsiooni asuvad selle ristlõike punktid tasandil

$$z = c + w = c + \frac{cx}{R}, \quad (4.118)$$

st. puhtal paindel jäävad ristlõiked tasapinnalisteks. Et uurida ristlõike deformatsioone tema tasandis, vaatleme külgi $y = \pm b$ (vt. joonis 4.14 b)). Pärast deformatsiooni

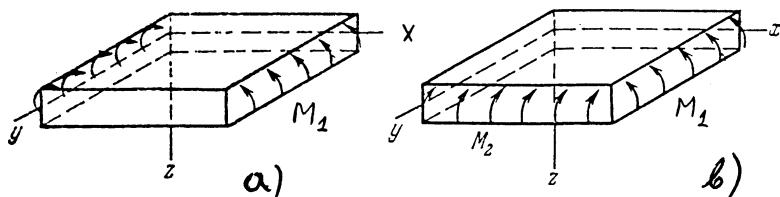
$$y = \pm b + v = \pm b \left(1 - \frac{\nu x}{R}\right), \quad (4.119)$$

st., peale deformatsiooni on küljed $y = \pm b$ kaldu. Kaks ülejäänud külge $x = \pm a$ omavad peale deformatsiooni kuju

$$x = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R}[c^2 + \nu(a^2 - y^2)], \quad (4.120)$$

st. nende kujuks peale deformatsiooni on parabool. Seega on tala pealmine ja alumine pind pikisuunas nõgus ja ristsuunas kumer, st. moodustab sadulpinna.

4.8.4 Paadi puhas paine



Joonis 4.15: Ristkülikulise plaadi paine.

Eelmises alajaotuses saadud tulemusi saab rakendada konstantse paksusega plaatide paindeülesannete puhul. Kui pinged $\sigma_x = Ez/R$ on rakendatud piki y -teljega paralleelseid plaadi külgi (vt. joonis 4.15 a)), siis omab plaadi pind peale deformatsiooni sadulpinna kuju, kusjuures tema kõverus xz tasapinnas on $1/R$ ning ristuv suunas ν/R . Siinjuures eeldatakse, et läbipainded on võrreldes plaadi paksusega väikesed. Tähistame plaadi paksuse h , paindemomendi plaadi y -telje sihilise serva pikkusühiku kohta M_1 ja inertsimomendi pikkuühiku kohta $I_y = h^3/12$. Nüüd valemi (4.114) põhjal

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1}{EI_y} = \frac{12M_1}{Eh^3}. \quad (4.121)$$

Kui paindemomendid M_1 ja M_2 mõjuvad kahes ristuv suunas, siis saadakse elastse plaadi pinna kõverus paindemomentidest M_1 ja M_2 põhjustatud kõveruste superpositsioonina.

Tähistame $1/R_1$ ja $1/R_2$ plaadi kõverused xz ja yz tasandites. Momendid M_1 ja M_2 on endiselt mõõdetud serva pikkusühiku kohta. Kasutades nüüd avaldist (4.121) ja superpositsiooniprintsiipi saame

$$\frac{1}{R_1} = \frac{12}{Eh^3}(M_1 - \nu M_2), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{12}{Eh^3}(M_2 - \nu M_1). \quad (4.122)$$

M_1 ja M_2 loetakse positiivseteks kui nad põhjustavad positiivsete kiudude tõmmet. (4.122) põhjal

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right), \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right). \quad (4.123)$$

Väikeste läbipainete puhul võib kasutada aproksimatsiooni

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.124)$$

Tähistades

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.125)$$

ja arvestades (4.124) saame avaldistele (4.123) kuju

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.126)$$

Konstanti D nimetatakse plaadi paindejäikuseks.

Juhul kui plaat paindub silindriliselt (moodustaja on paralleelne y -teljega), siis $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ ja (4.126) saab kuju

$$M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_2 = -D\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.127)$$

Kui $M_1 = M_2 = M$, siis ka $1/R_1 = 1/R_2 = 1/R$ ja plaat paindub sfääriliseks pinnaks, nii et (4.123) saab kuju

$$M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \frac{1}{R} = \frac{D(1+\nu)}{R}. \quad (4.128)$$

4.9 Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades

4.9.1 Üldvõrrandid

Mõningaid selliseid ülesandeid oleme juba eespool vaadelnud. Käesolevas alajaotuses leiavad käsitlemist ülesanded, kus ei esine vääned. Silindriliste koordinaatide (r, ϑ, z) puhul tähendab see seda, et vastavatest siirdekompontentidest $v = 0$ ja komponendid u ja w ei sõltu koordinaadist ϑ . Seega ka pingekomponendid ei sõltu koordinaadist ϑ ja kaks neist $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$. Nullist erinevad deformatsioonikomponendid avalduvad kujul

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (4.129)$$

Tasakaaluvõrrandid saavad aga kuju

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\vartheta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{cases} \quad (4.130)$$

Paljudel juhtudel on jällegi otstarbekas tuua sisse pingefunktsioon φ , siin nimetatakse teda aga Love'i pingefunktsiooniks. Tasakaaluvõrrandid on rahuldatud kui valida

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), & \sigma_{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (4.131)$$

Siinjuures peab φ rahuldama biharmoonilist võrrandit

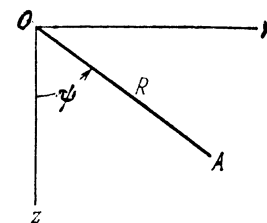
$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (4.132)$$

Antud juhul

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.133)$$

on Laplace'i operaator silindrilistes koordinaatides. Kuna antud juhul ei sõltu φ koordinaadist ϑ , siis langeb Laplace'i operaatoris (4.133) kolmas liige välja. Siirdekompontendid u ja w määratakse avaldistega

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2Gw = 2(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (4.134)$$



Joonis 4.16: Sfäärilised koordinaadid.

Mõnel juhul on silindriliste koordinaatide asemel mõistlik kasutada sfäärilisi koordinaate, st., r ja z asemel kasutatakse koordinaate R ja ψ . Nüüd on vaja (4.133)-s asendada osatuletised r ja z järgi. See üleminek on omakorda analoogne DRK x ja y ja polaarkoordinaatide r ja ϑ vahelisele seosele. Saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases} \quad (4.135)$$

Seega omab biharmooniline võrrand (4.132) silindriliste koordinaatide puhul kuju

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (4.136)$$

ja sfääriliste puhul

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \varphi = 0. \quad (4.137)$$

Võrrandi (4.137) lahend peab samal ajal rahuldama ka Laplace'i võrrandit, st,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\cot \psi}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (4.138)$$

Viimase erilahendit võib otsida kujul

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (4.139)$$

kus Ψ_n on vaid muutuja φ funktsioon. Kokku saame viimasest kahest hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1)\Psi_n = 0. \quad (4.140)$$

Kui tähistame $x = \cos \psi$ ja valime x uueks sõltumatuks muutujaks, siis saame (4.140)-st Legendre'i võrrandi

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1)\Psi_n = 0. \quad (4.141)$$

Selle võrrandi lahendid on esitatavad Legendre'i polünoomide $P_n(x)$ kaudu:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{cases} \quad (4.142)$$

Neid polünoome võib kasutada funktsioonidena Ψ_n avaldises (4.139) kusjuures igat neist võib veel korrutada konstandiga A_n . Kasutades valemeid

$$x = \cos \psi, \quad Rx = z \quad \text{ja} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (4.143)$$

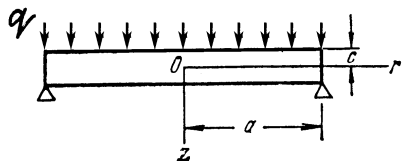
saab minna tagasi muutujatele r ja z . Seejuures saab võrrandi (4.137) lahend kujul

$$\begin{cases} \varphi_0 = A_0, & \varphi_1 = A_1 z, \\ \varphi_2 = A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_3 = A_3 \left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\ \varphi_4 = A_4 \left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \varphi_5 = A_5 \left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{cases} \quad (4.144)$$

Toodud polünoomid on ka biharmoonilise võrrandi (4.132) lahendiks. Saab näidata, et kui $R^n \Psi_n$ osutub harmoonilise võrrandi (4.138) lahendiks, siis $R^{n+2} \Psi_n$ rahuldab biharmoonilist võrrandit (4.132) (kuid ei rahulda (4.138)) Korrutades (4.144) $R^2 = r^2 + z^2$, saame uued lahendid

$$\begin{cases} \varphi_2 = B_2(r^2 + z^2), \\ \varphi_3 = B_3 z(r^2 + z^2), \\ \varphi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\ \varphi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2 z)(r^2 + z^2), \\ \dots \end{cases} \quad (4.145)$$

4.9.2 Ümarplaadi paine



Joonis 4.17: Sümmeetriliselt jaotatud põikkoormusega koormatud ja servadest vabalt toetatud ümarplaat.

Vaatleme sümmeetriliselt koormatud ümarplaati (joonis 4.17). Valides avaldistest (4.144) ja (4.145) kolmandat järku polünoomid, saame pingefunktsiooni esitada kujul

$$\varphi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3). \quad (4.146)$$

Avaldiste (4.131) põhjal saame seejärel pingekomponendid kujul

$$\begin{cases} \sigma_r = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_\vartheta = -6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\ \sigma_z = -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, \\ \tau_{rz} = 0. \end{cases} \quad (4.147)$$

Seega osutuvad pingekomponendid kogu plaadi ulatuses konstantseteks. Valemites (4.147) olevate konstantide a_3 ja b_3 määramiseks tuleb kasutada rajatingimusi σ_r ja σ_z jaoks. Kokkuvõttes: kolmandat järku polünoomide abil saab esitada lahendi, mis vastab olukorrale, kus plaadi pinnale on rakendatud telgsümmeetrilised konstantsed koormused.

Valides (4.144) ja (4.145) neljandat järku polünoomid, saame pingekomponentide jaoks avaldised

$$\begin{cases} \sigma_r = 96a_4z + 4b_4(14\nu - 1)z, \\ \sigma_z = -192a_4z + 4b_4(16 - 14\nu)z, \\ \tau_{rz} = 96a_4r - 2b_4(16 - 14\nu)r. \end{cases} \quad (4.148)$$

Kui võtta $96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$, saame

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4z, \quad (4.149)$$

mis esitab plaadi puhast painet juhul kui ta servadesse on rakendatud ühtlaselt jaotatud momendid.

Ühtlaselt jaotatud koormusele allutatud plaadi lahendi saamiseks lähtutakse kuendat järku polünoomidest. Vastavatele pingetele (mida siin ei esita, kuid mis sisaldavad konstante a_6 ja b_6) lisatakse lahend (4.148) juhul $b_4 = 0$ ja z -telje sihiline ühtlane tõmme $\sigma_z = b$ lahendist (4.147). Seega tuleb rajatingimustest

$$\begin{cases} \sigma_z = 0, & z = c; & \sigma_z = -q, & z = -c; \\ \tau_{rz} = 0, & z = \pm c; \end{cases} \quad (4.150)$$

määrata neli konstanti a_6, b_6, a_4 ja b . Kokku saame

$$\begin{cases} \sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2z}{c^3} - \frac{3z}{8c} \right], \\ \sigma_z = q \left[-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3z}{4c} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = -\frac{3qr}{8c^3}(c^2 - z^2). \end{cases} \quad (4.151)$$

Valemite (4.151) puhul on huvitav see, et esitatav pingeaotus on analoogne pingete σ_y ja τ_{xy} jaotusega kitsa ristkülikulise tala puhul (võrdle valem (4.66) lk. 144). Tala valemite puhul tuleb arvestada, et sisse on toodud inertsimoment $I = 2c^3/3$. Radiaalsed pinged on esitatud paaritu funktsioonina koordinaadist z ja annavad servas ühtlaselt jaotatud paindemomendi. Et saada lahendit servast vabalt toetatud plaadi jaoks, lisame pingevaldistele (4.151) lahendi (4.149) ja määrame konstandi b_4 rajatingimusest

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0, \quad r = a. \quad (4.152)$$

Seega saab vaba toetuse puhul radiaalse normaalpinge σ_r avaldis kuhu

$$\sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(3 + \nu) r^2 z}{32 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{8 \cdot 5 c} + \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3} \right]. \quad (4.153)$$

Kui võtta $r = 0$, saame pinget σ_r , mis mõjub plaadi tsentris. Elementaarteooria puhul esitab pinget plaadi tsentris valem

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu) a^2 z}{32 c^3}, \quad (4.154)$$

s.o. (4.153) viimane liige. Kui plaadi paksus $2c$ on väike võrreldes raadiusega a , siis osutuvad ka «parandusliikmed» väikesteks.

Puhta painde lisamisega ja rajatingimuse (4.152) rakendamisega kõrvaldasime me küll paindemomendid vabas servas $r = a$, kuid ei vabanenud pingetest

$$\sigma_r|_{r=a} = q \left[\frac{2 + \nu z^3}{8 c^3} - \frac{3(2 + \nu) z}{8 \cdot 5 c} \right]. \quad (4.155)$$

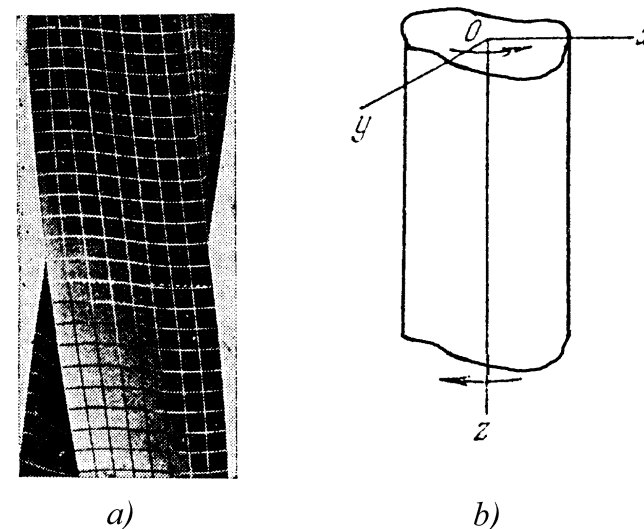
Nende pingete peavektor ja peamoment plaadi servas on nullid, seega tuleb lahendi täpsuse ja «kehtivuse» hindamisel rakendada Saint-Venant'i printsiipi.

Kui kasutada kuuendast kõrgemat järku polünoome, saab leida lahendeid juhtude jaoks, kus $q = q(r)$. Teist liiki Legendre'i polünoome ($Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \dots$) kasutades saab leida lahendeid rõngasplaadi jaoks. Kõik need lahendid kehtivad juhul kui läbipainded on väikesed võrreldes paksusega $2c$. Suurte läbipainete puhul tuleb arvestada plaadi kesktasandi pikenemisega.

4.10 Vääne

4.10.1 Sirgete varraste vääne

Ümarvarraste väändeülesande lahendamise tehtud hüpotees, et varda ristlõiked jäävad deformatsioonil tasapinnalisteks ei kehti mitteümarvarraste puhul. Seda näitavad ilmekalt eksperimentide tulemused (vt. joonis 4.18 a). Enim kõverduvad algsed sirged külgede



Joonis 4.18: Sirge varda vääne.

keskosas. Korrektsel lahenduse vaadeldavale ülesandele andis Saint-Venant (1855).

Vaatleme ühtlast varrast, mille otstes on rakendatud momendid, kusjuures ristlõike kuhu on meelevaldne (joonis 4.18 b). Saint-Venant lähtus eeldusest, et varda deformatsioon koosneb kahest osast: 1) ristlõike pöörded analoogselt ümarvardaga ja 2) ristlõike tasandite kõverdumine (deplanatsioon), mis on kõigi ristlõigete jaoks sama. Koordinaatide alguseks valime varda otspinna keskmist. Sel juhul on

ristlõigete pööretele vastavad siirded

$$u = -\vartheta zy \quad \text{ja} \quad v = \vartheta zx. \quad (4.156)$$

Ristlõigete kõverdumist kirjeldatakse funktsiooniga ψ —

$$w = \vartheta\psi(x, y). \quad (4.157)$$

Seega deformatsioonikomponendid

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{cases} \quad (4.158)$$

ning vastavad pingekomponendid

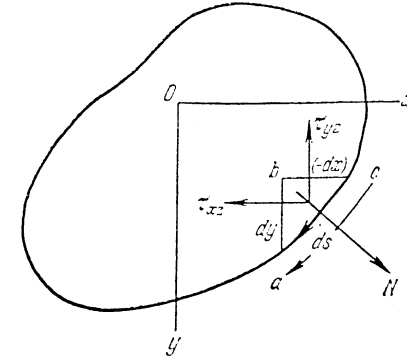
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{cases} \quad (4.159)$$

Seega on meil igas varda punktis puhas nihe, mis on määratud komponentidega τ_{xz} ja τ_{yz} . Pannes avaldised (4.159) tasakaaluvõrrandisse (4.99) saame funktsiooni ψ määramiseks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.160)$$

Vaatleme nüüd rajatingimusi (4.100). Külgpinnal on $t_x = t_y = t_z = 0$ ja $n = \cos(Nz) = 0$, seega (4.100)_{1,2} on samaselt nullid, aga (4.100)₃ annab

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0. \quad (4.161)$$



Joonis 4.19: Funktsiooni ψ määramine väänatud varda külgpinna lähedase lõpmata väikese elemendi abc abil

Viimane tingimus tähendab, et summaarne nihkepinge peab olema suunatud piki varda külgpinna puutujat.

Vaatleme varda külgpinna lähedast lõpmata väikest elementi abc (joonis 4.19). Eeldame, et s positiivne suund on $c \rightarrow a$. Suunakosinused

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}. \quad (4.162)$$

Kasutades valemeid (4.162) ja (4.159) saame rajatingimusele (4.161) kuju

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial x}{\partial s} = 0. \quad (4.163)$$

Seega suvaline väändeülesanne taandub funktsiooni ψ määramisele diferentsiaalvõrrandist (4.160) rajatingimusel (4.163).

Rajatingimuste rahuldamiseks on ka teine võimalus, mis viib lihtsamale võrrandile. Kuna $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, siis tasakaaluvõrrandest jääb järgi

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (4.164)$$

Kahe viimase põhjal

$$\varphi = -\frac{M_t}{\pi ab^3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (4.176)$$

ning pingekomponendid (4.165)

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t y}{\pi ab^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}. \quad (4.177)$$

Järelikult suhe

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}, \quad (4.178)$$

st., pingekomponentide suhe on proportsionaalne suhtega y/x . Järelikult on see suhe konstantne piki igat punktist O väljuvat kiirt («ellipsi raadiust»), näiteks OA joonisel 4.20. Seega summarse nihkepinge suund (lõigu OA igas punktis) ühtib nihkepinge suunaga punktis A . Vertikaalse telje OB punktide puhul on nihkepinge $\tau_{yz} = 0$ ja summaarne pinge on võrdne nihkepingega τ_{xz} . Horisontaalküljel on olukord vastupidine. On selge, et $\max |\tau_{xz}| > \max |\tau_{yz}|$ ja et

$$\max |\tau_{xz}| = \tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}. \quad (4.179)$$

Kui $a = b$, siis saame valemi ümarvada maksimaale nihkepinge määramiseks väändel.

Avaldiste (4.175) ja (4.167)₂ põhjal saame määrata väändenurga

$$\vartheta = M_t \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (4.180)$$

Valemis (4.180) esineva väändemomendi kordaja pöördväärtust

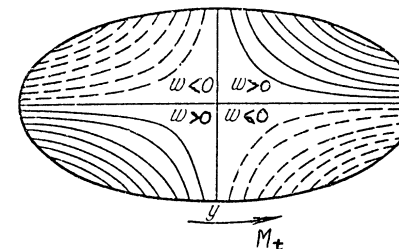
$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{GA^4}{4\pi^2 I_\rho} \quad (4.181)$$

nimetatakse varda väändejäikuseks. Siin $A = \pi ab$ on ristlõike pindala ja $I_\rho = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$ ristlõike polaarinermsimoment.

Siirdekompontentide u ja v leidmiseks tuleb vaid asendada (4.180) avaldistesse (4.156). Kolmanda komponendi w leidmiseks tuleb pingekomponendid (4.177) ja väändenurk (4.180) asendada avaldistesse (4.159), integreerida, avaldada ψ ning (4.157) abil avaldada

$$w = M_t \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (4.182)$$

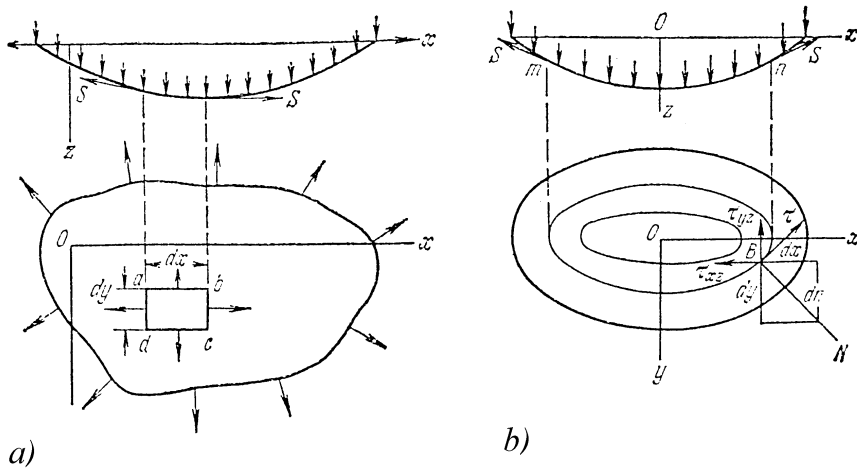
Seega on deformeerunud ristlõike samasiirdejooned $w = const.$ (w isojooned) hüperboolid, mille asümptootideks on ellpsi poolteljed (vt. joonis 4.21).



Joonis 4.21: Samasiirdejooned $w = const.$

4.10.3 Membraanalogia

Väändeülesannete lahendamise puhul on osutunud väga kasulikuks Prantli poolt (1903) sisse toodud membraanalogia. Vaatleme väanatava varda ristlõike kujulist servast toetatatud membraani. Membraani servale on rakendatud ühtlane tõmme ja pinnale ühtlaselt jaotatud rõhk (põikkoormus). Tähistame membraani ühikpinnale mõjuva rõhu q ja serva ühikpikkusele mõjuva tõmbejõu S . Vaatleme membraani väikest elementi $abcd$, täpsemalt öeldes,



Joonis 4.22: Põikkoormusega koormatud ühtlaselt tõmmatud membraan — a); deformeerunud membraani samaläbipainde jooned — b).

tema tasakaalu. Väikeste läbipainete korral on külgedel ad ja bc mõjuva summaarse tõmbejõu projektsioon z -teljel $S(\partial^2 z / \partial x^2) dx dy$ ja ülejäänud kahel küljel $S(\partial^2 z / \partial y^2) dx dy$. Tasakaaluvõrrand omab seega kuju

$$q dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$$

kust saame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S}. \quad (4.183)$$

Võrreldes võrrandit (4.183) ja membraani läbipainde rajatingimusi (membraani läbipaine servas on null) võrrandiga (4.167) ja rajatingimustega (4.168) funktsiooni φ jaoks, jõuame järeldusele, et need kaks ülesannet on langevad kokku. Teisisõnu, selleks et leida diferentsiaalvõrrandi (4.183) abil funktsiooni φ , tuleb (4.183)-s asendada $-q/S$ suurusega $F = -2G\vartheta$ võrrandist (4.167).

Joonisel 4.22 b) on membraani deformeerunud pind kujutatud samaläbipaindejoonte (isojoonte) abil. Vaatleme suvalist punkti B . Kuna teda läbival isojoonel on läbipaine konstantne, siis

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad (4.184)$$

kus s kujutab endast loomulikku koordinaati vaadeldaval isojoonel. Aanloogne võrrand pingefunktsiooni φ jaoks omab kuju

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = \tau_{yz} \frac{dx}{ds} + \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0. \quad (4.185)$$

Viimane väljendab asjaolu, et summaarse nihkepinge projektsioon isojoone normalile on null. Järelikult mõjub summaarne nihkepinge vaadeldavas punktis isojoone puutuja sihis. Selliselt konstrueeritud isojooni (kõveraid) vaadeldaval ristlõikel nimetatakse seetõttu nihkepingete trajektooredeks (analogia punkti kiiruse ja trajektooriga).

Summaarne nihkepinge τ vaadeldavas punktis B saadakse kui projekteeritakse nihkepinged τ_{xz} ja τ_{yz} puutuja sihile —

$$\tau = \tau_{xz} m + \tau_{yz} l. \quad (4.186)$$

Arvestades, et

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad l = \cos(Nx) = \frac{dx}{dn} \quad \text{ja} \quad m = \cos(Ny) = \frac{dy}{dn} \quad (4.187)$$

saame avaldisele (4.186) kuju

$$\tau = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} \right) = - \frac{d\varphi}{dn}. \quad (4.188)$$

Seega on nihkepinge punktis B määratud membraani maksimaalse kaldega vaadeldavas punktis. Järelikult mõjuvad maksimaalsed nihkepinged punktides, kus isojooned paiknevad üksteisele kõige lähemal.

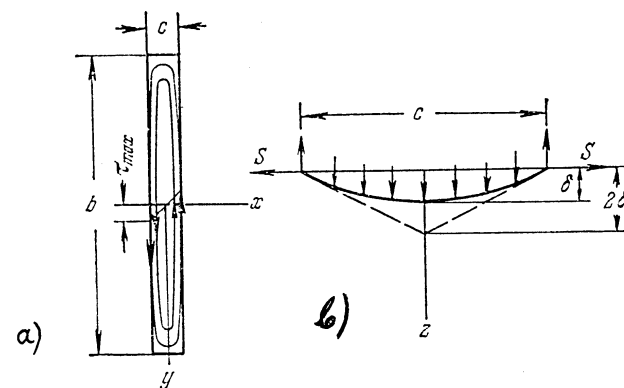
Väändemomendi avaldisest (4.170) saab järeldada, et kahekordne paindunud membraaniga piiratud ruumala on võrdne väändemomendiga (loomulikult eeldusel, et membraani puhul on tehtud asendus $2G\vartheta \rightarrow q/S$).

Eksperimentaalsete uuringute korral kasutatakse membraanina seebikilet. «Katsekehaks» on (tasapinnaline) plaat, kuhu on lõigatud uuritava ristlõike kujuline ava. Kui eesmärgiks on pingete otsene määramine eksperimendist, siis tehakse samasse plaati võrdluseks ka ringikujuline ava. Allutades nüüd mõlemat ava katvad membraanid võrdsele survele¹ saame vajalikud väärtused suhtele q/S , mis vastab suurusele $2G\vartheta$. Viimane on sama mõlema väänatava varda jaoks. Seega, tingimusel, et väändenurk varda pikkusühiku kohta ja nihkeelastsusmoodul G on mõlemal vardal võrdne, saame võrrelda pingeid uuritava ristlõikega vardas pingetega ümarvardas mõõtes kahe seebikile kalded. Tõsi küll, pingekontsentratsioonide lähedal võib seebikile meetod anda ebatäpseid tulemusi. Aljaotuses 4.10.6 refereeritav elektriline analoogia annab siin täpsemaid tulemusi.

¹Katsed näitavad, et mõlemas kiles tekkivad tõmbejõud võib sel juhul lugeda praktiliselt võrdseks.

4.10.4 Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne

Vaatleme varrast, mille ristlõike laius c on väike võrreldes kõrgusega h (joonis 4.23). Antud juhul saame lahendi kasutades membraananalooget järgmisel kujul: hülgame ristküliku lühikeste külgede mõju ja eeldame, et membraani pind on silindriline (läbipainded on seejuures väikesed).



Joonis 4.23: Varda ristlõige ja maksimaalsed nihkepinged — a) ja vastava membraanani läbipaine — b).

Sellisel juhul saab membraani läbipainded määrata niidi mehaanikast tuntud valemi

$$z = \frac{4\delta}{c^2} \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right), \quad (4.189)$$

abil (vt. joonis 4.23 b)). Viimases valemis esinev suurus

$$\delta = \frac{qc^2}{8S} \quad (4.190)$$

määrab läbipainde maksimaalse väärtuse (st. läbipainde kohal $x = 0$). Valem (4.189) on tuntud kui painduva niidi (paraboolsete)

läbipainete valem. Vastavalt läbipainde valemile (4.189) on membraani kalle (parabooli tõus)

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{q}{S}x. \quad (4.191)$$

Parabooli maksimaalne tõus vastab servapunktile ja on

$$\left| \frac{dz}{dx} \right|_{x=\pm c/2} = \frac{qc}{2S}. \quad (4.192)$$

Membraani ja x, y tasandiga piiratud «keha» ruumala

$$V = \frac{2}{3}c\delta b = \frac{qbc^3}{12S}. \quad (4.193)$$

Kasutades membraananalooget ja asendades valemities (4.192) ja (4.193) suuruse q/S suurusega $2G\vartheta$, saame

$$\tau_{\max} = cG\vartheta \quad \text{ja} \quad M_t = \frac{1}{3}bc^3G\vartheta. \quad (4.194)$$

Viimasest omakorda

$$\vartheta = \frac{3M_t}{bc^3G} \quad \text{ja} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{bc^2}. \quad (4.195)$$

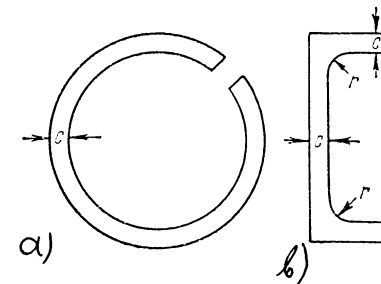
Rakendades membraananalooget valemile (4.191) saame leida nihkepingsed väänatud vardas

$$\tau_{yz} = 2G\vartheta x. \quad (4.196)$$

Leides sellele pingejaotusele vastava väändemomendi

$$M_t^* = 2b \int_0^{c/2} \tau_{yz} x dx = \dots = \frac{bc^2 \tau_{\max}}{6}, \quad (4.197)$$

näeme, et see on 2 korda väiksem kui valemiga (4.194) määratud M_t . Teise poole momendist M_t annavad pinged τ_{xz} , mis on väikesed



Joonis 4.24: Õhukeseseinalised avatud ristlõiked.

võrraldes pingetega τ_{yz} ja omavad maksimaalset väärtust ristõike lühemal küljel. Kuna aga jõu õlg on nende jaoks suur, siis summaarselt annavad nad ikkagi poole väändemomendist M_t .

Valemeid (4.194) ja (4.195) võib kasutada ka näiteks joonisel 4.24 kujutatud õhukeseseinaliste avatud ristlõigete korral. Siin tuleb vaid võtta b võrdseks ristlõike keskjoone pikkusega. Teisisõnu, ristlõige tuleb mõtteliselt sirgestada.

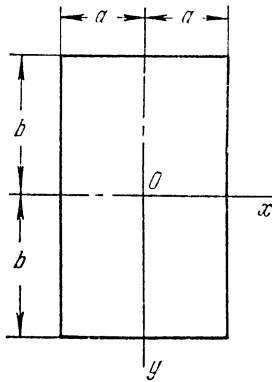
Sellist lähenemist saab kasutada väga erineva kujuga torude (õõnsate varraste) puhul, eeldades, et seina paksus c on väike võrreldes ristlõike diameetriga (kõrgusega, laiussega) ning ristlõige on avatud. Sellisel juhul membraani kalle ja ruumala, mille ta määrab erineb vähe ristkülikulise varda vastavatest suurustest. Tuleb märkida, et joonisel 4.24 b) kujutatud juhul leiab ristlõike nurkades aset märgatav pingete kontsentratsioon.

4.10.5 Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne

Vaatleme ristkülikulise ristlõikega varrast (kõrgus $2b$ ja laius $2a$). Kasutame mebraanaloogiat, st. plaadi ristlõike kujulise membraani läbipained peavad rahuldama võrrandit (4.183):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (4.198)$$

ja olema plaadi servades $x = \pm a$ ja $y = \pm b$ võrdsed nulliga. Kuna läbipained on antud juhul sümmeetrilised nii x kui y telje



Joonis 4.25: Ristkülikulise ristlõike mõõtmed

suhtes, siis on nii (4.198) kui rajatingimused rahuldatud kui anda läbipained ette kujul

$$z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{2a} \right) Y_n, \quad (4.199)$$

kus b_1, b_3, \dots on konstandid ja Y_1, Y_3, \dots funktsioonid, mis sõltuvad vaid muutujast y . Funktsioonide Y_n määramiseks väljendatakse (4.198) parem pool Fourier' reana, st., esitatakse kujul

$$-\frac{q}{S} = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad (4.200)$$

Seejärel rahuldadakse rajatingimused ja sümmetriatingimused ning saadakse

$$Y_n = \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right). \quad (4.201)$$

Asendades saadud funktsioonid (4.201) läbipainde avaldisse (4.199) saame

$$z = \frac{16qa^2}{S\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (4.202)$$

Asendades nüüd suuruse q/S suurusega $2G\vartheta$ saame esitada pingefunktsiooni kujul

$$\varphi = \frac{32G\vartheta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a}. \quad (4.203)$$

Pingekomponentide τ_{xz} ja τ_{yz} määramiseks tuleb nüüd diferentseerida avaldist (4.203)

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{16G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{2a}. \quad (4.204)$$

Kuna järgnevalt oleme huvitatud vaid maksimaalsest nihkepingest, siis τ_{xz} avaldist siin ei esita². Eeldades, et $b > a$ saame, et maksimaalne nihkepinge mõjub pikemate külgede $x = \pm a$ keskpunktides (see vastab membraani läbipainde maksimaalsele kaldele). Pannes $x = a$ ja $y = 0$ ja arvestades, et $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$, saame

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta a - \frac{16G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi b}{2a}}. \quad (4.205)$$

² x ja y telje valik on nagunii meelevaldne ja samuti tähistus a ja b

Kui $b > a$, siis koondub (4.205) paremal pool olev lõpmatu rida väga kiiresti ja τ_{\max} määramine fikseeritud suhte b/a puhul ei valmistata raskusi. Näiteks väga kitsa ristlõike puhul on suhe b/a väga suur ja lõpmatu rea avaldise (4.205) paremal poolel võib hüljata. Tulemuseks saame

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta a, \quad (4.206)$$

mis on kooskõlas alajaotuses 4.10.4 esitatud valemiga (4.196) või (4.194) ($c = 2a$). Ruudukujulise ristlõike puhul $a = b$ ja

$$\tau_{\max} = 1,351G\vartheta a. \quad (4.207)$$

Üldjuhul esitatakse maksimaalne nihkepinge kujul

$$\tau_{\max} = 2Gk\vartheta a, \quad (4.208)$$

kus kordaja k väärtus sõltub suhtest b/a (vt. tabel 4.1).

Tabel 4.1: Suhte b/a ja konstantide k , k_1 ja k_2 vaheline seos (Timošenko ja Goodieri põhjal).

a/b	k	k_1	k_2	a/b	k	k_1	k_2
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,312
2,5	0,968	0,249	0,258	∞	1,000	0,333	0,333

Et leida väändemomendi M_t ja väändenurga ϑ vahelist seost, tuleb leida integraal (vt. (4.170))

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi dx dy. \quad (4.209)$$

On ilmne, et ka see integraal avaldub lõpmatu rea kujul. Analoogselt nihkepingega, koondub ka see rida $b > a$ puhul ning tuues sisse suhtest b/a sõltuvad kordajad k_1 ja k_2 saame väändemomendi M_t ja väändenurga ϑ vahelise sõltuvuse kujul

$$M_t = k_1 G \vartheta (2a)^3 2b \quad (4.210)$$

ja maksimaalse nihkepinge ning väändemomendi vahelise seose

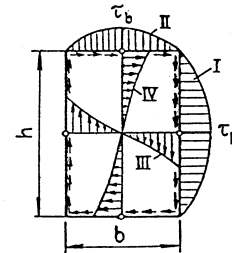
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2 (2a)^2 2b}. \quad (4.211)$$

Tugevusõpetuse kursusest on tuttavad valemid

$$\tau_h = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad W_t = k_h h b^2, \quad \tau_b = k_b \tau_h$$

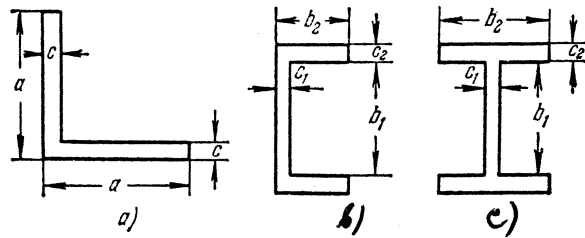
ja tabel 4.2 koos vastava joonisega, mis on kooskõlas esitatud lahendusega.

Tabel 4.2: Suhte h/b ja konstantide k_h ja k_b vaheline seos ning maksimaalsed nihkepinged (Metsaveere ja Raukase põhjal).



h/b	1	1,2	1,5	2	3	5	10	∞
k_h	0,208	0,219	0,231	0,246	0,267	0,291	0,312	0,333
k_b	1,00	0,93	0,86	0,79	0,75	0,74	0,74	0,74

4.10.6 Valtsmetallist talade vääne



Joonis 4.26: Kolm erinevat valtsmetallist tala ristlõiget: a) — «nurkraud»; b) — «karpraud»; c) «I-raud».

Vaatleme nn. nurkprofiilist, karpprofiilist ja I-profiilist talade vääned (joonis 4.26). Rakendame alajaotuses 4.10.4 saadud tulemusi kitsa ristkülikulise tala jaoks, st. valemeid

$$\vartheta = \frac{3M_t}{bc^3G} \quad \text{ja} \quad \tau_{\max} = \frac{3M_t}{bc^2}, \quad (4.212)$$

kus b tähistab ristküliku kõrgust ja c laiust.

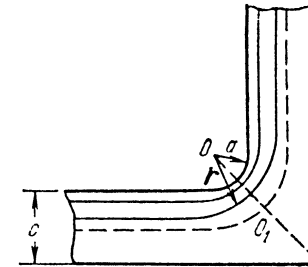
Nurkprofiili puhul tuleb valemis (4.212) võtta $b = 2a - c$. Karpprofiili ja I-profiili puhul tuleb ristlõige lahutada kolmeks ristkülikuks ning eeldada, et vaadeldava ristlõike väändejäikus võrdub ristkülikute väändejäikuste summaga, st. (4.212)₁ tuleb suurus bc^3 asendada suurusega $b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3$. Seega antud juhul väändenurk

$$\vartheta = \frac{3M_t}{(b_1c_1^3 + 2b_2c_2^3)G}. \quad (4.213)$$

Ristlõike servas mõjuvate maksimaalsete nihkepingete määramiseks (hindamiseks) kasutatakse valemit (4.194)₁, st. valemit $\tau = c\vartheta G$. Seega näiteks I-tala vöös mõjuva nihkepinge hindamiseks saab ka-

sutada valemit³

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3}. \quad (4.214)$$



Joonis 4.27: Pingete kontsentratsioon nurkprofiili korral.

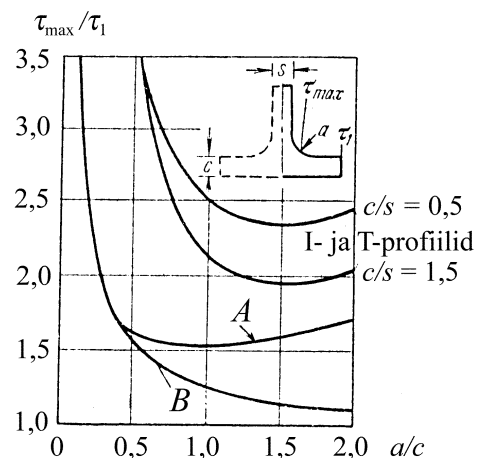
Vaadeldavate ristlõigete nurkades ilmneb oluline pingete kontsentratsioon. Vaatleme näitena nurkprofiili seinapaksusega c (joonis 4.27). Tähistame ümardatud sisenurga raadiuse a . Kasutades membraanalogiat saame nurgas mõjuva maksimaalse nihkepinge jaoks hinnangu

$$\tau_{\max} = \tau_1 \left(\frac{c}{4a} \right), \quad (4.215)$$

kus τ_1 tähistab seinas mõjuvat nihkepinget. Näiteks $a = 0,5c$ puhul $\tau_{\max} = 1,5\tau_1$ ja $a = 0,1c$ puhul $\tau_{\max} = 3,5\tau_1$.

Joonis (4.28) esitab pingete kontsentratsiooni iseloomustava suhte τ_{\max}/τ_1 sõltuvana kõverusraadiuse ja seina paksuse suhtest a/c . Siin vastavad alumised kõverad nurkprofiilile. Kõver A on saadud numbriliselt kasutades lõplike vahede meetodit ja esitab täpsemaid tulemusi kui kõver B , mis vastab valemile (4.215). Samal ajal on selge, et $a/c < 0,3$ korral annab valem (4.215) täpse tulemuse. Ülemised kaks kõverat iseloomustavad pingete kontsentratsiooni I- ja T-profiilides kahe erineva seina ja vöö paksuste suhte c/s jaoks.

³Meenutame, et valemid kitsa ristkülikulise ristlõike jaoks saadi eeldusel, et membraan oli kitsamast otsast lahti, järelikult $\tau = const$ piki pikemat külge.



Joonis 4.28: Suhe τ_{\max}/τ_1 sõltuvana suhtest a/c .

Viimased tulemused on saadud eksperimentidest, kus pingefunktsiooni φ analoogiks on elektriline potentsiaal V konstantse voolutiheduse i puhul. Vastav võrrand omab kuju

$$\nabla^2 V = -\rho i, \quad (4.216)$$

kus ρ on plaadi takistus (konstantne). Katse käigus hoitakse plaadi servas konstantset potentsiaali. Sellisel juhul on meil jällegi täielik analoogia võrranditega (4.167) ja rajatingimustega (4.168). Rakendades viimati käsitletud analoogiat nurkprofiilile, saadakse joonise 4.28 kõver A .

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Kirjandus	4
1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandeist.	6
1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid	6
1.2.2 Skalaar, vektor, tensor	9
1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid	11
1.2.4 Liikumise kirjeldamine	12
1.2.5 Deformatsioon ja siire	13
1.2.6 Kiirus ja kiirendus	23
1.2.7 Mass	26
1.2.8 Jõud	27
1.2.9 Liikumishulk	29
1.2.10 Kineetiline moment	30
1.2.11 Pinge	31
1.2.12 Pingetensor	33

1.2.13	Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused	35
1.2.14	Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides	36
1.2.15	Energia ja entroopia	38
1.2.16	Pidevustingimused ehk sobivustingimused	44
1.2.17	Olekuvõrrandid	45
1.3	Elastusteooria põhivõrrandite süsteem	48
2	Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast	51
2.1	Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon	51
2.1.1	Põhiseosed	51
2.1.2	Puhas homogeenne deformatsioon	53
2.1.3	Tõmme	55
2.1.4	Hüdrostaatiline surve	56
2.1.5	Nihe	56
2.2	Ringsilindri vääne	60
2.3	Ploki paine	65
2.4	Lõplik tasapinnaline deformatsioon	71
2.5	Elastsuskonstantide eksperimentaalne määramine	78
2.5.1	Sissejuhatus	78
2.5.2	Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine)	80
2.5.3	Puhas nihe	83
2.5.4	Tõmme	84
2.5.5	Ühtlane kahedimensionaalne tõmme	85

3	Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast	88
3.1	Põhivõrrandid	88
3.2	Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga	93
3.3	Sobivustingimused ehk pidevustingimused pingetes	96
3.4	Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas	98
3.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste analüütiliste funktsioonide abil	101
3.6	Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul	104
3.7	Pingete kontsentratsioon ühtlaselt pingestatud plaadis oleva elliptilise augu ümber	110
3.8	Lainelevi elastses keskkonnas	115
3.8.1	Põhivõrrandid	115
3.8.2	Tasapinnalised harmoonilised lained	118
3.8.3	Rayleigh' lained	122
4	Valik klassikalisi inseneriprobleeme	126
4.1	Sissejuhatus	126
4.2	Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides	132
4.3	Saint-Venant'i printsiip	137
4.4	Konsooli paine	138
4.5	Ühtlaselt koormatud tala paine	143
4.6	Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool	148
4.7	Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides	149
4.7.1	Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon	149

4.7.2	Kõvera tala paine	151
4.7.3	Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides	152
4.7.4	Pöörlev ketas	153
4.8	Ruumilised ülesanded	155
4.8.1	Varda tõmme omakaalu mõjul	155
4.8.2	Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne .	157
4.8.3	Prismaatiliste varraste puhas paine	159
4.8.4	Paadi puhas paine	161
4.9	Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades	163
4.9.1	Üldvõrrandid	163
4.9.2	Ümarplaadi paine	167
4.10	Vääne	170
4.10.1	Sirgete varraste vääne	170
4.10.2	Elliptiline ristlõige	174
4.10.3	Membraananaloogia	177
4.10.4	Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne	180
4.10.5	Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne . . .	183
4.10.6	Valtsmetallist talade vääne	187

Sisukord

Eessõna	1
1 Sissejuhatus	3
1.1 Kirjandus	4
1.2 Ülevaade pideva keskkonna mehaanika põhimõistetest, -hüpoteesidest ja -võrrandeist.	6
1.2.1 Põhieeldused ja -hüpoteesid	6
1.2.2 Skalaar, vektor, tensor	9
1.2.3 Baasivektorid ja meetrilised tensorid	11
1.2.4 Liikumise kirjeldamine	12
1.2.5 Deformatsioon ja siire	13
1.2.6 Kiirus ja kiirendus	23
1.2.7 Mass	26
1.2.8 Jõud	27
1.2.9 Liikumishulk	29
1.2.10 Kineetiline moment	30
1.2.11 Pinge	31
1.2.12 Pingetensor	33

1.2.13	Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused — Cauchy liikumisseadused	35
1.2.14	Liikumisvõrrandid Lagrange'i koordinaatides	36
1.2.15	Energia ja entroopia	38
1.2.16	Pidevustingimused ehk sobivustingimused .	44
1.2.17	Olekuvõrrandid	45
1.3	Elastusteooria põhivõrrandite süsteem	48
2	Valik teemasid mittelineaarsest elastsusteooriast	51
2.1	Homogeenne ehk ühtlane deformatsioon	51
2.1.1	Põhiseosed	51
2.1.2	Puhas homogeenne deformatsioon	53
2.1.3	Tõmme	55
2.1.4	Hüdrostaatiline surve	56
2.1.5	Nihe	56
2.2	Ringsilindri vääne	60
2.3	Ploki paine	65
2.4	Lõplik tasapinnaline deformatsioon	71
2.5	Elastuskonstantide eksperimentaalne määramine .	78
2.5.1	Sissejuhatus	78
2.5.2	Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine) . .	80
2.5.3	Puhas nihe	83
2.5.4	Tõmme	84
2.5.5	Ühtlane kahedimensionaalne tõmme	85

3	Valik teemasid lineaarsest elastsusteooriast	88
3.1	Põhivõrrandid	88
3.2	Lamé koefitsentide seos Youngi mooduli ja Poisson'i teguriga	93
3.3	Sobivustingimused pingetes	96
3.4	Tasand-deformatsioon ja tasandpinge elastostaatikas	98
3.5	Biharmoonilise võrrandi lahendamine analüütiliste . . .	101
3.6	Pingete jaotus ja siirdeväljad tasand-deformatsiooni puhul	104
3.7	Pingete kontsentratsioon . . . elliptilise augu ümber .	110
3.8	Lainelevi elastses keskkonnas	115
3.8.1	Põhivõrrandid	115
3.8.2	Tasapinnalised harmoonilised lained	118
3.8.3	Rayleigh' lained	122
4	Valik klassikalisi inseneriprobleeme	126
4.1	Sissejuhatus	126
4.2	Biharmoonilise võrrandi lahendamine polünoomides	132
4.3	Saint-Venant'i printsiip	137
4.4	Konsooli paine	138
4.5	Ühtlaselt koormatud tala paine	143
4.6	Hüdrostaatiliselt koormatud vertikaalne konsool . .	147
4.7	Tasapinnalised ülesanded polaarkoordinaatides . . .	148
4.7.1	Tasakaaluvõrrandid ja Airy' pingefunktsioon	148
4.7.2	Kõvera tala paine	150

4.7.3	Deformatsioonikomponendid polaarkoordinaatides	151
4.7.4	Pöörlev ketas	152
4.8	Ruumilised ülesanded	154
4.8.1	Varda tõmme omakaalu mõjul	154
4.8.2	Konstantse ristlõikega ümarvarraste vääne .	156
4.8.3	Prismaatiliste varraste puhas paine	158
4.8.4	Paadi puhas paine	160
4.9	Telgsümmeetrilised pinged ja deformatsioonid pöördkehades	162
4.9.1	Üldvõrrandid	162
4.9.2	Ümarplaadi paine	166
4.10	Vääne	169
4.10.1	Sirgete varraste vääne	169
4.10.2	Elliptiline ristlõige	173
4.10.3	Membraananaloogia	176
4.10.4	Kitsa ristküliku kujulise ristlõikega varda vääne	179
4.10.5	Ristkülikulise ristlõikega varraste vääne . . .	182
4.10.6	Valtsmetallist talade vääne	186